

## MAKSİMUM BİLGİ İÇİN OPTİMAL ÖRNEKLEM BÜYÜKLÜĞÜNÜN TASARIMI

Prof. Dr. Necla ÇÖMLEKÇİ\*

Yeni bilgi genellikle verilerin özenli çözümlenmesi ve yorumlanmasıyla elde edilmekle beraber, maksimum bilginin mümkün olan en düşük maliyetle sağlanabilmesi için önemli bir çabanın harcanması gerekir. Bir araştırmada elde edilen bilginin miktarı, istatistiksel bilgilerin toplanmasıyla ilgili tasarıma göre değişir. Ancak araştırmayla ilgili veri toplama yöntemi önceden belirlenmiş olabilir. Böyle bir durumda veri toplamaya başlamadan önce cevaplandırılması gereken soru, örneklem büyüklüğünün nasıl belirleneceğidir. Örneklem hacmi, doğal olarak örneklem sonuçlarından hangi amaçla faydalanılacağına bağlıdır. Söz konusu amaçta göre örneklem büyüklüğünün belirlenebilmesi için gerekli olan bilgi, dolayısıyla benimsenecek yöntem farklı olacaktır. Bu makalede önce optimal örneklem büyüklüğünün tasarım yöntemleri açıklanacak, daha sonra istatistiksel testlerin kullanımıyla ilgili bazı düşüncelere yer verilecektir.

### 1. Giriş

Hakkında bilgi edinilmek istenen sonlu bir ana kütle için mevcut fazla ise, tam sayım yoluyla veri toplama fazla zaman alıcı veya masraflı olduğundan, uygun bir bilgi edinme yöntemi sayılmaz. Bu bakımdan büyük sonlu kütlelerle ilgili araştırmalarda örneklemeden faydalanılır. Sözü edilen nitelikteki ana kütleler için bilgi edinmede örnekleme başvurmanın önemli nedenleri vardır.

---

(\*) Anadolu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Öğretim Üyesi.

Herşeyden önce bir tam sayımdakine göre örneklemeyle bilgi tam zamanında sağlanmaktadır; örnekleme yapıldığında, bilindiği gibi oldukça az sayıda verinin toplanılması ve işlenilmesi sözkonusudur. Bilgiye hemen gereksinim duyuluyorsa, örnekleme özellikle anlam kazanır. Diğer taraftan örneklemeyle elde edilen verilerin genellikle tam sayımla elde edilenler kadar, hatta bazen daha fazla güvenilir bilgi sağlaması mümkündür. Ölçme yanılığarı, az sayıda verinin gözönünde tutulduğu örneklemede çok daha etkin bir biçimde kontrol edilebilir; örnekleme uygulandığında, tam sayımdakine göre daha az sayıda görevlinin daha iyi eğitilmesi ve denetlenmesi mümkün olur. Ayrıca ayrıntılı bilgi elde etmek veya kişilerin güdüleri ile tutumlarını enine-boyuna incelemek için örnekleme uygulandığında, tam sayımdakine göre daha fazla zaman ayrılabilir. Daha fazla, daha ayrıntılı bilgi elde etmenin kişi başına maliyeti yüksek olabileceği için, örnekleme yoluyla ayrıntılı bilgi tam sayıma göre daha düşük maliyetle sağlanır. Örnekleme, tam sayımdakine göre daha güvenilir ve faydalı bilgiyi genellikle daha düşük maliyetle sağlar.

## 2. Örneklemede Elde Edilen Bilginin Miktarı

Bir araştırmanın değerlendirilmesinde çalışmanın yeni bilgi elde edilmesini sağlayacak «iyi hipotezler» içerip içermediği uygulanabilmesi mümkün çeşitli örnekleme yöntemleriyle elde edilen bilgi miktarı gözönünde tutulur.

Bir araştırmanın «iyi hipotezler» içermesi için araştırmacının test edilmeğe değer nitelikte çeşitli etmenleri ve bunların ölçülebilmesi için gerekli teknikleri düşünüp belirlemiş olması gerekir. Ancak istatistik kuramında, araştırmanın bu değerine bir ölçü atfedecek bir yöntem belirlenmesi mümkün olmamıştır.

Oysa uygulanması sözkonusu olan çeşitli örnekleme yöntemlerinden elde edilecek bilgi miktarı için bir ölçü vermek mümkündür. Yürütülen bir örneklemede sadece bir tek ana kütle parametresinin tahmin edilmek istendiği düşünölsün. Ana kütle parametresi için sağladıkları bilginin, ayrı ayrı seçilen iki örneklemin içerdiği bilgi toplamına eşit olması durumunda, bilgi miktarıyla ilgili ölçünün gerektirdiği tek koşul sağlanmış olacaktır. Bu durum, bilginin örnekleme büyüklüğüyle doğrudan orantılı olduğunu açıklamaktadır. Bilgi miktarının genellikle benimsenen ölçüsü R.A. Fisher

tarafından teklif edilmiştir. Fisher bilgi miktarını matematiksel olarak tanımlamaktadır;  $f(x, \theta)$  dağılımı için  $\theta$  parametresinin tahmininin sözkonusu olduğu düşünüldüğünde,  $n$  birimlik bir örneklemdeki bilgi miktarı

$$nI = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial \log f}{\partial \theta} \right)^2 f \cdot dx$$

kadar olacaktır. Ana kütle normal dağılmışsa ve  $\mu$  ortalaması tahmin ediliyorsa,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

olacaktır. Buradan

$$\log f = \frac{1}{2} \log(2\pi) - \log \sigma - \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial \log f}{\partial \mu} = \frac{x-\mu}{\sigma^2}$$

ve böylece

$$\begin{aligned} nI &= n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^4} \cdot \frac{1}{\sqrt{1\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx \\ &= \frac{n}{\sigma^2} \end{aligned}$$

olur.

Anlaşılabacağı gibi her gözlem için sözkonusu olan bilgi miktarı  $1/\sigma^2$  olur. Bir örneklem istatistiğinin olasılık dağılımı normal ise, örneklem istatistiğinin varyansının tersi, örneklem istatistiğinin sağladığı bilginin bir ölçüsü olarak kullanılır. Bu bilgi ölçüsü gereken özelliği taşıdığı için akla uygun bir ölçü niteliğindedir. Bilindiği gibi  $n_1$  birimlik bir örneklem ortalamasının varyansı  $\sigma^2/n_1$ ,  $n_2$  birimlik bir başka örneklemdeki de  $\sigma^2/n_2$  dir; birleştirilmiş örneklem ortalamasının varyansı  $\sigma^2/n_1 + n_2$  dir.

### 3. Örneklem Büyüklüğünün Tasarımına Duyulan Gereksinim

Bir örnekleme dayanarak ana kütle parametresi için yapılan aralık tahmini kullanan araştırmacı çoğu zaman tahmin için gerekli duyarlılığı ve güven aralığını önceden belirlemek isteyecektir; amaçlanan güven düzeyi ile duyarlılığı sağlayacak uygun örneklem büyüklüğünün belirlenmesi genellikle mümkündür.

Büyüklüğü keyfi olarak belirlenmiş bir örnekleme kullanmak yerine, içereceği birim sayısı tasarlanmış bir örneklemin kullanılması genellikle akla daha uygundur. Keyfi bir örneklem büyüklüğü kullanıldığında, güven aralığı gereksinim duyulandan çok daha dar olabilir; bu durum, örneklem büyüklüğünün gereğinden büyük olduğunu açıklar. Bazen de güven aralığı fazla geniştir, örneklem büyüklüğü yetersiz kalmıştır. Anlaşılacağı gibi gereğinden büyük bir örneklem oluşturulduğunda, arzu edilen duyarlıktan daha büyüğü elde edilerek para israfına neden olunacaktır. Aksine, olması gerekenden daha küçük bir örneklem çekilmişse, örnekleme sonradan büyütme ya çok masraflı, ya da imkânsızdır.

Örneklem verilerine dayanarak ana kütle parametrelerinin test edilmesi de pek çok araştırmada sözkonusu olabilir. Bilindiği gibi mümkün her örneklem sonucu için seçilmesi sözkonusu olan iki şıktan birini belirleyen istatistiksel karar kuralının doğasında yanlış karar verme riskleri vardır. Bir hipotez testinde sıfır hipotezini veya alternatifini benimserken, her iki tipteki çıkarsama hatalarıyla ilgili risklerin katlanabilir düzeyde olması önemlidir. Gerçi örneklem verilerine dayandırılmış kararlarda bazı risklerin kabullenilmesi zorunludur, ancak bunların büyüklüğünün denetim altına alınabilmesi gerekir.

Kabul edilebilecek risklerin büyüklüğü, doğal olarak birinci ve ikinci tip hataların ciddiyetine bağlıdır. Hava kirliliği çalışmalarında, hayati tehlike söz konusu olduğu halde belirli ortalamaların normal düzeyde kaldığına karar verilirse, çok ciddi bir hata işlenmiş olur; bu durumda riskin ( $\beta$ ) küçük tutulması gerekir. Buna karşın hayati tehlike sözkonusu olmadığı halde tehlikenin varlığı konusunda karar vermenin riski ( $\alpha$ ) daha az önemlidir.

Diğer taraftan birinci veya ikinci tip hatanın ciddiyeti genellikle ana kütle parametresinin değerine bağlı olarak değişmektedir. Ana kütle parametresi anlamlı bir artış (veya azalış) göstermesine karşın değişmediği kararlaştırılırsa, ciddi bir ikinci tip hata

işlenmiş olur. Ana kütle parametresinin değişen değeri eskisine göre çok az farklı olduğu zaman, farketmediği konusunda verilen kararlar önemli olmayan ikinci tip hata yapılmış olur. Araştırmada örneklem büyüklüğünün önceden saptanmamış olması ve istenilen büyüklükte oluşturulabileceği durumlarda  $\alpha$  ve  $\beta$  risklerinin aynı anda denetim altına alınması sözkonusudur.

#### 4. Örneklem Büyüklüğünün Tasarımı İçin Önçalışmalar

##### 4.1. Benimsenecek Varsayımlar

Araştırmacının parametre tahminlerinde veya istatistiksel testlerde örnekleme dağılımının elde edilmesinde olasılık kuramından faydalanabilmesi için hakkında genellemede bulunacağı ana kütle ve örnekleme işlemleri için belirli varsayımlar yapması zorunludur. Optimal örneklem büyüklüğünün tasarımıyla ilgili olarak örneklemin basit tesadüfi esasa göre oluşturulacağı varsayılacaktır.

Diğer taraftan tasarlanan örneklemin yeterince büyük olduğu varsayılacaktır. «Büyük örneklem» kavramı bilindiği gibi inceleme konusu olan örneklem istatistiğinin örnekleme dağılımıyla ilgilidir. Büyük-örnekleme kuramı, ana kütle normal dağılım göstermesi veya örneklem büyüklüğünün merkezî limit teoreminin etkili olabileceği büyüklüğe sahip olması nedeniyle örneklem istatistiğinin olasılık dağılımının normal veya normale yakın olması durumlarını inceler. Anlaşılacağı gibi bir örneklemin «büyük» sayılabilmesi, belirli koşulların varlığını gerektirir. Örneklem aritmetik ortalaması sözkonusu ise,  $n > 30$  durumunda örneklem büyüktür. İlgilenilen örneklem istatistiği herhangi bir kartil ise, ana kütle normalde yakın olması şartıyla  $n > 30$  ise, örneklem büyük sayılır. Örneklem oranı  $p = 0,50$  ise, 30 birimden daha fazlasını içeren örneklem büyük örneklem olarak kabul edilmekle beraber, elliden daha az veri içeren yığınlar için oran hesaplanmasının uygun olmadığı kanısındayız. Örneklem için hesaplanan oranın 0,05 veya 0,95 değerlerine yakın olmasıyla ancak 1400 birimlik örneklem büyük olarak kabul edilebilir. Örneklem varyansı veya standart sapmasının söz konusu olduğu durumlarda merkezî limit teoreminin uygulanabilmesi için örneklemin 100 veya daha fazla birim içermesi gerekir.

Optimal örneklem büyüklüğünün tasarımıyla ilgili olarak yapılan bir diğer varsayım, ana kütle sonlu olmayan bir kütle ola-

rak kabul edilmesidir. Gerçekte ana kütle sonlu bir kütle olduğu bilinse bile, sonlu olmayan bir kütle olduğu varsayılacaktır.

#### 4.2. $\sigma$ Kantitesinin Tasarımı

Örnekleme sonucu elde edilen verilerden hangi amaç için faydalanılırsa faydalanılsın,  $\sigma$  kantitesinin tasarımı zorunludur. Ana kütle standart sapmasının bilinmemesi durumunda, veri toplama- dan önce  $\sigma$  değerinin belirlenmesi önem kazanır. Sözü edilen değışkenlik ölçüsü hakkında bilgi, araştırma konusu olan veya benzeri problemin çözümü için geçmişte yapılmış çalışmalardan veya hemen girişilecek bir pilot-araştırmadan elde edilir genellikle; araştırma yapılan alandaki uzmanların bilgisinden faydalandığı da olur. Pilot-araştırma pahalıya mal olabileceğinden, diğer tasarım yöntemlerine daha sıkça başvurulur. Doğal olarak, optimal örneklem büyüklüğünün tasarımında kullanılacak  $\sigma$  değerinin tam olarak hesaplamak (gerçek değerini belirlemek) en uygun davranıştır; ancak  $\sigma$  gerçek değeri hesaplanabildiği takdirde, örneklem oluşturmak için büyük bir olasılıkla neden kalmayabilir.

Optimal örneklem büyüklüğünün tasarımında ana kütle standart sapması için gerekli tahmin çeşidi, örneklem verilerinin kullanılarak yapılan tahminden bütünüyle farklıdır;  $\sigma$  kantitesinin  $\hat{s}$  yardımıyla tahmini değildir üzerinde durulan konu. Bu bakımdan optimal örneklem büyüklüğü belirlenip üzerinde çalışılacak örneklem oluşturulduktan sonra, anakütle parametrelerinin tahminlerinde veya istatistiksel testlerde ana kütle standart sapması ( $\sigma$ ) için «tasarlanmış» değer değil, onun kestirimi olan örneklem standart sapması  $\hat{s}$  kullanılır.

#### 5. Aralık Tahmin İçin Optimal Örneklem Büyüklüğünün Belirlenmesi

Ana kütle parametresinin aralık tahmininde tahmin hatası, güven düzeyi ve örneklem büyüklüğü arasında çok sıkı bir ilişki söz konusudur. Tahminin hatası, tahmini yapılan ana kütle parametresi ile tahmini arasındaki fark olarak tanımlanır:  $\delta = \hat{\theta} - \theta$ . Söz konusu hata, güven katsayısı ile örneklem istatistiğinin standart hatası çarpımından  $(1-\alpha)$  olasılıkla daha büyük olamaz:  $\delta < z_{\alpha/2} \hat{\sigma} \theta$ . Tahmin hatasının  $z_{\alpha/2} \hat{\sigma} \theta$  değerine eşit veya daha büyük olması ola-

sılığı, tahmindeki risk olarak kabul edilir; bu risk, güven aralığının tahmin edilen anakütle parametresini içermemesi olasılığıdır. Örneklem büyüklüğü sabit kalmak şartıyla güven aralığının daralması oranında güven düzeyinin düşük olacağı açıktır. Güven katsayısı büyüdükçe tahmin daha az duyarlı, dolayısıyla da tahmin hatası daha büyük olacaktır.

Aralık tahminden faydalanacak olan kişinin amacı tahmin hatasının küçük, güven düzeyinin yüksek olmasını sağlamak ise örnekleme birim sayısının artırılması gerekir. Önceden benimsenen kesinlik ve güvenin sağlanabilmesi için gerekli olan minimum örneklem büyüklüğü, tahmin hatası ile tahmindeki risk arasındaki ilişkiden faydalanılarak belirlenebilir. Bu amaçla tahminin hatası maksimum hataya eşitlenir:

$$z_{\alpha/2} \sigma / n = \delta$$

n için çözüm yapıldığında,

$$n = \frac{(z_{\alpha/2})^2 \sigma^2}{\delta^2}$$

eşitliği elde edilir. Optimal örneklem büyüklüğünü veren yukarıdaki formülde  $z_{\alpha/2}$  değeri arzulan güven derecesine bağlıdır;  $\delta$  simgesi arzu edilen güven aralığının yarısı,  $\sigma$  simgesi de ana kütle standart sapmasının daha önce açıklanan biçimde tasarlanan değeridir.

Optimal örneklem büyüklüğü tasarlanıp örneklem oluşturulduktan sonra aralık tahmin yaparken örneklem standart sapması  $\hat{s}$  benimsenir;  $\sigma$  için tasarlanan değer güven aralığı belirlenmesinde kullanılmaz. Ana kütle standart sapması için tasarlanan değer gerçek değere yakın olması durumunda optimal örneklem yardımıyla, yarısı  $\delta$  değerindeki %  $(1-\alpha)$  güven aralığının oluşturulması mümkün olur.

## 6. Hipotez Testinde Optimal Örneklem Büyüklüğünün Tasarımı

### 6.1. Gereksinim Duyulan Bilgi Miktarı

Örnekleme yapan araştırmacının amacı genellikle bir ana kütle parametresinin değişip değişmediğini saptamaktır. Bazen araştı-

rıcı ana kütle parametresinin belirli bir varsayılan değerden anlamlı bir biçimde daha küçük veya daha büyük olduğunun belirlenmesiyle ilgilidir. Sözü edilen bu konuların aydınlatılabilmesi için  $\theta = \theta_0$  hipotezinin uygun alternatif hipotezlere karşı test edilmesi gerekir. İki-eylemli test problemlerinde aşağıda belirtilen dört sonuçtan birinin gerçekleşmesi sözkonusudur:

- (a) Doğru olan  $H_0$  red edilebilir; bu yanlış kararın riski (olasılığı)  $\alpha$ 'dır.
- (b) Doğru olan  $H_0$  kabul edilebilir; bu doğru kararın olasılığı  $(1-\alpha)$  kadardır.
- (c) Yanlış olan  $H_0$  kabul edilebilir; bu yanlış kararın riski (olasılığı)  $\beta$ 'dir.
- (d) Yanlış olan  $H_0$  red edilebilir; bu doğru kararın olasılığı  $(1-\beta)$  kadardır.

Hipotez testi genellikle büyüklüğü önceden belirlenmiş bir örnekleme ve birleşik alternatif hipotezle yürütülür. Böyle bir durumda sadece  $\alpha$  riski belirlenir,  $\beta$  riskinin denetlenmesi sözkonusu değildir. Bir araştırmada ilgi konusu ana kütle parametresinin bir veya daha fazla sayıdaki parametresinin değeriyle ilgili bir hipotezin testi, örneklemden elde edilen bilginin yardımıyla gerçekleştirilecektir. Bir araştırmada elde edilen bilginin miktarı, örneklem seçme yöntemine göre değişir. Örneklem yöntemi belirlenmiş ve değiştirilmesi de mümkün değilse, belirli bir güvenlikle karar verebilmek için gerekli olan örneklem büyüklüğü tasarlanabilir. Örneklem büyüklüğünün belirlenebilmesi, araştırmacının sahip olmak istediği bilgi miktarına bağlıdır. Araştırmacı  $\alpha$  ve  $\beta$  risklerinin değerleri yanı sıra ortaya koymak istediği ana kütle parametresinin varsayılan değerden olan sapmasının büyüklüğünü belirleyerek, bunları sağlayacak örneklem büyüklüğünü tasarlayabilecektir. Anlaşılacağı gibi örneklem büyüklüğünün belirlenebilmesi için aşağıdaki değerlerin bilinmesi gerekir:

- (a)  $\sigma$  değeri
- (b)  $\delta$  değeri
- (c)  $\beta$  değeri
- (d)  $\alpha$  değeri
- (e) Testin tek veya çift yönlü olması.



$\beta$  riskinin değeri, örneklem istatistiğinin ( $\hat{\theta}$ ) olasılık dağılımı tam olarak belirlendiğinde hesaplanabilir; bunun sağlanabilmesi için alternatif hipotezin basit hipotez olması, yani alternatif hipotezdeki parametreye kesin bir değer atanması gerekir:  $\beta$  riskinin belirlenebilmesi  $H_0: \theta = \theta_0$  hipotezinin  $H_1: \theta = \theta_1$  hipotezine karşı test edilmesini gerektirir. Optimal örneklem büyüklüğünün belirlenebilmesi için araştırma öncesi  $\alpha$  ve  $\beta$  risklerinin değerleri, ortaya konulmak istenen sapmanın büyüklüğü, dolayısıyla  $\theta_0$  ve  $\theta_1$  değerleri bilinmektedir. Diğer taraftan bilinmesi zorunlu olan  $\sigma$  değerinin tasarımı yolları açıklanmıştır. Yapılacak hipotez testinin kaç yanlı ve hangi yönlü olacağına ise araştırmanın amacına göre belirleneceği açıktır. İzleyen paragraflarda  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\sigma$ ,  $\theta_0$ ,  $\theta_1$  değerlerinin belirlenmiş değerler,  $\theta = \theta_0$  ve  $\theta = \theta_1$  olasılık dağılımlarında değişkenliğin aynı olduğu kabul edilerek çeşitli hipotez testlerinde optimal örneklem büyüklüğünün tasarımı açıklanmağa çalışılacaktır.

## 6.2. Tek Yanlı Hipotez Testi İçin Optimal Örneklem Büyüklüğünün Tasarımı

### 6.2.1. Üst-Uç Testi

$H_0: \theta = \theta_0$  hipotezi  $H_1: \theta = \theta_1$  alternatif hipotezine karşı  $\theta_1 = \theta_0 + K, K > 0$ ) test edilecekse,  $\alpha$  riskinin kontrol altına alındığı olasılık dağılımının  $\theta = \theta_0$  olduğu gözönünde tutularak karar kuralı aşağıdaki gibi yazılır:

Eğer  $\hat{\theta} > A$  ise  $H_0$  red edilir,

Eğer  $\hat{\theta} \leq A$  ise  $H_0$  kabul edilir.

A eylem limiti  $\theta = \theta_0$  olasılık dağılımı için aşağıdaki gibidir:

$$A = \theta_0 + z_{1-\alpha} \sigma / \sqrt{n} \quad (1)$$

$\beta$  riskinin denetlenmesine imkân veren  $\theta = \theta_1$  olasılık dağılımında aynı A eylem limiti aşağıdaki gibi belirlenir:

$$A = \theta_1 + z_{\beta} \sigma / n \quad (2)$$

(1) ve (2) eşitliklerinin n için ortak çözümü yapılır,

$$n = \left[ \frac{z_{\beta} - z_{1-\alpha}}{\theta_1 - \theta_0} \right]^2 \sigma^2$$

optimal örneklem büyüklüğü belirlenmiş olur.

## 6.2.2. Alt-Uç Testi

$H_0: \theta = \theta_0$  hipotezi  $H_1: \theta = \theta_1 (\theta_1 = \theta_0 + K, K < 0)$  alternatif hipotezine karşı test edilecekse, uygun karar kuralı aşağıdaki gibidir:

Eğer  $\hat{\theta} \geq A$  ise,  $H_0$  kabul edilir.

Eğer  $\hat{\theta} < A$  ise,  $H_0$  red edilir.

Yukarıda ifade edilen karar kuralına göre  $\theta = \theta_0$  olasılık dağılımındaki eylem limiti aşağıdaki gibidir:

$$A = \theta_0 + z_\alpha \sigma / \sqrt{n} \quad (3)$$

$\beta$  riskini denetleme imkanını veren  $\theta = \theta_1$  olasılık dağılımında aynı eylem limiti

$$A = \theta_1 + z_{1-\beta} \sigma / \sqrt{n} \quad (4)$$

olarak tanımlanır. (3) ve (4) numaralı eşitliklerin  $n$  için ortak çözümü yapılarak alt-uç tek-yanlı bir hipotez testinde gerekli optimal örneklem büyüklüğü belirlenmiş olur:

$$n = \left[ \frac{z_{1-\beta} z_\alpha}{\theta_1 - \theta_0} \right]^2 \sigma^2$$

## 6.3. Çift Taraflı Hipotez Testlerinde Optimal Örneklem Büyüklüğünün Tasarımı

6.3.1.  $H_0: \theta = \theta_0$  Hipotezinin  $H_1: \theta = \theta_1 (\theta_1 = \theta_0 + K, K > 0)$  Hipotezine Karşı Testi Durumunda Optimal Örneklem Büyüklüğü

$\theta = \theta_0$  olasılık dağılımında iki yönlü bir hipotez testinde karar kuralı aşağıdaki gibi olacaktır:

$A_1 < \hat{\theta} < A_2$  ise  $H_0$  kabul edilir.

$\hat{\theta} > A_1 > A_2$  ise  $H_0$  red edilir.

Aynı olasılık dağılımındaki iki eylem limiti:

$$A_1 = \theta_0 + z_{\alpha/2} \sigma / \sqrt{n} \quad (5)$$

$$A_2 = \theta_1 + z_{1-\alpha/2} \sigma / \sqrt{n} \quad (6)$$

şeklinde tanımlanacaktır.

( $A_1$  alt eylem limiti,  $A_2$  üst eylem limitidir.)

Çift taraflı bir hipotez testinde ve  $\theta_1 > \theta_0$  durumunda  $\theta = \theta_1$  olasılık dağılımında önem taşıyan sadece  $A_2$  limitidir; sözü edilen olasılık dağılımında  $A_2$  eylem limiti aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$A_2 = \theta_1 + z\beta \sigma / \sqrt{n} \quad (7)$$

(6) ve (7) numaralı eşitliklerin  $n$  için ortak çözümü yapıldığında, sözü edilen özel durum için geçerli olacak optimal örneklem büyüklüğü belirlenmiş olacaktır:

$$n = \left[ \frac{z\beta - z_{1-\alpha/2}}{\theta_1 - \theta_0} \right]^2 \sigma^2$$

6.3.2.  $H_0: \theta = \theta_0$  Hipotezinin  $H_1: \theta = \theta_1$  Hipotezine Karşı Testi Durumunda ( $\theta_1 = \theta_0 + K$ ,  $K < 0$ ) Optimal Örneklem Büyüklüğünün Belirlenişi

$\theta = \theta_0$  olasılık dağılımındaki karar kuralı bir önceki paragraftaki gibidir; dağılımdaki iki eylem limiti de aynı şekilde tanımlanmıştır:

$$A_1 = \theta_0 + z_{\alpha/2} \sigma / \sqrt{n} \quad (8)$$

$$A_2 = \theta_0 + z_{1-\alpha/2} \sigma / \sqrt{n} \quad (9)$$

$\theta = \theta_1$  olasılık dağılımında,  $\theta_1 < \theta_0$  sözkonusu olduğunda anlamlı olan sadece  $A_1$  eylem limitidir.

$A_1$  eylem limiti  $\theta = \theta_0$  olasılık dağılımında aşağıdaki gibidir:

$$A_1 = \theta_1 + z_{1-\beta} \sigma / \sqrt{n} \quad (10)$$

Bu durumda çift taraflı bir testte eğer  $\theta_0 > \theta_1$  ise, alt eylem limiti  $A_1$  için verilmiş tanımları gösteren (8) ve (10) eşitliklerinin  $n$  için ortak çözümü  $n$  için optimal büyüklüğü verecektir:

$$n = \left[ \frac{z_{1-\beta} - z_{\alpha/2}}{\theta_1 - \theta_0} \right]^2 \sigma^2$$

Belirsizlik ortamı içinde karar alma durumunda olan araştırmacının istatistiksel çıkarsama yapabilmesi için gereksinim duyduğu verinin miktarı konusunda endişeleri olduğu bir gerçektir. Verinin az olması durumunda tahminlerde arzu edilen güvenilirlik ve duyarlılık sağlanamayabilir. Gereğinden fazla miktardaki veri ise ekonomik yük getirebilir. Aslında gereğinden fazla veya gereğinden az bilgi, emek veya para veya hem emek hem para kaybına neden ola-

bilir. Bu bakımdan karar vermede optimal veri miktarının tasarlanması büyük bir önem taşımaktadır. Şimdilerde pek üzerinde durulmayan maksimum bilgi için optimal veri miktarının belirlenmesi, her alandaki araştırmalarda bir ön çalışma niteliği kazanmalıdır.

## 7. İstatistiksel Testlerin Bilimsel Çalışmalardaki Kullanımıyla İlgili Bazı Düşünceler

Bilimsel yöntemin temel öğelerinden olan istatistiksel hipotezler, geçerliliklerinin kontrol edebilmesi için işin teste tabi tutulan varsayımlardır. Doğru veya yanlış olabilen ve deney yoluyla denetlenen varsayımlar iyi bir araştırmaya yol gösterir; deney, istatistikte «gözlem yapma» anlamını da kazanmıştır. Bilimsel bir çalışmada «neyi» aramakta olduğumuzu anlatan hipotezler formüle edilmeden toplanacak veriler, geliş güzel derlenmiş bilgilerden ibaret kalır; elde edilen verilerin açık anlamlı bilgiler olarak ortaya konulması mümkün olmaz. Hipotezler, kuram ile araştırmalar arasında zorunlu bir bağıdır. Yararlı hipotezlerin kurulabilmesi, bunların kuramsal bir değerinin olmasını gerektirir.

Her çalışmada hipotezlerin kuramla olan bağlantısının kurulması ve aydınlatılması gerekir. Yapılacak bir araştırma mevcut kurama dayandırılırsa bilgimize anlamlı katkıda bulunması olasılığı artar. Ayrıca kuramsal değeri olan hipotezler kontrol edilebilir nitelikte olabilir. Kontrol edilen hipotezler ister kabul, ister reddedilsin, her iki durumda da varolan kuram için yararlı olur ve başka hipotezlerin kurulmasına olanak tanır.

Bir veya birden fazla tesadüfi değişkenin dağılımı konusunda bir doğrulama veya tahmin olan istatistiksel hipotezlerin testi, karşıtı olan alternatif hipoteze karşı sıfır hipotezini kabul veya reddetme kararını verebilmek için bir kurallar setinin uygulamasıdır. Bilimsel çalışmalarda kullanılan istatistiksel testlerle ilgili olarak dikkate alınması gereken bazı gözardı edilen yönler, izleyen paragraflarda üzerinde durulacak konuyu oluşturmaktadır.

### 7.1. İstatistiksel Hipotez Testlerinde Yapılması Gereken Varsayımlar ve Bunların Niteliği

Hipotez testlerinde örnekleme dağılımının elde edilmesinde olasılık kuramından faydalanılabilmesi için araştırmacı hem ana kütle için, hem de örnekleme işlemleri için belirli varsayımlar yapmak

durumundadır. Hakkında genelleme yapılacak ana kütle ve örnekleme işlemleriyle ilgili varsayımlar iki grupta toplanabilir:

- (1) Araştırmacının kabule meyilli olduğu, güvenilir bulunduğu varsayımlar,
- (2) Araştırmacının, güvenilmez olmaları nedeniyle özellikle ilgilendiği varsayımlar.

Birinci gruptaki varsayımlar «model» olarak nitelendirilir. İkinci grupta yer alan varsayımlar, araştırmacının test etmek istediği ve «hipotez» olarak isimlendirdiği varsayımlardır. Yalın istatistiksel testlerde genellikle bir tek hipotez vardır. Test sonuçları varsayımların reddini sağlıyorsa, teste dayanılarak söylenilebilecek tek şey, varsayımlardan birinin muhtemelen yanlış olduğudur. Varsayımlardan hangisinin yanlış olduğu konusunda test herhangi bir bilgi sağlamadığı için, sonuçların anlamlı olması durumunda varsayımlardan sadece bir tanesinin gerçekten güvenilmez olduğu esası benimsenir; ancak bu durumda bu varsayımın (hipotezin) yanlış olarak reddedilmesi mümkün olacaktır.

Araştırmacı bu durumda hangi esasa göre belirli bir istatistiksel hipotezi diğerine tercih etmelidir? Araştırmacı, sadece bir tek şüphe edilen varsayımı (kendi araştırma hipotezini) içeren bir testi seçmek zorundadır. İki veya daha fazla güvenilmez varsayım gerektiren bir testte hangi varsayımın reddedileceği konusunda karar vermek zor, bazen de imkansızdır; bu bakımdan sözü edilen durumlarda çok sayıda güvenilmez varsayım gerektirmeyen bir başka test bulunmasına çalışılmalıdır.

Sosyal nitelikli bir araştırmada istatistiksel test için sadece iki varsayımın yapılmasının gerektiği düşünülün:

- (1) Ana kütlede işyerini oldukça sık değiştiren vasıflı ve vasıfsız işçilerin oranlarının aynı olduğu varsayımı.
- (2) Sözü edilen nitelikteki ana kütlede örneklemenin tesadüfi olarak seçildiği varsayımı.

İki varsayımın da doğru olması durumunda ortaya çıkması gereken sonuçların örneklem verileriyle desteklenmediği, sözü edilen oranların farklı olduğu belirlenirse araştırmacının tutumu ne olmalıdır? Böyle bir durumda, benimsenmiş olan sözkonusu iki varsayımdan birinin muhtemelen yanlış olduğu kararlaştırılacaktır.

Ancak sözü edilen iki varsayımdan hangisi rededilmelidir? Ana kütleyle ilgili varsayımın yanlış olduğunun hemen kararlaştırılması uygun olmaz, örnekleme yönteminin yansızlığı konusunda kuşkulu olunması daha olağandır.

Eğer uygulanan örnekleme yönteminin rasnallığına (yalnızlığına) büyük bir güven duyuluyorsa, örneklemin ana kütlede tesadüfi olarak seçildiği varsayımı model olarak benimsenir ve ana kütleyle ilgili varsayımın yanlış olduğu kararlaştırılır. Örneklem seçimiyle ilgili olan ikinci varsayımı benimsemedeki istekliliğimiz araştırma yöntembiliminden, başka bir anlatımla uygulanan örnekleme yöntemleri konusundaki bilgimizden kaynaklanmaktadır. Daha önceki araştırma sonuçlarından faydalanılarak belirli varsayımların kabul edilmesi, benimsenebilecek bir yöntemdir.

Yapılan açıklamalardan anlaşılacağı gibi istatistiksel testler hiçbir zaman hangi varsayım veya varsayımların yanlış olduğu konusunda bir dayanak oluşturmaz; bu bakımdan hipotez testlerindeki varsayımların tamamının aynı mantıksal konuma sahip oldukları ifade edilir. Bu gerçeği vurgulamak ve modeldeki varsayımlara dikkati çekmek için hipotez, testin gerektirdiği çok sayıda varsayım arasından fiilen test edileni olarak algılanacaktır.

Araştırmacı hipotez testi yaparken aslında red etmeği tercih ettiği bir hipotezin belirlenmesiyle ilgilenmek durumundadır genellikle; sıfır hipotezi olarak bilinen, karşıt bir hipoteze karşı test edilir.

## 7.2. Uygulanması Sözkonusu Kararlar İçin Alfa Riskinin Belirlenmesi

Bir hipotez testi sonunda verilen kararın uygulanacak nitelikte olması alfa riskinin belirlenmesini güçleştirir. Örneğin çocuk felci aşısı kampanyasının yürütülebilmesi büyük paraları gerektiriyor veya aşının olası zararlı etkisinden kuşku duyuluyorsa, aşı uygulamasına geçilmeden önce aşının etkisinden emin olunmak istenilmesi doğaldır. Çocuk felci aşısının yararlı etkisi olmadığı konusundaki sıfır hipotezinin reddi durumunda aşı kampanyasının başlatılması sözkonusudur; bu durumda hem büyük masrafların yapılması, hem aşının olası zararlı etkisinin düşünülmesi gerekir. Böyle olunca doğal olarak sıfır hipotezinin reddinin olabildiğince zorlaştırılması, yani  $\alpha$  riskinin çok küçük bir değer olarak belirlenmesi düşünülmelidir.

Başka bir durumda da araştırmacı sıfır hipotezini red etmek istemeyebilir; sıfır hipotezi, çeşitli gelir gruplarının doğurganlık oranları bakımından birbirinden farklı olmadığı şeklinde bir ön kestirim niteliğini kazanmış olabilir. Eğer araştırmacı sözü edilen nitelikteki gerçek farkları saptamak istiyorsa, sıfır hipotezinin reddini güçleştirecek şekilde çok küçük bir  $\alpha$  riski belirlemelidir.

Araştırmacının aslında çeşitli gelir gruplarının doğurganlık oranları arasında fark olmadığını göstermek istediği düşünülün; bu tutumuyla araştırmacı doğurganlık farklılıklarıyla ilgili genellikle kabul görmüş kuramların yanlış veya yetersiz olduğunu gösterme çabası içinde olabilir. Veya araştırmacı doğurganlık oranları arasında fark olmadığını umarak, sözkonusu oranlar ile başka değişkenler arasında ilişki kurarken gelir grubu etkisini kontrol dışı bırakabilir.

Yukarıda sözü edilen son iki durumda araştırmacı öncelikle ikintip hata riskinin küçültülmesiyle ilgilenmelidir. Araştırmacı gerçekte yanlış olması durumunda «oranlar arasında fark bulunmadığı» şeklindeki sıfır hipotezini kabul etmemek için özen gösterilmelidir; bu bakımdan araştırmacı gerçekten benimsemeyi düşündüğü bir sıfır hipotezinin reddini güçleştiren küçük bir  $\alpha$  riskini seçtiğinde, mutlaka ihtiyatlı davranmış olmaz. İstatistiksel araştırmalarda genellikle %5, %1 ve %01 anlam düzeyleri kullanılır. Ancak yukarıdaki irdelemelerin ışığında sözü edilen bu anlam düzeylerinin kesin ve değişmez olmadığı açıktır. Gerçi sözkonusu anlam düzeylerini kullanan genellikle ihtiyatlı davranmış olur; ancak sıfır hipotezini gerçekten redetmek istemeyen araştırmacı, ikinci tip hata riskini küçülteceği için belki de %10, %20 hatta %30 anlam düzeyini kullanmayı tercih etmelidir.

### 7.3. Anlamlılık Testi Sonuçlarının Yorumlanması

Sıfır hipotezinin rededilmesinin istendiği ve %01 alfa riskinin kullanıldığı durumda oldukça yanıltıcı sonuçlar elde edilebilir. Anlamlılık testleri, belirli varsayımların doğru olması durumunda olası sonuçlar setinin nasıl olacağını gösterir. Oysa sözkonusu varsayımların reddedilebilme olasılığını belirleyen pek çok etmen vardır. Herşeyden önce hipotez testiyle ilgili varsayımların gerçekte ne derece yeterli oldukları önemlidir. Örneğin yeni bir ilacın gerçek iyileştirme olasılığı  $\theta_1 = 0,90$  iken,  $\theta_0 = 0,50$  şeklindeki sıfır hipotezinin rededilmesi için gerekli ekstrem sonuçların elde edilmesi olasılığı daha küçüktür.

Örneklemdaki birim sayısı az olduğu zaman sıfır hipotezini red etmek için çok ekstrem sonuçların meydana gelmesi gerekir. Buna karşın gözlemi yapılan birim sayısı fazla olduğu zaman sıfır hipotezinde belirtilen değerden çok az farkedilen değerlere dayanarak sıfır hipotezi rededilebilir. Çok büyük örnekleme çalışıldığında, örneklem sonucu ile sıfır hipotezinde belirtilmiş değer arasındaki farka bağlı olmaksızın yanlış bir sıfır hipotezi her zaman için red edilebilir.

İstatistiksel anlamlılıkla fiili anlamlılık birbirinden ayırılmazdır; istatistiksel anlamlılık, ana kütlede hiç bir değişiklik meydana gelmemiş olması koşuluyla belirli örneklem farklarının da tesadüfi olarak meydana gelmesinin çok sık sözkonusu olmayacağını açıklar sadece. Sözü edilen farkların önemi konusunda istatistiksel anlamlılık doğrudan doğruya bir açıklık getirmez. Pratik anlamlılığı olan gerçek bir farkın önemini, konu hakkında teknik bilgisi olan kişi değerlendirebilir.

## 8. Sonuç

Örneklem sonuçlarından faydalanma amacına göre örneklem büyüklüğünün tasarımı değişir; bu bakımdan aralık tahmin, çift yönlü, tek yönlü alt-uç, tek yönlü üst-uç hipotez testleri için optimal örneklem büyüklüğünün tasarımı ele alınmış, hesaplamaların dayandığı varsayımlar açıklanmıştır.

Diğer taraftan ana kütle ve örnekleme işlemleri için belirli varsayımların hem aralık tahmininde, hem hipotez testlerinde zorunlu olarak yapıldığı ve hem örneklem büyüklüğünün tasarımında, hem fiilen oluşturulan örneklemin sonuçlarından faydalanma aşamasında önem taşıdığı belirlenmiş, bunların mantıksal konumu irdelenmiştir.

İstatistiksel hipotez amacıyla kullanılacak örneklemin maksimum bilgiyi sağlayabilmesi için optimal büyüklüğünün tasarımında birinci ve ikinci tip hata risklerinden faydalanılmıştır; öncelik verilen alfa riskine geliş güzel değerlerin verilmemesinin, araştırmanın amacı gözönünde tutularak akılcı bir biçimde belirlenmesinin gereği ortaya konulmuş, çeşitli durumlar için uygun risk değerlerinin ne olabileceği tartışılmıştır.

Son olarak her bilimsel çalışmada yer verilen anlamlılık testindeki istatistiksel anlamlılığın, belirlenen farkın pratik önemi konusunda bilgi vermeyebileceği vurgulanmıştır.



## KAYNAKLAR

- (1) Chou, Y.L.: Probability and Statistics for Decision Making, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1972.
- (2) Çömlekçi, N.: Deney Tasarımı ve Çözümlemesi, T.C. Anadolu Üniversitesi Eğitim, Sağlık ve Bilimsel Araştırma Çalışmaları Vakfı Yayınları No 58, Eskişehir, 1988.
- (3) Kempthorne, O.: The Design and Analysis of Experiments, Robert E. Krieger Publishing Company Inc. New York, 1975.
- (4) Montgomery, D.C.: Design and Analysis of Experiments, John Willey and Sons, Toronto, 1984.
- (5) Neter, J., Wasserman, W., Whitmore, G.A.: Applied Statistics, Allyn and Bacon Inc. Boston, 1978.