G.Ü. Fen Bilimleri Dergisi ISSN 1303-9709 *G.U. Journal of Science*
17(2): 53-61 (2004) *17(2):53-61 (2004)*

CARDINAL EXTENSION OF THE POINT-COUNTABLE BASE PROBLEM

Çetin VURAL
Gazi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 06500-Teknikokullar, Ankara, TÜRKİYE e-mail: cvural@gazi.edu.tr

ABSTRACT

In (1), a study based on pointed open covers was made in order to solve "the point-countable base problem". In this paper, some extensions of the results in that study is obtained and the problem is transformed into "point≤κ base" problem where κ is an infinite cardinal.

Key Words: Point-countable, point≤κ, G-condition.

NOKTA-SAYILABİLİR TABAN PROBLEMİNİN KARDİNAL GENİŞLEMESİ

ÖZET

Nokta-sayılabilir taban probleminin çözümüne yönelik (1)' de yapılmış olan, noktalanmış açık örtüye dayalı, çalışmaların kardinal genişlemeleri elde edilmiş ve bu problem, κ sonsuz bir kardinal sayı olmak üzere, nokta≤κ taban problemine dönüştürülmüştür. $\mathcal{W}$ $\mathcal{A}$ $\mathcal{B}$ $\mathcal{V}_\alpha$

Anahtar Kelimeler: Nokta-sayılabilir, nokta≤κ, G-koşulu.

1. GİRİŞ VE NOTASYON

Bu çalışmada X ile bir T_1-topolojik uzay, κ ile sonsuz bir kardinal sayı, κ^+ ile κ kardinalinden sonra gelen ilk kardinal sayı, ω ile ilk sonsuz kardinal ve ω_1 ile ilk sayılamaz kardinal gösterilecektir. Herhangi bir A kümesinin kardinalitesi $|A|$ ile gösterilecektir.

X uzayının her x elemanı için x' i içeren bazı altkümelerden oluşan W (x) ailesi verilsin ve $\mathcal{W}=\{\mathcal{W}(x) : x\in X\}$ olsun. Eğer her $x\in X$ için $|\mathcal{W}(x)|\leq\kappa$ ise ve
" eğer $x\in U$ ve U açık ise x' i içeren öyle bir V(x,U) açığı vardır ki X' in $y\in V(x,U)$ biçimindeki her y elemanı için $x\in \mathcal{W}\subseteq U$ olacak biçimde bir $W\in\mathcal{W}(y)$ vardır" koşulu sağlanıyorsa $\mathcal{W}$ sistemi (G_κ)-koşulunu sağlıyor denir. $\kappa=\omega$ ise $\mathcal{W}$ sistemi (G)- koşulunu sağlıyor denir. Eğer (G_κ)-koşulunu sağlayan $\mathcal{W}$ sistemindeki $\mathcal{W}$ (x) aileleri X'in açık altkümelerinden oluşuyorsa bu durumda $\mathcal{W}$ sistemi açık (G_κ)-koşulunu sağlıyor denir.

$\mathcal{A}$ X' in altkümelerinin bir ailesi olmak üzere, eğer her $x\in X$ için
$|\{A\in\mathcal{A} : x\in A\}|\leq\kappa$ ise $\mathcal{A}$ ailesine nokta≤ κ , $\kappa=\omega$ için nokta-sayılabilir aile denir. Eğer her $x\in X$ için $|\{A\in\mathcal{A} : U\cap A\neq\emptyset\}|\leq\kappa$ olacak biçimde x' in bir U komşuluğu varsa $\mathcal{A}$ ailesine yerel≤ κ , $\kappa=\omega$ için yerel-sayılabilir aile denir.

$\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ X' in altkümelerinden oluşan aileler olmak üzere eğer $\bigcup\mathcal{A}=\bigcup\mathcal{B}$ ve her $B\in\mathcal{B}$ için $B\subseteq A$ olacak biçimde bir $A\in\mathcal{A}$ varsa $\mathcal{B}$ ailesine $\mathcal{A}$ ailesinin incelmişi (refinement) denir.

1. INTRODUCTION AND TERMINOLOGY

All through this paper X is a T_1-topological space, κ is an infinite cardinal number, κ^+ is the smallest cardinal after κ, ω is the first infinite cardinal and ω_1 is the first uncountable cardinal. For a set A, the cardinality of A is denoted by $|A|$, and the closure of A is denoted by $\overline{A}$.

Let $\mathcal{W}(x)$ be a family of subsets containing x for all x in X, and let
$\mathcal{W}=\{\mathcal{W}(x) : x\in X\}$. We say that $\mathcal{W}$ satisfies (G_κ) when
$|\mathcal{W}(x)|\leq\kappa$ for all x in X and W satisfies
"if $x\in U$ and U is open, then there exists an open set V=V(x,U)
containing x such that $x\in W\subseteq U$ for some $W\in\mathcal{W}(y)$ whenever $y\in V$"
We say that $\mathcal{W}$ satisfies (G), if $\kappa=\omega$ in the above definition.
It is also said that W satisfies open (G_κ), if $\mathcal{W}$ satisfies (G_κ) and each element of each $\mathcal{W}(x)$ is open.

Let $\mathcal{A}$ be a family of subsets of X. $\mathcal{A}$ is said to be point≤κ , if
$|\{A\in\mathcal{A} : x\in A\}|\leq\kappa$ for each point $x\in X$; if $\kappa=\omega$ $\mathcal{A}$ is a point countable family. $\mathcal{A}$ is said to be locally≤κ, if for every x in X, there is a neighbourhood U of x such that
$|\{A\in\mathcal{A} : U\cap A\neq\emptyset\}|\leq\kappa$; if $\kappa=\omega$, $\mathcal{A}$ is a locally countable family.

Let $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ be families of subsets of X. We will say that $\mathcal{B}$ is a refinement of $\mathcal{A}$, if $\bigcup\mathcal{A}=\bigcup\mathcal{B}$ and for every B in $\mathcal{B}$ there is an A in $\mathcal{A}$ such that $B\subseteq A$.

Burada yer almayan kavram ve notasyonlar (3) ve (4)' de bulunabilir.

Açık (G)-koşulunu sağlayan bir $\mathcal{W}$ sistemine sahip olan topolojik uzayların nokta-sayılabilir bir tabana sahip olduğu genel bir kanı olmakla birlikte halen çözülememiş bir problemdir. Bu probleme (1)'de noktalanmış açık örtü kavramıyla yaklaşılmış ve yazarlar bazı önemli sonuçlar elde etmişlerdir. Bu makalede (1)'deki sonuçların sonsuz bir κ kardinali için genişlemeleri elde edilmiştir.

We refer to (3) and (4) for unexplained terminology and notations.

Although, it is a common preconception that topological spaces having $\mathcal{W}$ satisfying (G) have a point-countable base, it has never been proved. As in (1), some approached this problem with the notion of pointed open cover and got important results. In this paper we extend those results to an infinite cardinal κ.

2. AÇIK (G_κ)-KOŞULU VE UZAYIN NOKTA $\leq\kappa$ TABANI

Eğer X uzayının bir $\mathcal{B}$ nokta$\leq\kappa$ tabanı varsa o zaman her $x\in X$ için $W(x)=\{B\in \mathcal{B}: x\in B\}$denilirse $\mathcal{W}=\{\mathcal{W}(x): x\in X\}$ sistemi açık (G_κ)-koşulunu sağlar.Yani nokta$\leq\kappa$ tabana sahip olan her topolojik uzayın açık (G_κ)-koşulunu sağlayan bir $\mathcal{W}$ sistemi vardır. Bu çalışmada bunun tersinin hangi koşullar altında doğru olduğu (1) deki çalışmaların kardinal genişlemelerini elde etmek suretiyle incelenecektir. Bu amaçla öncelikle aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 2.1. (X,τ) bir topolojik uzay, $\wp \subseteq X\times\tau$ olmak üzere eğer $\{U : \exists\ x\in X,\ (x,U)\in\wp\}$ ailesi X için örtü oluyorsa $\wp$' ye X uzayının noktalanmış açık örtüsü(pointed open cover) denir. Eğer her $y\in X$ için $|\{(x,U)\in\wp : y\in U\}|\leq\kappa$ ise $\wp$ ye nokta $\leq\kappa$ ve eğer her $y\in X$ için $y\in\overline{\{x:(x,U)\in\wp,\ y\in U\}}$ ise $\wp$'ye yoğun denir.

Nokta$\leq\kappa$ taban ile noktalanmış açık örtü ve (G_κ)-koşulu arasındaki ilişki aşağıdaki lemma ile verilecektir.

Lemma 2.2. X bir topolojik uzay olsun.

i) X' in nokta $\leq\kappa$ tabanı varsa X in yoğun ve nokta $\leq\kappa$ olan bir noktalanmış açık örtüsü vardır.

ii) X' in açık (G_κ)-koşulunu sağlayan bir $\mathcal{W}$ sistemi var ve X in yoğun ve nokta$\leq\kappa$ olan bir noktalanmış açık örtüsü varsa X in bir nokta $\leq\kappa$ tabanı vardır.

İspat. i) $\mathcal{B}$ X uzayının bir nokta $\leq\kappa$ tabanı olsun ve $\mathcal{B}$ nin boş olmayan her U elemanından bir x_u elemanı seçerek $\wp=\{(x_u,U) : U\in\mathcal{B}\setminus\{\varnothing\}\}$ kümesini oluşturalım. $\mathcal{B}$ taban olduğundan $\wp$ noktalanmış açık örtüdür.Ayrıca $\mathcal{B}$ nokta $\leq\kappa$ olduğundan her $y\in X$ için $|\{U\in\mathcal{B} : y\in U\}|\leq\kappa$ olup her $y\in X$ için $|\{x_u,U)\in\wp: y\in U\}|\leq\kappa$ dır ve böylece $\wp$ nokta $\leq\kappa$ dır. $\wp$ nin yoğun olduğu da kolayca görülebilir.

ii) $\mathcal{W}=\{\mathcal{W}(x) : x\in X\}$ sistemi açık (G_κ)-koşulunu sağlasın ve $\wp$ X' in yoğun ve nokta$\leq\kappa$ olan noktalanmış açık örtüsü olsun.

$\mathcal{B}=\{U\cap W : \exists x\in X\ (x,U)\in\wp$ ve $W\in\mathcal{W}(x)\}$ olsun. $\wp$ nokta$\leq\kappa$ olduğundan her $y\in X$ için $|\{(x,U)\in\wp: y\in U\}|\leq\kappa$ ve her $x\in X$ için $|\mathcal{W}(x)|\leq\kappa$ olduğundan $\mathcal{B}$ ailesi nokta$\leq\kappa$ dır. O halde $\mathcal{B}$ nin taban olduğunu görelim.

$x\in X$ ve O X'in açık bir altkümesi olmak üzere $x\in O$ olsun. $\mathcal{W}$ sistemi (G_κ)-koşulunu sağladığından $x\in V(x,O)$ olacak biçimde bir $V(x,O)$ açığı vardır. $\wp$ yoğun olduğundan $x\in\overline{\{y:(y,U)\in\wp,\ x\in U\}}$ dır. O halde $(y,U)\in\wp$, $x\in U$ ve $y\in V(x,O)$ olacak biçimde bir $y\in X$

2. ON THE RELATIONS OF $\mathcal{W}$ SATISFYING OPEN (G_κ) AND POINT$\leq\kappa$ BASE

If X has a point$\leq\kappa$ base $\mathcal{B}$ then X has W satisfying open (G_κ). (By defining $W(x)=\{B\in\mathcal{B}: x\in B\}$ for each $x\in X$, it is clear that $\mathcal{W}=\{\mathcal{W}(x): x\in X\}$ satisfies open (G_κ)).

In this paper, the structure cited above and conditions for which the converse is true, as treated in (1), would be extended to an infinite cardinal κ.

Definition 2.1. Let (X,τ) be a topological space and $\wp\subseteq X\times\tau$. $\wp$ is called pointed open cover for X, if the family $\{U : \exists x\in X,\ (x,U)\in\wp\}$ is a cover for X. $\wp$ is said to be point$\leq\kappa$, if $|\{(x,U)\in\wp: y\in U\}|\leq\kappa$ for each point $y\in X$, and dense if for each point $y\in X$, $y\in\overline{\{x:(x,U)\in\wp,\ y\in U\}}$.

The relation between point$\leq\kappa$ and pointed open cover and (G_κ) is given in the following lemma.

Lemma 2.2. Let X be a topological space.

i) If X has a point$\leq\kappa$ base, then X has a dense, point$\leq\kappa$, pointed open cover.

ii) If X has $\mathcal{W}$ satisfying open (G_κ) and a dense, point$\leq\kappa$, pointed open cover, then X has a point$\leq\kappa$ base.

Proof. i) Let $\mathcal{B}$ be a point$\leq\kappa$ base of X. Choose an $x_u\in U$ for each non-empty element U of $\mathcal{B}$ and define $\wp=\{(x_u,U) : U\in\mathcal{B}\setminus\{\varnothing\}\}$. As $\mathcal{B}$ is a base, $\wp$ is a pointed open cover. Since $\mathcal{B}$ is point$\leq\kappa$, we have $|\{U\in\mathcal{B} : y\in U\}|\leq\kappa$ for each $y\in X$, and then $|\{x_u,U)\in\wp: y\in U\}|\leq\kappa$ for each $y\in X$. So, $\wp$ is point$\leq\kappa$. It is easily seen that $\wp$ is dense.

ii) Let $\wp$ be a dense, point$\leq\kappa$, pointed open cover for X. Define $\mathcal{B}=\{U\cap W : \exists x\in X\ (x,U)\in\wp$ and $W\in\mathcal{W}(x)\}$. Since $|\mathcal{W}(x)|\leq\kappa$ for each $x\in X$, and $|\{(x,U)\in\wp: y\in U\}|\leq\kappa$ for each $y\in X$, the family $\mathcal{B}$ is point$\leq\kappa$. To see that $\mathcal{B}$ is a base, consider any $x\in X$ and any open set O containing x. As $\mathcal{W}$ satisfies (G_κ), there is an open set $V(x,O)$ containing x. Since $\wp$ is dense, we have $x\in\overline{\{y:(y,U)\in\wp,\ x\in U\}}$. So, we have a $y\in X$ such that $(y,U)\in\wp$, $x\in U$ and $y\in V(x,O)$. $y\in V(x,O)$ led us to the fact that $x\in W\subseteq O$ for some $W\in\mathcal{W}(y)$, and $x\in W\cap U\subseteq O$. Thus $\mathcal{B}$ is a base of X.

Therefore, the point$\leq\kappa$ base problem (that is; has every topological space with $\mathcal{W}$ satisfying open (G_κ) a point$\leq\kappa$

vardır. $y\in V(x,O)$ olduğundan $x\in W \subseteq O$ olacak biçimde bir $W\in \mathcal{W}(y)$ vardır. Böylece $x\in W\cap U \subseteq O$ olup $\mathcal{B}$ X için bir tabandır.

Böylece nokta≤κ taban problemi yani açık (G_κ)-koşulunu sağlayan bir $\mathcal{W}$ sistemine sahip olan topolojik uzayların nokta≤κ tabana sahip olup olmadığı problemi, açık (G_κ)-koşulunu sağlayan bir $\mathcal{W}$ sistemine sahip olan topolojik uzayların yoğun ve nokta≤κ olan bir noktalanmış açık örtüsünün var olup olmadığı problemine indirgenmiş olur.

Şimdi de bir sonraki teoremde kullanılmak üzere aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 2.3. X topolojik uzayının (G_κ)-koşulunu sağlayan bir $\mathcal{W}$ sistemi varsa X uzayının her açık örtüsünün nokta ≤ κ açık incelmişi vardır.

İspat. τ bir kardinal sayı olmak üzere $\vartheta=\{O_\alpha : \alpha<\tau\}$ ailesi X uzayı için herhangi bir açık örtü olsun. Her $\alpha<\tau$ için $P_\alpha = O_\alpha \setminus \bigcup\{O_\beta : \beta<\alpha\}$ ve $V(x,O_\alpha)$ kümesi (G)-koşulundan gelen açık küme olmak üzere $V_\alpha = \bigcup\{V(x,O_\alpha) : x\in P_\alpha\}$ olsun. $\mathcal{V}=\{V_\alpha : \alpha<\tau\}$ denilirse $\mathcal{V}$ ailesinin ϑ açık örtüsünün nokta ≤κ açık incelmişi olduğunu görmek kolaydır.

Aşağıdaki tanım yarı-katmanlanabilir (semi-strafiable) uzay (1) kavramından daha zayıftır ve, doğal sayılar yerine herhangi bir sonsuz κ kardinali ile tanımlandığından, daha geniştir.

Tanım 2.4. (X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere eğer öyle bir $G:\kappa\times X\to\tau$ fonksiyonu var ve eğer

i) Her $x\in X$ ve her $\alpha<\kappa$ için $x\in G(\alpha,x)$

ii) $y\in X$ ve $\{x_\alpha : \alpha<\kappa\}\subseteq X$ olmak üzere eğer her $\alpha<\kappa$ için $y\in G(\alpha,x_\alpha)$ iken $y\in\overline{\{x_\alpha:\alpha<\kappa\}}$

koşulları sağlanıyorsa X uzayına zayıf κ-yarı-katmanlanabilir topolojik uzay denir.

Teorem 2.5. X topolojik uzayı zayıf κ-yarı-katmanlanabilir ve X' in (G_κ)-koşulunu sağlayan bir $\mathcal{W}$ sistemi varsa X' in yoğun ve nokta ≤κ olan bir noktalanmış açık örtüsü vardır.

İspat. G fonksiyonu yukarıda tanımlandığı gibi olsun. Her $\alpha<\kappa$ için $\vartheta_\alpha=\{G(\alpha,x):x\in X\}$ ailesi X uzayı için bir açık örtüdür. O halde yukarıdaki lemmadan her $\alpha<\kappa$ için ϑ_α açık örtüsünün bir $\mathcal{V}_\alpha$ nokta≤ κ açık incelmişi vardır. $\alpha<\kappa$ olsun. Her $V\in\mathcal{V}_\alpha$ için $V\subseteq G(\alpha,x_V)$ olacak biçimde bir $x_V\in X$ seçelim. $\wp=\{(x_V,V) : V\in\mathcal{V}_\alpha$ ve $\alpha<\kappa\}$ olsun. Her $\alpha<\kappa$ için $\mathcal{V}_\alpha$ açık örtü olduğundan $\wp$ noktalanmış açık örtüdür ve her $\alpha<\kappa$ için $\mathcal{V}_\alpha$ nokta≤ κ olduğundan $\wp$ nokta≤ κ dır. O halde $\wp$ nin yoğun olduğunu görelim. $y\in X$ olsun. Her $\alpha<\kappa$ için V_α örtü olduğundan her $\alpha<\kappa$ için $y\in V_\alpha$ olacak biçimde bir $V_\alpha\in\mathcal{V}_\alpha$ vardır. Her $\alpha<\kappa$ için $x_{V_\alpha}=x_\alpha$ denilirse her $\alpha<\kappa$ için $y\in G(\alpha,x_\alpha)$ olur ve $y\in\overline{\{x_\alpha:\alpha<\kappa\}}$ dir. $\{x_\alpha:\alpha<\kappa\}\subseteq\{x_\alpha:(x_\alpha,V_\alpha)\in\wp,\ y\in V_\alpha\}$ olduğundan $\wp$ yoğundur.

Eğer X uzayının bir $\mathcal{B}$ nokta≤ κ tabanı varsa, her $x\in X$ için $\mathcal{W}(x)=\{B\in\mathcal{B} : x\in B\}$ olmak üzere $\mathcal{W}=\{\mathcal{W}(x) : x\in X\}$ denilirse X uzayı açık (G_κ)-base?) can be reduced to the problem of existence of a dense, point≤κ, pointed open cover for X where X has $\mathcal{W}$ which satisfies open (G_κ).

The following lemma is needed in the proof of Theorem 2.5.

Lemma 2.3. If the space X has $\mathcal{W}$ satisfying open (G_κ) then each open cover of X has a point≤κ open refinement.

Proof. Let $\vartheta=\{O_\alpha : \alpha<\tau\}$ be an open cover for X where τ is a cardinal number. Let $P_\alpha=O_\alpha\setminus\bigcup\{O_\beta : \beta<\alpha\}$ and $\mathcal{V}_\alpha=\bigcup\{\mathcal{V}(x,O_\alpha) : x\in P_\alpha\}$ for each $\alpha<\tau$. It is easily seen that the family $\mathcal{V}=\{V_\alpha : \alpha<\tau\}$ is an point≤κ open refinement of ϑ.

The definition below is weaker than semi-stratifiable space notion and since instead of natural numbers, an infinite cardinal number is used, it is broader.

Definition 2.4. A space X with topology τ is called weak κ-semi-stratifiable topological space, if there exists a function G from $\kappa\times X$ to τ such that

i) $x\in G(\alpha,x)$ for each $x\in X$ and $\alpha<\kappa$.

ii) If $y\in X$ and $\{x_\alpha : \alpha<\kappa\}$ is a subset of X such that $y\in G(\alpha,x_\alpha)$ for each $\alpha<\kappa$, then $y\in\overline{\{x_\alpha:\alpha<\kappa\}}$.

Theorem 2.5. If X is a weak κ-semi-stratifiable topological space with $\mathcal{W}$ satisfying (G_κ) then X has a dense, point≤κ, pointed open cover.

Proof. Let G be a function as in the above definition. The family $\vartheta_\alpha=\{G(\alpha,x):x\in X\}$ is an open cover for X, for each $\alpha<\kappa$. From Lemma 2.3 there exists a point≤κ open refinement $\mathcal{V}_\alpha$ of ϑ_α for each $\alpha<\kappa$. Take an $\alpha<\kappa$. For each $V\in\mathcal{V}_\alpha$, choose an $x_V\in X$ such that $V\subseteq G(\alpha,x_V)$. Define $\wp=\{(x_V,V) : V\in V_\alpha$ and $\alpha<\kappa\}$. Since for each $\alpha<\kappa$ $\mathcal{V}_\alpha$ is an open cover for X, $\wp$ is a pointed open cover, and since $\mathcal{V}_\alpha$ is point≤κ, for each $\alpha<\kappa$, $\wp$ is point≤κ. Now we will show that $\wp$ is dense. Consider any $y\in X$, for each $\alpha<\kappa$, pick a $V_\alpha\in\mathcal{V}_\alpha$ which contains y. Letting $x_{V_\alpha}=x_\alpha$ for each $\alpha<\kappa$ we have that $y\in G(\alpha,x_\alpha)$ for each $\alpha<\kappa$, and by Definition 2.4(ii), $y\in\overline{\{x_\alpha:\alpha<\kappa\}}$. Hence $\wp$ is dense since $\{x_\alpha:\alpha<\kappa\}\subseteq\{x_\alpha:(x_\alpha,V_\alpha)\in\wp,\ y\in V_\alpha\}$.

If X has a point≤κ base, say $\mathcal{B}$, then for all x in X, for the family $\mathcal{W}(x)=\{B\in\mathcal{B} : x\in B\}$, $\mathcal{W}=\{\mathcal{W}(x) : x\in X\}$ satisfies a stronger condition than open (G_κ). Now we give koşulundan daha kuvvetli bir koşulu sağlayan bir $\mathcal{W}$ sistemine sahip olur ki şimdi bu tanımı verelim.

Tanım 2.6. X bir topolojik uzay olmak üzere her $x \in X$ için $|\mathcal{W}(x)| \leq \kappa$ olsun.Eğer her $x \in X$ ve x elemanını içeren her U açık alt kümesi için $x \in V(x,U) \subseteq U$ olacak biçimde bir V(x,U) açığı var ve her $y \in V(x,U)$ için $x \in W \subseteq V(x,U)$ olacak biçimde bir $W \in \mathcal{W}(y)$ varsa $\mathcal{W}=\{\mathcal{W}(x) : x \in X\}$ sistemine (G'_κ)-koşulunu sağlıyor denir.

Dikkat edilirse (G_κ)-koşulu ile (G'_κ)-koşulu arasında çok küçük bir fark vardır. Aşağıdaki teorem ile, (G'_κ)-koşulunu sağlayan $\mathcal{W}$ sistemindeki her bir $\mathcal{W}(x)$ ailesi X'in açık altkümelerinden oluşmasa bile bu koşulu sağlayan $\mathcal{W}$ sistemine sahip olan topolojik uzayların nokta$\leq \kappa$ tabana sahip olduğu sonucuna varılacaktır.

Teorem 2.7. Eğer (X,τ) topolojik uzayı (G'_κ)-koşulunu sağlayan bir $\mathcal{W}=\{\mathcal{W}(x) : x \in X\}$ sistemine sahipse X uzayının yoğun ve nokta $\leq \kappa$ olan noktalanmış açık örtüsü vardır.

İspat. κ^+ üzerine tümevarımla her $\alpha \in \kappa^+$ için $X \times \tau$ nun bir $\wp_\alpha$ altkümesini, X'in bir X_α altkümesini ve her $x \in X$ için X' in kapalı bir D^x_α altkümesini tanımlayacağız. $\alpha \in \kappa^+$ olsun ve her $\beta < \alpha$ için $\wp_\beta$, X_β ve her $x \in X$ için D^x_β kümeleri tanımlanmış olsun.
$\mathcal{V}_\alpha = \bigcup\{\wp_\beta : \beta<\alpha\}$, her $x \in X$ için $D^x_\alpha = \overline{\{y : \exists(y,U) \in V_\alpha, x \in U\}}$ ve $X_\alpha = \{x : x \in D^x_\alpha\}$ olsun. $\mathcal{A}_\alpha = \{(x,V(x,X \setminus D^x_\alpha)) : x \notin X_\alpha\}$ olmak üzere $a_\alpha = \{A \subseteq A_\alpha : (x,U), (y,V) \in A$ ise $x \notin V$ veya $y \notin U\}$ olsun. (Burada $U= V(x,X \setminus D^x_\alpha)$, $V=V(y,X \setminus D^y_\alpha)$ dir). Zorn lemma'dan, a_α nın bir $\wp_\alpha$ maksimal elemanı vardır. $\wp_\alpha$ a_α nın maksimal elemanı olduğundan her $y \in X \setminus X_\alpha$ için $y \in V=V(x, X \setminus D^x_\alpha)$ olacak biçimde bir $(x,V) \in \wp_\alpha$ vardır.
$\wp= \bigcup\{\wp_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$ olsun. $\mathcal{V}_0 = \varnothing$ olduğundan $X_0 = \varnothing$ dir ve $\wp_0$ a_0 'ın maksimal elemanı olduğundan her $y \in X$ için $y \in V$ olacak biçimde bir $(x,V) \in \wp_0$ vardır. Böylece $\{V : \exists x\ (x,V) \in \wp_0\}$ ailesinin X'i örttüğü görüldüğünden $\wp_0$ X için noktalanmış açık örtü olur ve dolayısıyla $\wp$ de X'in noktalanmış açık örtüsüdür. Şimdi $\wp$'nin nokta$\leq\kappa$ olduğunu yani her $y \in X$ için $|\{(x,V) \in \wp : y \in V\}| \leq \kappa$ olduğunu görelim. $y \in X$ olmak üzere $\mathcal{B}_y=\{(x,V) \in \wp : y \in V\}$ olsun ve $f_y : \mathcal{B}_y \longrightarrow \mathcal{W}(y)$ fonksiyonu şöyle tanımlansın. $\wp= \bigcup\{\wp_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$ olduğundan, eğer $(x,V) \in \mathcal{B}_y$ ise $(x,V) \in \wp_\alpha$ ve $y \in V$ olacak biçimde bir $\alpha \in \kappa^+$ vardır. $y \in V = V(x, X \setminus D^x_\alpha)$ olduğundan $x \in W_V \subseteq V$ olacak biçimde bir $W_v \in \mathcal{W}(y)$ vardır. O halde f_y fonksiyonu $f_y((x,V))=W_v$ biçiminde tanımlansın. Şimdi f_y fonksiyonunun bire-bir olduğunu görelim. $(x_1,V_1) \in \mathcal{B}_y$ ve $(x_2,V_2) \in \mathcal{B}_y$ olmak üzere $(x_1,V_1) \neq (x_2,V_2)$ olsun. (x_1,V_1) ve (x_2,V_2) $\mathcal{B}_y$ nin elemanları olduğundan $y \in V_1 \cap V_2$ olup $x_1 \in W_{V_1} \subseteq V_1$ ve $x_2 \in W_{V_2} \subseteq V_2$ dir. (x_1,V_1) ve (x_2,V_2) aynı bir $\wp_\alpha$'nın elemanları olabilirler veya $\alpha \neq \beta$ olmak üzere $(x_1,V_1) \in \wp_\alpha$, $(x_2,V_2) \in \wp_\beta$ olabilir.

this condition.

Definition 2.6. Let X be a topological space and $\mathcal{W}(x)$ be a family of subsets of X containing x such that $|W(x)| \leq \kappa$, for each $x \in X$, and let $\mathcal{W}=\{\mathcal{W}(x) : x \in X\}$. We say that W satisfies (G'_κ), if it satisfies

"if $x \in U$ and U is open, then there exists an open set $V=V(x,U) \subseteq U$ containing x such that $x \in W \subseteq V$ for some $W \in W(y)$ whenever $y \in V$."

Note that there is a small difference between (G_κ) and (G'_κ). We will show that even if each $\mathcal{W}(x)$ in $\mathcal{W}$ satisfying (G'_κ) does not consist of open subset of X, the topological spaces having $\mathcal{W}$ satisfying (G'_κ) have a point$\leq\kappa$ base.

Theorem 2.7. If the space X with topology τ has $\mathcal{W}$ satisfying (G'_κ) then X has a dense, point$\leq\kappa$, pointed open cover.

Proof. We shall construct, with induction on κ^+, for each $\alpha \in \kappa^+$, a subset $\wp_\alpha$ of $X \times \tau$, a subset X_α of X, and for each $x \in X$ a closed subset D^x_α of X. Let $\alpha \in \kappa^+$. Suppose that $\wp_\beta$, X_β and D^x_β have been constructed for all $\beta<\alpha$ and $x \in X$. Define
$\mathcal{V}_\alpha = \bigcup\{\wp_\beta : \beta<\alpha\}$, $D^x_\alpha = \overline{\{y : \exists(y,U) \in V_\alpha, x \in U\}}$ for each x, and $X_\alpha = \{x : x \in D^x_\alpha\}$. Let $\mathcal{A}_\alpha = \{(x,V(x,X \setminus D^x_\alpha)) : x \notin X_\alpha\}$ and
$a_\alpha=\{A \subseteq A_\alpha : (x,U) \in A$ and $(y,V) \in A$ implies $x \notin V$ or $y \notin U\}$, where $U=V(x,X \setminus D^x_\alpha)$ and $V=V(y,X \setminus D^y_\alpha)$. By Zorn lemma, there exists a maximal element $\wp_\alpha$ of a_α. Thus for each $y \in X \setminus X_\alpha$, there exists a $(x,V) \in \wp_\alpha$ such that $y \in V=V(x, X \setminus D^x_\alpha)$.
Let $\wp=\bigcup\{\wp_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$. We have that $X_0 =\varnothing$ and since $\wp_0$ is a maximal element of a_0 there exists a $(x,V) \in \wp_0$ such that $y \in V$ for each $y \in X$. So, the family $\{V : \exists x\ (x,V) \in \wp_0\}$ covers X, and hence $\wp_0$ is a pointed open cover for X. Therefore $\wp$ is a pointed open cover. Now we will show that $\wp$ is point$\leq\kappa$. Take a $y \in X$. Let $\mathcal{B}_y=\{(x,V) \in \wp : y \in V\}$. Define a function f_y from $\mathcal{B}_y$ to $\mathcal{W}(y)$: If $(x,V) \in \mathcal{B}_y$ then there exists an $\alpha \in \kappa^+$ such that $(x,V) \in \wp_\alpha$ and $y \in V$ since $\wp=\bigcup\{\wp_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$. Since $y \in V=V(x, X \setminus D^x_\alpha)$, there exists a $W_v \in \mathcal{W}(y)$ such that $x \in W_V \subseteq V$. So, the function f_y is well-defined as follows: $f_y((x,V))=W_v$. Now we shall show that f_y is one to one. Let $(x_1,V_1) \in \mathcal{B}_y$ and $(x_2,V_2) \in \mathcal{B}_y$ with $(x_1,V_1) \neq (x_2,V_2)$. As $y \in V_1 \cap V_2$, we have that $x_1 \in W_{V_1} \subseteq V_1$ and $x_2 \in W_{V_2} \subseteq V_2$. There are two cases:

Case I : If $(x_1,V_1) \in \wp_\alpha$ and $(x_2,V_2) \in \wp_\alpha$; In this case, since $x_1 \notin V_2$ or $x_2 \notin V_1$, we have that $W_{V_1} \neq W_{V_2}$.

Case II : If $(x_1,V_1) \in \wp_\alpha$, $(x_2,V_2) \in \wp_\beta$ and $\alpha \neq \beta$; In this case, we have that $\alpha<\beta$ or $\beta<\alpha$. Without loss of generality, we may assume that $\alpha<\beta$. Suppose that $W_{V_1} = W_{V_2}$. Then

Eğer (x_1,V_1) ve (x_2,V_2) aynı bir $\wp_\alpha$'nın elemanları ise; $x_1 \notin V_2$ veya $x_2 \notin V_1$ dir. Böylece $W_{V_1} \neq W_{V_2}$ dir. Eğer $\alpha \neq \beta$ olmak üzere $(x_1,V_1) \in \wp_\alpha$, $(x_2,V_2) \in \wp_\beta$ ise; $\alpha < \beta$ olsun. $W_{V_1} = W_{V_2}$ olduğunu kabul edelim. O zaman $x_2 \in V_1$ ve $x_1 \in V_2$ dir. $V_2 = V(x_2 , X \setminus D_\beta^{x_2})$ olduğundan $x_1 \in X \setminus D_\beta^{x_2}$ dir. Öte yandan $\alpha < \beta$ olduğundan $\wp_\alpha \subseteq V_\beta$ olup $(x_1,V_1) \in V_\beta$ dır. Aynı zamanda $x_2 \in V_1$ olduğundan $x_1 \in \{x : \exists (x,U) \in \mathcal{V}_\beta,\ x_2 \in U\} \subseteq D_\beta^{x_2}$ olur ki bu çelişkidir. $\beta < \alpha$ olması durumu da benzer biçimde gösterilebileceğinden $W_{V_1} \neq W_{V_2}$ olup $f_y((x_1,V_1)) \neq f_y((x_2,V_2))$ dir. Böylece her $y \in X$ için f_y fonksiyonu bire-bir dir. Aynı zamanda $|\mathcal{W}(y)| \leq \kappa$ olduğundan $|\mathcal{B}_y| \leq \kappa$ olup $\wp$ nokta$\leq \kappa$ dır.

$\wp$'nin yoğun olduğunu görmek için $X = \bigcup \{X_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$ olduğunu görmek yeterlidir. $y \in X$ olmak üzere her $\alpha \in \kappa^+$ için $y \notin X_\alpha$ olsun. O zaman her $\alpha \in \kappa^+$ için $y \in T_\alpha$ olacak biçimde bir $(x_\alpha, T_\alpha) \in \wp_\alpha$ vardır. Ayrıca $\alpha \neq \beta$ biçimindeki her $\alpha,\ \beta \in \kappa^+$ için $(x_\alpha, T_\alpha) \neq (x_\beta, T_\beta)$ dır. Şöyleki; $\alpha, \beta \in \kappa^+$ olmak üzere $\alpha < \beta$ ve $(x_\alpha , T_\alpha) = (x_\beta , T_\beta)$ olsun. $(x_\alpha, T_\alpha) \in \wp_\alpha$ ve $\alpha < \beta$ olduğundan $\wp_\alpha \subseteq V_\beta$ olup $(x_\alpha, T_\alpha) \in V_\beta$ dır. Aynı zamanda $x_\alpha \in T_\alpha$ olduğundan $x_\alpha \in D_\beta^{x_2}$ olur. Öte yandan $x_\alpha = x_\beta$ ve $x_\beta \in T_\beta = V(x_\beta,\ X \setminus D_\beta^{x_\beta}) \subseteq X \setminus D_\beta^{x_\beta}$ olduğundan $x_\alpha \notin D_\beta^{x_2} = D_\beta^{x_2}$ olur ki bu çelişkidir. $\beta < \alpha$ olması durumu da benzer biçimde gösterilebilir. Böylece $\alpha \neq \beta$ biçimindeki her $\alpha, \beta \in \kappa^+$ için $(x_\alpha, T_\alpha) \neq (x_\beta, T_\beta)$ olur ancak bu $|\{(x, V) \in \wp : y \in V\}| \leq \kappa$ olması ile çelişir. O halde $X = \bigcup \{X_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$ olup $\wp$ yoğundur.

(2)'de açık (G)-koşulunu sağlayan bir $\mathcal{W}$ sistemine sahip olan ayrılabilir her topolojik uzayın sayılabilir bir tabana sahip olduğu görülmüştür. Ayrıca (1)'de yoğunluğu$\leq \omega_1$ olan birinci sayılabilir her topolojik uzayın yoğun, nokta-sayılabilir bir noktalanmış açık örtüye sahip olduğu gösterilmiştir. Aşağıdaki teoremde bunun, sayılabilirlik yerine herhangi bir sonsuz κ kardinali için uyarlaması verilmiştir. Bu teorem ile, yoğunluğu$\leq \kappa^+$ olan ve açık (G_κ)-koşulunu sağlayan bir $\mathcal{W}$ sistemine sahip olan her topolojik uzayın nokta$\leq \kappa$ tabanının varlığı garanti edilmiş olur.

X topolojik uzayının karakteri $\chi(X)$ ve yoğunluğu $d(X)$ ile gösterilmek üzere, aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.8. X bir topolojik uzay olmak üzere eğer $\chi(X) \leq \kappa$ ve $d(X) \leq \kappa^+$ ise X uzayının yoğun ve nokta$\leq \kappa$ olan noktalanmış açık örtüsü vardır.

İspat. $D = \{x_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$ X'in yoğun altkümesi olsun. Her $\alpha \in \kappa^+$ için $K_\alpha = \overline{\{x_\beta : \beta < \alpha\}}$ olmak üzere $\wp = \{(x_\alpha , X \setminus K_\alpha) : \alpha \in \kappa^+\}$ olsun. $K_0 = \varnothing$ olduğundan $\wp$ noktalanmış açık örtüdür. Şimdi $\wp$'nin nokta$\leq \kappa$ ve yoğun olduğunu görelim. y X'in herhangi bir elemanı olsun. $\chi(y,X) \leq \kappa$ olduğundan y'nin $\sigma(y) = \{B(i,y) : i \in \kappa\}$ biçiminde bir komşuluklar tabanı vardır. D yoğun olduğundan her $i \in \kappa$ için $x_{\alpha_i} \in B(i,y)$ olacak biçimde bir $\alpha_i \in \kappa^+$ vardır. $\sup\{\alpha_i : i \in \kappa\} = \gamma$ denilirse, κ^+ regüler

$x_2 \in V_1$ and $x_1 \in V_2$. $x_2 \in V_1$ implies that $x_1 \in X \setminus D_\beta^{x_2}$. Since $\alpha < \beta$ we have that $\wp_\alpha \subseteq V_\beta$, and hence $(x_1,V_1) \in V_\beta$. But $x_2 \in V_1$ implies that $x_1 \in \{x : \exists (x,U) \in V_\beta,\ x_2 \in U\} \subseteq D_\beta^{x_2}$. This is a contradiction.

Thus $W_{V_1} \neq W_{V_2}$. Therefore $f_y((x_1,V_1)) \neq f_y((x_2,V_2))$. So that, for each $y \in X$, the function f_y is one to one. Also, since $|\mathcal{W}(y)| \leq \kappa$, $|\mathcal{B}_y| \leq \kappa$, and hence $\wp$ is point$\leq\kappa$.

Now we will show that $\wp$ is dense. For this, it is sufficient to show $X = \bigcup \{X_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$. Take a $y \in X$. Suppose that $y \notin X_\alpha$, for each $\alpha \in \kappa^+$. For each $\alpha \in \kappa^+$, there exists a $(x_\alpha , T_\alpha) \in \wp_\alpha$ such that $y \in T_\alpha$. Furthermore, for each $\alpha,\ \beta \in \kappa^+$ with $\alpha \neq \beta$ we have $(x_\alpha, T_\alpha) \neq (x_\beta, T_\beta)$. Indeed, if $(x_\alpha , T_\alpha) = (x_\beta , T_\beta)$ for $\alpha < \beta$ then $(x_\alpha, T_\alpha) \in \wp_\alpha$. Also, we have that $\wp_\alpha \subseteq V_\beta$ since $\alpha < \beta$. So $(x_\alpha, T_\alpha) \in V_\beta$. As $x_\alpha \in T_\alpha$, we have $x_\alpha \in D_\beta^{x_\alpha}$. The equality $x_\alpha = x_\beta$, and $x_\beta \in T_\beta = V(x_\beta,\ X \setminus D_\beta^{x_\beta}) \subseteq X \setminus D_\beta^{x_\beta}$ led us to the fact that $x_\alpha \notin D_\beta^{x_\beta} = D_\beta^{x_\alpha}$.

This is a contradiction. Hence for each $\alpha,\ \beta \in \kappa^+$ with $\alpha \neq \beta$, we have that $(x_\alpha, T_\alpha) \neq (x_\beta, T_\beta)$. But this contradicts with the fact that $|\{(x, V) \in \wp : y \in V\}| \leq \kappa$. So, $X = \bigcup \{X_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$. Hence $\wp$ is dense.

In (1), it has been shown that every separable spaces having $\mathcal{W}$ satisfying open (G) have a countable base. Furthermore, in (1), it has been shown that every first countable space has a dense, point-countable, pointed open cover, if their density is less or equal to ω_1. This result is extended to any infinite cardinal κ from the first infinite cardinal ω.

With the following theorem we show that every topological space which has $\mathcal{W}$ satisfying open (G_κ) and with density less or equal to κ^+, has a point$\leq\kappa$ base.

The character of the space X is denoted by $\chi(X)$, and density is denoted by $d(X)$.

Theorem 2.8. Let X be a topological space. If $\chi(X) \leq \kappa$ and $d(X) \leq \kappa^+$, then X has a dense point$\leq\kappa$, pointed open cover.

Proof. Let $D = \{x_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$ be a dense subset of X, $K_\alpha = \overline{\{x_\beta : \beta < \alpha\}}$ for each $\alpha \in \kappa^+$, and let $\wp = \{(x_\alpha , X \setminus K_\alpha) : \alpha \in \kappa^+\}$. $\wp$ is a pointed open cover since $K_0 = \varnothing$. Now, we will show that $\wp$ is dense and point$\leq\kappa$. Take any $y \in X$. Since $\chi(y,X) \leq \kappa$, there exists a local base $\sigma(y) = \{B(i,y) : i \in \kappa\}$ at y. As D is dense, there exists an $\alpha_i \in \kappa^+$ for each $i \in \kappa$ such that $x_{\alpha_i} \in B(i,y)$. Define $\sup\{\alpha_i : i \in \kappa\} = \gamma$. Regularity of κ^+ leads us to the fact that $\gamma \in \kappa^+$, and $y \in K_\gamma$. Also, we have that $y \in K_\beta$ for each $\beta > \gamma$. Thus $\wp$

olduğundan $\gamma \in \kappa^+$ dır ve $y \in K_\gamma$ olur. Aynı zamanda her $\beta > \gamma$ için $y \in K_\beta$ olduğundan $\wp$ nokta$\leq \kappa$ dır. $\alpha_0 = \min\{\alpha \in \kappa^+ : y \in K_\alpha\}$ denilirse $y \in \overline{\{x_\alpha : y \notin K_\alpha, \alpha < \alpha_0\}}$ dir ve böylece $\wp$'nin yoğun olduğu da görülmüş olur.

Aşağıdaki lemma ve teorem yardımıyla, açık (G_κ)-koşulunu sağlayan bir $\mathcal{W}$ sistemine sahip her X topolojik uzayının nokta$\leq\kappa$ tabana sahip olan yoğun bir altkümesinin var olduğu görülecektir.

Lemma 2.9. (X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere X'in (G_κ)-koşulunu sağlayan bir $\mathcal{W}$ sistemi var olsun ve $Y \subseteq X$ olsun. Eğer her $y \in Y$ için $y \in T_y$ olacak biçimde X'in bir T_y açık altkümesi varsa bu durumda $Y \times \tau$ nun

i) Her $x \in X$ için $|\{(y,U) \in \wp : x \in U\}| \leq \kappa$

ii) $Y \subseteq \bigcup\{U : \exists y \in Y \ (y,U) \in \wp\}$

iii) $(y,U) \in \wp \Rightarrow y \in U \subseteq T_y$

koşullarını sağlayan bir $\wp$ alt kümesi vardır.

İspat. λ bir kardinal sayı olmak üzere Y kümesinin indekslenmiş biçimi $Y = \{y_\alpha : \alpha < \lambda\}$ olsun. İndüksiyon ile her $\alpha < \lambda$ için X'in O_α açık altkümesi şöyle tanımlansın. $\alpha < \lambda$ olmak üzere her $\beta < \alpha$ için O_β tanımlanmış olsun ve

$$O_\alpha = \begin{cases} \varphi & ; \quad y_\alpha \in \bigcup\limits_{\beta<\alpha} O_\beta \\ \bigcup\{V(x, T_{y_\alpha}) : x \in T_{y_\alpha} - \bigcup\limits_{\beta<\alpha} O_\beta\} & ; \quad y_\alpha \notin \bigcup\limits_{\beta<\alpha} O_\beta \end{cases}$$

olsun. $\wp = \{(y_\alpha, O_\alpha) : O_\alpha \neq \emptyset\} \subseteq Y \times \tau$ aranılan kümedir. Şöyleki; $x \in X$ olsun. $I = \{\alpha \in \lambda : x \in O_\alpha\}$ olmak üzere $f : I \longrightarrow \mathcal{W}(x)$ fonksiyonu şöyle tanımlansın. $\alpha \in I$ olsun. Bu durumda $x \in O_\alpha$ olup $x \in V(p_\alpha, T_{y_\alpha})$ olacak biçimde bir $p_\alpha \in T_{y_\alpha} \setminus \bigcup\{O_\gamma : \gamma < \alpha\}$ elemanı vardır. $x \in V(p_\alpha, T_{y_\alpha})$ olduğundan $p_\alpha \in W_\alpha \subseteq T_{y_\alpha}$ olacak biçimde bir $W_\alpha \in \mathcal{W}(x)$ vardır. O halde f fonksiyonu, $\alpha \in I$ olmak üzere, $f(\alpha) = W_\alpha$ biçiminde tanımlansın. f bire-bir olduğundan $|I| = |\{\alpha \in \lambda : x \in O_\alpha\}| \leq |\mathcal{W}(x)| \leq \kappa$ dır ve böylece her $x \in X$ için $|\{(y_\alpha, O_\alpha) \in \wp : x \in O_\alpha\}| \leq \kappa$ sağlanır. $\wp$ kümesinin ii-iii koşullarını sağladığı da kolayca görülebilir.

Teorem 2.10. Eğer (X, τ) topolojik uzayının (G_κ)-koşulunu sağlayan bir $\mathcal{W}$ sistemi varsa X'in öyle bir $\wp$ nokta$\leq\kappa$, noktalanmış açık örtüsü vardır ki $\{x \in X : \exists U, (x,U) \in \wp\}$ kümesi X içinde yoğundur ve $(x,U) \in \wp$ iken $x \in U$ sağlanır.

İspat. κ^+ üzerine tümevarım ile her $\alpha \in \kappa^+$ için $X \times \tau$ nun $\wp_\alpha$ altkümesi ve X'in bir X_α altkümesi şöyle inşa edilsin. $\alpha \in \kappa^+$ olsun ve her $\beta < \alpha$ için $\wp_\beta$ ve X_β tanımlanmış olsun. $X_0 = \emptyset$ olmak üzere $X_\alpha = \{x : \exists U, (x,U) \in \wp_\beta, \beta < \alpha\}$ olsun. $Y = X \setminus \overline{X}_\alpha$ ve her $y \in Y$ için $T_y = V(y,Y)$ denilirse yukarıdaki lemmadan $Y \times \tau$ nun

i) Her $x \in X$ için $|\{(y,U) \in \wp_\alpha : x \in U\}| \leq \kappa$

ii) $X \setminus \overline{X}_\alpha \subseteq \bigcup\{U : \exists y \in X \setminus \overline{X}_\alpha \ (y,U) \in \wp_\alpha\}$

iii) $(y,U) \in \wp_\alpha \Rightarrow y \in U \subseteq V(y, X \setminus \overline{X}_\alpha)$

koşullarını sağlayan bir $\wp_\alpha$ altkümesi vardır. $\wp = \bigcup\{\wp_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$ olsun. $X_0 = \emptyset$ olduğundan $\wp_0$ $X \times \tau$ nun (ii) koşulunu sağlayan bir altkümesi olup $\wp_0$ X için noktalanmış açık örtüdür.O halde $\wp$ de noktalanmış açık örtüdür. Şimdi $\wp$'nin nokta$\leq\kappa$ olduğunu görelim.

is point$\leq\kappa$. Since $y \in \overline{\{x_\alpha : y \notin K_\alpha, \alpha < \alpha_0\}}$, where $\alpha_0 = \min\{\alpha \in \kappa^+ : y \in K_\alpha\}$, $\wp$ is dense.

By the following lemma and theorem, it will be shown that if the space X has $\mathcal{W}$ satisfying open (G_κ) then X has a dense subspace which has a point$\leq\kappa$ base.

Lemma 2.9. Let the space X, with topology τ, have $\mathcal{W}$ satisfying (G_κ), and let $Y \subseteq X$. If for each $y \in Y$, there is an open set (in X) T_y which contains y, then there exists a subset $\wp$ of $Y \times \tau$ which satisfies

i) $|\{(y,U) \in \wp : x \in U\}| \leq \kappa$ for each $x \in X$.

ii) $Y \subseteq \bigcup\{U : \exists y \in Y \ (y,U) \in \wp\}$

iii) $(y,U) \in \wp \Rightarrow y \in U \subseteq T_y$.

Proof. Let $Y = \{y_\alpha : \alpha < \lambda\}$ where λ is a cardinal number. We shall construct with induction for each $\alpha < \lambda$ an open subset O_α of X. Suppose that O_β has been constructed for each $\beta < \alpha$, and define

$$O_\alpha = \begin{cases} \varphi & ; \quad y_\alpha \in \bigcup\limits_{\beta<\alpha} O_\beta \\ \bigcup\{V(x, T_{y_\alpha}) : x \in T_{y_\alpha} - \bigcup\limits_{\beta<\alpha} O_\beta\} & ; \quad y_\alpha \notin \bigcup\limits_{\beta<\alpha} O_\beta \end{cases}$$

$\wp = \{(y_\alpha, O_\alpha) : O_\alpha \neq \emptyset\}$ is a subset of $Y \times \tau$ which we want. Indeed, it is easily seen that $\wp$ satisfies (ii) and (iii). We will only show that $\wp$ satisfies (i). Take any $x \in X$. Let $I = \{\alpha \in \lambda : x \in O_\alpha\}$. Define a function f from I to $\mathcal{W}(x)$: if $\alpha \in I$ then $x \in O_\alpha$, and so there exists a $p_\alpha \in T_{y_\alpha} \setminus \bigcup\{O_\gamma : \gamma < \alpha\}$ such that $x \in V(p_\alpha, T_{y_\alpha})$. Thus we have a $W_\alpha \in W(x)$ with $p_\alpha \in W_\alpha \subseteq T_{y_\alpha}$. So, the function f is well-defined as follows: $f(\alpha) = W_\alpha$. It is clear that f is one to one. So, by the inequality $|I| = |\{\alpha \in \lambda : x \in O_\alpha\}| \leq |\mathcal{W}(x)| \leq \kappa$, we have, for each $x \in X$, $|\{(y_\alpha, O_\alpha) \in \wp : x \in O_\alpha\}| \leq \kappa$.

Theorem 2.10. If the space (X,τ) has $\mathcal{W}$ satisfying (G_κ), then X has a point$\leq\kappa$, pointed open cover $\wp$ such that $x \in U$ whenever $(x,U) \in \wp$ and $\{x \in X : \exists U, (x,U) \in \wp\}$ is dense in X.

Proof. For each $\alpha \in \kappa^+$ we shall construct a subset $\wp_\alpha$ of $X \times \tau$ and a subset X_α of X. Suppose that $\wp_\beta$ and X_β have been defined for each $\beta < \alpha$. Define

$X_\alpha = \{x : \exists U, (x,U) \in \wp_\beta, \beta < \alpha\}$ (and so $X_0 = \emptyset$). Let $Y = X \setminus \overline{X}_\alpha$ and $T_y = V(y,Y)$ for each $y \in Y$. By the previous lemma, there exixts a subset $\wp_\alpha$ of $Y \times \tau$ which satisfies

i) $|\{(y,U) \in \wp_\alpha : x \in U\}| \leq \kappa$ for all $x \in X$.

ii) $X \setminus \overline{X}_\alpha \subseteq \bigcup\{U : \exists y \in X \setminus \overline{X}_\alpha \ (y,U) \in \wp_\alpha\}$

iii) $(y,U) \in \wp_\alpha \Rightarrow y \in U \subseteq V(y, X \setminus \overline{X}_\alpha)$.

Define $\wp = \bigcup\{\wp_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$. Since $X_0 = \emptyset$, by (ii), $\wp_0$ is a pointed open cover for X. Thus $\wp$ is a pointed open cover. We shall show that $\wp$ is point$\leq\kappa$. Let $I = \{\alpha \in \kappa^+ : \exists (x,U) \in \wp_\alpha, y \in U\}$, and a function $f : I \longrightarrow \mathcal{W}(y)$ be defined as follows: if $\alpha \in I$ then there exists a $(x_\alpha, U_\alpha) \in \wp_\alpha$ such that $y \in U_\alpha$. By (iii),

$I=\{\alpha\in\kappa^+ : \exists(x,U)\in\wp_\alpha ,\ y\in U\}$ olsun ve $f : I \longrightarrow \mathcal{W}(y)$ fonksiyonu şöyle tanımlansın. $\alpha\in I$ olsun. Bu durumda $y\in U_\alpha$ olacak biçimde bir $(x_\alpha,U_\alpha)\in\wp_\alpha$ vardır. (iii)'den $x_\alpha\in U_\alpha \subseteq V(x_\alpha , X \setminus \overline{X}_\alpha)$ olup $y\in V(x_\alpha , X \setminus \overline{X}_\alpha)$ olur. O halde $x_\alpha\in W_\alpha \subseteq X \setminus \overline{X}_\alpha$ olacak biçimde bir $W_\alpha \in \mathcal{W}(y)$ seçilebilir. $f(\alpha)=W_\alpha$ biçiminde tanımlansın. $\alpha,\beta\in I$ ve $\alpha<\beta$ olmak üzere $W_\alpha=W_\beta$ olsun. Bu durumda $x_\alpha\in W_\beta$ olup $x_\alpha\in X \setminus \overline{X}_\beta$ dır. Ancak $\alpha<\beta$ ve $(x_\alpha ,U_\alpha)\in\wp_\alpha$ olduğundan $x_\alpha\in X_\beta$ olur ki bu çelişkidir. O halde $W_\alpha \neq W_\beta$ olmak zorundadır ve böylece f bire-bir fonksiyon olup $|I|\leq \kappa$ dır. Aynı zamanda (i)'den, her $\alpha<\kappa^+$ için $\mathcal{A}_\alpha=\{(x,U)\in\wp_\alpha : y\in U\}$ olmak üzere, $|\mathcal{A}_\alpha|\leq \kappa$ dır. $\{(x,U)\in\wp : y\in U\}= \cup\{\mathcal{A}_\alpha : \alpha\in I\}$ olduğundan $|\{(x,U)\in\wp : y\in U\}|\leq \kappa$ dır ve böylece $\wp$ nokta$\leq\kappa$ dır. (iii)'den $(x,U)\in\wp$ iken $x\in U$ sağlanır.

Şimdi de $\{x\in X : \exists U, (x,U)\in\wp\}$ kümesinin X içinde yoğun olduğunu görelim. $X=\overline{\cup\{X_\alpha : \alpha\in\kappa^+\}}$ olduğunu görmek yeterlidir. $y\in X$ olmak üzere her $\alpha<\kappa^+$ için $y\notin\overline{X}_\alpha$ olsun. (ii)'den her $\alpha\in\kappa^+$ için $y\in U_\alpha$ olacak biçimde $(x_\alpha ,U_\alpha)\in\wp_\alpha$ vardır ve $\alpha\neq\beta$ için $(x_\alpha ,U_\alpha)\neq(x_\beta , U_\beta)$ olduğu kolayca görülebilir. Böylece $|\{(x_\alpha ,U_\alpha)\in\wp : y\in U_\alpha\}|= \kappa^+$ olur ki bu $\wp$'nin nokta$\leq\kappa$ olması ile çelişir. O halde $X=\overline{\cup\{X_\alpha : \alpha\in\kappa^+\}}$ olup $\{x\in X : \exists U, (x,U)\in\wp\}$ kümesi X içinde yoğundur.

Yukarıdaki teorem ve Lemma 2.2'den aşağıdaki sonuç verilebilir

Sonuç 2.11. X topolojik uzayı açık (G_κ)-koşulunu sağlayan $\mathcal{W}$ sistemine sahipse X'in nokta$\leq\kappa$ tabanı olan yoğun bir altkümesi vardır.

Aşağıdaki teorem, açık (G_κ)-koşulunu sağlayan bir sisteme sahip olup da nokta$\leq\kappa$ tabanı olmayan topolojik uzay örneğinin, herbiri nokta$\leq\kappa$ tabana sahip olan uzayların yerel$\leq\kappa$ birleşiminden inşa edilemeyeceği sonucunu verecektir.

Teorem 2.12. X topolojik uzayı (G_κ)-koşulunu sağlayan $\mathcal{W}$ sistemine sahip olsun. Eğer X'in öyle bir yerel $\leq\kappa$ $\{Y_i : i\in I\}$ örtüsü var ve her $i\in I$ için Y_i altuzayının yoğun, nokta$\leq\kappa$ noktalanmış açık örtüsü varsa X uzayının da yoğun, nokta$\leq\kappa$ noktalanmış açık örtüsü vardır.

İspat. $\{Y_i : i\in I\}$ ailesi yerel$\leq\kappa$ olduğundan her $x\in X$ için x'in $|\{i\in I : T_x \cap Y_i \neq \varnothing\}|\leq\kappa$ olacak biçimde bir T_x komşuluğu vardır. Her $i\in I$ için $\wp_i$ Y_i'nin yoğun, nokta$\leq\kappa$, noktalanmış açık örtüsü olsun. Sabit bir $i\in I$ alalım. Her $(y,U)\in\wp_i$ için U kümesi Y_i içinde açık olduğundan, X'in, $\tilde{U}\cap Y_i = U$ olacak biçimde bir $\tilde{U}$ açık altkümesi vardır. $S_i(y, U) = \cup\{V(x, \tilde{U}\cap T_x) : x\in U\}$ olsun. $S_i(y,U)$ kümesi X içinde açıktır ve $S_i(y,U) \cap Y_i = U$ dur. $\widetilde{\wp}_i=\{(y, S_i(y,U)) : (y,U)\in\wp_i\}$ olmak üzere $\wp=\cup\{\widetilde{\mathcal{P}}_i : i\in I\}$ olsun. $X=\cup\{Y_i : i\in I\}$ olduğundan $\wp$ noktalanmış açık örtüdür. $\wp$'nin nokta$\leq\kappa$ olduğunu görmek için öncelikle her $x\in X$ ve her $i\in I$ için $|\{(y,O)\in\widetilde{\wp}_i : x\in O\}|\leq\kappa$ olduğunu görelim. $x\in X$ ve $i\in I$ olmak üzere $|\{(y,O)\in\widetilde{\wp}_i : x\in O\}|>\kappa$ olsun. O zaman $\wp_i$'nin $|\mathcal{A}|=\kappa^+$ olacak biçimde öyle bir $\mathcal{A}$ altkümesi vardır ki her $(y,U)\in\mathcal{A}$ için $x\in S_i(y,U)$ olur. $S_i(y,U)$

$x_\alpha\in U_\alpha\subseteq V(x_\alpha , X\setminus\overline{X}_\alpha)$ and so $y\in V(x_\alpha , X\setminus\overline{X}_\alpha)$. Choose a $W_\alpha\in\mathcal{W}(y)$ with $x_\alpha\in W_\alpha\subseteq X\setminus\overline{X}_\alpha$ and define the function f ; $f(\alpha)=W_\alpha$. Observe that f is one to one, and hence $|I|\leq\kappa$. Let

$\mathcal{A}_\alpha=\{(x,U)\in\wp_\alpha : y\in U\}$ for each $\alpha<\kappa^+$. From (i), we have that $|\mathcal{A}_\alpha|\leq\kappa$. Since $\{(x,U)\in\wp : y\in U\}=\bigcup\{A_\alpha : \alpha\in I\}$, $|\{(x,U)\in\wp : y\in U\}|\leq\kappa$, and thus $\wp$ is point$\leq\kappa$.

By (iii), $x\in U$ whenever $(x,U)\in\wp$.

We will show that the set $\{x\in X : \exists U, (x,U)\in\wp\}$ is dense in X. For this, it is sufficient to see the equality $X=\overline{\cup\{X_\alpha : \alpha\in\kappa^+\}}$. Take any $y\in X$. Suppose that $y\notin\overline{X}_\alpha$ for each $\alpha<\kappa^+$. By (ii), there exists a $(x_\alpha ,U_\alpha)\in\wp_\alpha$ such that $y\in U_\alpha$. It is clear that

$(x_\alpha,U_\alpha)\neq(x_\beta,U_\beta)$ for each α, $\beta\in\kappa^+$ with $\alpha\neq\beta$. Hence $|\{(x_\alpha ,U_\alpha)\in\wp : y\in U_\alpha\}|=\kappa^+$. But, $\wp$ was point$\leq\kappa$. This is a contradiction. Thus $X=\overline{\cup\{X_\alpha : \alpha\in\kappa^+\}}$, and so $\{x\in X : \exists U, (x,U)\in\wp\}$ is a dense subset of X.

The above theorem and Lemma give us,

Corollary 2.11. If the space X has $\mathcal{W}$ satisfying open (G_κ), then X has a dense subspace Y which has a point$\leq\kappa$ base.

As we will show below a topological space which has $\mathcal{W}$ satisfying open (G_κ) but does not have a point$\leq\kappa$ base, can not be constructed as a locally$\leq\kappa$ union of spaces which have point$\leq\kappa$ base.

Theorem 2.12. Suppose that the space X has $\mathcal{W}$ satisfying (G_κ) and is the locally$\leq\kappa$ union of subspaces Y_i $(i\in I)$, each of which has a dense, point$\leq\kappa$, pointed open cover. Then X also has a dense, point$\leq\kappa$, pointed open cover.

Proof. Since the family $\{Y_i : i\in I\}$ is locally$\leq\kappa$, for each $x\in X$, there is an open neighbourhood T_x of x such that $|\{i\in I : T_x\cap Y_i\neq\varnothing\}|\leq\kappa$. Let $\wp_i$ be a dense, point$\leq\kappa$, pointed open cover of Y_i for each $i\in I$. Fix an $i\in I$, for each $(y,U)\in\wp_i$ pick an open subset $\tilde{U}$ of X such that $\tilde{U}\cap Y_i=U$, and define $S_i(y, U)= \cup\{V(x, \tilde{U}\cap T_x) : x\in U\}$. Observe that $S_i(y,U)$ is open in X and that $S_i(y,U)\cap Y_i=U$. Define

$\widetilde{\wp}_i=\{(y, S_i(y,U)) : (y,U)\in\wp_i\}$ and $\wp=\cup\{\widetilde{\mathcal{P}}_i : i\in I\}$. Since $X=\cup\{Y_i : i\in I\}$, $\wp$ is a pointed open cover. In order to show that $\wp$ is point$\leq\kappa$ we first show that $|\{(y,O)\in\widetilde{\wp}_i : x\in O\}|\leq\kappa$ for each $x\in X$ and $i\in I$. Observe that if $|\{(y,O)\in\widetilde{\wp}_i : x\in O\}|>\kappa$ then there must exist a subset $\mathcal{A}$ of $\wp_i$ with $|\mathcal{A}|=\kappa^+$ such that $x\in S_i(y,U)$ for each $(y,U)\in\mathcal{A}$. For each $(y,U)\in\mathcal{A}$, pick a $z_{(y,U)}\in U$ such that $x\in V(z_{(y,U)}, \tilde{U}\cap T_{z_{(y,U)}})$. Since W satisfies kümesinin tanımından, her $(y,U)\in\mathcal{A}$ için $x\in V(Z_{(y,U)}, \tilde{U}\cap T_{Z_{(y,U)}})$ olacak biçimde $Z_{(y,U)}\in U$ vardır. (G_κ) koşulundan, her $(y,U)\in\mathcal{A}$ için $Z_{(y,U)}\in W_{(y,U)}\subseteq \tilde{U}\cap T_{Z_{(y,U)}}$ biçiminde $W_{(y,U)}\in\mathcal{W}(x)$ vardır. $|\mathcal{A}|=\kappa^+$, κ^+ regüler ve $|\mathcal{W}(x)|\le\kappa$ olduğundan $\mathcal{A}$'nın $|\tilde{\mathcal{A}}|=\kappa^+$ olacak biçimde öyle bir $\tilde{\mathcal{A}}$ altailesi ve $\mathcal{W}(x)$'in öyle bir $W_{(y_0,U_0)}$ elemanı vardır ki her $(y,U)\in\tilde{\mathcal{A}}$ için $W_{(y,U)}=W_{(y_0,U_0)}$ olur. Böylece her $(y,U)\in\tilde{\mathcal{A}}$ için $Z_{(y_0,U_0)}\in W_{(y,U)}\subseteq\tilde{U}$ olduğundan her $(y,U)\in\tilde{\mathcal{A}}$ için $Z_{(y_0,U_0)}\in\tilde{U}$ dır. Aynı zamanda $Z_{(y_0,U_0)}\in U_0\subseteq Y_i$ olduğundan her $(y,U)\in\tilde{\mathcal{A}}$ için $Z_{(y_0,U_0)}\in\tilde{U}\cap Y_i=U$ olur ancak bu $\wp_i$'nin nokta$\le\kappa$ olması ile çelişir. O halde her $x\in X$ ve her $i\in I$ için $|\{(y,O)\in\tilde{\wp}_i : x\in O\}|\le\kappa$ olmak zorundadır. Şimdi $\wp$'nin nokta$\le\kappa$ olmadığını varsayalım. O zaman $|\{(y,O)\in\wp : x_0\in O\}|>\kappa$ olacak biçimde bir $x_0\in X$ vardır. Her $i\in I$ için $|\{(y,O)\in\tilde{\wp}_i : x_0\in O\}|\le\kappa$ ve $\wp=\bigcup\{\tilde{\mathcal{P}}_i : i\in I\}$ olduğundan I'nın $|J|=\kappa^+$ biçiminde öyle bir J altkümesi vardır ki her $i\in J$ için $x_0\in O_i$ olacak biçimde bir $(y_i,O_i)\in\tilde{\wp}_i$ vardır. $\tilde{\wp}_i$'nın tanımından her $i\in J$ için $(y_i,U_i)\in\wp_i$ olmak üzere $O_i=S_i(y_i,U_i)$ biçimindedir. Böylece her $i\in J$ için $x_0\in S_i(y_i,U_i)$ olup, $x_0\in V(z_i, \tilde{U}_i\cap T_{z_i})$ olacak biçimde $z_i\in U_i$ vardır ve (G_κ)-koşulundan, her $i\in J$ için $z_i\in W_i\subseteq\tilde{U}_i\cap T_{z_i}$ biçiminde $W_i\in\mathcal{W}(x_0)$ vardır. $|\mathcal{W}(x_0)|\le\kappa$ olduğundan, $\mathcal{W}(x_0)$'ın öyle bir W_{i_0} elemanı ve J'nin $|L|=\kappa^+$ olacak biçimde öyle bir L altkümesi vardır ki her $i\in L$ için $W_i=W_{i_0}$ olup her $i\in L$ için $z_i\in W_i=W_{i_0}\subseteq\tilde{U}_{i_0}\cap T_{z_{i_0}}\subseteq T_{z_{i_0}}$ dır. Aynı zamanda her $i\in L$ için $z_i\in Y_i$ olduğundan $z_i\in T_{z_{i_0}}\cap Y_i$ dir ve böylece her $i\in L$ için $T_{z_{i_0}}\cap Y_i\neq\emptyset$ olur ki bu $\{Y_i : i\in I\}$ ailesinin yerel$\le\kappa$ olması ile çelişir. O halde $\wp$ nokta$\le\kappa$ olmak zorundadır. $X=\bigcup\{Y_i : i\in I\}$ ve her $i\in I$ için $\wp_i$ ailesi Y_i içinde yoğun olduğundan $\wp$'nin yoğunluğunu görmek kolaydır.

Yukarıdaki teorem ve Lemma 2.2 (ii)'den, buraya kadar yapılanları toparlayan, aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.13. X topolojik uzayı açık (G_κ)-koşulunu sağlayan $\mathcal{W}$ sistemine sahip olsun. Eğer aşağıdakilerden herhangi biri sağlanıyorsa X uzayının nokta$\le\kappa$ tabanı vardır.

1) X zayıf κ-yarı katmanlanabilir uzaydır,

2) X (G'_κ)-koşulunu sağlayan bir sisteme sahiptir,

3) $d(X)\le\kappa^+$,

4) X, herbiri nokta$\le\kappa$ tabana sahip olan altuzaylarının yerel$\le\kappa$ birleşimidir.

(G_κ), there is a $W_{(y,U)}\in\mathcal{W}(x)$ which satisfies $Z_{(y,U)}\in W_{(y,U)}\subseteq\tilde{U}\cap T_{Z_{(y,U)}}$, for each $(y,U)\in\mathcal{A}$. Since $|\mathcal{A}|=\kappa^+$, κ^+ regular and $|\mathcal{W}(x)|\le\kappa$, there exists a subcollection $\tilde{\mathcal{A}}$ of $\mathcal{A}$ with $|\tilde{\mathcal{A}}|=\kappa^+$ and a $W_{(y_0,U_0)}\in\mathcal{W}(x)$ such that $W_{(y,U)}=W_{(y_0,U_0)}$ for each $(y,U)\in\tilde{\mathcal{A}}$. Therefore $Z_{(y_0,U_0)}\in\tilde{U}$ since $Z_{(y_0,U_0)}\in W_{(y,U)}\subseteq\tilde{U}$ for each $(y,U)\in\tilde{\mathcal{A}}$. Since $Z_{(y_0,U_0)}\in U_0\subseteq Y_i$ we have that $Z_{(y_0,U_0)}\in\tilde{U}\cap Y_i=U$ for each $(y,U)\in\tilde{\mathcal{A}}$. But this is a contradiction to the fact that $\wp_i$ is point$\le\kappa$. Thus, it must be $|\{(y,O)\in\tilde{\wp}_i : x\in O\}|\le\kappa$ for each $x\in X$ and $i\in I$. Now suppose $\wp$ is not point$\le\kappa$. Then there exists a $x_0\in X$ such that $|\{(y,O)\in\wp : x_0\in O\}|>\kappa$. Since $|\{(y,O)\in\tilde{\wp}_i : x_0\in O\}|\le\kappa$ for each $i\in I$ and $\wp=\bigcup\{\tilde{\mathcal{P}}_i : i\in I\}$, there exists a subset J of I with $|J|=\kappa^+$, and there exists a $(y_i,O_i)\in\tilde{\wp}_i$ such that $x_0\in O_i$ for each $i\in J$. From the definition of $\tilde{\wp}_i$, O_i is of the form $O_i=S_i(y_i,U_i)$ where $(y_i,U_i)\in\wp_I$ for each $i\in J$. Hence $x_0\in S_i(y_i,U_i)$ for each $i\in J$, and there exists a $z_i\in U_i$ such that $x_0\in V(z_i, \tilde{U}_i\cap T_{z_i})$, and since $\mathcal{W}$ satisfies (G_κ) there exists a $W_i\in\mathcal{W}(x_0)$ such that $z_i\in W_i\subseteq\tilde{U}_i\cap T_{z_i}$ for each $i\in J$. Since $|\mathcal{W}(x_0)|\le\kappa$ there exists a $W_{i_0}\in\mathcal{W}(x_0)$ and there exists a subset L of J with $|L|=\kappa^+$ such that $W_i=W_{i_0}$ for each $i\in L$. So, we have that $z_i\in W_i=W_{i_0}\subseteq\tilde{U}_{i_0}\cap T_{z_{i_0}}\subseteq T_{z_{i_0}}$ for each $i\in L$. Also, since $z_i\in Y_i$ for each $i\in L$, $z_i\in T_{z_{i_0}}\cap Y_i$. Thus $T_{z_{i_0}}\cap Y_i\neq\emptyset$ for each $i\in L$ .As the family $\{Y_i : i\in I\}$ is locally$\le\kappa$, this is a contradiction. Hence $\wp$ is point$\le\kappa$. It is easily seen that $\wp$ is dense; this follows from the fact $X=\bigcup\{Y_i : i\in I\}$ and each $\wp_i$ is dense in Y_i for each $i\in I$.

Now we can conclude;

Theorem 2.13. Suppose that the space X has $\mathcal{W}$ satisfying open (G_κ). Then if X is also satisfies one of the following, then X has a point$\le\kappa$ base:

1) X is weak κ-semi-stratifiable space,

2) X has W' satisfying (G'_κ),

3) $d(X)\le\kappa^+$,

4) X is the locally$\le\kappa$ union of subspaces each of which has a point$\le\kappa$ base.

The following theorem, can be handy when one tries to

Aşağıdaki teorem, açık (G_κ)-koşulunu sağlayan W sistemine sahip olupta nokta≤κ tabanı olmayan uzaylara örnek ararken kullanışlı olabilir.

Teorem 2.14. Eğer X topolojik uzayının açık (G_κ)-koşulunu sağlayan bir sistemi var fakat nokta≤ κ tabanı yok ise o zaman X'in boş olmayan öyle bir $\tilde{X}$ altuzayı vardır ki $\tilde{X}$'nın boş olmayan hiçbir açık altkümesinin nokta≤ κ tabanı yoktur.

İspat. $\vartheta=\{O \subset X : O$ X içinde açık ve O'nun nokta≤κ tabanı var$\}$ olmak üzere $Y=\bigcup\vartheta$ olsun. X uzayı açık (G_κ)-koşulunu sağlayan sisteme sahip olduğundan her alt uzayı da açık (G_κ)-koşulunu sağlayan bir sisteme sahiptir. O halde Y'nin açık (G_κ)-koşulunu sağlayan bir $\mathcal{W}$ sistemi vardır ve böylece Lemma 2.3'den Y'nin her açık örtüsünün nokta≤κ açık incelmişi bulunabilir. ϑ Y için açık örtü olduğundan ϑ'nun bir $\mathcal{V}$ nokta ≤κ açık incelmişi vardır. $\mathcal{V}$ nin her V elemanı için ϑ'nun V'yi içeren bir elemanı var olduğundan ve ϑ'nun her elemanı nokta ≤κ tabana sahip olduğundan her $V\in\mathcal{V}$ için V'nin de bir $\mathcal{B}$ (V) nokta≤κ tabanı vardır. O halde $\mathcal{B}=\{B: B\in\mathcal{B}(V), V\in\mathcal{V}\}$ ailesi Y için nokta ≤κ taban olur.

$X \setminus Y=\tilde{X}$ olsun. Y' nin nokta≤κ tabanı var olduğundan eğer $\tilde{X}$'nın da nokta≤κ tabanı varsa bu durumda X nokta≤κ tabana sahip olacağından, $\tilde{X}$'nın nokta≤κ tabanı yoktur. Şimdi $\tilde{X}$'nın boştan farklı her açık altkümesinin de nokta≤κ tabana sahip olmadığını görelim. U $\tilde{X}$'nın açık altkümesi olmak üzere U' nun nokta≤κ tabanı var olsun. Y açık olduğundan $\tilde{X}$ kapalı olup $\tilde{X}\setminus U$ kümesi X içinde kapalıdır. Böylece $X\setminus(\tilde{X}\setminus U)=Y\cup U$ kümesi X içinde açıktır. Aynı zamanda Y ve U kümelerinin her ikisi de nokta≤ κ tabana sahip olduğundan $Y\cup U$ kümesi de nokta≤κ tabana sahiptir. O halde $Y\cup U\in\vartheta$ dur. $Y=\bigcup\vartheta$ olduğundan $Y\cup U\subseteq Y$ olup $U\subseteq Y$ dir. Öte yandan $U\subseteq\tilde{X}=X\setminus Y$ idi. O halde $U=\varnothing$ olmak zorundadır.

find an example for a space which has $\mathcal{W}$ satisfying open (G_κ) but not a point≤κ base.

Theorem 2.14. If the space X has $\mathcal{W}$ satisfying open (G_κ) but not a point≤κ base then there exists a non-empty subspace $\tilde{X}$ such that every non-empty open subset of which does not have point≤κ base.

Proof. Let $\vartheta=\{O\subset X$: O is open in X and has a point≤κ base$\}$ and define $Y=\bigcup\vartheta$. Since. X has $\mathcal{W}$ satisfying open (G_κ), every subspace of X has $\tilde{\mathcal{W}}$ satisfying open (G_κ). So, from Lemma 2.3, every open cover for Y has a point≤κ, open refinement. Let $\mathcal{V}$ be a point≤κ, open refinement of ϑ. Since $\mathcal{V}$ is a refinement of ϑ, and each member of ϑ has a point≤κ base then each element V of $\mathcal{V}$ has a point≤κ base $\mathcal{B}$(V). Therefore the family $\mathcal{B}=\{B: B\in\mathcal{B}(V), V\in\mathcal{V}\}$ is a point≤κ base for Y.

Let $X\setminus Y=\tilde{X}$. If $\tilde{X}$ had a point≤κ base then X would have a point≤κ base since Y has a point≤κ base. So, $\tilde{X}$ does not have a point≤κ base. Suppose that U is a subset of $\tilde{X}$ which is open in $\tilde{X}$ and has a point≤κ base. Since $\tilde{X}$ is closed in X, $\tilde{X}\setminus U$ is closed in X, and so $X\setminus(\tilde{X}\setminus U)=Y\cup U$ is open in X. But by Theorem 2.13 (4), the subspace $Y\cup U$ has a point≤κ base, and hence $Y\cup U\in\vartheta$. Since $Y=\bigcup\vartheta$, we have that $U\subseteq Y$. Also we have that $U\subseteq X\setminus Y$. Hence $U=\varnothing$.

REFERENCES/ KAYNAKLAR

1. Moody, P.J., Reed, G.M., Roscoe, A.W., Collins, P.J., "A lattice of conditions on topological spaces-II", ***Fund.Math.***, 138: 69-80 (1991).

2. Collins, P.J. and Roscoe, A.W., "Criteria for metrisability", ***Proc.Amer. Math.Soc.***, 90: 631-640 (1984).

3. Vural, Ç., "Örgü koşulları ve örtü özellikleri" Doktora tezi, ***G.Ü. Fen Bilimleri Ens.*** (2002)

4. Engelking, R., *General Topology*, ***Heldermann***, Berlin (1989)

Received/ Geliş Tarihi: 04.04.2003 Accepted/Kabul Tarihi: 29.09.2003