ISSN 1303-9709 *G.U. Journal of Science 17(1):59-70, 2004*

SOLUTION TO THE TAGUCHI'S PROBLEM WITH CORRELATED RESPONSES

Onur KÖKSOY*
Niğde University, Faculty of Art & Sciences, Department of Mathematics 51100 Niğde, TÜRKİYE,
e-mail: okoksoy@nigde.edu.tr

F.Zehra MULUK
Başkent University, School of Applied Sciences, Ankara, TÜRKİYE

ABSTRACT

Interrelationships that may exist between the responses of the Taguchi's problem may mask better conditions or globally preferred values about the process or the product of interest. To overcome this problem, in this study, we suggest a detection tool of correlations between the responses and a method suitable for the analysis of the Taguchi's problem when the relationships exist between the responses.

Key Words: Quality Improvement, Taguchi's Problem, Correlation, Generalized Distance Approach.

İLİŞKİLİ CEVAP DEĞİŞKENLERİYLE TAGUCHİ PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

ÖZET

Taguchi probleminin cevap değişkenleri (sürecin ortalaması ve sürecin standart sapması) arasında bulunabilecek muhtemel ilişkilerden dolayı, ilgilenilen süreç veya ürüne ilişkin olarak saptanacak daha iyi koşullar veya tümel optimum değerler dışlanabilecektir. Bu çalışmada, cevaplar arasındaki ilişkiyi teşhis edebilecek bir araç önerilerek, ilişkili cevaplar durumunda Taguchi'nin problemini çözebilecek bir öneri tanıtılacaktır.

Anahtar Kelimeler: Kalite Geliştirme, Taguchi Problemi, Korelasyon, Genelleştirilmiş Uzaklık Yöntemi.

1. GİRİŞ

Bu çalışmada, Japon mühendis Taguchi tarafından temelleri atılan ve literatürde "Taguchi problemi" olarak bilinen konu ele alınacaktır. Süreç ortalaması ve standart sapması arasındaki muhtemel doğrusal ilişkinin derecesi incelenerek, ilişkili cevaplar durumunda Taguchi problemini çözebilecek bir öneri üzerinde durulacaktır.

Ürün veya süreç değişkenliğinin azaltılmasının muhtemel bir sonucu olarak ortaya çıkabilecek mükemmelliğin ifadesi, kaliteli ürün veya hizmet üretmek olacaktır. Bu amaçla, değişkenlik yaratacak unsurların belirlenmesi ve laboratuvar koşullarında kontrol edilmesi gerekmektedir. Tüm bu çalışmalar, süreç-dışı kalite geliştirme (off-line quality improvement) kapsamında ele alınmaktadır.

Üretim devam ederken, kalitenin kontrol kartları aracılığıyla izlenmesi mümkündür. Böylece, süreçte meydana gelebilecek anlık veya sistematik arızalar belirlenebilir. Kontrol kartları uzun zamandan beri sanayide kullanılmaktadır. Sürecin gerekli ayarlamaları yapıldıktan sonra, kontrol kartlarında istenmeyen bir değişkenliğin gözlenmesi veya belirli hedeflere

1. INTRODUCTION

In today's increasingly competitive marketplace more attention is being paid to off-line quality control and the idea of Taguchi's robust product design. Designing high-quality products and processes at low cost is an economic and technological challenge to the engineer. Recent advances in quality technology have resulted from considering the variation of a quality characteristic as well as its mean value. In the 1990s, much attention was given to the optimization of dual response systems (DRS) as an important response surface methodology tool for quality improvement. Many authors have highlighted the need for considering both the mean and the variance of the characteristic of interest. The dual response optimization provides a reasonable basis to achieve the basic goals of Taguchi's robust design philosophy.

Taguchi's approaches to off-line quality improvent have generated much interest and debate during the last fifteen years. While the statistical and ad hoc methods suggested by Taguchi remain controversial, there is little disagreement among the researchers and practitioners about his basic philosophy (see: Köksoy (1), Köksoy and ulaşmadaki başarısızlık sonucunda, kalitenin geliştirilmesi ihtiyacı gündeme gelebilir. Kalitenin üretim sırasında geliştirilmesi oldukça zordur. Bu nedenle, son yıllarda süreç-dışı kalite geliştirme konusunda yoğun çalışmaların yapıldığını literatürden gözlemekteyiz. Bu çalışmalarda, deney tasarımı, cevap yüzeyleri, güvenirlik testleri gibi ileri istatistiksel yöntemler etkin olarak kullanılmaktadır.

Japon mühendis Genichi Taguchi'nin ürün veya süreç değişkenliğinin azaltılması ve belirli hedeflerin tutturulması yönündeki fikirleri, değişik bilim çevrelerinin ilgisini çekmiştir. Ancak, Taguchi'nin kalite geliştirme konusundaki fikirlerini destekleyen tasarım ve analiz stratejileri yetersiz bulunmuştur (Bkz: Köksoy (1), Köksoy ve Muluk (2)).

Ürün veya süreç kalitesinin artırılması amacıyla Taguchi'nin ortaya attığı üç problem günümüzde oldukça popüler hale gelmiştir. Problemler,

Problem1 *–Hedef-en-iyi* : Süreç ortalaması μ_0 gibi belirli bir hedef değerde sabit tutulurken, süreç standart sapması en küçük yapılmaya çalışılmalı,

Problem2–*Enbüyük-en-iyi* : Süreç ortalaması mümkün olduğunca büyük yapılmaya çalışılırken, süreç standart sapması σ_0 gibi uygun bir değerde kontrol altında tutulmaya çalışılmalı,

Problem3 –*Enküçük-en-iyi* : Süreç ortalaması mümkün olduğunca küçük yapılmaya çalışılırken, süreç standart sapması σ_0 gibi uygun bir değerde kontrol altında tutulmaya çalışılmalı,

şeklinde sıralanabilir. Bu problemleri çözebilmek için Taguchi tarafından önerilen çeşitli teknikler vardır. Box (3), Taguchi tekniklerinin eksiklerini ana hatlarıyla ortaya koymuştur. Box'ın makalesinden hareketle, Vining ve Myers (4) süreç ortalamasının ve varyansının cevap yüzey yöntemleriyle modellenebileceğini ve bunun mühendislik açısından daha bilgilendirici olduğunu ifade etmişlerdir. Vining ve Myers'in makalesi literatürde oldukça kabul görmüş ve bu makaledeki fikirler zamanla geliştirilmiştir. Ayrıntılı bilgi için, Del Castillo ve Montgomery (5), Lin ve Tu (6) ve Kim ve Lin (7)'nin çalışmalarını referans olarak gösterebiliriz.

2. İKİLİ CEVAP OPTİMİZASYONU

Süreç standart sapmasını bir kısıt değerine bağlamak yerine, problemi bir çok amaçlı programlama problemine dönüştürmenin daha gerçekçi olabileceğini düşünmekteyiz. Çünkü, süreç standart sapmasının kontrol değeri ya bilinemez ya da bilinmesi uzun mühendislik çalışmaları gerektirecektir. Taguchi problemlerini çözebilmek için tasarlanabilecek bir optimizasyon problemi,

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbf{R}}{\text{Min}} \left\{ \hat{y}_\mu, \hat{y}_\sigma \right\} \qquad [2.1]$$

Muluk (2)).

We shall consider Taguchi's three basic situations in the following manner:

Case1: "Target is best", which means keeping the mean response at a specified value while minimizing the variance response.

Case2: "The larger the better", which means making the mean response as large as possible, while controlling the variance response.

Case3: "The smaller the better", which means making the mean response as small as possible, while controlling the variance response.

As pointed out by Box (3), there are superior methods available in classical design theory, which can be used (propably after some minor modifications) to deal with the cases given above. Recently, much of the work in parameter design has dealt with alternative methodology in design and analysis when both control and noise variables are used in the same experiment and in the same model. This has often been referred to as the response model approach. Formal recognition of the Taguchi's robust design problem as an optimization problem is due to Vining and Myers (4), who expressed the problem as maximization or minimization of an objective function subject to a single equality constraint. In this way the engineer and scientist can achieve the basic goal of the Taguchi method while addressing Box's criticisms (For more information, see, Del Castillo and Montgomery (5), Lin and Tu (6) and Kim and Lin (7).

In this paper, we utilize a multiobjective optimization technique, specifically the generalized distance approach, to obtain simultaneous solutions to the mean and standard deviation response functions. The proposed method seriously considers the correlations among the responses.

The rest of the paper is organized as follows. In the next section we present a brief overview of the dual response optimization. In section 3, we review the concept of multiresponse optimization. The proposed method, namely the generalized distance approach, will be given in section 4. Identifying the linear correlations in the DRS problem is given in section 5. This is followed by a numerical example that illustrates the proposed approach. We conclude the paper with an appendix and a conclusion .

2. DUAL RESPONSE OPTIMIZATION

The popular formulations of the dual response problem typically impose a restriction on the value of the secondary response (i.e., standard deviation). Such restrictions may rule out better conditions, since an acceptable value for the secondary response is usually unknown. In fact, process conditions that result in smaller standard deviation are often preferable. A more flexible formulation of the problem can be defined as (see, Köksoy (1), Köksoy and Doganaksoy (8) :

şeklinde olsun (Köksoy (1), Köksoy ve Doganaksoy (8). Burada, **x,** $k\times1$ boyutlu bir vektör olup, deneyci tarafından kontrol edilen bağımsız değişkenleri göstermektedir. Etkenlerin düzeylerine bağlı olarak bulunacak deneysel bölge **R** ile gösterilmektedir $(\mathbf{x}\in\mathbf{R})$. Uygun bir deneyin gerçekleştiği varsayımı altında, süreç ortalama ve süreç standart sapmasının ikinci derece yüzey tahminleri,

where,

$$\hat{y}_{\mu} = b_0 + \mathbf{x'b} + \mathbf{x'Bx}$$
$$\hat{y}_{\sigma} = c_0 + \mathbf{x'c} + \mathbf{x'Cx} \qquad [2.2]$$

şeklinde tanımlanmıştır. Model parametrelerinin vektör ve matris gösterimleri sırasıyla **b**, **c**, **B** ve **C** sembolleri ile verilmektedir. Paramatre tahminleri için en küçük kareler yöntemi kullanılabilir. Heterojenik varyansların olabileceği şüphesi varsa, parametre tahminleri için ağırlıklı en küçük kareler yöntemi önerilebilir (9).

Eşitlik 2.1'den görüldüğü gibi, ortalama ve standart sapma fonksiyonları eşanlı olarak minimum yapılacaktır. Bulunacak ortak çözüm, 'Enküçük-en-iyi' durumunun çözümü olarak kabul edilecektir. Tasarlanan problem 'Enbüyük-en-iyi' durumuna uyarsa, Eşitlik 2.1'de $\hat{y}_{\mu}$ yerine $-\hat{y}_{\mu}$ alınarak minimum problemi biçiminde çözülebilecektir. 'Hedef-en-iyi' durumunda çözüm, diğer durumlara göre farklıdır. 'Hedef-en-iyi' durumu, yapı olarak kısıtlı problem tanımına uymaktadır. Çözüm tekniği olarak NIMBUS algoritması önerilebilir (Bkz: Köksoy (1)).

where **x** is a $k\times1$ vector of control or design variables, **B** and **C** are $k\times k$ matrices containing the estimated coefficients of the second-order terms of each response model, **b** and **c** are $k\times1$ vectors containing the estimated coefficients of the first-order terms of each response model, b_0 and c_0 are scalers (intercepts), **R** defines the experimental region of interest $(\mathbf{x}\in\mathbf{R})$.

Parameters can be estimated by using ordinary least squares. Alternatively, when the homogeneous variance assumption does not hold, the method of weighted least squares should be considered (9).

The formulation in Eq. 2.1 is directly related to the "smaller-the-better" case. If the objective function is $\hat{y}_{\mu}$ is to be maximized (i.e., the "larger-the-better"), however, this can be accomplished by minimizing $-\hat{y}_{\mu}$. A solution for the "target-is-best" case can be more directly addressed using one of the past approaches (e.g., Del Castillo and Montgomery (5)), since there is a preset constraint on the value of the mean response function and, thus, simultaneous optimization is not necessary (see, Köksoy (1)).

3. ÇOK CEVAPLI YÜZEYLER

İkili cevap optimizasyonu, çok cevaplı yüzey optimizasyonunun özel bir halidir. Çok cevaplı yüzey optimizasyonunun temel amacı, birden fazla yüzey fonksiyonunun oluşturduğu karmaşık sistemin optimum noktasını bulmaktır. Bir başka deyişle, optimum noktayı verecek uygun etken düzeylerinin belirlenmesidir. Bu sözü geçen optimum nokta, tanımlanacak problemin cinsine göre değişebilmektedir. Örneğin bazı problemlerde tüm cevap fonksiyonlarını maksimum yapacak bir noktanın bulunması istenirken, bazende minimum yapacak bir nokta ile ilgilenilebilir. Bir diğer ilginç problem ise, eşanlı olarak bazı fonksiyonları maksimum ve bazılarını da minimum yapacak bir noktanın aranmasıdır. Bir yüzey fonksiyonunun optimum noktası, diğer fonksiyonlar için optimum olmayabilir. Sonuç olarak, tüm cevap fonksiyonları için uygun bir zeminin bulunması ve *uzlaşık* noktanın (compromise point) tespit edilmesi gerekir. Çok cevaplı yüzey analizi sırasında karşılaşılabilecek bazı güçlükler,

1. Bir cevap değişkeni için uygun olan bir deney tasarımı, diğerleri için başarısız sonuçlar üretebilir,
2. Cevaplar arasındaki muhtemel ilişki yapıları, analiz sonuçlarını olumsuz yönde etkileyebilir,

şeklinde sıralanabilir.

Khuri ve Conlon (10) ve Khuri ve Cornell (9), ilişki

3. MULTIRESPONSE OPTIMIZATION

The DRS problem is a special case of the multiple response problem. The analysis of data from a multiresponse experiment requires careful consideration. In other words, the response variables should not be investigated individually and independently of one an-other. Interrelationships that may exist among the responses can render such univariate investigations meaningless. Optimal conditions for one response may be far from optimal or even physically impractical for the others. In general situations we might consider finding compromising conditions on the input variables that are somewhat favorable to all responses. Some difficulties in multi-response analysis are given as follows:

1. A design suitable for one response may produce unsatisfactory results for the remaining responses,
2. Interrelationships that may exist among the responses may rule out better conditions and also render such univariate investigations meaningless.

Khuri and Conlon (10) and Khuri and Cornell (9) proposed an approach in which a generalized distance measure is employed to indicate the weighted distance of each response from its individual optimum value. The variances and the covariances of the responses are used in determining the weights. Then the solution that minimizes the generalized distance is found. Vining (11) proposed a yapısını da dikkate alan bir optimizasyon yöntemi önermişlerdir. Yöntem, genelleştirilmiş uzaklık ölçüsüne dayanmaktadır. Bu ağırlıklandırılmış uzaklık ölçüsünde, her bir cevap değişkenine belirli ağırlıklar verilmektedir. Ağırlıklar, cevapların varyans ve kovaryanslarından oluşturulmuştur. Bulunacak çözüm, genelleştirilmiş uzaklığın minimum yapılması prensibine dayanmaktadır. Vining (11), cevaplar arasındaki ilişki yapılarını da dikkate alan bir başka yöntem geliştirmiştir. Vining'in yöntemi, Khuri ve Conlon (10)'ın uzaklık ölçüsünün özel bir durumudur. Bu çalışmada, genelleştirilmiş uzaklık ölçüsünü kullanılarak Taguchi probleminin çözülebileceğini göstereceğiz.

methodology based on a mean squared method which allows the practitoner to specify the directions of economic importance for the compromised optimum, while seriously considering the variance-covariance structure of the multiple responses. Vining's method is a special case of the method proposed by Khuri and Conlon (10).

In this paper, we use the generalized distance approach to solve the Taguchi's dual response problem.

3.1. Çok Cevaplı Sistemlerde Parametre Tahmini

Bir çok cevaplı deneyde, $x_1, x_2, \ldots, x_k$ gibi k tane kodlanmış girdi değişkenlerinin oluşturduğu N tane deneme noktasında toplam v tane farklı cevap değişkeninin ölçüldüğünü düşünelim. Belirli bir **R** deneysel bölgesi içinde, cevap değişkenlerinin polinom tipindeki regresyon modelleri ile temsil edilebileceğini varsayalım. Böylece vektörel biçimde yazılan i inci cevap modeli,

3.1. Parameter Estimation in the Linear Multiresponse Model

Let N be the number of experimental runs and v be the number of response variables which can be measured for each setting of a group of k coded variables, $x_1, x_2, \ldots, x_k$. We assume that the response variables can be represented by polynomial regression models in the values of x_j within a certain experimental region **R**. Hence, the ith response model can be written in vector form as

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i \qquad i = 1, 2, \ldots, v \tag{3.1}$$

şeklindedir. Burada, $\mathbf{y}_i$, i inci cevap değişkenine ait gözlemlerin oluşturduğu N×1 boyutlu vektörü, $\mathbf{X}_i$, N×p_i boyutlu ve p_i ranklı kodlanmış değişken düzeylerinin bilinen fonksiyonlarından oluşan tasarım matrisini, $\boldsymbol{\beta}_i$, p_i×1 boyutlu bilinmeyen parametreler vektörünü ve $\boldsymbol{\varepsilon}_i$, i inci cevap değişkenine ilişkin rasgele hata vektörünü göstermektedir. Ayrıca,

where $\mathbf{y}_i$ is an N×1 vector of observations on the ith response, $\mathbf{X}_i$ is an N×p_i matrix of rank p_i of known functions of the settings of the coded variables, $\boldsymbol{\beta}_i$ is a p_i×1 vector of unknown constant parameters, and $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ is a random error vector associated with the ith response ($i = 1, 2, \ldots, v$). We also assumed that

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{\varepsilon}_i) &= \mathbf{0} \\ \mathrm{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}_i) &= \sigma_{ii}\mathbf{I}_N \qquad i = 1, 2, \ldots, v \\ \mathrm{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_j) &= \sigma_{ij}\mathbf{I}_N \qquad i, j = 1, 2, \ldots, v;\ i \neq j \end{aligned} \tag{3.2}$$

olduğu varsayılır. Eşitlik 3.1 biçimindeki modeller birleştirilirse,

The v×v matrix whose (i,j) th element is σ_{ij} ($i, j = 1, 2, \ldots, v;\ i \neq j$) will be denoted by $\boldsymbol{\Sigma}$. The v equations given in Eq. 3.1 may be represented as

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{3.3}$$

bulunur. Eşitlik [3.3)'deki model yapısına *doğrusal çok cevaplı model* adı verilir. Bu gösterimde, $\tilde{\mathbf{y}} = (\mathbf{y}_1' : \mathbf{y}_2' : \ldots : \mathbf{y}_v')'$, $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}_1' : \boldsymbol{\beta}_2' : \ldots : \boldsymbol{\beta}_v')'$, $\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\varepsilon}_1' : \boldsymbol{\varepsilon}_2' : \ldots : \boldsymbol{\varepsilon}_v')'$ ve tasarım matrisi $\mathbf{X} = \mathrm{diag}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_v)$ şeklinde tanımlanmaktadır. Vektörler ve matrisler "koyu renkli (kalın)" olarak yazılmış, satır vektörlerini belirtmek için vektörlerin üzerine devrik (transpose) işareti konmuştur.

Eşitlik 3.2'den yararlanarak, $\boldsymbol{\varepsilon}$ vektörünün varyans-kovaryans matrisi, **V**,

where $\tilde{\mathbf{y}} = (\mathbf{y}_1' : \mathbf{y}_2' : \ldots : \mathbf{y}_v')'$, $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}_1' : \boldsymbol{\beta}_2' : \ldots : \boldsymbol{\beta}_v')'$, $\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\varepsilon}_1' : \boldsymbol{\varepsilon}_2' : \ldots : \boldsymbol{\varepsilon}_v')'$, and **X** is the block-diagonal matrix, $\mathbf{X} = \mathrm{diag}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_v)$. In the above description, vectors and matrices are written in "bold" style, and the symbol " ′ " denotes the transpose of vectors.

From the formula in Eq. 3.2 it can be seen that $\boldsymbol{\varepsilon}$ has the variance-covariance matrix

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}_N \tag{3.4}$$

biçiminde yazılır. $\boldsymbol{\Sigma}$, v×v boyutlu bir matrisi göstermektedir. Matrisin (i,j) inci elemanı σ_{ij} $(i, j = 1, 2, ..., \mathrm{v}\,; \mathrm{i} \neq \mathrm{j})$ ile gösterilecektir. Burada $\otimes$ sembolü, kartezyen (kronecker) çarpımını göstermektedir. Eşitlik 3.4'deki matrisin boyutu vN×vN'dir. Bu matris, $\left(\sigma_{ij}\mathbf{I}_N\right)$ şeklinde parçalarına ayrılabilir. $\boldsymbol{\beta}$ 'nın eniyi doğrusal yansız tahmini (best linear unbiased estimate – BLUE),

where $\otimes$ is a symbol for the Kronecker product or matrices. The dimension of the matrix in Eq.3.4 is vN×vN. This matrix can be partitioned as $\left(\sigma_{ij}\mathbf{I}_N\right)$. The best linear unbiased estimate (BLUE) of $\boldsymbol{\beta}$ is given by

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\tilde{\mathbf{y}} \qquad [3.5]$$

olacaktır (Bkz: Khuri ve Cornell (9)). Kartezyen çarpımın özelliklerinden hareketle, $\mathbf{V}^{-1} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes \mathbf{I}_N$ yazılır. $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 'nin varyans-kovaryans matrisi, $\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$,

where $\mathbf{V}^{-1} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes \mathbf{I}_N$ (see, Khuri and Cornell (9)). The variance-covariance matrix of $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, $\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$, is

$$(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \qquad [3.6]$$

şeklindedir. Eşitlik 3.5 'deki tahmin ediciye, *genelleştirilmiş enküçük kareler tahmin edicisi* (generalized least squares estimator) adı verilir. Eşitlik 3.4'de verilen $\mathbf{V}$ matrisi bilinmiyorsa, öncellikle bu matrisin tahmin edilmesi gerekmektedir. Bu amaçla $\boldsymbol{\Sigma}$ 'nun tekil olmayan tahmini, yani $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$, bulunur. $\boldsymbol{\Sigma}$ 'nın tahmini,

The estimator given in Eq. 3.5 is called the "generalized least squares estimator". Equations 3.5 and 3.6 require knowledge of $\boldsymbol{\Sigma}$. If $\boldsymbol{\Sigma}$ is unknown, as is usually the case, then an estimate of $\boldsymbol{\beta}$ can be obtained by replacing $\boldsymbol{\Sigma}$ in Eq. 3.5 by an estimate $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ provided that this estimate is nonsingular. Zellner (12) proposed one such estimate as follows:

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = (\hat{\sigma}_{ij}) \qquad \mathrm{i,j}=1,2,...,\mathrm{v}$$

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{\mathbf{y}_i'\left(\mathbf{I}_N - \mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)\mathbf{X}_i'\right)\left(\mathbf{I}_N - \mathbf{X}_j(\mathbf{X}_j'\mathbf{X}_j)\mathbf{X}_j'\right)\mathbf{y}_j}{N} \qquad [3.7]$$

Zellner (12) tarafından önerilmiştir. Eşitlik 3.5 ve 3.6'da $\mathbf{V}$ yerine $\hat{\mathbf{V}} = \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \otimes \mathbf{I}_N$ kullanılabilir. Bu şekilde bulunacak tahmin ediciye, iki aşamalı Aitken tahmin edicisi (two-stage Aitken estimator) adı verilmektedir.

Bu bölümde son olarak, parametre tahmin konusu ile ilgili bir özel duruma yer verilecektir. Eşitlik 3.1'de $\mathbf{X_i} = \mathbf{X_0}$ (i=1,2,...,v) alınırsa, deneyin tasarım matrisi, $\mathbf{X} = \mathrm{diag}(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}, ..., \mathbf{X_v})$, $\mathbf{X} = \mathbf{I}_v \otimes \mathbf{X_0}$ biçimine indirgenmiş olur. Diğer bir deyişle, tasarlanan deneyde her bir cevap vektörü için farklı tasarımları kullanmak yerine, aynı tasarım tercih edilmiş ve bu matris $\mathbf{X_0}$ ile gösterilmiştir. Sonuç olarak,

As a result, $\mathbf{V}$ in equations 3.5 and 3.6 can be replaced by $\hat{\mathbf{V}} = \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \otimes \mathbf{I}_N$. This estimator is referred as the two-stage Aitken estimator.

As a special case, if in Eq. 3.1, $\mathbf{X_i} = \mathbf{X_0}$ for (i=1,2,...,v), then $\mathbf{X} = \mathrm{diag}(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}, ..., \mathbf{X_v})$ reduces $\mathbf{X} = \mathbf{I}_v \otimes \mathbf{X_0}$. It is easy to show that

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\mathbf{I}_v \otimes \left(\mathbf{X_0}'\mathbf{X_0}\right)^{-1}\mathbf{X_0}'\right)\mathbf{y} \qquad [3.8]$$

biçimindeki $\boldsymbol{\beta}$ 'nın BLUE tahmin edicisine ulaşılır. Bulunan tahmin edici $\boldsymbol{\Sigma}$ matrisine bağlı değildir. Böylece, her bir cevap modeli için ayrı ayrı enküçük kareler yöntemi uygulanarak parametreler tahminlenir (Khuri (13)).

Thus the BLUE of $\boldsymbol{\beta}$ does not depend on $\boldsymbol{\Sigma}$. Hence, the BLUE of $\boldsymbol{\beta}_i$ is the same as the ordinary least-squares estimator obtained from fitting the ith model individually (i=1,2,...,v) (Khuri (13)).

4.GENELLEŞTİRİLMİŞ UZAKLIK YÖNTEMİ

Genelleştirilmiş uzaklık yöntemi Khuri ve Conlon (10) tarafından geliştirilen ve çok cevaplı yüzeylerin optimizasyonunda kullanılan bir yöntemdir (Bkz: Conlon

4. THE GENERALIZED DISTANCE APPROACH

The generalized distance approach proposed by Khuri and Conlon (10) seriously considers the variance-ve Khuri (14) ve Khuri ve Cornell (9)). Bu yöntemin en belirgin özelliği, cevaplar arasındaki muhtemel ilişkileri de çözüm sürecine aktarabilmesidir.

Eşitlik 3.1'deki model yapısına uyan v tane cevap değişkeni ile ilgilenildiğini varsayalım. Ayrıca $\mathbf{X_1} = \mathbf{X_2} = ... = \mathbf{X_v} = \mathbf{X_0}$ olsun. Yani, tüm cevap modelleri,

covariance structure of the multiple responses (see, Conlon and Khuri (14), Khuri and Cornell (9)). In this section, we briefly review the basic concepts of this novel methodology:

Let v be the number of responses of interest and $\mathbf{X_1} = \mathbf{X_2} = ... = \mathbf{X_v} = \mathbf{X_0}$. The model for the ith univariate response can be written as

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{X_0}\boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i \qquad (i=1,2,...,v)$$

şeklinde yazılabilecektir. $\mathbf{X_0}$ matrisinin boyutu $N \times p_0$ ve rankı p_0'dır. Hatırlanacağı gibi, $\boldsymbol{\beta}$'nın BLUE tahmin edicisi Eşitlik 3.8'de verilmiştir. Varyans-kovaryans matrisinin tahmini ise,

where $\mathbf{X_0}$ is $N \times p_0$ matrix of rank p_0. The BLUE of $\boldsymbol{\beta}$ was given in Eq. 3.8. An estimate of the variance-covariance matrix $\boldsymbol{\Sigma}$ is given by

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbf{y}' (\mathbf{I}_N - \mathbf{X_0}(\mathbf{X_0'X_0})^{-1}\mathbf{X_0'})\, \mathbf{y} \big/ (N - p_0)$$

biçimindedir. i inci cevap kestirim denklemi,

The prediction equation for the ith response is

$$\hat{\mathbf{y}}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{z}'(\mathbf{x})\hat{\boldsymbol{\beta}}_i \qquad i=1,2,...,v \qquad [4.1]$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\mathbf{x} = (x_1,...,x_k)'$ kodlanmış girdi değişkenleri vektörü, $\mathbf{z}'(\mathbf{x})$, $\mathbf{X_0}$ matrisinin $\mathbf{x}$ noktasında değerlendirilen ve bir satırına karşılık gelen satır vektörünü göstermektedir. $\hat{\boldsymbol{\beta}}_i$ ise, $(\mathbf{X_0'X_0})^{-1}\mathbf{X_0'}\mathbf{y}_i$ (i=1,2,...,v) yardımıyla hesaplanan en küçük kareler tahmin edicisidir. Eşitlik 4.1 yardımıyla,

where $\mathbf{x} = (x_1,...,x_k)'$ is the vector of coded input variables, $\mathbf{z}'(\mathbf{x})$ is the vector of the same form as a row of the matrix $\mathbf{X_0}$ evaluated at the point $\mathbf{x}$, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_i$ is the least squares estimator of $\boldsymbol{\beta}_i$ and is equal to $(\mathbf{X_0'X_0})^{-1}\mathbf{X_0'}\mathbf{y}_i$ (i=1,2,...,v). It follows that

$$\mathrm{Var}(\hat{\mathbf{y}}_i(\mathbf{x})) = \mathbf{z}'(\mathbf{x})(\mathbf{X_0'X_0})^{-1}\mathbf{z}(\mathbf{x})\sigma_{ii} \qquad i=1,2,...,v \qquad [4.2]$$

$$\mathrm{Cov}(\hat{\mathbf{y}}_i(\mathbf{x}), \hat{\mathbf{y}}_j(\mathbf{x})) = \mathbf{z}'(\mathbf{x})(\mathbf{X_0'X_0})^{-1}\mathbf{z}(\mathbf{x})\sigma_{ij} \qquad i,j=1,2,...v,\ i \neq j \qquad [4.3]$$

varyans ve kovaryans eşitlikleri bulunur. Bu eşitlikler, i inci ve j inci cevap yüzey modelleri için yazılmıştır. Varyans-kovaryans yapısının genel biçimi ise,

where σ_{ij} is the (i,j)th element of the variance-covariance matrix $\boldsymbol{\Sigma}$. Hence,

$$\mathrm{V\hat{a}r}(\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) = \mathbf{z}'(\mathbf{x})(\mathbf{X_0'X_0})^{-1}\mathbf{z}(\mathbf{x})\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \qquad [4.4]$$

şeklinde olacaktır. Eşitlik 4.4'deki $\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = (\hat{\mathbf{y}}_1(\mathbf{x}), \hat{\mathbf{y}}_2(\mathbf{x}), ..., \hat{\mathbf{y}}_v(\mathbf{x}))'$ vektörü, verilen bir $\mathbf{x}$ noktasının cevap kestirimidir.

$\hat{\mathbf{y}}_i(\mathbf{x})$ fonksiyonunun belirli bir $\mathbf{R}$ deneysel bölgesi içindeki optimum değeri $\hat{\phi}_i$ (i=1,2,...,v) olsun. Böylece, $\hat{\boldsymbol{\varphi}} = (\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, ..., \hat{\phi}_v)$, her bir cevap fonksiyonunun optimum değerini içeren vektörü gösterecektir. $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$'nin elamanlarını bulabilmek için ridge analizinden faydalanılır (Bkz: Box ve Draper (15), s.375-381). Eğer $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ vektörünün her bir elemanı aynı $\mathbf{x}$ koşullarında kendi fonksiyonları için optimum oluyorsa, bu durumda çok cevaplı optimizasyon problemi çözüme ulaşacaktır. Yani bulunabilecek bir $\mathbf{x}$ noktasında tüm fonksiyonlar optimum değerlerine ulaşmıştır. Ancak, fonksiyonların yapısı nedeniyle, böylesine bir ideal çözüme genellikle ulaşılamaz. Bu durumda, tüm fonksiyonlar için kabul edilebilir bir uzlaşık çözümün bulunması ve bunun optimum olarak değerlendirilmesi yoluna gidilebilir. Uzlaşık çözüm noktasında, Eşitlik 4.1'deki tüm fonksiyonlar kendi optimum noktalarına yakın bir değer alırlar. Uzlaşık çözüm noktasındaki çok cevaplı fonksiyon

Let $\hat{\phi}_i$ be the optimum value of $\hat{\mathbf{y}}_i(\mathbf{x})$ optimized individually over the experimental region $\mathbf{R}$ (i=1,2,...,v), and let $\hat{\boldsymbol{\varphi}} = (\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, ..., \hat{\phi}_v)$. The ridge analysis can be used to find the elements of $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ (see, Box and Draper (15), s.375-381). If these individual optima are attained at the same set, $\mathbf{x}$, of operating conditions, then an "ideal" optimum is said to be achieved. In this case the problem of multi-response optimization is obviously solved and no further work is needed. However, such an ideal optimum rarely exists. In more general situations we might consider finding compromising conditions on the input variables that are somewhat favorable to all responses. By that we mean conditions under which the multiresponse function deviates as little as possible from the ideal optimum. Such a deviation of the compromising conditions from the ideal optimum can be formulated by means of a distance function which measures the distance of $\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$, considered as a point in the v-dimensional Euclidean space, from $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$, the vector of individual optima. We denote the distance function by $\rho(\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}), \hat{\boldsymbol{\varphi}})$. The multiresponse optimization then involves finding değeri ile; ideal çözüm arasındaki sapma (uzaklık) mümkün olduğunca az olmalıdır. Bu sözü geçen sapmayı veya uzaklığı tanımlayan uzaklık fonksiyonu $\rho(\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}),\hat{\boldsymbol{\varphi}})$ olsun. Sonuç olarak çok cevaplı optimizasyonda, **R** deneysel bölgesi üzerinde $\rho(\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}),\hat{\boldsymbol{\varphi}})$ uzaklığını enküçük yapacak **x** koşullarının bulunması hedeflenmektedir. Uzaklık fonksiyonu $\rho(\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}),\hat{\boldsymbol{\varphi}})$ 'yu seçebilmek için birçok yol vardır. Bunlardan birisi, ağırlıklandırılmış uzaklık olup,

conditions on **x** that minimize the distance function over the experimental region.

The distance function $\rho(\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}),\hat{\boldsymbol{\varphi}})$ can be chosen in a variety of ways. One possible choice is the weighted distance (Khuri and Cornell (9))

$$\rho(\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}),\hat{\boldsymbol{\varphi}})=\sqrt{(\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x})-\hat{\boldsymbol{\varphi}})'\{\mathrm{Var}(\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\}^{-1}(\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x})-\hat{\boldsymbol{\varphi}})} \qquad [4.5]$$

şeklinde tanımlanmaktadır (Khuri ve Cornell (9).

Eşitlik 4.5'de $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ vektörü biliniyor ve sabit (known and fixed) olarak kabul edilirse ve aynı zamanda cevap değişkenleri ilişkisiz olarak düşünülürse,

In Eq. 4.5, If $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ is considered known and fixed, and when the responses are considered to be independent, the metric is defined as follows:

$$\rho_1(\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}),\hat{\boldsymbol{\varphi}})=\sqrt{\frac{(\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x})-\hat{\boldsymbol{\varphi}})'\begin{pmatrix}1/\hat{\sigma}_{11} & & 0\\ & \cdots & \\ 0 & & 1/\hat{\sigma}_{vv}\end{pmatrix}(\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x})-\hat{\boldsymbol{\varphi}})}{\mathbf{z}'(\mathbf{x})(\mathbf{X}_0'\mathbf{X}_0)^{-1}\mathbf{z}(\mathbf{x})}} \qquad [4.6]$$

formülü elde edilmiş olur. Eğer, cevap değişkenleri birbiriyle ilişkili ve $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ vektörü sabit kabul edilirse,

When the responses are considered correlated (as estimated by $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$), but the optima are still considered fixed, the metric is defined as follows:

$$\rho_2(\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}),\hat{\boldsymbol{\varphi}})=\sqrt{\frac{(\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x})-\hat{\boldsymbol{\varphi}})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x})-\hat{\boldsymbol{\varphi}})}{\mathbf{z}'(\mathbf{x})(\mathbf{X}_0'\mathbf{X}_0)^{-1}\mathbf{z}(\mathbf{x})}} \qquad [4.7]$$

şeklinde bir uzaklık fonksiyonu tanımlamasına ulaşılır. Literatürde karşılaşılan bir diğer uzaklık formülü,

Another distance function from the literature considers relative changes from the individual optima. The metric is defined as follows:

$$\rho_3(\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}),\hat{\boldsymbol{\varphi}})=\sqrt{\sum_{i=1}^{v}\frac{(\hat{\mathbf{y}}_i(\mathbf{x})-\hat{\phi}_i)^2}{\hat{\phi}_i^2}} \qquad [4.8]$$

şeklindedir (Bkz: Khuri (13)). Değişik amaçlara hizmet edecek şekilde tanımlanmış başka uzaklık formüllerine de literatürde raslanmaktadır.

(see, Khuri (13)). There are some other distances available in the literature to serve for different purposes.

5. TAGUCHİ'NİN İKİLİ CEVAP PROBLEMİNDE İLİŞKİ TEŞHİSİ

Çok cevaplı bir sistemin ilişki yapısı, $\mathbf{DD}'$ matrisinin özdeğerleri üzerinden araştırılmaktadır (Bkz: Box et al. (16)). **D** matrisi v×N boyutlu bir matris olup,

5 .IDENTIFYING THE LINEAR CORRELATIONS IN THE DRS PROBLEM

The eigenvalue analysis determines whether or not linear relationships exist among the responses. Such identification requires an examination of the eigenvectors of $\mathbf{DD}'$ (Box et al. (16)). The matrix **D** is an v×N matrix given by

$$\mathbf{D}=\mathbf{Y}'\left[\mathbf{I}_N-\frac{\mathbf{1}_N\mathbf{1}_N'}{N}\right] \qquad [5.1]$$

şeklinde tanımlanmaktadır (Khuri ve Cornell (9)). Burada $\mathbf{1}_N$, 1'lerden oluşan N×1 boyutlu bir vektörü göstermektedir. $\mathbf{Y}'$ ise, cevap değişken değerlerinin v×N boyutlu bir matrisidir.

$\mathbf{DD}'$ matrisinden hareketle, Taguchi probleminde ilişki teşhisi için önerdiğimiz Teorem aşağıda verilmektedir. Teoremin ispatı için EKLER bölümüne bakılmalıdır.

Teorem 5.1. *Bir çok cevaplı deneyde, $x_1, x_2, \ldots, x_k$ gibi k tane kodlanmış girdi değişkenlerinin oluşturduğu N tane deneme noktasında s kez tekrarlanan gözlemlerin ilgili kalite karakteristiği açısından ortalama ve standart*

where $\mathbf{1}_N$ is a vector of ones of order N×1, and $\mathbf{Y}'$ is an v×N matrix of responses (Khuri and Cornell (9)).

The following theorem is proposed to detect a possible correlation between the responses of the Taguchi's problem. The appendix will show the proof.

Theorem 5.1. *Let N be the number of experimental runs and $x_1, x_2, \ldots, x_k$ be the group of k coded variables and r be the number of replications at each design point.* $\overline{\mathrm{y}}_i$

sapmalarının sırasıyla $\bar{y}_i$ *ve* s_i *(i =1,2,...,N) biçiminde gözlemlendiğini düşünelim.* $\bar{\mathbf{y}}$ *ve* ***s*** *vektörleri,* $\bar{y}_i$ *ve* s_i *değerlerinden teşkil edilmiş olmak üzere, "*$\bar{\mathbf{y}}$ *ve* ***s*** *vektörleri arasındaki korelasyon katsayısının karesi 1" ise, bu durumda tam bir doğrusal ilişki söz konusu olacaktır.*

Uygulamada tam doğrusal ilişkiye yakın olan durumlara da raslanmaktadır. Yani, $\mathbf{DD}'$ 'nün özdeğerlerinden en az biri sıfıra yakın bir değer alacaktır. Burada dikkat edilmesi gereken husus, özdeğerlerin sıfıra yakın çıkması, işlemlerdeki yuvarlama hatalarının (rounding error) bir sonucu da olabilecektir (Bkz: Khuri ve Cornell (9), s.256).

Sonuç olarak, Teorem 5.1, Taguchi probleminin ilişki teşhisi için önerilmiştir. Cevaplar arasındaki muhtemel ilişkileri çözüm sürecine aktarabilmek için, Bölüm 4'de verdiğimiz genelleştirilmiş uzaklık yönteminin kullanılmasını önermekteyiz.

6. UYGULAMA

Bu bölümünde, Taguchi problemlerinin ilişki teşhisi ve genelleştirilmiş uzaklık yönteminin kullanımı üzerine bir uygulama yapılacaktır. Kullanılacak örnek problem literatürde sıkça karşımıza çıkan "basım" verisidir (Vining ve Myers (4)).

Renkli mürekkep püskürterek paketlere etiket basan bir baskı makinesinin görüntü kalitesini etkileyen üç kontrol değişkeni hız (x_1), basınç (x_2) ve uzaklık (x_3) olarak belirlenmiştir. Her bir kontrol değişkeni üç düzeylidir. Görüntü kalitesi ile ilgili hedeflere ulaşabilmek için, üç tekrarlı (s=3) bir 3^3 çok etkenli deney tasarlanmıştır. Geçmiş tecrübelerden faydalanarak, bu deneyden önce bir başlangıç deneyinin yapılmasına gerek duyulmamış ve ikinci derece cevap modelinin kullanılmasına karar verilmiştir. Deneyin sonuçları Çizelge 6.1'de verilmektedir. Kontrol değişkenleri kodlanmış olup, her biri üç düzeylidir. Bu deneyde toplam 27 deneme vardır ve her bir deneme üç defa tekrar ederek görüntü kalite değerleri (yani y_{u1}, y_{u2} ve y_{u3}) bulunmuştur. Görüntü değerlerinin ortalama ve standart sapmaları sırasıyla $\bar{y}_u$ ve s_u sütunlarında gösterilmektedir.

and s_i *(i =1,2,...,N) are the usual point estimates of mean and standard deviation, respectively, at the* u^{th} *design point. Assume that* $\bar{\mathbf{y}}$ *and* ***s*** *are the vectors constructed by* $\bar{y}_i$ *and* s_i*.*

"A full linear relationship will exist between $\bar{\mathbf{y}}$ *and* ***s*** *vectors if the squared sample correlation coefficient is exactly equivalent to 1".*

In practice, rounding errors in the response values may prevent an eigenvalue of $\mathbf{DD}'$ from being exactly zero even when the responses are linearly related. Small eigenvalues of $\mathbf{DD}'$ should, therefore, be subjected to further analysis to determine if they are truly zero (see, Khuri and Cornell (9), p.256).

6. NUMERICAL EXAMPLE

To demonstrate the feasibility of applying the proposed method, the following numerical example is presented. This example of Vining and Myers (4) has appeared repeatedly in the literature on DRS. The purpose of the experiment was to analyze the effect of the speed (x_1), pressure (x_2), and distance (x_3) variables on a printing machine's ability to apply colored inks to package labels (y). A three-level factorial design on the three control variables with three runs at each design point was used to fit the responses. We have assumed that the region of interest for this design reflects either preliminary experimentation or sufficient prior information to justify using a second order model. Table 6.1 summarizes the data from this experiment. In this table, $\bar{y}_u$ and s_u are the usual point estimates of mean and standard deviation, respectively, at the u^{th} design point.

Table 6.1. The "Printing" Data (4)
Çizelge 6.1. Basım Verisi (4)

u	x_1	x_2	x_3	y_{u1}	y_{u2}	y_{u3}	$\bar{y}_u$	s_u
1	-1	-1	-1	34	10	28	24.0	12.5
2	0	-1	-1	115	116	130	120.3	8.4
3	1	-1	-1	192	186	263	213.7	42.8
4	-1	0	-1	82	88	88	86.0	3.7
5	0	0	-1	44	178	188	136.7	80.4
6	1	0	-1	322	350	350	340.7	16.2
7	-1	1	-1	141	110	86	112.3	27.6
8	0	1	-1	259	251	259	256.3	4.6
9	1	1	-1	290	280	245	271.7	23.6
10	-1	-1	0	81	81	81	81.0	0.0
11	0	-1	0	90	122	93	101.7	17.7
12	1	-1	0	319	376	376	357.0	32.9
13	-1	0	0	180	180	154	171.3	15.0
14	0	0	0	372	372	372	372.0	0.0
15	1	0	0	541	568	396	501.7	92.5
16	-1	1	0	288	192	312	264.0	63.5
17	0	1	0	432	336	513	427.0	88.6
18	1	1	0	713	725	754	730.7	21.1
19	-1	-1	1	364	99	199	220.7	133.8
20	0	-1	1	232	221	266	239.7	23.5
21	1	-1	1	408	415	443	422.0	18.5
22	-1	0	1	182	233	182	199.0	29.4
23	0	0	1	507	515	434	485.3	44.6
24	1	0	1	846	535	640	673.7	158.2
25	-1	1	1	236	126	168	176.7	55.5
26	0	1	1	660	440	403	501.0	138.9
27	1	1	1	878	991	1161	1010.0	142.5

Görüntü kalitesiyle ilgili olarak bulunacak ortalama ve standart sapma cevap yüzey modelleri,

$$\hat{y}_\mu = 327.6 + 177x_1 + 109.4x_2 + 131.5x_3 + 32.0x_1^2 - 22.4x_2^2 - 29.1x_3^2 + 66x_1x_2 + 75.5x_1x_3 + 43.6x_2x_3 \quad [6.1]$$

$$\hat{y}_\sigma = 34.9 + 11.5x_1 + 15.3x_2 + 29.2x_3 + 4.2x_1^2 - 1.3x_2^2 + 16.8x_3^2 + 7.7x_1x_2 + 5.1x_1x_3 + 14.1x_2x_3 \quad [6.2]$$

şeklindedir. Bulunan modellerin uyum eksikliği testleri, model parametrelerinin önem kontrolü ve model belirleme katsayılarına ilişkin sonuç ve yorumlar ayrıntılı olarak Vining ve Myers (4)'in makalesinde tartışılmaktadır.

Bu problemin çözülmesindeki amaç, etiket görüntü kalitesini maksimum yapacak etken düzeylerinin bulunmasıdır (Enbüyük-en-iyi). Beşinci bölümde verilen Teorem 5.1'den, kalite ortalama ve standart sapmasına ilişkin korelasyon katsayısının karesi 0,330216 olarak bulunmuştur. Görüldüğü gibi bu veri için güçlü bir doğrusal ilişkiye raslanmamıştır. 'Basım' verisi için 'genelleştirilmiş uzaklık yöntemi' uygun olmasa bile, analiz sonuçları Çizelge 6.2'de sunulmuştur. Bu sonuçları elde edebilmek için, Conlon ve Khuri (14) tarafından ANSI C dilinde yazılan 3644 satırlı MR isimli ticari olmayan bir bilgisayar programı kullanılmıştır. Bu program, Khuri'den özel istekle e-mail aracılığında sağlanmıştır.

The fitted response surface functions using ordinary least squares from Vining and Myers (4) are [6.1] and [6.2] above.

More discussion about the fitted models and the corresponding analysis of variance can be found in Vining and Myers (4).

This numerical example considers the "larger the better" case. We now let the mean response be as large as possible. If we use the result of the Theorem 5.1, the squared sample correlation coefficient is found to be 0.330216. The resulting coefficient is quite weak. Although it is not a perfect example for illustrating the generalized distance approach, it is the best we have been able to locate in the statistical literature. Table 6.2 summarizes the results of the generalized distance approach. All results are generated by using a program called "MR". More details about the program can be found in Conlon and Khuri (14). MR is 3644 lines of ANSI C code. It compiles and executes without modification under both Turbo C 2.0 for DOS on the IBM PC and under the UNIX MIPS C compiler for the DECstation 3100. The program is available from the first author upon request and includes source, sample data sets and an executable file for the DOS environment.

Table 6.2. Results from the Generalized Distance Approach ("Larger the better" case)
Çizelge 6.2. Uzaklık Yöntemi Sonuçları

$\hat{\phi}_i$	$\mathbf{x}'$
$\hat{y}_\mu = 640.1874$	(0.769474, 0.428563, 0.477757)
$\hat{y}_\sigma = 15.6521$	(−0.11971, −0.938725, −0.328844)
Distance Metric/ uzaklık ölçüsü = "Default"	Iteration/İterasyon =337
Minimum Distance/ Minimum uzaklık = 30.04115	$\rho^2 \le 1$
Simultaneous solution/ Eş anlı çözüm sonuçları:	
$\hat{y}_\mu = 600.51830$	
$\hat{y}_\sigma = 61.80480$	
$\mathbf{x}'$ = (0.955059, 0.234721, 0.169416)	

Çizelge 6.2'nin $\hat{\phi}_i$ ile gösterilen sütununda her bir yüzey fonksiyonu için ridge analizi sonuçları görülmektedir. Örneğin, $\hat{y}_\mu$ fonksiyonunu maksimuma ulaştıracak etken düzeyleri $\mathbf{x}'$ =(0,769474, 0,428563, 0,477757) ve maksimum değeri 640,1874 olarak bulunmuştur. Eşanlı çözümlere geçebilmek için MR programında "default" tanımlaması yapılmıştır. "Default" durumunda, cevapların birbiriyle ilişkili ve eşanlı optimum noktanın yerinin uzayda rasgele bir nokta olduğu varsayılmaktadır. Deneysel bölge olarak 1 yarıçaplı küresel bölge dikkate alınmıştır.

İkili cevap probleminin eşanlı sonuçları, $\hat{y}_\mu$ = 600,51830 ve $\hat{y}_\sigma$ = 61,80480 olarak bulunmuştur. Bu sonuçları sağlayacak çözüm vektörü $\mathbf{x}'$ = (0,955059, 0,234721, 0,169416) dir. Bulunan çözüm vektöründe, görüntü kalite ortalaması maksimuma ulaşırken standart sapmanın değeri de minimumdur.

The individual optimum solutions from the ridge analysis are found to be (x1, x2, x3) = (0.769474, 0.428563, 0.477757) with process mean $\hat{y}_\mu$ = 640.1874 and standard deviation $\hat{y}_\sigma$ =15.6521. For the simultaneous solutions we consider the "default" situation where the optima are considered unknown and the responses are correlated. The spherical region of interest with radius one is also considered in MR.

The simultaneous solution is found to be $\mathbf{x}'$ = (0.955059, 0.234721, 0.169416). At this point, under the spherical region, 61.80480 is the smallest standard deviation value that can be attained if the mean response function is held fixed at 600.51830. The highest printing quality is achieved by the resulting simultaneous solution.

7. EKLER: TEOREM 5.1'İN İSPATI

İkili cevap probleminde, cevap değişkenlerinin sayısı v =2'dir. Cevap değerleri, her bir deneme noktasında s kez tekrarlaran gözlemlerin ortalama ve standart sapmaları olarak düşünülebilecektir. Bu sözü geçen ortalama ve standart sapmalar sırasıyla $\overline{y}_i$ ve s_i (i =1,2,...,N) sembolleriyle gösteriliyor olsun. Yukardaki bilgilerden yararlanarak ikili cevap problemi için $\mathbf{DD}'$ matrisi,

7. APPENDIX: THE PROOF OF THE THEOREM 5.1

Let N be the number of experimental runs and $x_1, x_2, \ldots, x_k$ be the group of k coded variables and r be the number of replications at each design point. $\overline{y}_i$ and s_i (i =1,2,...,N) are the point estimates of mean and standard deviation, respectively, at the u[th] design point. Assume that $\overline{\mathbf{y}}$ and $\mathbf{s}$ are the vectors constructed by $\overline{y}_i$ and s_i. Recalling from Eq. 5.1, we obtain

$$\mathbf{DD}' = \begin{bmatrix} \left[\left(1-\frac{1}{N}\right)\sum_{i=1}^{N}\overline{y}_i^2 - \frac{2}{N}\sum\sum_{i<j}\overline{y}_i\overline{y}_j\right] & \sum_{i=1}^{N}\left\{\left(1-\frac{1}{N}\right)\overline{y}_i - \frac{1}{N}\sum_{j\neq i}\overline{y}_j\right\}s_i \\ & \left[\left(1-\frac{1}{N}\right)\sum_{i=1}^{N}s_i^2\right] - \frac{2}{N}\sum\sum_{i<j}s_is_j \end{bmatrix} \qquad [7.1]$$

şeklinde oluşturuldu. $\mathbf{DD}'$'nün özdeğerleri bulunurken, $ax^2 + bx + c = 0$ şeklinde bir denklem çözülecektir. Bu denklemin c katsayısı sıfıra eşit ise, özdeğerlerden birisi mutlaka sıfır olacaktır. $\mathbf{DD}'$ matrisinden hareketle

To find the eigenvalues of $\mathbf{DD}'$, one needs to solve an equation like $ax^2 + bx + c = 0$. If the constant c is equivalent to zero, then one of the eigenvalues should exactly be zero. We obtain the constant c from $\mathbf{DD}'$ in Eq.

bulunacak c katsayısı Eşitlik 7.2'de verilmiştir. Eşitlik 7.2'deki a^2 katsayısı, $\mathbf{DD'}$ matrisinin köşegen dışındaki elemanının karesini göstermektedir.

7.2. In this equation, the term h^2 denotes the product of the off diagonal elements of $\mathbf{DD'}$.

$$\left\{\left[\left(1-\frac{1}{N}\right)\sum_{i=1}^{N}\bar{y}_i^2\right]-\frac{2}{N}\sum_{i<j}\sum\bar{y}_i\bar{y}_j\right\}\left\{\left[\left(1-\frac{1}{N}\right)\sum_{i=1}^{N}s_i^2\right]-\frac{2}{N}\sum_{i<j}\sum s_i s_j\right\}-a^2 \qquad [7.2]$$

$$=\left\{\sum_i\bar{y}_i^2-\frac{1}{N}\sum_i\bar{y}_i^2-\frac{2}{N}\sum_{i<j}\sum\bar{y}_i\bar{y}_j\right\}\left\{\sum_i s_i^2-\frac{1}{N}\sum_i s_i^2-\frac{2}{N}\sum_{i<j}\sum s_i s_j\right\}-a^2$$

$$=\left\{\sum_i\bar{y}_i^2-\frac{1}{N}\left[\sum_i\bar{y}_i^2+2\sum\sum\bar{y}_i\bar{y}_j\right]\right\}\left\{\sum_i s_i^2-\frac{1}{N}\left[\sum_i s_i^2+2\sum\sum s_i s_j\right]\right\}-a^2$$

$$=\left\{\sum_i\bar{y}_i^2-\frac{1}{N}\left(\sum_i\bar{y}_i\right)^2\right\}\left\{\sum_i s_i^2-\frac{1}{N}\left(\sum_i s_i\right)^2\right\}-a^2$$

$$=\sum_i\left(\bar{y}_i-\bar{\bar{y}}\right)^2\sum_i\left(s_i-\bar{s}\right)^2-a^2$$

Burada $\bar{\bar{y}}=\frac{\sum\bar{y}_i}{N}$ ve $\bar{s}=\frac{\sum s_i}{N}$ şeklinde tanımlanmıştır.

Eğer $\sum_i\left(\bar{y}_i-\bar{\bar{y}}\right)^2\sum_i\left(s_i-\bar{s}\right)^2=a^2$ ise, $\mathbf{DD'}$ matrisinin özdeğerlerinden biri mutlaka sıfır olacaktır. Bu durumda tam bir doğrusal ilişki söz konusu olur. Tam doğrusal ilişki söz konusu olduğunda,

Here, $\bar{\bar{y}}=\frac{\sum\bar{y}_i}{N}$, and $\bar{s}=\frac{\sum s_i}{N}$.

If $\sum_i\left(\bar{y}_i-\bar{\bar{y}}\right)^2\sum_i\left(s_i-\bar{s}\right)^2=h^2$, then one of the eigenvalues of $\mathbf{DD'}$ is zero.

Hence,

$$\sum_i\left(\bar{y}_i-\bar{\bar{y}}\right)^2\sum_i\left(s_i-\bar{s}\right)^2-\left\{\sum_{i=1}^{N}\left[\left(1-\frac{1}{N}\right)\bar{y}_i-\frac{1}{N}\sum_{j\neq i}\bar{y}_j\right]s_i\right\}^2=0$$

$$=\sum_i\left(\bar{y}_i-\bar{\bar{y}}\right)^2\sum_i\left(s_i-\bar{s}\right)^2-\left\{\sum_i\left[\left(1-\frac{1}{N}\right)\bar{y}_i-\frac{1}{N}\left\{\left[\sum_{j=1}^{N}\bar{y}_j\right]-\bar{y}_i\right\}\right]s_i\right\}^2=0$$

$$=\sum_i\left(\bar{y}_i-\bar{\bar{y}}\right)^2\sum_i\left(s_i-\bar{s}\right)^2-\left\{\sum_i\left[\left(1-\frac{1}{N}\right)\bar{y}_i-\bar{\bar{y}}+\frac{1}{N}\bar{y}_i\right]s_i\right\}^2=0$$

$$=\sum_i\left(\bar{y}_i-\bar{\bar{y}}\right)^2\sum_i\left(s_i-\bar{s}\right)^2-\left\{\sum_i\left[\bar{y}_i-\bar{\bar{y}}\right]s_i\right\}^2=0$$

$$=\sum_i\left(\bar{y}_i-\bar{\bar{y}}\right)^2\sum_i\left(s_i-\bar{s}\right)^2-\left[\mathrm{Kov}(\bar{\mathbf{y}},\mathbf{s})\right]^2=0 \qquad [7.3]$$

bulunur. Özetle, tam doğrusal ilişki durumunda, $\sum_i\left(\bar{y}_i-\bar{\bar{y}}\right)^2\sum_i\left(s_i-\bar{s}\right)^2=\left[\mathrm{Kov}(\bar{\mathbf{y}},\mathbf{s})\right]^2$ olmalıdır. Diğer bir deyişle, $\bar{\mathbf{y}}$ ve $\mathbf{s}$ vektörleri arasındaki korelasyon katsayısının karesi 1 ise, cevap değişkenleri arasında tam bir doğrusal ilişki söz konusu olacaktır.

From Eq. 7.3, we obtain

As a result,

"A full linear relationship will exist between $\bar{\mathbf{y}}$ *and* ***s*** *vectors if the squared sample correlation coefficient is exactly equivalent to 1".*

8. SONUÇ

Bu çalışmada, Taguchi'nin ikili cevap probleminin ilişkili cevap değişkenleri durumundaki çözümü üzerinde durulmuştur. İlişki teşhisinde kullanılabilecek bir teorem önerilmiştir (Bkz: Teorem 5.1). İlişki durumunda çözüm stratejisi olarak, "genelleştirilmiş uzaklık yöntemi" nin uygunluğu uygulmalı olarak tartışılmıştır.

8. CONCLUSION

In this study, we suggest a detection tool of identifying linear correlations between the responses and a method suitable for the analysis of the Taguchi's problem when the relationships exist between the responses. The proposed methodology seriously considers the variance-covariance structure of the multiple responses.

REFERENCES/ KAYNAKLAR

1. Köksoy, O."Taguchi ve Cevap Yüzey Felsefelerinin Birleştirilmesi: Problem ve Çözüm Stratejileri", Doktora Tezi, ***Hacettepe Üniversitesi Fen Bilm. Ens.***, 2001D11 (2001).

2. Köksoy, O., Muluk, Z. "Taguchi'nin Tasarım ve Analizlerine Eleştiriler", ***I. Ulusal Kalite Fonksiyon Göçerimi Sempozyumu***, ***Dokuz Eylül Üniversitesi İşletme Fak.***, İzmir: 269-280 (2002).

3. Box, G.E.P. "Discussion of Off-Line Quality Control, Parameter Design, and the Taguchi Method", ***J. Quality Tech.***, 17: 198-206 (1985).

4. Vining,G.G., Myers, R.H. "Combining Taguchi and Response Surface Philosophies: Dual Response Approach", ***J. Quality Tech.***, 22 (1): 38-45 (1990).

5. Del Castillo, E., Montgomery, D.C. "A Nonlinear Programming Solution to the Dual Response Problem", ***J. Quality Tech.***, 25(3): 199-204 (1993).

6. Lin, D.K.J. , Tu, W. "Dual Response Surface Optimization", ***J. Quality Tech.***, 27(1): 34-39 (1995).

7. Kim, K., Lin,D.K.J. "Dual Response Optimization: A Fuzzy Modeling Approach" ***J. Quality Tech.***, 30(1): 1-10 (1998).

8. Köksoy, O., Doğanaksoy, N.,"Joint Optimization of Mean and Standard Deviation Using Response Surface Methods", ***J. Quality Tech.***, 35(3): 239-252 (2003).

9. Khuri, A.I., Cornell, J.A., *Response Surfaces, 2nd ed.*, ***Dekker***, New York, 251-298 (1996).

10. Khuri, A.I., Conlon, M. "Simultaneous Optimization of Multiple Responses Represented by Polynomial Regression Functions", ***Technometrics***, 23: 363-375 (1981).

11. Vining,G.G., "A Compromise Approach to Multiresponse Optimization", ***J. Quality Tech.***, 30(4): 309-313 (1998).

12. Zellner, A.,"An efficient Method of Estimating Seemingly Unrelated Regressions and Tests for Aggregation Bias", ***J. Amer. Statist. Assoc.***, 57: 348-368 (1962).

13. Khuri, A.I., "Multiresponse Surface Methodology", ***Handbook of Statistics***, 13: 377-406 (1996).

14. Conlon, M., Khuri, A. I."MR: Multiple Response Optimization", ***Technical Report, University of Florida***, 1-10 (1990).

15. Box, G.E.P, Draper, N.R. ,*Empirical Model-Building and Response Surfaces*, ***John Wiley & Sons Inc.:***188-196 (1987).

16. Box, G.E.P, Hunter, W.G., MacGregor, J.F., and Erjavec, J. "Some Problems Associated with the Analysis of Multiresponse Data", ***Technometrics***, 15: 33-51 (1973).

Received/ Geliş Tarihi:25.07.2003 Accepted/ Kabul Tarihi: 21.11.2003