DOĞRUSAL PROGRAMLAMA, SATIŞ SINIRLAYICILARI VE ÇIKTININ OPTİMUM KALİTESİ *

Çeviren :

Hans BREAMS **Ass. İmdat KARA**

Bu makale, alışılagelen girdi sınıflayıcılarının yerine satış sınırlayıcılarını koymakta ve kalitenin işlem sürecinde değişmesini kabul etmektedir. Bu varsayımlarla çıktının optimum kalitesi, doğrusal programlama ile saptanabilecektir.

GİRİŞ

Neoklâsik veya doğrusal programlamaya uygun türden standard bir firma modeli ürün kalitesini sabit varsayar. Gerçekte kalite bir değişkendir ve optimum kalitenin saptanması, işletme yöneticisi için en zorunlu sorunlardandır. Acaba firma modelimizi kalitenin bir değişken olduğu durumları da kapsayacak şekilde genelleştirebilir miyiz? Bazı kolaylaştırıcı varsayımlarla, böyle bir model kurmaya çalışacağız[1].

(*) Hans Breams, «Linear Programming, Sales Constraints, and Optimum Quality of Output», in. *Marketing and the New Science of Planning,* s. 63-74, Ed. by Robert L. King, American Marketing Association. Fall Conference Proceedings, 1968.

(1) Burada ele alınan şekliyle kalite sorunu, daha önceki «Product Equilibrium Under Monopolistic Equilibrium» ve «Input-Output Coefficients as Measures of Product Quality» adlı makalelerimdekilerden ayrılmaktadır. Yeni şeklin oluşumunu, Uppsala Üniversitesi profesörlerinden, Kristian S. Palda, Procter Thomsen ve Sune Carlson'un ısrarlı eleştirilerine borçlu bulunmaktayım. Daha kapsamlı açıklama *Quantitative Economic Theory* (New York, John Wiley and Sons, 1964) adlı eserimin 14. bölümünde verilmiştir.

Varsayımlar :

Birincisi, plânlanması yapılan gelecek yalnız bir dönemi içermektedir. *İkincisi,* bu dönemle ilgili herşeyde belirlilik hâkimdir. *Üçüncüsü,* işletme, yalnız bir kalitede mamül üretimine niyetli olup, bunun hangi kalitede olması gerektiğini araştırmaktadır. *Dördüncüsü,* üretimde kullanılacak girdi ve durağan varlıklar (taşınmaz üretim araçları) belirli bir kalitede olup, bunların elde tutulma olanakları sınırlıdır. Bu durumda işletmeci, istediği kalitede çıktı için kullanacağı girdi ve üretim araçlarının optimum miktarlarını araştırmaktadır[2]. *Beşincisi,* bütün üretim fonksiyonları doğrusal programlamaya uygun türdedir.

İŞARETLER :

Yukarıdaki basit varsayımlara rağmen, işimiz yine zordur. Matamatiksel işlemler kullanılmaksızın bir gelişme umamayız. Amacımıza ulaşabilmek için matematikten yararlanacağız. Bu sebeple, modelde kullanılacak işaretleri (sembolleri) sıralayalım :

Değişkenler :

a : her birim çıktı için kullanılacak girdi (girdi katsayısı)
b : her birim çıktı için kullanılacak durağan varlıklar payı (kapital katsayısı),
C : dönemsel (devrevî) mâliyet,
R : dönemsel satış hasılası.
S : elde tutulan durağan varlıklar tutarı,
x : dönemsel hammadde kullanımı,
X : bir dönemde üretilen ve satılan çıktı,
z : her birim üründen elde edilen kâr,
Z : dönemsel kâr,

Parametreler :

α, β : özel talep fonksiyonunun elâstikiyetleri,
N : özel talep fonksiyonunun çoğaltan faktörü,

(2) m farklı hammedde, n farklı taşınamaz üretim araçları ve neoklâsik üretim fonksiyonları hâli için bkz.: Hans Breams, *Quantitative Economic Theory,* New York, John Wiley and Sons, 1968, Bölüm : 14.

p : girdi fiyatı,
P : çıktı fiyatı,
r : bir birim durağan varlık için ödenen dönemsel kira tutarı,
τ : talebin kalite elâstikiyeti,

TEMEL FİKİR

Başlangıç noktamız, (birçoğumuzun üzerinde durmadığı) istatistikî kalite kontroludur. Bütün istatistikî kalite kontrolunun temelini oluşturan düşünce, üretim süreci verildiğinde çıktı kalitesinin belli bir aralıkta (kontrol limitleri) rastgele dağılabilmesidir. Verilen aralığın dışına sapıldığında süreç kontrolsuz demektir. İlk yaklaşım olarak, kalitenin belli limitler arasında bulunabileceğini bir tarafa bırakıp, üretim süreci hatasız olarak devam ettiği sürece, çıktı kalitesinin verilen bir ölçüde sabit kaldığını varsayalım.

Bu durumda, üretim sürecinin nasıl saptanacağı sorunu ortaya çıkmaktadır. Sürecin saptanışı, çıktı-zaman oranı X aracılığıyla, hammadde-zaman oranı x durağan varlıklar (S) aracılığıyla yapılabilir. X, x ve S birkez belirlendikten sonra, tanım gereği aşağıdaki eşitlikler yazılabilir :

$$x = aX \quad (1)$$

$$S = bX \quad (2)$$

Doğrusal programlamada herzaman yaptığımız gibi, dengeye yönelik artma ve eksilmelerin olmadığını varsayalım. Başka bir deyişle, verilen bir çıktı kalitesi için, girdi katsayısı a ve kapital katsayısı b değişmemektedir. O zaman, girdi katsayısı a ve kapital katsayısı b belirlendiklerinde, bunlara bağlı olarak yalnız bir çıktı kalitesi saptanabilir. Makalenin temel fikri burada toplanmaktadır. Bir (a, b) eşlemesi (ikilisi) ile değişik kalitede çıktı alınması gerçekten olanaksız mıdır? Rastgele sapmalar ve düzenleyici etkenler yoksa, sorunun cevabı «evet» olacaktır. Aksi takdirde süreç tam anlamıyla saptanmamış demektir. Bu durumda çözüm, daha ileri derecede bir öznelleştirme olabilir. Örneğin, girdilerin ve durağan varlıkların nerede ve ne zaman kullanılacağının öznelleştirilmesi gibi... (Otomobil karasörlerine boyadan önce astar vurulması gereği gibi).

Aynı (a, b) eşlemesi ile değişik kalitede ürün almak olanaksızken, değişik (a, b) eşlemelerine karşılık, aynı kalitede ürün almak olanaklıdır. Bu çok değişik soruna ilerde tekrar döneceğiz.

Kaliteye, öngörülen biçimde bakmak gerçekçil görünmektedir. Böylece optimizasyon sorunu sarih bir biçimde firmanın bakış açısından ortaya konmaktadır. Açıklıkla görüleceği gibi, firmanın alacağı sonuncu karar (a ve b) katsayılarının tam öznelleştirilmesi olacaktır. Meselâ, çıktıda daha iyi bir işçiliğe ulaşılmak isteniyorsa, daha büyük bir emek kirdi katsayısına, eğer daha büyük bir gerilim gücü isteniyorsa, daha büyük bir naylon girdi katsayısına ihtiyaç duyulacaktır. Petrol ayrışımında, firma yüksek oktanlı benzin elde etmek istiyorsa, daha büyük ayrışma sağlayacak kapital katsayısını kullanmak zorundadır.

GENEL BİR TALEP FONKSİYONU

Belirli bir üretim sürecinde, (a, b) eşlemesinin öznelleştirilmesinden sonra, ürün kalitesinin belirlendiğini söylemiştik. Belirli bir ürün kalitesi saptandıktan sonra, verilen bir P fiyatında oluşacak dönemsel talep miktarı da belirleniyor demektir.

Kalite üzerinde derinleşebilmek için firma açısından fiyatı bir değişken olarak alalım. Böylece fiyatın verilen bir kaliteye göre ayarlanmasını düşünmek yerine, kalitenin verilen bir fiyata göre ayarlandığını düşünelim. O takdirde, talebi yalnızca girdi ve kapital katsayılarının bir fonksiyonu olarak yazabiliriz :

$$X = X\ (a, b) \qquad (3)$$

(3) no'lu eşitlikle belirlenen fonksiyonun iki defa türevlenebileceği varsayılmıştır. Böyle bir varsayımın geçerliliği için bir takım nedenler ilerde verilecektir.

OPTİMUM KALİTE İÇİN GENEL BİR MODEL

Kâr, «hasılat eksi mâliyet» olarak tanımlandığından

$$Z = R - C \qquad (4)$$

olur. Hasılat, «çıktı fiyatı çarpı satılan ürün miktarı» olacağından:

$$R = PX \qquad (5)$$

dir. Maliyet, girdinin parasal değeri ve kira bedeli olarak :

$$C = px + rS \qquad (6)$$

dir. Brüt kâr, satılan her birimden oluşan kâr cinsinden :

$$Z = zX \qquad (7)$$

olur. (1), (2), (4), (6) ve (7) no'lu eşitliklerin ortak çözümünden :

$$z = P - (pa + rb) \qquad (7a)$$

elde edilir (3). Amacımız, (Z) yi maximum kılan (a) ve (b) değerlerini bulmak olduğuna göre, (Z) nin (a) ve (b) ye göre birinci kısmî türevlerini alıp bunları sıfıra eşitleyelim :

$$\frac{\partial Z}{\partial a} = z \frac{\partial X}{\partial a} - p X = o \qquad (8)$$

ve

$$\frac{\partial Z}{\partial b} = z \frac{\partial X}{\partial b} - r X = o \qquad (9)$$

Diğer taraftan α ve β sırasiyle girdi ve kapital katsayılarına göre talep elâstikiyeti olsun. (8) ve (9) u kullanarak :

$$\alpha = \frac{\partial X}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial}{X} = \frac{P a}{z} \qquad (10)$$

ve

$$\beta = \frac{\partial X}{\partial b} \cdot \frac{b}{X} = \frac{r b}{z} \cdot \qquad (11)$$

elde edilir.

---

(3) Çevirenin notu : Açıklık kazandırmak için 7a) nın çıkartılışı aşağıda gösterilmiştir :

(4) ve (7) den :

$$R - C = z X$$

yazılır, C yerine (6) no'lu eşitlikteki değeri konursa :

$$R - p x - rS = z X$$

elde edilir. x ve S yerine, sıra ile (1) ve (2) ile belirtilen eşitlikleri yazar, elde edilen eşitliğin iki tarafını X il bölersek, (7a) elde edilir.

Girdi ve kapital katsayıları o şekilde saptanmalıdır ki satılan her birim çıktıya yapılan maşraf; kâr marjı, girdi ve kapital katsayılarını talep elâstikiyetine eşitleyen bir kesri olsun. Görüleceği gibi, (3) no'lu talep denklemi açık olarak belirlenmedikçe, girdi ve kapital katsayıları için geçerli bir çözüm bulmak olanaksızdır.

Kâr fonksiyonunun maximumunu araştırırken, ikinci özellikte fonksiyonun ikinci kısmî türevlerinden oluşan, ikinci mertebeden Hessian determinantının pozitif olması gereklidir. Yani :

$$H = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 Z}{\partial a^2} & \dfrac{\partial^2 Z}{\partial a\, \partial b} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 Z}{\partial b\, \partial a} & \dfrac{\partial^2 Z}{\partial b^2} \end{vmatrix}$$

determinatı pozitif olmalıdır. Buna ek olarak, determinatın ikinci satır ve ikinci sütununu çıkardığımızda kalan terim olan $\dfrac{\partial^2 Z}{\partial a^2}$ negatif olmalıdır.

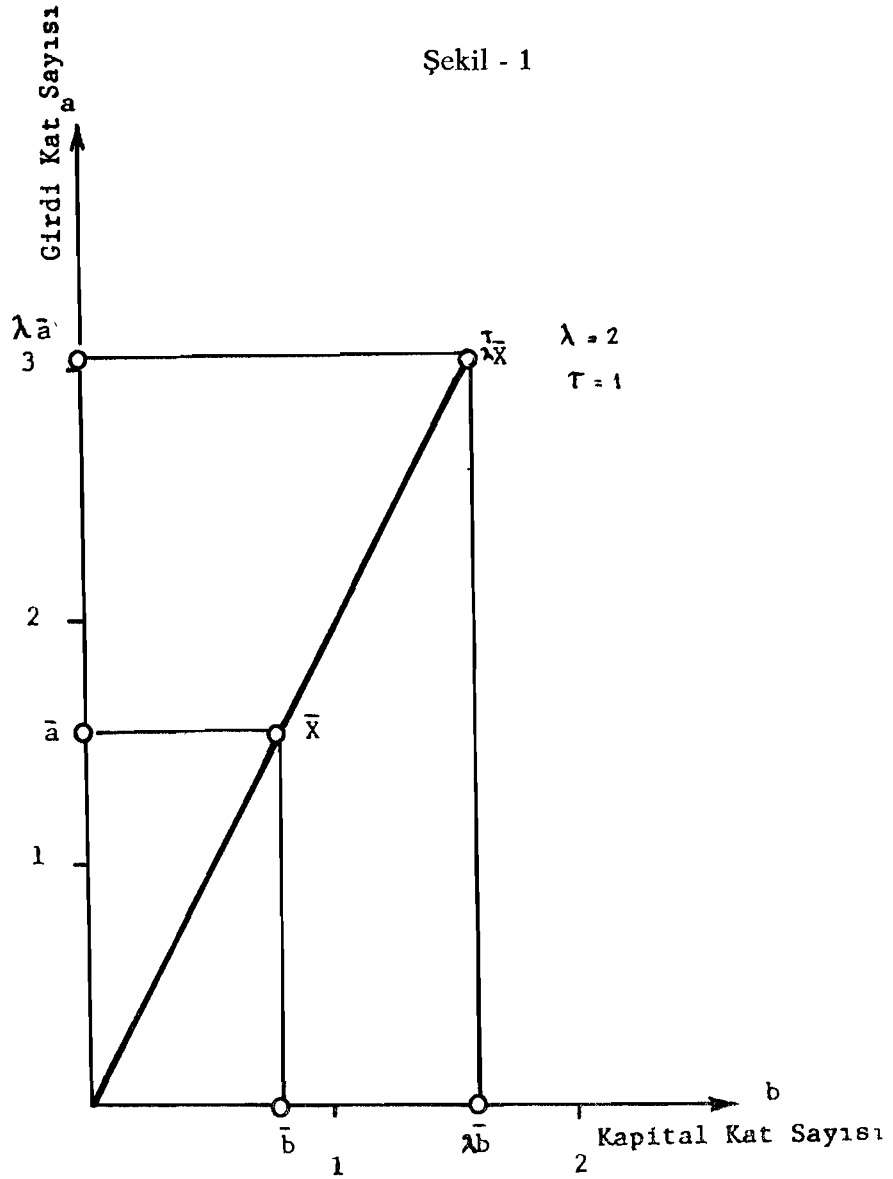
ÖZEL BİR TALEP FONKSİYONU

Katsayıları belirlenmemiş bir talep fonksiyonu için söyleyeceklerimiz bu kadardı. Şimdi katsayıları belirlenmiş bir talep fonksiyonu üzerinde çalışabiliriz.

Belirlenmiş bir $(\bar{a}, \bar{b})$ eşlemesi alalım. Bu katsayılar bir kere oluştuktan sonra çıktı kalitesi de bunlara bağlı olarak bulunmuş olacaktır. Üretim yapıldığında, belirlenen bir kaliteye $\bar{X}$ kadar bir talep olduğunu kabul edelim. Üretim fonksiyonunda olduğu gibi $(\bar{a}, \bar{b})$ eşlemesini, doğrusal programlamacılar olarak, (1) ve (2) no'lu denklemlerde çıktı ile girdi ve çıktı ile kapital (sabit sermaye) arasında orantılar kuracak süreci tanımlayan bir tarzda alalım.

Alışılagelen doğrusal programlama modellerinde bazı girdi ve sabit sermayelerin kullanımının değişmeyeceği varsayılırken diğer sınırlayıcılar (örneğin satış sınırlayıcıları) göz önüne alınmamaktadır. Satış sınırlayıcılarının yokluğu ya tam rekabetin varlığı yahut da girdi sınırlayıcıları ne olursa olsun bunların çıktı sınırlayıcılarını saptadığı ve çıktı sınırlayıcılarının pazarın tüketim gücünden daha dar olduğu gibi zımmî varsayımlarla açıklanabilir. Biz bu zımnî varsayımların ikisini de geçerli bulmadığımızdan, alışılagelen girdi sınırlayıcılarının yerine satış sınırlayıcılarının geçmesini daha olumlu görüyoruz.

Şekil - 1



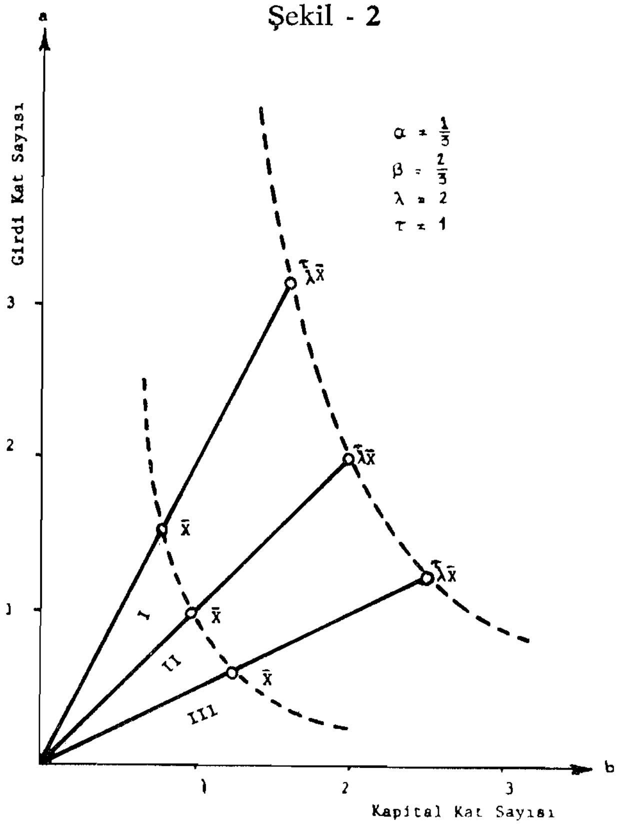
O halde herhangi bir süreç için bir satış sınırlayıcısı, bu süreçle elde edilecek çıktıya olan talebi belirleyecektir. Girdi ve durağan varlıklar katsayılarının ($\bar{a}, \bar{b}$) belirlediği kaliteye (uygulanan süreçle elde edilen çıktının kalitesine) olan talep miktarına $\bar{X}$ demiştik. Ekşenleri girdi ve kapital katsayıları (a, b) olan bir koordinat sisteminde şekil - I'de olduğu gibi koordinatları ($\bar{a}, \bar{b}$) olan bir ($\bar{X}$) noktasını işaretleyelim.

Daha sonra, çıktının kalitesinin değiştiğini düşünelim. Daha önce belirlenen ($\bar{a}$, b) yerine ($\lambda\bar{a}, \lambda\bar{b}$) eşlemesini alalım. Burada $0 < \lambda < 1$ veya $\lambda > 1$ dir. Böyle yeni girdi ve kapital katsayıları verildiğinde bunlara bağlı olarak yeni çıktı kalitesi belirlenecektir. Böyle bir süreçte üretime geçildiğinde yeni kalitedeki çıktıya olan talep λ^{τ} X olsun; $\tau > 0$'dır. Şekil - I'de koordinatları $\lambda\bar{a}, \lambda\bar{b}$) olan noktayı λ^{τ} X ile gösterelim.

Şimdiye kadar incelenen üretim süreçleri girdi katsayısı, kapital katsayısı, çıktının kalitesi ve talep miktarına göre farklılık göstermelerine rağmen girdi katsayısı ile kapital katsayısı arasındaki oranlar hepsi için aynıdır. Şekil - I'de uygulanan farklı iki süreç, eğimi $\bar{a}/\bar{b}$ olan ayni doğru üzerinde bulunmaktadırlar. Girdi ve kapital katsayıları arasında değişik oranlar bulunan süreçlerin de bulunacağı muhakkaktır. Hatta uygulanan doğrusal programlama modellerinde de bu tür değişik oranlara sahip, fakat ayni kalitede çıktı veren süreçlere rastlanmaktadır. Şimdi örneğimizi, işletme yöneticisinin, birbirleriyle aynı veya farklı kalitede çıktı veren birkaç üretim sürecinden birini seçeceği şeklinde genişletelim. Şekil - II'de I doğrusu ayni iki süreci; II doğrusu farklı iki yeni süreci ve III doğrusu başka iki yeni süreci göstermektedir.

Şimdi ayni talep miktarını doğuran kaliteleri veren süreçleri işaretleyip bunları bir eğri halinde birleştirelim. Bu cinsten iki iso- X eğrisi, biri X talep miktarını, diğeri de λ^{τ} X talep miktarı için kesik çizgili eğriler halinde Şekil - II'de çizilmiştir. Bu tür düzgün sürekli iso- X eğrisini düşünmek çok daha az itirazla karşılanacak bir davranış olacaktır. Biraz cüretkâr davranıp böyle bir eğrinin varlığını kabullenelim. Hattâ biraz daha cüretkâr davranıp

Şekil - 2



bunların hepsini içeren sabit elâstikiyetli (elâstikiyetleri belirli) bir talep fonksiyonunu varsayalım :

$$X = N a^{\alpha} \; b^{\beta} \qquad (3a)$$

[Burada $0<\alpha<\tau$, $0<\beta<\tau$, $\alpha+\beta=\tau$ ve $N>0$ dır.]

(3a) yı $a\geqslant 0$, $b\geq 0$ ve $X\geqslant 0$ olmak koşuluyla kabullenelim. Şekil - II, (3a) nın $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{2}{3}$, $\lambda = 2$ ve $\tau = 1$ olduğu durumu göstermektedir.

(λ)'nın kuvveti olarak karşımıza çıkan (τ)'nın ekonomik anlamı nedir? Girdi ve kapital katsayısı (λ) oranında arttığında talep miktarı λ^{τ} kadar arttığına göre, (τ) talebin kalite elâstikiyetini göstermektedir. Eğer $\tau<1$ ise talep kalite yönünden gayri elâstik,

$\tau > 1$ ise elâstik ve $\tau = 1$ ise talep birim kalite elâstikiyetine sahip demektir.

Türselleştirilmiş bazı şartlarda (3a) talep fonksiyonu ayni (a, b) eşlemesinin değişik X değerleri vermesini önler. Girdi ve kapital katsayıları birkere belirlendikten sonra bunlara bağlı olarak çıktının kalitesi de belirlenir. Çıktı kalitesinin belirlenmesi ile buna olan talebin miktarı da belirlenmiş olur.

Şu da var ki X'in verilen bir değeri için sonsuz sayıda (a, b) ikilisi (3a) yı sağlıyacaktır. Belirli X değeri için (3a) yı sağlıyan a-b düzlemindeki her ikili, iso- X eğrisinin oluşturduğu hiperbol üzerinde bir noktadır. Böyle bir iso- X hiperbolünün her noktasında çıktı kalitesi aynı olacak mıdır? Hayır, kalitenin ayni olması lâzım gelmez. Fakat aynı miktarda talep edildiklerine göre kaliteler nasıl değişebilir? Kalite farkı tüketicinin farkedemeyeceği kadar önemsizdir, veya kalite farkı tüketici tarafından farkedilse bile ya onun için üzerinde durmaya değmeyecek kadar önemsizdir, ya da —madem ki bütün tüketiciler bir değildir— kalite farkı, kaybettirdiği talep kadar yeni talep çekeceğinden, bu tür değişiklik kolaylıkla olabilir.

OPTİMUM KALİTENİN SAPTANMASINDA ÖZEL BİR MODEL

(3a) yı (10)'a ve (11)'e uygulayıp (7a)'yı da kullanarak (10) ve (11)'i tekrar aşağıdaki şekilde yazalım :

$$\frac{1+\alpha}{\alpha} pa + rb = P \tag{13}$$

ve

$$pa + \frac{1+\beta}{\beta} rb = P \tag{14}$$

(13) ve (14) ile değişkenli (a ve b) açık bir doğrusal bağıntı (denklem) bulunmuştur. a ve b'yi çözersek :

$$a = \frac{P}{p} \frac{\alpha}{1+\alpha+\beta} \tag{15}$$

ve

$$b = \frac{P}{r} \frac{\beta}{1+\alpha+\beta} \tag{16}$$

bulunur.

Bulunan bu çözüm bir hayli kolaylık sağlayacaktır. Şöyle ki : eğer çıktının fiyatı, P, iki kat olacak şekilde artarsa, işletmeci girdi ve kapital katsayılarını iki kat olacak şekilde artırmakla kaliteyi fiyata uyduracaktır.

Eğer girdi fiyatı p iki kat olursa, işletmeci girdi katsayısını yarıya indirip kapital katsayısını aynı tutacaktır. Son olarak; eğer talep girdi katsayısına karşı daha duyarlıklı hale gelirse, yâni α yükselirse, işletmeci girdi katsayısını yükseltecek, fakat kapital katsayısını azaltacaktır. Ama şayet talep kapital katsayısına duyarlıklı hale gelirse, yâni β yükselirse, bu kez tam tersi olacaktır.

Talep denklemi (3a)'ya konan sınırlamalar, denkleme, talep elâstikiyetinin negatif olduğu durumlarda girdi ve kapital katsayılarını katmamızı önlemişti. Şimdi (15) ve (16)'dan bu tür sınırlamaların niçin önemli olduğunu görebiliriz. Bu sınırlamalar olmadığı takdirde (15) ve (16) negatif olabilirdi. Bunların negatif olması halinde talep denklemi (3a)'da sıfır üzeri sıfır veya sanal sayılar bulunabilecektir. α ve β elâstikiyetleri, P, p fiyatları ve r pozitif olduğu sürece (15) ve (16) pozitif ve tek bir değer verecektir.

Böyle bir durumsa bizim işimize yarar. (15) ve (16) açıklıkla *hangi kalitenin* ve *nasıl* üretilebileceğini göstermektedir.

İKİNCİ DERCEDEN KOŞULLAR

Geriye, yapılacak tek iş olarak ikinci dereceden koşulların sağlanıp sağlanmadığının tesbiti kalıyor. Sabırlı bir okuyucu Hessian (12)'nin elemanlarını rahatlıkla bulabilir (4) :

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial a^2} = - \frac{1+\alpha}{a} pX$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial b^2} = - \frac{1+\beta}{b} rX$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial a\, \partial b} = - \frac{\alpha}{a} r X$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial a\, \partial b} = - \frac{\beta}{b} p X$$

Görüldüğü gibi birinci eleman negatiftir. Hessian determinantının değeri ise :

$$H = \frac{1+\alpha+\beta}{a\, b} p\, r\, X^2 \qquad (12a)$$

olur ki, pozitiftir. Böylece ikinci dereceden koşullar da sağlanmış olmaktadır.

---

(4) *Çevirenin notu:* Her ne kadar makalede, Hessian determinantının elemanlarının bulunuşu okuyucuya bırakılmış ise de, açıklık kazandırmak için bu elemanlardan birinin bulunuşu aşağıda gösterilmiştir:

(8) no'da $\frac{\partial Z}{\partial a} = z \frac{\partial X}{\partial a} - pX$

olarak verilmişti. Eşitliğin iki tarafının (a)'ya göre bir kez daha türevini alalım,

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial a^2} = -p \frac{\partial X}{\partial a} + z \frac{\partial^2 X}{\partial a^2} - p \frac{\partial X}{\partial a}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial a^2} = -2p \frac{\partial X}{\partial a} + z \frac{\partial^2 X}{\partial a^2}$$

olur. Diğer taraftan,

$$X = N a^{\alpha} b^{\beta} \Rightarrow \frac{\partial X}{\partial a} = N \alpha\, a^{\alpha-1} b^{\beta}$$

ve

$$\frac{\partial^2 X}{\partial a^2} = N \alpha (\alpha-1)\, a^{\alpha-2} b^{\beta}$$

dır. Bulmuş olduğumuz değerleri yerine koyarsak,

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial a^2} = -2pN\alpha\, a^{\alpha-1} b^{\beta} + 2N\alpha(\alpha-1)\, a^{\alpha-2} b^{\beta}$$

olur. (10)'dan $\alpha = \frac{pa}{z}$ iken $Z = \frac{pa}{\alpha}$ bulunur. (z)'nin bu değerini yukardaki eşitlikte yerine koyarsak,

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial a^2} = -2pN\alpha\, a^{\alpha-1} b^{\beta} + \frac{pa}{\alpha} N\alpha(\alpha-1)\, a^{\alpha-2} b^{\beta}$$

elde edilir. Birinci terimde,

$$N\, a^{\alpha-1}\, b^{\beta} = \frac{X}{a}$$

ve ikinci terimde,

$$N\, a^{\alpha-2}\, b^{\beta} = \frac{X}{a^2}$$

olduğundan,

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial a^2} = -\,2p\,\alpha\,\frac{X}{a} + \frac{p\,a}{\alpha}(\alpha-1)\,\alpha\,\frac{X}{a^2}$$

olur. Kısaltmalar yapılıp tek kesir haline getirilirse:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial a^2} = -\,\frac{1+\alpha}{a}\,p\,X$$

elde edilir.