Sürekli Markov Zinciri
ve
Nüfusta Yenilenme Problemi

Doç. Dr. Kenan URAL

I. Sürekli Markov Zinciri Hakkında Genel Bilgi:

Bir cümlenin her devre sonunda meselâ her saat sonunda $t=0, 1, \ldots, n$ tesadüfî olarak alabileceği n durumu $a, b, c, \ldots u$ olsun. Her devrenin sonunda tesadüfî bir çekiliş, bir sonraki devre için cümlenin durumunu tâyin etmiş olsun. Bu çekilişlerin meydana geliş şekilleri yapıldıkları devre esnasındaki cümlenin durumuna bağlıdır. Böylece cümlenin $= 0, 1, 2, \ldots, n$ devredeki durumlarının bilinmesi. n inci devreyi tâkip eden $(n+1)$ inci devre sonundaki durumun bilinmesi için bilgi temin eder. Ancak bu bilgi, sadece cümlenin en son devredeki durumunda mevcuttur. Başka bir deyimle, cümlenin herhangi bir t devresinde belli bir durumu almasında t devresine kadar geçirmiş olduğu muhtelif durumların bilinmesi ehemmiyet arzetmez. İşte bu özelliği haiz gelişmeye sürekli Markov zinciri denir.

Söylenenleri matematikle ifade etmeğe çalışalım. Cümlenin alacağı $a, b, c, \ldots, u$ durumlarına tekâbül eden tesadüfî değişkenler $[x(t)]$ olsun. Buradaki t parametresi zaman ifade eder ve değişim fasılası sonlu veya sonsuz olabilir. Eğer aşağıdaki ifade t nin n değeri için, $t_1 < t_2 < \cdots\cdots < t_n$, $t\ (n=1, 2, \ldots)$,

$$P\left\{ x(t) \leq x \;/\; x(t_1) = x_1, \ldots, x(t_n) = x_n \right\}$$

$$= P\left\{ x(t) \leq x \;/\; x(t_n) = x_n \right\}$$

sağlanıyorsa, sürekli Markov zincirinden bahsedilir.

Sürekli Markov zincirinin seyri, başlangıç durumu

$P\left\{ x(0) < x \right\} = P(0,x)$ ve şartlı ihtimal fonksiyonu

$$P\left\{ x(t) \leq x \,/\, x(\delta) = y \right\} = F(\delta, y; t, x)$$

yardımiyle tayin edilir. Bu sonuncu fonksiyona geçiş ihtimali adı verilir.

Devreler arasındaki değişikliğin nasıl meydana geldiğini görmeye çalışalım. t devresinden itibaren dt gibi bir zaman fasılası göz önünde tutalım. Bu zaman fasılası sonunda meydana gelecek değişiklik

$$p(t + dt) = p(t)\,[M]$$

bağlantısına göre cereyan eder. Burada $p(t)$ ihtimali, t inci devredeki durumun gerçekleşme ihtimalidir. O halde t devresinden $(t + dt)$ devresine geçmek için, t devresi sonunda bilinen $P(t)$ ihtimalini M geçiş ihtimalleri matrisiyle çarpmak gerektir. Bu M matrisinin ne olduğunu biraz sonra göstereceğiz.

Şu hale göre mevcut bilgiler iki çeşittir:

1) $a, b, c, \ldots, u$ durumlarının başlangıç durumu olma ihtimalleri sırasiyle $p(a)$; $p(b)$, $p(c)$, $\ldots$, $p(u)$.

2) p_{ij} geçiş ihtimalleri. Bütün i durumları için:

$$p_{ia} + p_{ib} + \cdots\cdots + p_{iu} = 1$$

olduğunu kabul edeceğiz. Bu ifade i durumundan sonra n durumundan, yani $a, b, c, \ldots, u$ durumlarından bir tanesinin geleceğini ifade eder.

Esas aranılan eleman ise, r inci durumun i durumu olması ihtimali $P_i^{(r)}$ dir. $p_{ij}^{(r)}$ sembolü, r devrede i durumundan j durumuna geçme ihtimalini gösterir. Bir sonraki devre, yani $(r + 1)$ inci devre için $p_{ij}^{(r+1)}$ ihtimali, toplam ve bileşik ihtimaller yardımiyle aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$p_{ij}^{(r+1)} = p_{ia}^{(r)} \cdot p_{aj} + p_{ib}^{(r)} \cdot p_{bj} + \cdots\cdots + p_{iu}^{(r)} \cdot p_{uj} \cdot (2)$$

Bu münasebetten $p_{ij}^{(r+1)}$ ihtimalinin iki vektörün skalar çarpımı şeklinde yazılabileceği anlaşılır. Birinci vektörün elemanları $p_{ia}^{(r)}$, $p_{ib}^{(r)}$, ..., $p_{iu}^{(r)}$ ve ikinci vektörün elemanları ise p_{aj}, p_{bj}, ..., p_{uj} dir.

Verilen izahata göre aşağıdaki matris münasebeti yazılabilir:

$$M^{r+1} = M^r \cdot M = \begin{bmatrix} p_{aa}^{(r)} & p_{ab}^{(r)} & \cdots & p_{au}^{(r)} \\ p_{ba}^{(r)} & p_{bb}^{(r)} & \cdots & p_{bu}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{ua}^{(r)} & p_{ub}^{(r)} & \cdots & p_{uu}^{(r)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{aa} & p_{ab} & \cdots & p_{au} \\ p_{ba} & p_{bb} & \cdots & p_{bu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{ua} & p_{ub} & \cdots & p_{uu} \end{bmatrix}$$

Görüldüğü üzere M^r matrisinin bir satırını $p_{ia}^{(r)}$, $p_{ib}^{(r)}$, ..., $p_{iu}^{(r)}$ elemanları ve M matrisinin bir sütununun p_{aj}, p_{bj}, ..., p_{uj} elemanları teşkil eder.

Yukarıdaki izahattan $p_{ij}^{(r)} = p_{ij}$ olacağı anlaşılır. $p_{ij}^{(2)}, p_{ij}^{(3)}, \ldots$ ihtimalleri benzer tarzda reküranş yoluyla elde edilebilir.

Aranılan ihtimal $P_i^{(r)}$ ise şu şekli alır:

$$P_i^{(r)} = p(a)\, p_{ai}^{(r)} + p(b)\, p_{bi}^{(r)} + \cdots\cdots + p(u)\, p_{ui}^{(r)} \qquad (3)$$

Limit Hali:

Buraya kadar (r) nin sonlu bir değeri için $p^{(r)}$ ihtimalinin alacağı şekil incelendi. Bunun yanında (r) nin sonsuz olma halinde aynı ihtimalin ne olacağı meselesi ile meşgul olmak ilginç olabilir.

Eğer $p_{ij}^{(k)}$ ihtimallerinden hiç biri sıfır değilse, (r) nin büyük olması halinde şu hususların gerçekleştiği görülür:

$$\lim_{r\to\infty} p_{aa}^{(r)} = \lim_{r\to\infty} p_{ba}^{(r)} = \cdots\cdots\cdots = \lim_{r\to\infty} p_{ua}^{(r)} = A$$

$$\lim_{r\to\infty} p_{ab}^{(r)} = \lim_{r\to\infty} p_{bb}^{(r)} = \cdots\cdots\cdots = \lim_{r\to\infty} p_{ub}^{(r)} = B$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\lim_{r\to\infty} p_{au}^{(r)} = \lim_{r\to\infty} p_{bu}^{(r)} = \cdots\cdots\cdots = \lim_{r\to\infty} p_{uu}^{(r)} = U$$

A, B, ..., U değerleri de aşağıdaki lineer sistem denklemlerin çözümünden elde edilir:

$$\begin{array}{l} A\,p_{aa} + B\,p_{ba} + \cdots\cdots + U\,p_{ua} = A \\ A\,p_{ab} + B\,p_{bb} + \cdots\cdots + U\,p_{ub} = B \\ \vdots \\ A\,p_{au} + B\,p_{bu} + \cdots\cdots + U\,p_{uu} = U \end{array} \qquad (5)$$

Diğer taraftan da

$$A + B + \cdots\cdots + U = 1 \qquad (6)$$

olduğu bilinmektedir.

Bu gösterilen hal en basit şekli olup, *muntazam pozitif hal* adını alır. Şâyet M geçiş matrisinde ihtimallerden bir veya bir kaçı sıfır olursa, bazı özel haller meydana gelir.

Bir misalle izah:

Önce belli üç durum a, b, c, durumları mevcut olsun.

Bu durumların başlangıç ihtimalleri şöyle farzedilsin:

$$p(a) = 0{,}3 \quad , \quad p(b) = 0{,}5 \quad , \quad p(c) = 0{,}2$$

Geçiş ihtimalleri matrisi de $r = 1$ devre için aşağıdaki gibi verilmiş olsun.

$$M = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \end{bmatrix}$$

Önce $r = 2$ için geçiş ihtimalleri matrisi M^2 yi hesaplıyalım:

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \end{bmatrix},$$

yani,

$$M^2 = \begin{bmatrix} p_{aa}^{(2)} & p_{ab}^{(2)} & p_{ac}^{(2)} \\ p_{ba}^{(2)} & p_{bb}^{(2)} & p_{bc}^{(2)} \\ p_{ca}^{(2)} & p_{cb}^{(2)} & p_{cc}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,46 & 0,24 & 0,30 \\ 0,30 & 0,60 & 0,10 \\ 0,42 & 0,24 & 0,34 \end{bmatrix}$$

Benzer olarak $r = 3$ için M^3 matrisi de M^2. M şeklinde hesap edilir:

$$M^3 = \begin{bmatrix} p_{aa}^{(3)} & p_{ab}^{(3)} & p_{ac}^{(3)} \\ p_{ba}^{(3)} & p_{bb}^{(3)} & p_{bc}^{(3)} \\ p_{ca}^{(3)} & p_{cb}^{(3)} & p_{cc}^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,364 & 0,456 & 0,180 \\ 0,440 & 0,240 & 0,320 \\ 0,356 & 0,456 & 0,188 \end{bmatrix}$$

Yine rekürans yoluyla $r = 4, 5, \ldots$ için M^r matrisi kolayca bulunur.

Nihayet $r = \infty$ için de geçiş ihtimalleri matrisi (4), (5) ve (6) denklem sistemleri yardımiyle aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$M(\infty) = \begin{bmatrix} p_{aa}(\infty) & p_{ab}(\infty) & p_{ac}(\infty) \\ p_{ba}(\infty) & p_{bb}(\infty) & p_{bc}(\infty) \\ p_{ca}(\infty) & p_{cb}(\infty) & p_{cc}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3906 & 0,3750 & 0,2344 \\ 0,3906 & 0,3750 & 0,2344 \\ 0,3906 & 0,3750 & 0,2344 \end{bmatrix}$$

Dikkat edilirse $r \geq 2$ için geçiş ihtimalleri matrisinde elemanların hiç biri 0 değildir. O halde muntazam pozitif halin mevcut olduğu söylenebilir.

Başlangıç ihtimalleri ve geçiş ihtimalleri bilindiğine göre artık hesaplanması gereken esas unsur $P_i^{(r)}$, formül (3) yardımıyla elde edilebilir:

$$P_i^{(r)} = \begin{bmatrix} p_{aa}^{(r)} & p_{ab}^{(r)} & p_{ac}^{(r)} \\ p_{ba}^{(r)} & p_{bb}^{(r)} & p_{bc}^{(r)} \\ p_{ca}^{(r)} & p_{cb}^{(r)} & p_{cc}^{(r)} \end{bmatrix} \cdot [\, p(a)\,,\, p(b)\,,\, p(c)\,],$$

yani:

	$r=1$	$r=2$	$r=3$	....	$r=\infty$
$P_a^{(r)}$	0,41	0,372	0,4004	....	0,3906
$P_b^{(r)}$	0,30	0,420	0,3480	....	0,3750
$P_c^{(r)}$	0,29	0,208	0,2516	....	0,2344

II. Nüfusta Yenilenme Problemi:

Belli bir L sayısından ibaret şahıs topluluğu düşünelim. Bu şahıslar göz önünde tutuldukları t anından itibaren, muhtelif faktörler sebebiyle ölümle karşı karşıya kalacaklar, sayıları azalacaktır. Aynı sayıyı devam ettirmek üzere ölenlerin yerine aynı miktarda ve hepsi x yaşında olan şahıslar koyalım. Böylece L şahıs ölüm olayı meydana geldikce yenilenecek ve sayı itibariyle değişikliğe maruz kalmayacaktır.

Bahsedilen L şahıs genellikle farklı yaşlarda olur; yaşlara göre bölünüşünü gösterelim:

$l\ (0,x)$	şahıs	x	yaşındadır.
$l\ (0,x+1)$	şahış	$(x+1)$	"
$l\ (0,x+2)$	"	$(x+2)$	"
.	.	.	
.	.	.	
.	.	.	
$l\ (0,x+n)$	"	$(x+n)$	"

Nüfusta yenilenme probleminde aranılan esas husus, belli bir devre sonra meselâ r yıl geçtikted sonra, L şahsın yaş itibariyle bölünüşünü araştırmaktır.

Problemin başlangıçta bilinen iki elemanı şöyledir:

1) L şahsın ilk devrede yaşlara göre bölünüşü: $l(0,x)$, $l(0,x+1)$, ..., $l(0,x+n)$.

2) Her yaştaki ölüm ihtimalleri:

$q_x, q_{x+1}, \ldots, q_{x+n}$ (Burada n sonlu bir sayı olup $q_{x+n}=1$ kabul edilecektir).

III. Sürekli Markov Zinciri Yardımiyle Yenilenme Probleminin Çözümü:

L şahsın sahip olduğu bazı özellikler mevcuttur. Bunların sürekli Markov zincirindeki hangi elemanlara tekâbül ettiğini görelim:

x	yaşı	sürekli	Markov	zincirinde	a	durumuna	tekâbül	eder.
$(x+1)$	"	"	"	"	b	"	"	"
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
$(x+n)$	"	"	"	"	u	"	"	"

$a, b, \ldots, u$ nun başlangıç durumu olma ihtimalleri $p(a)$, $p(b)$, ..., $p(u)$ bu takdirde aşağıdaki gibi olacaktır:

$$p(a) = \frac{l(0,x)}{L}$$

$$p(b) = \frac{l(0,x+1)}{L}$$

$$\vdots$$

$$p(u) = \frac{l(0,x+n)}{L}$$

q_x , q_{x+1} , ... , q_{x+n} ihtimallerine gelince, sırasiyle p_{aa} , p_{ba} , ... , p_{ua} geçiş ihtimallerine tekâbül eder.

Yani:

$$
\begin{array}{lll}
p_{aa} = q_x & , & p_{ab} = p_x \quad = 1 - q_x \\
p_{ba} = q_{x+1} & , & p_{bc} = p_{x+1} = 1 - q_{x+1} \\
\vdots & & \vdots \\
p_{ua} = q_{x+n} & , &
\end{array}
$$

Diğer bütün ihtimaller sıfırdır. Buna rağmen muntazam pozitif hal mevcuttur.

r devre, meselâ r yıl sonra nüfusun dağılışını bulmak için, nüfusu tekâbül eden ihtimallerle çarpmak kâfidir:

$$
\begin{array}{ll}
l\,(r,x) & = \mathrm{L.}\ \mathrm{P}_a^{(r)} \\
l\,(r,x+1) & = \mathrm{L.}\ \mathrm{P}_b^{(r)} \\
\vdots & \vdots \\
l\,(\mathrm{r},x+n) & = \mathrm{L.}\ \mathrm{P}_u^{(r)}
\end{array}
$$

Problemi bir misal vererek daha iyi açıklamaya çalışalım.

Misalle İzah:

10.000 kişilik bir şahıs grubu düşünelim. Şahısların yaşları 3 grupta toplansın ve ölüm ihtimaıleri sırasiyle:

$$
\begin{array}{ll}
p_{aa} = q_x \quad = 0{,}4 & p_{ab} = 0{,}6 \\
p_{ba} = q_{x+1} = 0{,}5 & p_{bc} = 0{,}5 \\
p_{ca} = q_{x+2} = \ 1 &
\end{array}
$$

olsun. Daha önce verdiğimiz misalin başlangıç ihtimallerini aynen varsayıyoruz. r nin muhtelif değerleri için aranılan $l\ (r,x)$ in bölünmesini hesap edelim:

$r = 0$ için:

$$
\begin{aligned}
l\ (0,x) &= L.\ p\ (a) = 10.000\ .\ 0{,}3 = 3000 \\
l\ (0,x+1) &= L.\ p\ (b) = 10.000\ .\ 0{,}5 = 5000 \\
l\ (0,x+2) &= L.\ p\ (c) = 10.000\ .\ 0{,}2 = \underline{2000} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 10000
\end{aligned}
$$

bilinen değerlerdir. Bunlar yardımiyle $r = 1$ için aranılan değerler:

$$
\begin{aligned}
l\ (1,x) &= L.\ P_a^{(1)} = 10.000\ .\ 0{,}57 = 5700 \\
l\ (1,x+1) &= L.\ P_b^{(1)} = 10.000\ .\ 0{,}18 = 1800 \\
l\ (1,x+2) &= L.\ P_c^{(1)} = 10.000\ .\ 0{,}25 = \underline{2500} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 10000
\end{aligned}
$$

olur.

$r = 2$ için ise:

$$
\begin{aligned}
l\ (2,x) &= L.\ P_a^{(2)} = 10.000\ .\ 0{,}568 = 5680 \\
l\ (2,x+1) &= L.\ P_b^{(2)} = 10.000\ .\ 0{,}342 = 3420 \\
l\ (2,x+2) &= L.\ P_c^{(2)} = 10.000\ .\ 0{,}090 = \underline{\ \ 900} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 10000
\end{aligned}
$$

ve r = 3 için

$$
\begin{aligned}
l\ (3,x) &= L.\ P_a^{(3)} = 10.000\ .\ 0{,}4882 = 4882 \\
l\ (3,x+1) &= L.\ P_b^{(3)} = 10.000\ .\ 0{,}3408 = 3408 \\
l\ (3,x+2) &= L.\ P_c^{(3)} = 10.000\ .\ 0{,}1710 = \underline{1710} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 10000
\end{aligned}
$$

hesap edilir. Nihayet r = ∞ halinde :

$$l\,(\infty,x) = L.\ P_a(\infty) = 10.000\ .\ 0{,}5063 = 5063$$

$$l\,(\infty,x+1) = L.\ P_b(\infty) = 10.000\ .\ 0{,}3797 = 3797$$

$$l\,(\infty,x+2) = L.\ P_c(\infty) = 10.000\ .\ 0{,}1140 = 1140$$

$$\overline{10000}$$

olur. Neticeleri tablo halinde edelim :

	$r=0$	$r=1$	$r=2$	$r=3$	......	$r=\infty$
$l\,(r,x)$	3000	5700	5680	4882	......	5063
$l\,(r,x+1)$	5000	1800	3430	3408	......	3797
$l\,(r,x+2)$	2000	2500	900	1710	......	1140
	10000	10000	10000	10000		10000

Ayni neticeleri r = 0 halinden itibaren rekürans yolu ile hesaplamak kabildir. Yani :

$$l\,(r+1,x+1) = P_x\, l\,(r,x)$$

Misal : $r=2$ ve $x' = x+2$ halinde l (2,x+2) nin hesabı için $l\,(1,x+1)$ yardımiyle aşağıdaki münasebetten istifade edilir :

$$l\,(2,x+2) = P_{x+1}\ l\,(1,x+1)$$

ve

$$l\,(2,x+2) + 0{,}5.\ 1800 = 900$$

bulunur.

S O N U Ç

Sürekli Markov zincirinin ana hatlarını belirterek küçük bir misalle tatbikatını gösterdik. Nüfusta yenilenme problemine temasla esas prensiplerine işaret ettik. Sonra sürekli Markov zincirinin nüfus problemine uygulanışını göstererek bir misalle açıklamaya çalıştık. Bu tarzda başlangıçta yaşlara göre bölünmesi bilinen bir şahıs topluluğunun, ölüm ihtimalleri yardımiyle belli bir devre sonra yaşlara göre bölünüşünü hesaplamak mümkün olabilmektedir.