G.Ü. Fen Bilimleri Dergisi ISSN 1303-9709 *G.U. Journal of Science*
18(3): 391-395(2005) *18(3):391-395 (2005)*

SOME PROPERTIES OF b-WEAKLY COMPACT OPERATORS

Birol ALTIN
Gazi University, Faculty of Sciences and Arts, Department of Mathematics, 06500- Teknikokullar, Ankara, TURKEY, email: birola@gazi.edu.tr

ABSTRACT

In this study it is obtained some properties of b-weakly compact operators. Moreover, it is given a characterization of quotient Riesz space with b-property.

***Key Words*:** Riesz spaces with b-property, b-weakly compact operators, KB-spaces.

b-ZAYIF KOMPAKT OPERATÖRLERİN BAZI ÖZELLİKLERİ

ÖZET

Bu çalışmada b-zayıf kompakt operatörlerin bazı özellikleri elde edildi. Ayrıca b-özelliğine sahip bölüm Riesz uzayları için bir karekterizasyon verildi.

Anahtar Kelimeler: b-özelliğine sahip Riesz uzayları, b-zayıf kompakt operatörler, KB-uzayları.

1. GİRİŞ

E bir Riesz uzayı, $E^{\sim\sim}$ ise E uzayının ikinci sıra duali olsun. E uzayından $E^{\sim\sim}$ uzayı içine kanonik gömme Q_E : $E \longrightarrow E^{\sim\sim}$, $Q_E(x) = \hat{x}$; $\hat{x}(f) = f(x)$, $f \in E^{\sim}$, $x \in E$ biçiminde tanımlı Q_E operatörü her zaman bir örgü homomorfizması olur (1 Teorem 5.4). Ayrıca bunun yanında Eğer $E^{\sim}$, E' nin noktalarını ayırıyor ise Q_E' nin birebir olduğu görülür. Bundan dolayı E Riesz uzayına $E^{\sim\sim}$ Riesz uzayının Riesz altuzayı olarak bakılır. Bu çalışmada $E^{\sim}$ nın E' nin noktalarını ayırdığı kabul edilecektir. Riesz uzaylar ile ilgili temel tanım ve notasyonlar (1) de bulunabilir.

Tanım 1.1 E bir Riesz uzayı ve $A \subset E$ olsun. Eger A kümesi $E^{\sim\sim}$ içinde sıra sınırlı oluyor ise A kümesine E içinde bir b-sıra sınırlı küme denir. E Riesz uzayının her b-sıra sınırlı kümesi E içinde sıra sınırlı oluyorsa da, E uzayına b-özelliğine sahip Riesz uzayı denir (2).

E bir Riesz uzayı olsun. E'nin b-özelliğine sahip olması için gerekli ve yeterli koşul, E içindeki $0 \le x_\alpha \uparrow \le x'', x'' \in E^{\sim\sim}$ koşulunu sağlayan her bir $\{x_\alpha\}$ ağının E uzayı içinde üstten sınırlı olmasıdır (2). Bu çok kullanışlı olan sonuç önerme ve iddiaların ispatında kolaylık sağlar.

Örnekler 1.2 Bir E Riesz uzayının sıra duali b-özelliğine sahiptir, bütün KB-uzayları b- özelliğine sahiptir, K kompakt, Hausdorff topolojik uzayı olmak üzere C(K) uzayı b-özelliğine sahiptir. Diğer taraftan sıfıra yakınsak reel terimli dizilerin uzayı c_0 b-özelliğine sahip değildir (2).

Banach örgülerinin yönlendirilmiş kümeler için zayıf Fatou özelliği b-özelliğini gerektirir, Frechet örgülerinde Levi özelliği ve Zaanen'in B-özelliği'de b-özelliğini

1. INTRODUCTION

Let E be a Riesz space and $E^{\sim\sim}$ be bidual of E. The canonical embedding $Q_E : E \longrightarrow E^{\sim\sim}$ defined by $Q_E(x) = \hat{x}$; $\hat{x}(f) = f(x)$, $f \in E^{\sim}$, $x \in E$ is a lattice homomorphism (1 Theorem 5.4). If $E^{\sim}$ separates of E, then Q_E is also one-to-one and hence, E can be considered as a Riesz subspace of $E^{\sim\sim}$. We will assume all Riesz spaces considered in this note have separating order duals. In all undefined terminology concerning Riesz spaces we will adhere to (1).

Definition 1.1 Let E be a Riesz space and $A \subset E$. If A is order bounded in $E^{\sim\sim}$ we call A, b-order bounded in E. A Riesz space E is said to have b-property if each subset A of E which is order bounded in $E^{\sim\sim}$ is order bounded in E (2).

A Riesz space E has b-property-b if and only if for each net $\{x_\alpha\}$ in E satisfying $0 \le x_\alpha \uparrow \le x'', x'' \in E^{\sim\sim}$ is order bounded in E (2).

Examples 1.2 Every order dual of a Riesz space has b-property, every KB-space has b-property, for an arbitrary compact Hausdorff space K, C(K) has b-property. On the other hand c_0, Riesz space of all real convergent sequences to zero, does not have b-property (2).

The weak Fatou property for directed sets of Banach lattices imply the b-property. The Levi property and Zaanen's property imply the b-property in Frechet lattices (2).

Definition 1.3 An operator $T : E \rightarrow X$, from a Banach lattice into a Banach space is said to be b-weakly compact operator whenever T carries the each b-order bounded subset of E into relatively weakly compact subset of X (2).

gerektirir (2).

Tanım 1.3 E bir Banach örgüsü, X bir Banach uzayı ve T : $E \rightarrow X$ bir operatör olsun. Eğer T operatörü E uzayının b-sıra sınırlı kümelerini X uzayının relatif zayıf kompakt alt kümesine dönüştürüyorsa T operatörüne bir b-zayıf kompakt operatör denir (2).

Bir E Banach örgüsünden X Banach uzayı içine tanımlanan bütün b-zayıf operatörlerin uzayını $W_b(E,X)$, sıra zayıf kompakt operatörlerin uzayını $W_o(E,X)$, zayıf kompakt operatörlerin uzayını W(E,X) ile göstereceğiz. Ayrıca E uzayından X içine sürekli operatörlerin uzayı da L(E,X) ile gösterilecektir. Bu durumda $W(E,X) \subseteq W_b(E,X) \subseteq W_o(E,X)$ kapsamaları sağlanır (2).

Aşağıdaki örnek yukarıdaki kapsamaların öz olabileceğini gösterecektir.

Örnek 1.4 (a) I : $L_1[0,1] \rightarrow L_1[0,1]$ özdeşlik dönüşümünü göz önüne alalım. I bir b-zayıf kompakt operatör olmasına karşın bir zayıf kompakt operatör değildir.

(b) I : $c_0 \rightarrow c_0$ özdeşlik dönüşümü bir sıra zayıf kompakt operatör olmasına karşın bir b-zayıf kompakt operatör değildir (2).

E ve F iki Riesz uzayı T,S : $E \rightarrow F$ iki operatör olsun. Her bir $x \in E$ için $|S(x)| \leq T(|x|)$ saglanıyor ise T operatörüne S operatörünü sınırlıyor denir.

2. TEMEL SONUÇLAR

c_0 uzayı üzerinde tanımlı özdeşlik dönüşümü bir sürekli operatör olmasına karşın bir b-zayıf kompakt operatör değildir. Aşağıda önerme sürekli operatör uzayı ile b-zayıf kompakt operatörler uzayının ne zaman çakışacağını karakterize edecektir.

Önerme 2.1 E bir Banach örgüsü olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(i) E bir KB-uzayıdır.

(ii) Her F Banach örgüsü için $L(E,F) = W_b(E,F)$ olur.

İspat. E bir KB-uzayı, $T: E \rightarrow F$ bir sürekli operatör ve A, E uzayının bir b-sıra sınırlı alt kümesi olsun. Her bir KB-uzayı b-özelliğine sahip olduğundan E uzayı b-özelliğine sahip olur (2). Böylece $A \subset [-x,x]$ olacak şekilde E uzayının bir pozitif x elemanı vardır. E uzayı sıra sürekli norma sahip olduğundan $[-x,x]$ sıra aralığı E uzayının bir zayıf kompakt altkümesi olur.(1 Önerme 12.9). $T: E \rightarrow F$ nin zayıf sürekli operatör olduğu dikkate alınırsa, T(A) kümesinin F uzayının bir relatif zayıf kompakt alt kümesi olacağı sonucuna varılır (1 Teorem 17.1). Yani $L(E,F) \subset W_b(E,F)$ dir. Diğer taraftan $W_b(E,F) \subset L(E,F)$ kapsaması her zaman gerçekleştiğinden $L(E,F) = W_b(E,F)$ elde edilir (2).

Şimdi her F Banach örgüsü için $L(E,F) = W_b(E,F)$ eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. O zaman $I: E \rightarrow E$

The collection of b-weakly compact operators will be denoted by $W_b(E,X)$, the collection of order weakly compact operators will be denoted by $W_o(E,X)$, The collection of weakly compact operators will be denoted by W(E,X) and collection of continuous operators from E into X will be denoted by L(E,X). Clearly, we have $W(E,X) \subseteq W_b(E,X) \subseteq W_o(E,X)$ (2).

We give examples to show that these inclusions may be proper.

Example 1.4 (a) Consider the identity operator I : $L_1[0,1] \rightarrow L_1[0,1]$. I is b-weakly compact . But it is not weakly compact.

(b) Consider the identity operator I : $c_0 \rightarrow c_0$. I is an order weakly compact .But it is not a b-weakly compact operator (2).

Let E,F be two Riesz spaces and let T,S be two operators from E into F. It is said that S is dominated by another operator T if $|S(x)| \leq T(|x|)$ for each $x \in E$.

2. MAIN RESULTS

Although the identity oıperator on c_0 is continuous, but it is not b-weakly compact. The following proposition characterizes when the vector space of all continuous operators from a Banach lattice into Banach space equals to vector space of all b-weakly compact operators.

Proposition 2.1 Let E be a Banach lattice. Then the following statements are equivalent:

(i) E is a KB-space,

(ii) $L(E,F) = W_b(E,F)$ for each Banach space F.

Proof. Let E be a KB-space, let F be a Banach space and let T be a continuous operator from E into F, and A be a b-order bounded subset of E. Since every KB-space has b-property A is order bounded in E (2). So, there exists a positive element x in E with $A \subset [-x,x]$. From E has order continuous norm the order interval $[-x,x]$ is a relatively weakly compact subset of E (1 Proposition 12.9). Since T is a continuous operator, T(A) is a relatively weakly compact subset of F (1 Theorem 17.1). So, $L(E,F) \subset W_b(E,F)$. On the other hand, $W_b(E,F) \subset L(E,F)$ is satisfied (2). Hence, $L(E,F) = W_b(E,F)$.

Now we assume that $L(E,F) = W_b(E,F)$ for every Banach space F. Then the identity operator $I: E \rightarrow E$ is a b-weakly compact operator. So, E is a KB-space (2 Proposition 2.10).

özdeşlik dönüşümü bir b-zayıf kompakt operatör olur. Böylece E bir KB- uzayı olur (2 Önerme 2.10).

Önerme 2.2 E ve F iki Banach örgüleri, $S,T:E\to F$ operatörler ve T operatörü S operatörünü sınırlasın. Eğer T operatörü bir b-zayıf kompakt operatör ise S de bir b-zayıf kompakt operatör olur.

İspat. E uzayında herhangi bir b-sıra sınırlı dik dizisi $\{x_n\}$ olsun. Her bir n doğal sayısı için $x_n = x_n^+ - x_n^-$ olur (1). Ayrıca $\{x_n^+\}$ ve $\{x_n^-\}$ dizileri de dik ve b-sıra sınırlı olur. Ayrıca T operatörü S operatörünü sınırladığından $0\le |S(x_n^+)|\le T(x_n^+)$, $0\le |S(x_n^-)|\le T(x_n^-)$ bağıntıları elde edilir. Böylece, $0\le |S(x_n)| = |S(x_n^+ - x_n^-)| \le |S(x_n^+)| + |S(x_n^-)| \le T(x_n^+) + T(x_n^-)$ bulunur. Bunun yanında T operatörü b-zayıf kompakt operatör olduğundan $\lim_n T(x_n^+) = 0$ ve $\lim_n T(x_n^-) = 0$ bulunur (2 Önerme 2.8). Bu ise $\lim_n |S(x_n)| = 0$ olduğunu gösterir. Böylece S nin bir b-zayıf kompakt operatör olduğu elde edilir.

Önerme 2.3 E, F iki Banach örgüsü, E sıra sürekli norma sahip, $T:E\to F$ bir b-zayıf kompakt operatör ve B ise E uzayının E'' uzayının içinde doğurduğu band olsun. Bu durumda $T':(F',w^*)\to (E',\sigma(E',B))$ operatörü sürekli olur.

İspat. F' uzayı içinde w^*-topolojisine göre $x'_\alpha \to 0$ yakınsamasını sağlayan bir $\{x'_\alpha\}$ dizisi ile $x''\in B$ alalım. T bir b-zayıf kompakt operatör ve E sıra sürekli norma sahip olduğundan $T''(B)\subset F$ olur (2 Önerme 2.11). Böylece $x''(T(x'_\alpha)) = \langle T'(x'_\alpha), x''\rangle = \langle x'_\alpha, T''(x'')\rangle \to 0$, sağlanacağından $(E',\sigma(E',B))$ topolojik uzayında $T'(x'_\alpha)\to 0$ yakınsaması sağlanır. Bu da ispatı tamamlar.

Önerme 2.4 Eğer bir E Riesz uzayı b-özelliğine sahip ise c_0, E uzayının bir sıra kapalı Riesz uzayına Riesz izomorfik olamaz.

İspat. E Riesz uzayı b-özelliğine sahip ve c_0 ında , E uzayının bir U sıra kapalı Riesz uzayına Riesz izomorfik olduğunu kabul edelim. Bu durumda U Riesz alt uzayı'da b-özelliğine sahip olur (3). Dolayısıyla c_0 uzayının b-özelliğine sahip olacağı çelişkisine ulaşılır. Yani c_0 , E Riesz alt uzayına Riesz izomorfik olamaz.

E bir Riesz uzayı ve A, E nin bir sıra ideali olsun. E/A bölüm uzayı E içindeki x elemanlarının $\dot{x}$ = x+A biçimindeki denklik sınıflarından oluştuğu biliniyor. E/A bölüm uzayı,

$\forall\ \dot{x},\dot{y}\in E/A$ çiftiiçin $\dot{x}\le\dot{y} \Leftrightarrow \exists x_1\in\dot{x}, \exists y_1\in\dot{y} \ni x_1\le y_1$ sıralaması ile bir Riesz uzayı olur (1 Teorem 7.10).

Şimdi bölüm uzaylarının b-özelliğine sahip olmasını karekterize edecek olan aşağıdaki önermeyi verelim.

Önerme 2.5 E bir Riesz uzayı B ise E Riesz uzayının bir

Proposition 2.2 Let $S,T:E\to F$ be two operators between two Banach lattices and let S be dominated by T . If T is a b-weakly compact operator, then S is also a b-weakly compact.

Prof. Let $\{x_n\}$ be a disjoint sequence of E . We have $x_n = x_n^+ - x_n^-$ for each n∈IN. So $\{x_n^+\}$ and $\{x_n^-\}$ are two disjoint sequences. Since S is dominated by T,

$0\le |S(x_n^+)|\le T(x_n^+)$,

$0\le |S(x_n^-)|\le T(x_n^-)$,

$0\le |S(x_n)| = |S(x_n^+ - x_n^-)| \le |S(x_n^+)| + |S(x_n^-)| \le T(x_n^+) + T(x_n^-)$

are obtained. On the other hand, Since T is a b-weakly compact operator, we have $\lim_n T(x_n^+) = 0$ and $\lim_n T(x_n^-) = 0$ (2 Proposition 2.8). Therefore, $\lim_n |S(x_n)| = 0$. Hence, we obtain S is a b-weakly compact.

Proposition 2.3 Let E, F be two Banach lattice with F has order continuous norm and let T be a weakly compact operator from E into F, and B denote the band genarated by E in E'' then $T':(F',w^*)\to (E',\sigma(E',B))$ is continuous.

Proof. Let $x'_\alpha \xrightarrow{w^*} 0$ in F' and let $x''\in B$. Since T is b-weakly compact and E has order continuous norm, we have $T''(B)\subset F$ (2 Proposition 2.11). Therefore, $x''(T(x'_\alpha)) = \langle T'(x'_\alpha), x''\rangle = \langle x'_\alpha, T''(x'')\rangle \to 0$. It gives us $T'(x'_\alpha)\to 0$ $(E',\sigma(E',B))$ and the prof of the proposition is finished.

Riesz spaces with b-property does not contain any order cosed sublattice isomorphic to c_0.

Proposition 2.4 Let E be a Riesz space with b-property. Then c_0 is not Riesz isomorphic to any order closed Riesz subspace of E.

Proof. Let E has b-property and c_0 is a Riesz isomorphic to an order closed Riesz subspace U of E. Then U has b-property (3). Hence, c_0 has b-property. We have thus arrived at a contradiction.

Let E be a Riesz space and let A be an order ideal of E . It is well known that the quotient vector space E/A is a Riesz space under the order relation

$\dot{x}\le\dot{y} \Leftrightarrow\ \exists x_1\in\dot{x}, \exists y_1\in\dot{y} \ni x_1\le y_1$ (1 Theorem 7.10).

Now we give the following lemma characterizes when quotient vector spaces has b-property.

Proposition 2.5 Let E be a Riesz space and B be a projection band of E. Then the quotient Riesz space E/B and B have b-property if and only if E has b-property.

Proof. Let E be a Riesz space and let B be a projection band of E. Then E=B $\oplus$ B^d . Since every element $x\in E$ has a unique decomposition x = x_1+x_2 where $x_1\in B$, $x_2\in B^d$. E and BxB^d are Riesz isomorphic. On the other hand , B^d and E/B are Riesz isomorphic. Now let B and projeksiyon bandi olsun. E/B bölüm uzayı ve B bandinin b-özelliğine sahip olması için gerekli ve yeterli koşul, E Riesz uzayının b-özelliğine sahip olmasıdır.

İspat. E bir Riesz uzayı ve B, E Riesz uzayının bir projeksiyon bandi olsun. O zaman E=B $\oplus$ B^d olur. Her bir $x \in E$ için $x_1 \in B$, $x_2 \in B^d$ olmak üzere $x = x_1+x_2$ biçiminde tek türlü yazılabildiğinden, E Riesz uzayı BxB^d kartezyen çarpım uzayına örgü izomorfiktir. Ayrıca B^d Riesz uzayı da E/B Riesz uzayına örgü izomorfiktir. B ve B^d Riesz uzayları b-özelliğine sahip ve E uzayının $0 \le x_\alpha \uparrow\le x''$, $x'' \in E^{\sim\sim}$ koşulunu sağlayan bir $\{x_\alpha\}$ ağı verilsin. $\{x_\alpha\}$ ağı BxB^d kartezyen çarpımına ait olduğundan $x_\alpha = (y_\alpha, z_\alpha)$ olacak şekilde $(y_\alpha) \subset B$ ve $(z_\alpha) \subset B^d$ ağları vardır. Şimdi, $0 \le f \in B^\sim$ ve $0 \le g \in (B^d)^\sim$ verilsin. $\forall z = (x,y) \in E$ için,

$$\hat{f} : E \to IR,\ z \to \hat{f}(z) = f(x),$$

$$\hat{g} : E \to IR,\ z \to \hat{g}(z) = f(y),$$

biçiminde tanımlı $\hat{f}$,$\hat{g}$ fonksiyonelleri $(E^\sim)^+$ ya aittir. $0 \le x_\alpha \uparrow\le x''$ bagıntısı $E^{\sim\sim}$ içinde sağlandığın dan,

$$0 \le f(y_\alpha) = \hat{f}(x_\alpha) \le x''(\hat{f}),\ \ 0 \le g(z_\alpha) = \hat{g}(x_\alpha) \le x''(\hat{g})$$

elde edilir. Buradan,

$\hat{y} : (B^\sim)^+ \to IR,\ \ f \to \sup_\alpha f(y_\alpha)$ biçiminde tanımlı $\hat{y}$ dönüşümünün toplamsal olduğu görülür. Dolayısıyla $\hat{y}$ dönüşümü $B^\sim$ uzayının tamamına genişler(1 Teorem 1.7). Bu genişleme yine $\hat{y}$ ile gösterilirse $0 \le y_\alpha \uparrow\le \hat{y}$ bağıntısı $B^{\sim\sim}$ da sağlanır. B uzayı b-özelliğine sahip olduğundan B uzayının $0 \le y_\alpha \le y$ olacak şekilde bir y elemanı vardır. Benzer düşünce ile B^d b-özelliğine sahip olduğundan $0 \le z_\alpha \le z$ olacak şekilde B^d uzayının bir z elemanı vardır. Böylece x = (y,z) elemanı E uzayına ait olur ve $0 \le x_\alpha \uparrow\le x$ bağıntısı sağlanır. Yani E uzayı b-özelliğine sahip olur.

Tersine E b-özelliğine sahip ve $0 \le x_\alpha \uparrow\le x''$, $x'' \in B^{\sim\sim}$ ve $0 \le y_\alpha \uparrow\le y''$, $y'' \in (B^d)^{\sim\sim}$ koşullarını sağlayan $\{x_\alpha\} \subset B$ ve $\{y_\alpha\} \subset B^d$ ağları ve $E^\sim$ uzayının keyfi bir pozitif f fonksiyoneli verilsin. $\forall x \in B$ için $f_1 : B \to IR,\ \ x \to f_1(x) = f(x,0)$,biçiminde tanımlı f_1 fonksiyoneli $(B^\sim)^+$ ya aittir ve $0 \le x_\alpha \uparrow\le x''$ bağıntısından $0 \le f(x_\alpha,0) = f_1(x_\alpha) \le x''(f_1) < \infty$ elde edilir. Buradan $\forall f \in (E^\sim)^+$

$\hat{z} : (E^\sim)^+ \to IR,\ \ f \to \sup_\alpha f_1(y_\alpha),$ biçiminde tanımlı $\hat{z}$ nın bir toplamsal dönüşüm olduğu elde edilir ve B^d have b-property and given a net $\{x_\alpha\}$ in E with $0 \le x_\alpha \uparrow\le x''$, $x'' \in E^{\sim\sim}$. Hence there exist a net $\{y_\alpha\}$in B and a net $\{z_\alpha\}$ in B^d such that $x_\alpha = (y_\alpha, z_\alpha)$. Given a positive functional f in $B^\sim$ and a positive functional g in $(B^d)^\sim$. Consider two functional,

$\hat{f} : E \to IR$, defined by $\hat{f}(z) = f(x)$ and

$\hat{g} : E \to IR$, defined by $\hat{g}(z) = f(y)$ for every z=(x,y)∈E. Clearly $\hat{f}, \hat{g} \in (E^\sim)^+$. Since $0 \le x_\alpha \uparrow\le x''$ in $E^{\sim\sim}$, we have $0 \le f(y_\alpha) = \hat{f}(x_\alpha) \le x''(\hat{f})$, $0 \le g(z_\alpha) = \hat{g}(x_\alpha) \le x''(\hat{g})$. Hence it is seen that $\hat{y} : (B^\sim)^+ \to IR$, defined by $f \to \sup_\alpha f(y_\alpha)$ is additive. So, it is extends uniquely to a positive functional from $B^\sim$ into IR (1 Theorem 1.7). The unique extension denoted by $\hat{y}$ again is satisfied $0 \le y_\alpha \uparrow\le \hat{y}$ in $B^{\sim\sim}$. Since B has b-property , there exists a positive element y in B such that $0 \le y_\alpha \le y$ in E. On the other hand there exist a positive elemrnt z in B^d such that $0 \le z_\alpha \le z$ in B^d . So the element x = (y,z) belongs to E and satisfies $0 \le x_\alpha \uparrow\le x$. This implies E has b-property.

Conversly, let E be have b-property and given two nets $\{x_\alpha\} \subset B$ and $\{y_\alpha\} \subset B^d$ with $0 \le x_\alpha \uparrow\le x''$, $x'' \in B^{\sim\sim}$ and $0 \le y_\alpha \uparrow\le y''$ $y'' \in (B^d)^{\sim\sim}$. Let f be a positive functional on $E^\sim$. Using this functional define functional f_1, by $f_1 : B \to IR$, $x \to f_1(x) = f(x,0)$. Thus $f_1 \in (B^\sim)^+$ and from the inequalities $0 \le x_\alpha \uparrow\le x''$ we have $0 \le f(x_\alpha,0) = f_1(x_\alpha) \le x''(f_1) < \infty$. So, it is seen that $\hat{z} : (E^\sim)^+ \to IR$, defined by $f \to \sup_\alpha f_1(y_\alpha)$ is additive. Hence, $0 \le (x_\alpha,0) \le \hat{z}$ in $E^{\sim\sim}$. Since E has b-property, there exists a element (x,y) in E with $0 \le (x_\alpha,0) \le (x,y)$. This implies B has b-property. Using the same idea we obtain B^d has b-property.

Let E and F be two Banach lattices and let $L_b(E,F)$ denote the vector space of all order bounded operator from E into F.then the inclusion $L_b(E,F) \subset L(E,F)$ holds every time (4). However the converse is not true in general. For instance, let us consider the operator $T : C[0,1] \to c_0$ defined by $T(f) = (f(1/n) - f(0)),\ f \in C[0,1]$. Clearly, T is continuous bur it is not order bounded.

Proposition 2.6. Let E be a Banach lattice and F be an AM-space. Then $L_b(F',E') = L(F',E')$.

$0 \leq (x_\alpha, 0) \leq \hat{z}$ sıralaması $E^{\sim\sim}$ içinde sağlanır.E uzayı b-özelliğine sahip olduğundan $0 \leq (x_\alpha, 0) \leq (x, y)$ olacak şekilde E uzayının bir (x,y) elemanı vardır. Bu da B uzayının b-özelliğine sahip olduğunu verecektir. Benzer düşünce ile B^d uzayının da b-özelliğine sahip olduğu görülür.

E ve F herhangi iki Banach örgüsü olsun. E ve F arasındaki sıra sınırlı operatörlerin uzayını $L_b(E,F)$ ile sürekli operatörlerin uzayı $L(E,F)$ olmak üzere $L_b(E,F) \subset L(E,F)$ kapsaması her zaman sağlanır (4). Ancak bu kapsama bazen öz olabilir. Örneğin,

$$T : C[0,1] \to c_0; \quad T(f) = (f(1/n) - f(0)), \quad \forall f \in C[0,1],$$

biçiminde tanımlanan T bir sürekli operatördür ancak bir sıra sınırlı operatör değildir.

Önerme 2.6 E bir Banach örgüsü ve F ise bir AM-uzayı olsun. O zaman $L_b(F', E') = L(F', E')$ eşitliği sağlanır.

İspat. E bir Banach örgüsü ve F bir AM-uzayı olsun. $E' = E^{\sim}$ ve $E^{\sim}$ b-özelliğine sahip olduğundan E' uzayı b-özelliğine sahip olur. Diğer yandan F' de bir AL-uzayı olur (1). Böylece $L_b(F', E') = L(F', E')$ eşitliği elde edilir (2 Önerme2.2).

Sonuç 2.7 E bir Banach örgüsü, F bir AM-uzayı ve $T : E \to F$ ise bir sürekli operatör olsun. Bu durumda $T' : F' \to E'$ sürekli eşlek operatörü sıra sınırlıdır.

Proof. Let E be a Banach lattice and F be an AM-space. Since $E' = E^{\sim}$ and $E^{\sim}$ has b-property, E' has b-property and F' is an AL-space (1). Hence it is obtained $L_b(F', E') = L(F', E')$ (2 Proposition 2.2).

Corollary 2.7 Let E be a Banach lattice and F be an AM-space and T be a continuous operator from E into F. Then the adjoint operator $T' : F' \to E'$ is order bounded.

KAYNAKLAR/ REFERENCES

1. Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., Positive Operators, ***Academic Press***, New York and London,(1985).

2. Alpay, Ş., Altın, B., Tonyalı, C., “On property (b) of vector lattices”, ***Positivity***, 7,135-139,(2003).

3. Alpay, Ş., Altın, B., Tonyalı, C., “A note on Riesz spaces with property-b”, ***Czech. Math. J.*** (To appear)

4. Ercan Z., “İnterval bounded operators and order weakly compact operators”, ***Demostratio Mathematica*,** Vol.XXX1, No 4,805-812,(1998).

Received/ Geliş Tarihi:17.11.2004 Accepted/Kabul Tarihi: 25.03.2005