

## THE FINITE-SIZE SCALING RELATION FOR THE ORDER-PARAMETER PROBABILITY DISTRIBUTION OF THE FOUR-DIMENSIONAL ISING MODEL

Nevzat AKTEKİN  
57. Sokak, 7/7, Emek Mahallesi, 06510 Ankara, TURKEY  
E-mail: bugda\_akt@hotmail.com

### ABSTRACT

The finite-size scaling relation for the order-parameter probability distribution of the four-dimensional Ising model is obtained. It is tested and verified numerically by Monte Carlo simulations. The constants of the critical finite-size scaling function in the analytical form are determined by fitting it to the finite-size scaling function obtained numerically.

PACS numbers: 05.50.+q, 64.60.Cn, 75.40.Cx, 75.40.Mg

*Key words:* Ising model, finite-size scaling, probability distribution.

## DÖRT BOYUTLU ISING MODELİNDE DÜZEN PARAMETRESİ İHTİMALİYET DAĞILIMI İÇİN SONLU ÖRGÜ ÖLÇEKLEME BAĞINTISI

### ÖZET

Dört boyutlu Ising modelinde düzen parametresi ihtimaliyet dağılımı için sonlu örgü ölçekleme bağıntısı elde edilmektedir. Bu bağıntının geçerli olduğu, Monte Carlo simülasyonları ile sayısal olarak da gösterilmektedir. Kritik noktadaki analitik sonlu örgü ölçekleme fonksiyonunda bulunan sabitler, analitik fonksiyon simülasyonla elde edilen sayısal sonlu örgü ölçekleme fonksiyonuna uydurularak, bulunmaktadır.

*Anahtar kelimeler:* Ising modeli, sonlu örgü ölçekleme, ihtimaliyet dağılımı

### 1. GİRİŞ

Ising modelinin düzen parametresi ihtimaliyet dağılımı için sonlu örgü ölçekleme fonksiyonunun bilinmesi, düzen parametresinin (magnatizasyonun) bütün moment ve 'cumulant'larının hesaplanmasını mümkün kılar (1-9). Bundan dolayı, arzu edilen bu fonksiyonların analitik ifadeleri dir. Düzen parametresinin kritik noktadaki ihtimaliyet dağılımı için sonlu örgü ölçekleme fonksiyonunun, bir sınır şartları türü için evrensel olması (10,11), aynı evrensellik sınıfına giren sistemlerin kritik noktalarının ve bu noktaların özelliklerinin bulunmasına izin verir (12). Örgünün uzay boyutu  $d$  olmak üzere,  $d > 4$  deki Ising modelinin düzen parametresi ihtimaliyet fonksiyonu için sonlu örgü ölçekleme fonksiyonunun analitik ifadesi mevcuttur (5,7-9). Bu fonksiyon ortalama alana uygun yapıda olup  $L \rightarrow \infty$  durumunda tamdır;  $L$  örgünün doğrusal boyutudur.  $d = 5$  de fonksiyonun sabitleri, fonksiyon Monte Carlo simülasyonlarıyla hesaplanan sayısal fonksiyona uydurularak belirlenmiştir (4,13).  $d = 4$  de de fonksiyonun analitik ifadesi ardışık

### 1. INTRODUCTION

The knowledge of the finite-size scaling function for the order-parameter probability distribution of the Ising model makes it possible to calculate all the moments of the order parameter (magnetization) and all its cumulants (1-9). Therefore it is desirable to have them analytically. The universality of the finite-size scaling function for the critical probability distribution of the order parameter for a given type of boundary conditions (10,11) allows locating and characterizing critical points of the systems belonging to the same universality class (12). For the Ising model in  $d > 4$  where  $d$  is the dimensionality of the lattice, the finite-size scaling function for the order-parameter probability distribution is known analytically (5,7-9). It has the mean-field form which is exact for the case  $L \rightarrow \infty$  where  $L$  is the linear dimension of the lattice. In  $d = 5$  the constants have been determined by fitting it to the numerical function computed by Monte Carlo simulations (4,13). In  $d = 4$  it is known also analytically at the renormalized mean-field level, that is, correct to leading logarithms. It is

normalleştirmenin kullanıldığı ortalama alan seviyesinde, yani önemi en fazla olan logaritmali kısımları içerecek doğrulukta bilinmektedir. Fonksiyon  $L \rightarrow \infty$  durumunda tam olup (7,9,14), sabitleri belirlenmemiştir.  $d < 4$  için sonlu örgü ölçekleme fonksiyonlarının analitik ifadeleri yoktur. Sonsuz örgü kritik sıcaklığında Monte Carlo sonuçlarına uydurarak basit analitik fonksiyonlar bulmak için çaba gösterilmektedir. Bu çalışmaların birinde,  $d = 2$  ve 3 de simülasyonlarla elde edilen sayısal fonksiyonlara uydurulan analitik fonksiyonlar, esas olarak hal denklemi üssünde,  $\delta$ , farklılık göstermektedir (15). Bir diğer çalışmada (16),  $d = 3$  e ait verilere daha basit bir fonksiyon uydurulmaktadır.

Yukarıda bahsedilen çalışmaların dayanağı, Ising modelinde düzen parametresi ihtimaliyet dağılımının bir sonlu örgü ölçekleme bağıntısına uyacağı varsayımdır (1-3). Böyle bir bağıntı  $d = 4$  de elde edilmemiş olup, bu çalışmanın esas amacı, dört boyutlu Ising modelinin düzen parametresi ihtimaliyet dağılımı için sonlu örgü ölçekleme bağıntısını türetmek ve Monte Carlo simülasyonlarıyla elde edilen sayısal fonksiyonlarla kıyaslayarak geçerliliğini denemektir. İkinci amaç ise (16) da verilen yapıya sahip analitik ifadenin sabitlerini elde etmektir.

Sonlu örgü ölçekleme bağıntısı 2. bölümde elde edilmekte, 3. bölümde verilerin analizi yapıp sonuçlar tartışılmakta, 4. bölümde de çalışmanın sonucu verilmektedir.

## 2. DÜZEN PARAMETRESİ İHTİMALİYET DAĞILIMI İÇİN SONLU ÖRGÜ ÖLÇEKLEME BAĞINTISI

Ising modelinde düzen parametresi ihtimaliyet dağılımı için sonlu örgü ölçekleme hipotezi, dış manyetik alan yok iken, genel olarak şöyle ifade edilebilir (1-3,8):

$$P_L(M, t) = a(L)p(Ma(L), tb(L)), \quad t \rightarrow 0, L \rightarrow \infty \quad [1]$$

Bu ifadeye  $M$  düzen parametresi,  $t = (T-T_c)/T_c$  de,  $T_c$  sonsuz örgünün kritik sıcaklığı olmak üzere, indirgenmiş sıcaklıktır.  $a(L)$  ve  $b(L)$  nin  $L$  ye bağımlılığı,  $|M_L(t)|$  için sonlu örgü ölçekleme bağıntısı ve aşağıda verilen tanım kullanılarak bulunabilir:

$$|M_L(t)| = \int_{-\infty}^{\infty} P_L(M, t) |M| dM \quad [2]$$

$|M_L(t)|$  için sonlu örgü ölçekleme bağıntıları  $d < 4$ ,  $d = 4$  ve  $d > 4$  de birbirinden farklıdır.  $d < 4$  de doğrusal boyutu  $L$  olan küp şeklinde ve periyodik sınır şartlı bir örgünün serbest enerjisinin iraksayan kısmı için Privman-Fisher tarafından önerilen yapıdaki (17,18) sonlu örgü ölçekleme bağıntısı aşağıda verilmektedir:

$$f_L^{(S)}(t, h) = L^{-d} Y(C_1 t L^{1/\nu}, C_2 h L^{\Delta/\nu}), \quad t \rightarrow 0, h \rightarrow 0, L \rightarrow \infty \quad [3]$$

exact for the case,  $L \rightarrow \infty$  (7,9,14); its constants have not been determined. For  $d < 4$  the corresponding finite-size scaling functions do not exist in the analytical form. There are efforts to get simple analytical functions by fitting to Monte Carlo results at the critical temperature on the infinite lattice. In one of these studies, the analytical functions which are fitted to the numerical ones obtained from the simulations in  $d = 2$  and 3 differ mainly by the equation of state exponent,  $\delta$  (15). In another study (16), a simpler function has been fitted to the data in  $d = 3$ .

The basis for the above studies is the hypothesis that the probability distribution for the order parameter of the Ising model obeys a finite-size scaling relation (1-3). Such a relation is not available in  $d = 4$ . Thus, the main purpose of the present study is to derive the finite-size scaling relation for the order-parameter probability distribution of the four-dimensional Ising model, and to test it numerically by Monte Carlo simulations. The second purpose is to obtain the constants in the analytical expression of the form given in (16).

The finite-size scaling relation is obtained in section 2, the data are analyzed and the results are discussed in section 3 and a conclusion is given in section 4.

## 2.THE FINITE-SIZE SCALING RELATION FOR THE PROBABILITY DISTRIBUTION OF THE ORDER PARAMETER

The finite-size scaling hypothesis for the probability distribution of the order parameter for the Ising model at the vanishing external magnetic field (1-3,8) can be expressed generally as follows:

where  $M$  is the order parameter and  $t = (T-T_c)/T_c$  is the reduced temperature with  $T_c$  being the critical temperature of the infinite lattice. The  $L$ -dependence of  $a(L)$  and  $b(L)$  can be found from the knowledge of the finite-size scaling relation for  $|M_L(t)|$  and the following definition

The finite-size scaling relations for  $|M_L(t)|$  are different for  $d < 4$ ,  $d = 4$  and  $d > 4$ . For  $d < 4$ , the finite-size scaling relation in the Privman-Fisher form (17,18) for the singular part of the free-energy density of a hypercubic finite-size system of linear dimension  $L$  with periodic boundary conditions is as follows:

Bu ifadede  $\Delta$  'gap' üssü,  $\nu$  sonsuz örgü korelasyon uzunluğu için kritik üs,  $h$  da indirgenmiş dış magnetik alandır. Bu ifadede evrensel olmayan ve örgü sistemine bağlı parametreler sadece  $C_1$  ve  $C_2$  ölçek çarpanlarıdır; yani,  $Y(x,y)$  sonlu örgü ölçekleme fonksiyonu evrensel olup, evrensel

where  $\Delta$  is the gap exponent,  $\nu$  is the critical exponent for the correlation length of the infinite lattice, and  $h$  is the reduced external magnetic field. The scale factors  $C_1$  and  $C_2$  are the only nonuniversal system-dependent parameters, that is, the finite-size scaling function  $Y(x,y)$  is universal, with no further nonuniversal prefactor. The finite-size scaling relation for the order parameter can be obtained from  $f_L^{(S)}(t,h)$  according to the following equation:

$$M_L(t,h) = -\frac{\partial f_L^{(S)}}{\partial h} \quad [4]$$

olmayan hiçbir çarpanı yoktur. Düzen parametresi için sonlu örgü ölçekleme bağıntısı  $f_L^{(S)}(t,h)$  den aşağıdaki eşitliğe göre bulunabilir. Bu ifadenin uygulanmasıyla,

which yields the expression

$$M_L(t,h) = L^{-\beta/\nu} C_2 U(C_1 t L^{1/\nu}, C_2 h L^{\Delta/\nu}) \quad [5]$$

elde edilir. Burada  $\beta$  sonsuz örgünün düzen parametresi için kritik üs,  $U$  da sonlu örgü ölçekleme fonksiyonudur. Bu eşitlik  $h=0$  da aşağıdaki basit hali alır:

where  $\beta$  is the critical exponent for the order parameter of the infinite lattice and  $U$  is the finite-size scaling function. At  $h=0$  this relation reduces to the following one:

$$M_L(t) = L^{-\beta/\nu} C_2 U(C_1 t L^{1/\nu}) \quad [6]$$

[1] eşitliği [2] de kullanılırsa sırasıyla aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

Inserting Eq. 1 into Eq. 2 gives the following:

$$|M_L(t)| = \int_{-\infty}^{\infty} a(L) p(Ma(L), tb(L)) |M| dM \quad [7]$$

$$|M_L(t)| = a(L)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} p(z, tb(L)) |z| dz \quad [8]$$

$$|M_L(t)| = a(L)^{-1} p(tb(L)) \quad [9]$$

[6] eşitliği [9] ile kıyaslanırsa

Comparing Eq. 6 with Eq. 9 yields the following expressions:

$$a(L) = C_2^{-1} L^{\beta/\nu} \quad [10]$$

$$b(L) = C_1 L^{1/\nu} \quad [11]$$

elde edilir. Böylece,  $d < 4$  de düzen parametresi ihtimaliyet dağılımının sonlu örgü ölçekleme bağıntısı için

Thus the finite-size scaling relation for the probability distribution of the order parameter  $P_L(M,t)$  in  $d < 4$  is as follows:

$$P_L(M,t) = C_2^{-1} L^{\beta/\nu} p(M C_2^{-1} L^{\beta/\nu}, t C_1 L^{1/\nu}), \quad t \rightarrow 0, L \rightarrow \infty \quad [12]$$

bulunur. Bu  $d = 2$  ve  $3$  deki çalışmalarda kullanılmakta olan ifadedir (1-3,8,10,11,15).

$d > 4$  de bu ifadelerin karşılıkları, aşağıdaki sonlu örgü ölçekleme bağıntısı (4,6) kullanılarak, benzer şekilde elde edilebilir.

$$f_L^{(S)}(t, h) = L^{-d} Y(C_1 t L^{d/2}, C_2 h L^{3d/4}), \quad t \rightarrow 0, h \rightarrow 0, L \rightarrow \infty \quad [13]$$

Düzen parametresi ihtimaliyet dağılımı için türetilen sonlu örgü ölçekleme bağıntısı aşağıda verilmektedir:

$$P_L(M, t) = C_2^{-1} L^{d/4} p(M C_2^{-1} L^{d/4}, t C_1 L^{d/2}), \quad t \rightarrow 0, L \rightarrow \infty \quad [14]$$

Bu, düzen parametresi dağılımı için sonlu örgü ölçekleme fonksiyonunun,  $p(m, x)$ , analitik olarak bilindiği durum olup,  $p(m, x)$  ortalama alana uygun yapıdadır (4-6,8,13).

$d = 4$  de Ising modelinin serbest enerji yoğunluğunun iraksayan kısmı için sonlu örgü ölçekleme bağıntısı artık bilinmektedir (19). Bu bilgi ve [1] eşitliğinin  $d = 4$  de geçerli olduğu varsayımı düzen parametresi ihtimaliyet dağılımı için sonlu örgü ölçekleme bağıntısının çıkarılmasını mümkün kılmaktadır. Dört boyutlu Ising modelinde doğrusal boyutu  $L$  olan küp şeklinde ve periyodik sınır şartlı bir örgünün serbest enerjisinin iraksayan kısmı için Privman-Fisher tarafından önerilen yapıya sahip (17,18) ve önemi en fazla olan logaritmalı terimleri içerecek doğrulukta sonlu örgü ölçekleme bağıntısı aşağıda verilmektedir (19):

$$f_L^{(S)}(t, h) = L^{-4} Y(C_1 t L^2 \log^{1/6} L, C_2 h L^3 \log^{1/4} L), \quad t \rightarrow 0, h \rightarrow 0, L \rightarrow \infty \quad [15]$$

$d = 4$  de düzen parametresi ihtimaliyet dağılımı için,  $d < 4$  deki adımların aynısı kullanılarak türetilen sonlu örgü ölçekleme bağıntısı aşağıda verilmektedir:

$$P_L(M, t) = C_2^{-1} L^{\beta/\nu} \log^{-1/4}(L) p(C_2^{-1} M L^{\beta/\nu} \log^{-1/4} L, C_1 t L^{1/\nu} \log^{1/6} L) \quad [16]$$

Doğruluğu denenecek olan fonksiyon bu olup, deneme alışılmalı simülasyonlarla doğrudan yapılabilir.

### 3. BULGULAR VE TARTIŞMA

#### 3.1. Sonlu Örgü Ölçekleme Bağıntısının Doğruluğunun Denenmesi

$d = 4$  de düzen parametresi ihtimaliyet dağılımı için [16] eşitliğinde verilen sonlu örgü ölçekleme bağıntısının doğruluğunu denemek amacıyla, doğrusal boyutu  $L = 8$  ve  $10$  olan periyodik sınır şartlı soyut basit küp örgülerde,  $L^4$ , Metropolis algoritması (20) kullanılarak Monte Carlo simülasyonları yapılmaktadır. Sonsuz örgü kritik sıcaklığı için (21-25),  $J$  en yakın komşu çiftlenim sabiti,  $k_B$  de Boltzmann sabiti olmak üzere  $J/k_B$  biriminde,  $T_c = 6.6802(2)$  (24) değeri kullanılmaktadır.  $t = 0$  daki ihtimaliyet dağılımının,

This is the well-known expression used in the studies in  $d = 2$  and  $3$  (1-3,8,10,11,15).

The corresponding expressions for  $d > 4$  can be obtained similarly, by using the finite-size scaling relation below (4,6):

The derivation results in the following finite-size scaling relation for the probability distribution of the order parameter:

This is the case for which the finite-size scaling function  $p(m, x)$  for the order-parameter distribution is known analytically, and has the mean-field form (4-6,8,13).

The finite-size scaling relation for the singular part of the free-energy density of the Ising model in  $d = 4$  is now available (19). This makes it possible to derive the finite-size scaling relation for the probability distribution of the order parameter by assuming that Eq. 1 is valid also in  $d = 4$ . The finite-size scaling relation in the Privman-Fisher form for the singular part of the free-energy density of a hypercubic finite-size system of linear dimension  $L$  with periodic boundary conditions for the four-dimensional Ising model, correct to leading logarithms, is given as below (19)

By using the same steps as in  $d < 4$ , the derivation leads to the following finite-size scaling relation for the probability distribution of the order parameter in  $d = 4$ :

This is the relation to be tested; this can be done by simulations directly.

### 3. RESULTS AND DISCUSSION

#### 3.1. The Test of the Finite-Size Scaling Relation

For the purpose of testing the finite-size scaling relation for the probability distribution of the order parameter in  $d = 4$  given in Eq. 16, Monte Carlo simulations with Metropolis algorithm (20) are carried out on simple hypercubic lattices  $L^4$  of linear dimension  $L = 8$  and  $10$  with periodic boundary conditions. The critical temperature of the infinite lattice (21-25) is taken as  $T_c = 6.6802(2)$  (24) (in units of  $J/k_B$  where  $J$  is the nearest-neighbor coupling constant and  $k_B$  is the Boltzmann constant). For finding the plots and the finite-size scaling plots of the probability distribution at  $t = 0$ ,

$$P_L(M,0) = C_2^{-1} L^{\beta/\nu} \log^{-1/4}(L) p(C_2^{-1} M L^{\beta/\nu} \log^{-1/4} L) \quad [17]$$

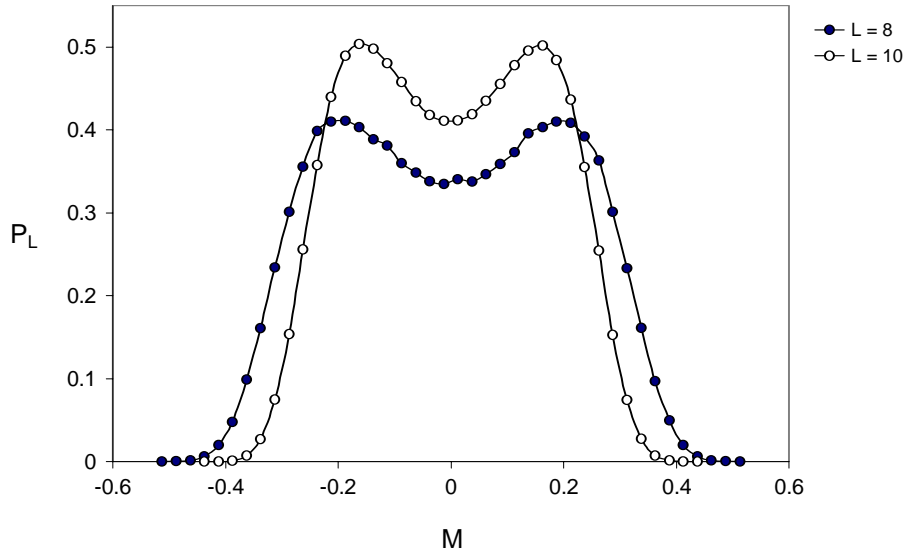
çizimleri ve sonlu örgü ölçekleme çizimlerini bulmak için her bir örgüde  $10^7$  adımlık simülasyonlar yapılmaktadır.  $M = 0$  daki ihtimaliyet dağılımının,

simulations of  $10^7$  sweeps are carried out for each lattice. For finding the plots and the finite-size scaling plots of the probability distribution at  $M = 0$ ,

$$P_L(0,t) = C_2^{-1} L^{\beta/\nu} \log^{-1/4}(L) p(C_1 t L^{1/\nu} \log^{1/6} L) \quad [18]$$

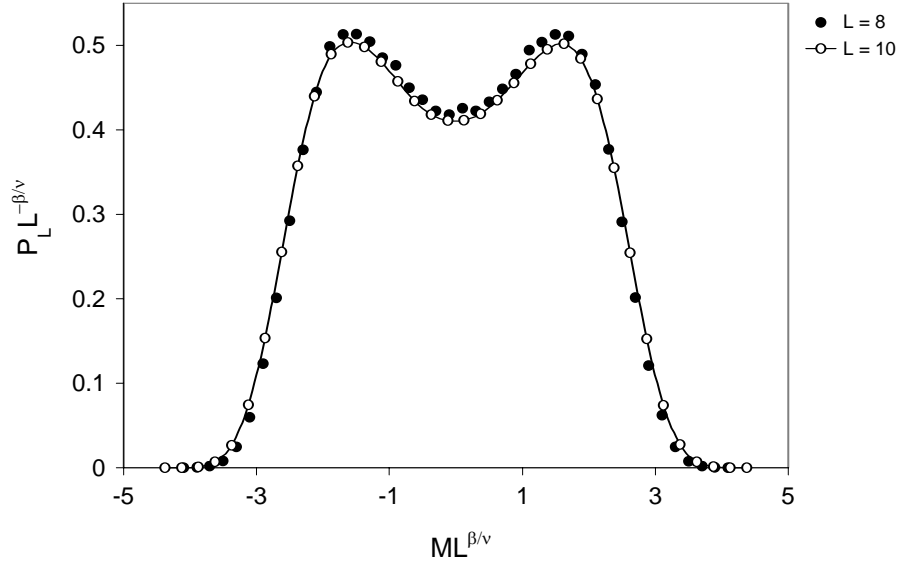
çizimleri ve sonlu örgü ölçekleme çizimlerini bulmak için her bir örgüde ve her bir sıcaklıkta  $10^6$  adımlık simülasyonlar yapılmaktadır.  $P_L(M,0)$  in  $L = 8$  ve  $10$  için çizimleri, düzen parametresi aralığı  $80$  eşit parçaya bölünerek yapılmış olup Şekil.1 de gösterilmektedir.  $P_L(M,0)$  in  $L = 8$  ve  $10$  için sonlu örgü ölçekleme çizimleri, logaritma düzeltmeleri göz önüne alınmadan Şekil.2.a da, logaritma düzeltmeleri göz önüne alınarak da Şekil.2.b de verilmektedir. Bu şekiller sonlu örgü ölçekleme çizimlerinin logaritma düzeltmeleri göz önüne alındığında üst üste geldiğini, logaritma düzeltmeleri göz önüne alınmadığında ise bu durumun yaklaşık olarak gerçekleştiğini göstermektedir.  $P_L(0,t)$  nin  $L = 8$  ve  $10$  için çizimleri Şekil.3 de gösterilmektedir.  $P_L(0,t)$  nin  $L = 8$  ve  $10$  için sonlu örgü ölçekleme çizimleri, logaritma düzeltmeleri göz önüne alınmadan Şekil.4.a da, logaritma düzeltmeleri göz önüne alınarak da Şekil.4.b de verilmektedir. Bu şekiller  $P_L(0,t)$  nin sonlu örgü ölçekleme çizimlerinin logaritma düzeltmeleri göz önüne alındığında üst üste geldiğini, logaritma düzeltmeleri göz önüne alınmadığında ise bu durumun yaklaşık olarak gerçekleştiğini göstermektedir.

within the temperature interval  $6.61 \leq T \leq 7.52$  simulations of  $10^6$  sweeps are carried out at each temperature for each lattice. Histograms of 80 bins are used in plotting  $P_L(M,0)$  for  $L = 8$  and  $10$  which are illustrated in Fig. 1. The finite-size scaling plots of  $P_L(M,0)$  for  $L = 8$  and  $10$  without logarithmic corrections are given in Fig. 2.a, and those with logarithmic corrections are given in Fig. 2.b. These figures show that the finite-size scaling plots collapse when the logarithmic corrections are included, but they collapse approximately when the logarithmic corrections are omitted. The plots of  $P_L(0,t)$  for  $L = 8$  and  $10$  are given in Fig. 3. The finite-size scaling plots of  $P_L(0,t)$  for  $L=8$  and  $10$  without logarithmic corrections are given in Fig. 4.a, and those with logarithmic corrections are given in Fig. 4.b. These figures show that the finite-size scaling plots of



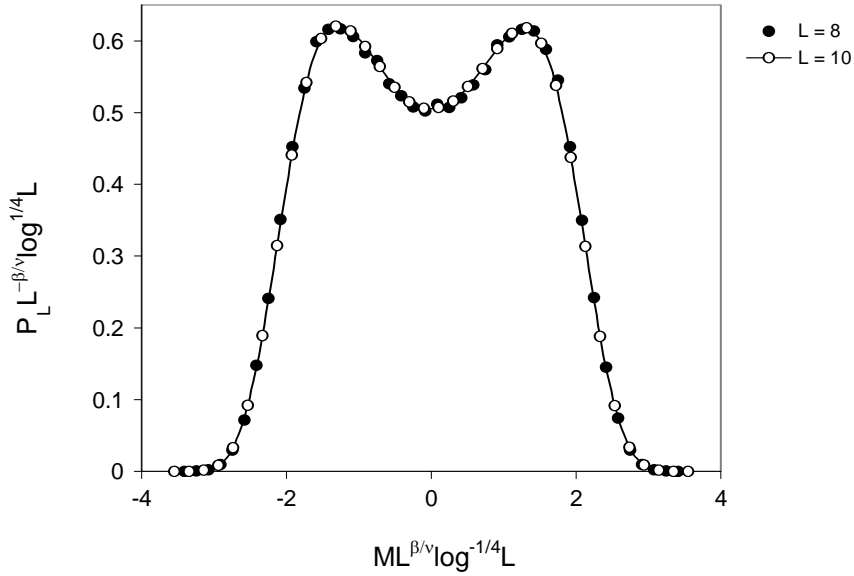
**Figure 1.** The plot of the order parameter probability distribution  $P_L$  against the order parameter  $M$  at the reduced temperature  $t = 0$  for the lattices with the linear dimensions  $L = 8$  and  $10$ .  $T_c = 6.6802(2)$  is used

**Şekil 1.** Düzen parametresi ihtimaliyet dağılımının,  $P_L$ , indirgenmiş sıcaklığın  $t = 0$  değerinde ve doğrusal boyutları  $L = 8$  ve  $10$  olan örgüler için, düzen parametresine,  $M$ , karşı çizimi.  $T_c = 6.6802(2)$  kullanılmaktadır



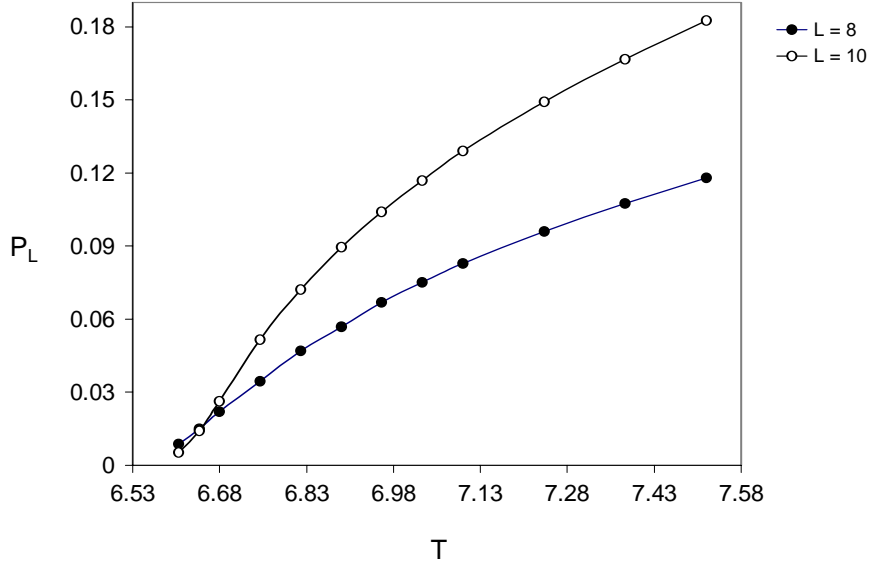
**Figure 2.a.** The finite-size scaling plot of the order parameter probability distribution  $P_L$  against the order parameter  $M$  at the reduced temperature  $t = 0$  for the lattices with the linear dimensions  $L = 8$  and 10 without the logarithmic corrections.  $\beta/\nu = 1$  and  $T_c = 6.6802(2)$  are used. The curve passes through the data points for  $L = 10$

**Şekil 2.a.** Düzen parametresi ihtimaliyet dağılımının,  $P_L$ , indirgenmiş sıcaklığın  $t = 0$  değerinde ve doğrusal boyutları  $L = 8$  ve 10 olan örgüler için düzen parametresine,  $M$ , karşı sonlu örgü ölçekleme çizimi. Logaritmalı düzeltmeler gözönüne alınmamaktadır.  $\beta/\nu = 1$  ve  $T_c = 6.6802(2)$  kullanılmaktadır. Eğri  $L = 10$  a ait veri noktalarından geçmektedir

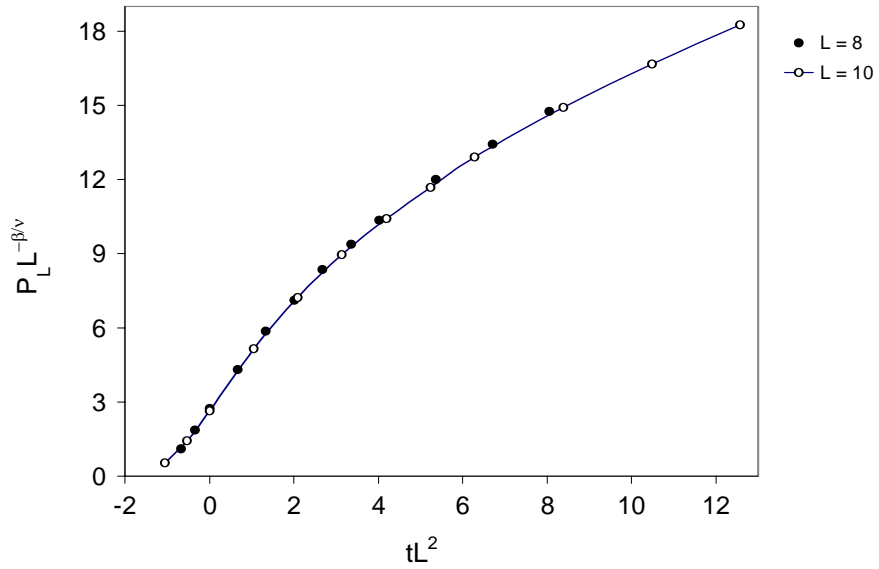


**Figure 2.b.** The finite-size scaling plot of the order parameter probability distribution  $P_L$  against the order parameter  $M$  at the reduced temperature  $t = 0$  for the lattices with the linear dimensions  $L = 8$  and 10 with the logarithmic corrections.  $\beta/\nu = 1$  and  $T_c = 6.6802(2)$  are used. The curve passes through the data points for  $L = 10$

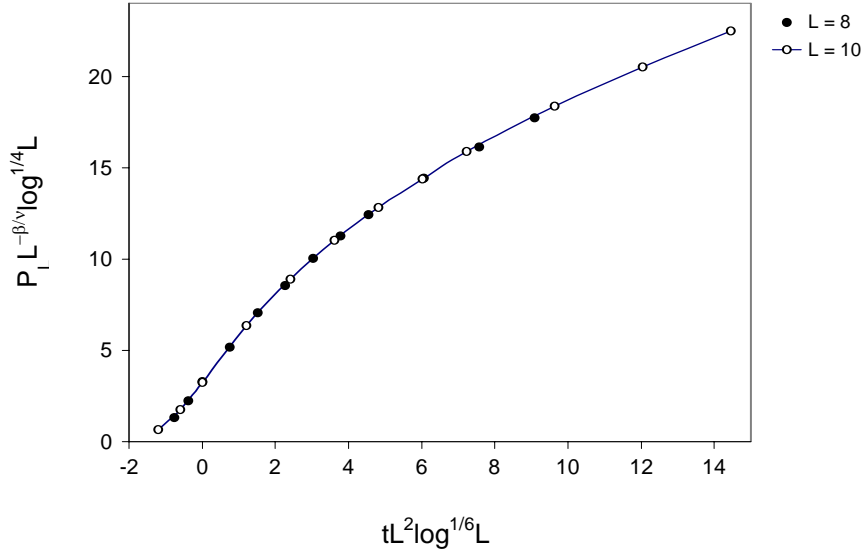
**Şekil 2.b.** Düzen parametresi ihtimaliyet dağılımının,  $P_L$ , indirgenmiş sıcaklığın  $t = 0$  değerinde ve doğrusal boyutları  $L = 8$  ve 10 olan örgüler için düzen parametresine,  $M$ , karşı sonlu örgü ölçekleme çizimi. Logaritmalı düzeltmeler gözönüne alınmaktadır.  $\beta/\nu = 1$  ve  $T_c = 6.6802(2)$  kullanılmaktadır. Eğri  $L = 10$  a ait veri noktalarından geçmektedir



**Figure 3.** The plot of the order parameter probability distribution  $P_L$  against the reduced temperature  $t$  at the order parameter  $M=0$  for the lattices with the linear dimensions  $L=8$  and  $10$   
**Şekil 3.** Düzen parametresi ihtimaliyet dağılımının,  $P_L$ , düzen parametresinin  $M=0$  değerinde ve doğrusal boyutları  $L=8$  ve  $10$  olan örgüler için indirgenmiş sıcaklığa,  $t$ , karşı çizimi



**Figure 4.a.** The finite-size scaling plot of the order parameter probability distribution  $P_L$  against the reduced temperature  $t$  at the order parameter  $M=0$  for the lattices with the linear dimensions  $L=8$  and  $10$  without the logarithmic corrections.  $\beta/\nu=1$  and  $T_c=6.6802(2)$  are used. The curve passes through the data points for  $L=10$   
**Şekil 4.a.** Düzen parametresi ihtimaliyet dağılımının,  $P_L$ , düzen parametresinin  $M=0$  değerinde ve doğrusal boyutları  $L=8$  ve  $10$  olan örgüler için indirgenmiş sıcaklığa,  $t$ , karşı sonlu örgü ölçekleme çizimi. Logaritmali düzeltmeler gözönüne alınmamaktadır.  $\beta/\nu=1$  ve  $T_c=6.6802(2)$  kullanılmaktadır. Eğri  $L=10$  a ait veri noktalarından geçmektedir



**Figure 4.b.** The finite-size scaling plot of the order parameter probability distribution  $P_L$  against the reduced temperature  $t$  at the order parameter  $M = 0$  for the lattices with the linear dimensions  $L = 8$  and  $10$  with the logarithmic corrections.  $\beta/\nu = 1$  and  $T_c = 6.6802(2)$  are used. The curve passes through the data points for  $L = 10$

**Şekil 4.b.** Düzen parametresi ihtimaliyet dağılımının,  $P_L$ , düzen parametresinin  $M = 0$  değerinde ve doğrusal boyutları  $L = 8$  ve  $10$  olan örgüler için indirgenmiş sıcaklığa,  $t$ , karşı sonlu örgü ölçekleme çizimi. Logaritmali düzeltmeler gözönüne alınmaktadır.  $\beta/\nu = 1$  ve  $T_c = 6.6802(2)$  kullanılmaktadır. Eğri  $L = 10$  a ait veri noktalarından geçmektedir

Bu bulgular dört boyutlu Ising modelinde düzen parametresi ihtimaliyet dağılımı için [16] eşitliğinde verilen sonlu örgü ölçekleme bağıntısının geçerli olduğunu göstermektedir.

### 3.2. Sonlu Örgü Ölçekleme Fonksiyonunun Kritik Noktadaki Analitik İfadesi

$d = 4$  de sonlu örgü ölçekleme fonksiyonunun ardışık normalleştirilmesinin kullanıldığı ortalama alan seviyesinde, yani önemi en fazla olan logaritmali terimleri içerecek doğrulukta (7,9,14,22), kritik noktadaki analitik ifadesi aşağıda verilmektedir: Bu ifade,  $d > 4$  de olduğu gibi (4,6,13),

$$p(m,0) = p_0 \exp(-(Am^2 + Bm^4)) \quad [19]$$

ortalama alana uygun yapıdadır.  $p_0$ ,  $A$  ve  $B$  birer sabit olup, analitik fonksiyon karşılığı olan sayısal fonksiyona uydurularak değerleri belirlenebilir. Sayısal fonksiyon ise doğrusal boyutu yeterince büyük örgülerdeki simülasyonlar ve düzen parametresi ihtimaliyet dağılımı için sonlu örgü ölçekleme bağıntısı kullanılarak elde edilebilir.  $m$  ölçeklenmiş mıknatıslanma olup, [16] eşitliğine göre  $m = M L^{\beta/\nu} \log^{-1/4} L$  dir.  $m^6$  yı içeren düzeltme terimi sonlu örgü ölçekleme fonksiyonuna, aşağıda görüldüğü gibi,  $L$  ye bağlı bir katkı getirir (5,14):

$P_L(0,t)$  with logarithmic corrections collapse, while they collapse approximately when the logarithmic corrections are omitted. These results verify the finite-size scaling relation given in Eq. 16 for the order parameter probability distribution of the four-dimensional Ising model.

### 3.2.The Analytical Expression for the Critical Finite Size Scaling Function

The analytical expression of the critical finite-size scaling function in  $d = 4$  at the renormalized mean-field level, that is, correct to leading logarithms, (7,9,14,22) has, as in  $d > 4$  (4,6,13), the following mean-field form:

where  $p_0$ ,  $A$  and  $B$  are constants. They can be determined by fitting to the corresponding numerical function. It, in turn, can be obtained from the simulations for lattices with sufficiently large  $L$  and the knowledge of the finite-size scaling relation for the probability distribution of the order parameter.  $m$  is the scaled magnetization, being  $m = M L^{\beta/\nu} \log^{-1/4} L$  according to Eq. 16. The correction term with  $m^6$  makes an  $L$ -dependent contribution to the finite-size scaling function as below (5,14):



$$p(m,0) = p_0 \exp(-(Am^2 + Bm^4 + CL^{-2}m^6)) \quad [20]$$

Bu ifadedeki  $A$ ,  $B$  ve  $C$  sayısal fonksiyona uydurularak değerleri belirlenecek olan parametrelerdir. Analitik fonksiyonun bu hali yerine, daha fazla bilgi verecek parametreleri içeren aşağıdaki yeniden düzenlenmiş hali (16)

$$p(m,0) = p(m_0,0) \exp(-((m^2 / m_0^2) - 1)^2 (a(m^2 / m_0^2) + c)) \quad [21]$$

sayısal fonksiyona uydurulmaktadır.  $m_0$ ,  $p(m,0)$  in en büyük değer olan  $p(m_0,0)$  a eşit olduğu  $m$  değeridir; yani  $m_0$ ,  $m$  nin en büyük ihtimal ile alacağı değerdir.  $a$  ve  $c$  nin değerleri ölçeklenmenin gerçekleştiği uç durumda evrenselidir.  $a = 0$  olduğunda  $p(m,0)$  basitleşerek ortalama alana uygun yapıyı alır.  $p(m,0)$  bu haliyle  $m^6$  yi içeren terimin  $L$  ye nasıl bağlı olduğunu açıkça göstermemekle beraber, [20] ve [21] eşitliklerindeki  $m^6$  ların katsayılarının karşılaştırılması  $C$  yi belirlemek için aşağıdaki denklemi verir:

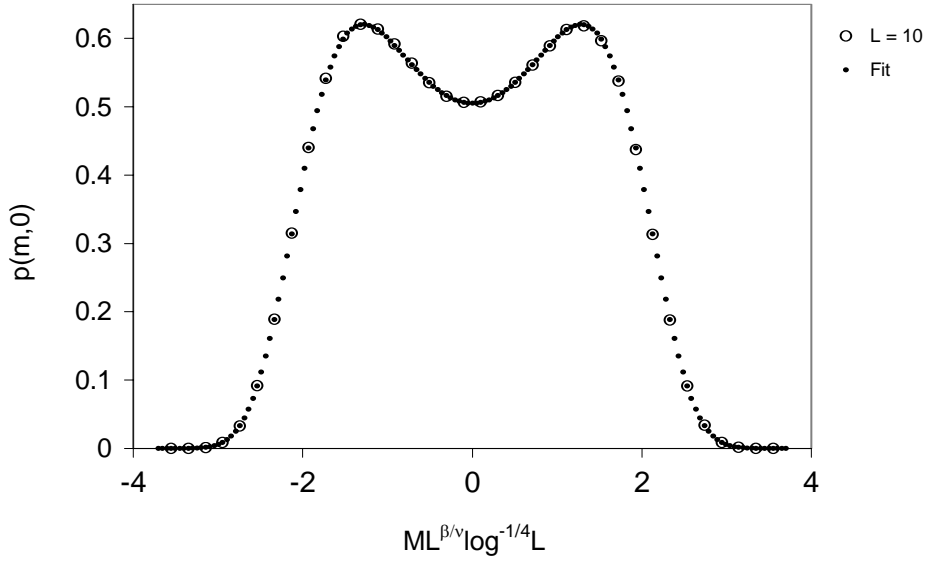
$$CL^{-2} = am_0^{-6} \quad [22]$$

[21] eşitliğindeki analitik sonlu örgü ölçekleme fonksiyonunun parametreleri için,  $L = 8$  ve  $10$  a ait düzen parametresi ihtimaliyet dağılımının,  $P_L$ , sonlu örgü ölçekleme çizimine uydurularak elde edilen değerleri Tablo 1 de gösterilmektedir. Tablodan  $L = 10$  için analitik fonksiyonun parametrelerinin aldığı değerlerin  $7.5 \times 10^6$  adımdan sonra değişmediği görülmektedir. Bu durum  $L = 8$  için de doğrudur. Buna göre  $L = 8$  and  $10$  için parametrelerin aldığı değerler arasındaki farklar örgülerin büyüklüklerinden kaynaklanmaktadır. Örgünün doğrusal boyutu  $L = 8$  den  $L = 10$  a yükseldiğinde, [21] deki parametrelerin değerleri şöyle değişmektedir:  $p(m_0,0)$  neredeyse olduğu gibi kalmakta,  $m_0$  ve  $c$  yaklaşık olarak % 2,  $a$  da % 45 azalmaktadır. Buna göre  $a$  örgünün büyüklüğüne en duyarlı olan parametredir. Bu parametrenin  $L = 10$  için bulunan değeri  $a = 0.006(1)$  sonsuz örgü değerine, yani evrensel değerine,  $a = 0$ , hemen hemen eşittir.  $c$  parametresinin değeri  $L = 8$  için  $c = 0.210(1)$ ,  $L = 10$  için de  $c = 0.206(3)$  dir. Azalma hemen hemen % 2 olup,  $c = 0.206(3)$  bu parametrenin yaklaşık evrensel değeri olarak alınabilir;  $\exp(c) = 1.229(4)$ ,  $p(m,0)$  in en büyük değerinin en küçük değerine oranını vermektedir.  $a$  ve  $m_0$  in Tablo 1 deki değerleri [22] eşitliğinde kullanılarak  $C$  sabitinin değeri bulunur.  $L = 8$  and  $10$  a ait verilerden  $C$  için sırasıyla  $C = 0.14(1)$  ve  $C = 0.13(2)$  elde edilmekte olup, bu değerler hata sınırları içinde birbirine eşittir. İhtimaliyet dağılımının,  $P_L(M)$ ,  $L = 10$  için sonlu örgü ölçekleme çizimi ile buna uydurulan analitik eğri ( [21] eşitliği) Şekil.5 de gösterilmektedir;  $L = 10$  için aynı çizim ile buna uydurulan, ardışık normalleştirmenin kullanıldığı ortalama alan seviyesindeki analitik eğri ( $a = 0$  kullanılarak [21] eşitliğinden elde edilen fonksiyon) Şekil.6 da verilmektedir. Şekil.5 ve 6 nın karşılaştırılması,  $L = 10$  a ait verilere analitik eğrinin ([21] eşitliği) ortalama alana uygun yapıdakinden daha iyi uyduğunu göstermektedir.

where  $A$ ,  $B$  and  $C$  are fitting parameters. Instead of fitting this form of the analytical function to the numerical one, the following form with a more informative parameterization is used for fitting (16):

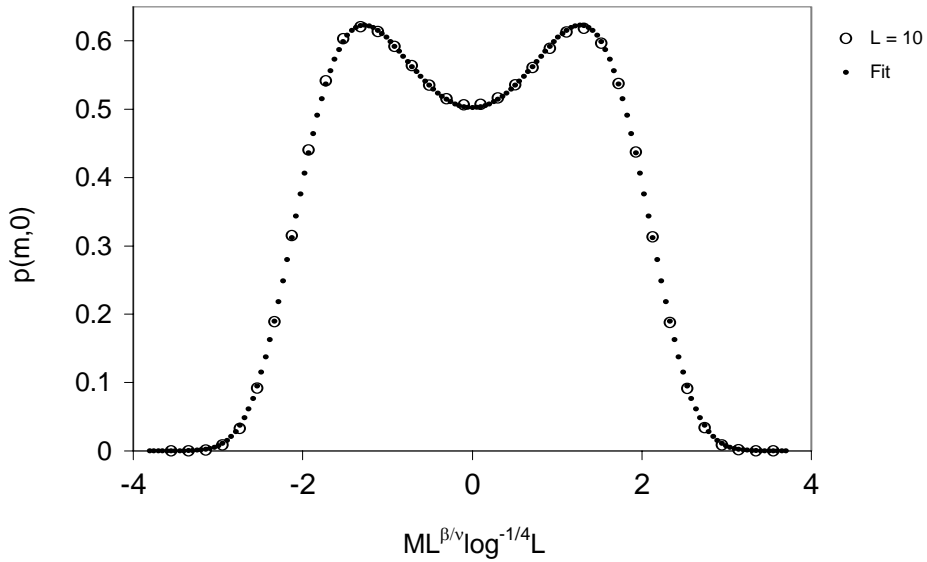
where  $m_0$  is that value of  $m$  at which  $p(m,0)$  has its maximum value  $p(m_0,0)$ , that is  $m_0$  is the most probable value of  $m$ . The values of  $a$  and  $c$  are universal in the scaling limit. It reduces to the mean-field form when  $a = 0$ . Although this form does not show the  $L$ -dependence of the term with  $m^6$  explicitly, comparison of the coefficients of  $m^6$  in Eqs. 20 and 21 gives the equation below for determining  $C$ :

The values of the parameters of the analytical finite-size scaling function (Eq. 21) obtained by fitting it to the finite-size scaling plot of the order-parameter probability distribution  $P_L$  for  $L = 8$  and  $10$  are listed in Table 1. It shows that for  $L = 10$  the values of the parameters of the analytical function remain unchanged after  $7.5 \times 10^6$  sweeps. This is true also for  $L = 8$ . Thus the differences between the values of the parameters for  $L = 8$  and  $10$  originate from their sizes. When the linear dimension of the lattice increases from  $L = 8$  to  $L = 10$ , the fitting parameters change as follows:  $p(m,0)$  remains almost unchanged,  $m_0$  and  $c$  decrease about 2 % and  $a$  decreases 45 %. Thus the parameter  $a$  is most sensitive to the size of the lattice. Its value  $a = 0.006(1)$  for the lattice with  $L = 10$  is comparable with its value for the infinite-lattice, that is its universal value,  $a = 0$ . The parameter  $c$  has the value of  $c = 0.210(1)$  for  $L = 8$  and  $c = 0.206(3)$  for  $L = 10$ . The decrease is about 2 % and  $c = 0.206(3)$  can be taken approximately as its universal value.  $\exp(c) = 1.229(4)$  gives the ratio of the maximum value of  $p(m,0)$  to its minimum value. By inserting the values of  $a$  and  $m_0$  from Table 1 into Eq. 22 the value of the constant  $C$  is found. The values obtained from the data for  $L = 8$  and  $10$  are  $C = 0.14(1)$  and  $C = 0.13(2)$  respectively, which are equal to each other within the error limits. The finite-size scaling plot of the probability distribution  $P_L(M)$  for  $L = 10$  and the analytical curve (Eq. 21) fitted to it are illustrated in Fig. 5; the same plot for  $L = 10$  and the analytical curve at the renormalized mean-field level (Eq. 21 with  $a = 0$ ) fitted to it are given in Fig. 6. The comparison of Figs. 5 and 6 shows that the analytical curve (Eq. 21) fits



**Figure 5.** The finite-size scaling plot of the order parameter probability distribution  $P_L$  against the order parameter  $M$  at the reduced temperature  $t = 0$  for the lattice with the linear dimension  $L = 10$  with the logarithmic corrections, and the analytical finite-size scaling function fitted to it.  $\beta/\nu = 1$  and  $T_c = 6.6802(2)$  are used

**Şekil 5.** Düzen parametresi ihtimaliyet dağılımının,  $P_L$ , logaritmalı düzeltmeler gözönüne alınarak indirgenmiş sıcaklığın  $t = 0$  değerinde ve doğrusal boyutu  $L = 10$  olan örgü için düzen parametresine,  $M$ , karşı sonlu örgü ölçekleme çizimi ile buna uydurulan analitik sonlu örgü ölçekleme fonksiyonu.  $\beta/\nu = 1$  ve  $T_c = 6.6802(2)$  kullanılmaktadır



**Figure 6.** The finite-size scaling plot of the order parameter probability distribution  $P_L$  against the order parameter  $M$  at the reduced temperature  $t = 0$  for the lattice with the linear dimension  $L = 10$  with the logarithmic corrections, and the analytical finite-size scaling function at the renormalized mean-field level ( $a = 0$ ) fitted to it.  $\beta/\nu = 1$  and  $T_c = 6.6802(2)$  are used

**Şekil 6.** Düzen parametresi ihtimaliyet dağılımının,  $P_L$ , logaritmalı düzeltmeler gözönüne alınarak indirgenmiş sıcaklığın  $t = 0$  değerinde ve doğrusal boyutu  $L = 10$  olan örgü için düzen parametresine,  $M$ , karşı sonlu örgü ölçekleme çizimi ile buna uydurulan, ardışık normalleştirilmenin kullanıldığı ortalama alan seviyesindeki analitik sonlu örgü ölçekleme fonksiyonu ( $a = 0$ ).  $\beta/\nu = 1$  ve  $T_c = 6.6802(2)$  kullanılmaktadır

Ortalama alana uygun yapıdaki eğri sayısal fonksiyonun en yüksek noktaları civarında yükselmekte, en alçak noktası civarında alçalmakta ve kuyrukları civarında yükselmektedir.. Buna göre  $L = 10$  için ihtimaliyet dağılımının,  $P_L(M)$ , sonlu örgü ölçekleme çizimi, veya buna uydurulan analitik eğri ( [21] eşitliği) düzen parametresinin kritik noktadaki ihtimaliyet dağılımının evrensel biçimini yaklaşık olarak temsil etmektedir.

to the data for  $L = 10$  better than the mean-field form. The latter has a rise about the maxima, a depression about the minimum, and a rise about the tails of the numerical function. This means that the finite-size scaling plot of the probability distribution  $P_L(M)$  for  $L = 10$ , or the analytical curve (Eq. 21) fitted to it represents the universal shape of the critical probability distribution of the order parameter approximately.

**Table 1.** The values of the parameters of the analytical finite-size scaling function obtained by fitting it to the finite-size scaling plot of the order parameter probability distribution  $P_L$  for  $L = 8$  and  $10$

**Çizelge 1.** Analitik sonlu örgü ölçekleme fonksiyonunun parametreleri için, bu fonksiyonun  $L = 8$  ve  $10$  a ait düzen parametresi ihtimaliyet dağılımlarının sonlu örgü ölçekleme çizimlerine uydurulmasıyla elde edilen değerler

$L$	Number of Sweeps /Adım Sayısı	$p(m_0,0)$	$m_0$	$a$	$c$
10	$2.5 \times 10^6$	0.620(2)	1.281(3)	0.005(1)	0.204(3)
10	$5.0 \times 10^6$	0.621(3)	1.286(3)	0.005(1)	0.208(4)
10	$7.5 \times 10^6$	0.621(2)	1.285(3)	0.006(1)	0.206(5)
10	$10 \times 10^6$	0.621(2)	1.284(3)	0.006(1)	0.206(3)
10	$10 \times 10^6$	0.623(2)	1.275(3)	0(fixed)	0.215(4)
8	$10 \times 10^6$	0.620(1)	1.306(1)	0.011(1)	0.210(1)

#### 4. SONUÇ

$d = 4$  de Ising modelinin düzen parametresi ihtimaliyet dağılımı için sonlu örgü ölçekleme bağıntısı elde edilmiş ve Monte Carlo simülasyonlarıyla sayısal olarak doğrulanmıştır. Böylece, düzen parametresi ihtimaliyet dağılımı için [1] eşitliğinde verilen sonlu örgü ölçekleme bağıntısının yapı olarak  $d = 4$  de geçerli olduğu gösterilmiştir. [21] eşitliğinde verilen analitik sonlu örgü ölçekleme fonksiyonu Monte Carlo verilerine uydurularak fonksiyondaki sabitlerin yaklaşık değerleri tayin edilmiştir..

#### TEŞEKKÜR

Yazar M. M. Tsy-pin'e Kaynak (16) nın önbaskısını gönderdiği için teşekkür eder.

#### KAYNAKLAR/ REFERENCES

1. Binder, K., 'Finite-size scaling analysis of Ising model block distribution functions', *Z. Phys. B*, 43: 119-140 (1981).
2. Binder, K., 'Critical properties from Monte Carlo coarse graining and renormalization', *Phys. Rev. Lett.*, 47: 693-696 (1981).
3. Bruce, A.D., 'Probability density functions for collective coordinates in Ising-like systems', *J. Phys. C*, 14: 3667-3688 (1981).
4. Binder, K., Nauenberg, M., Privman, V. and Young, A.P., 'Finite-size tests of hyperscaling', *Phys. Rev. B*, 31: 1498-1502 (1985).
5. Brezin, E. and Zinn-Justin, J., 'Finite-size effects in phase transitions', *Nucl. Phys. B*, 257: 867- 893 (1985).

#### 4. CONCLUSION

The finite-size scaling relation for the order parameter probability distribution of the Ising model in  $d = 4$  is obtained, and it is verified by Monte Carlo simulations numerically. Thus the form of the finite-size scaling relation for the order parameter probability distribution given in Eq. 1 is shown to be valid also in  $d = 4$ . By fitting the analytical finite-size scaling function given in Eq. 21 to Monte Carlo data the approximate values of its constants are determined

#### ACKNOWLEDGEMENT

It is a pleasure to thank M. M. Tsy-pin for sending a preprint of Ref. (16).

6. Luijten, E., Binder, K. and Blöte H.W.J., 'Finite-size scaling above the upper critical dimension revisited: The case of the five-dimensional Ising model', *Eur. Phys. J B*, 9: 289-297 (1999).
7. Rudnick, J., Guo, H. and Jasnow, D., 'Finite-size scaling and the renormalization group', *J. Stat. Phys.*, 41: 353-373 (1985).
8. Binder, K., 'Some recent progress in the phenomenological theory of finite-size scaling and application to Monte Carlo studies of critical phenomena', in *Finite-Size Scaling and Numerical Simulation of Statistical Systems*, edited by V. Privman, *World Scientific*, Singapore, 173-221 (1990).
9. Jasnow, D., 'Finite-size scaling, hyperscaling and the renormalization group', in *Finite-Size Scaling and Numerical Simulation of Statistical Systems*, edited by V. Privman, *World Scientific*, Singapore, 99-140 (1990).
10. Bruce, A.D., 'Universality in the two-dimensional continuous spin model', *J. Phys. A*, 18: L873- L877 (1985).
11. Nicolaidis, D. and Bruce, A.D., 'Universal configurational structure in two-dimensional scalar models', *J. Phys. A*, 21: 233-244 (1988).
12. Bruce, A.D. and Wilding, N.B., 'Scaling fields and universality of the liquid-gas critical point', *Phys. Rev. Lett.*, 68: 193-196 (1992).
13. Parisi, G. and Ruiz-Lorenzo, J.J., 'Scaling above the upper critical dimension in Ising models', *Phys. Rev. B*, 54: R3698-R3701 (1996).
14. Lai, P.-Y. and Mon, K.K., 'Finite-size scaling of the Ising model in four dimensions', *Phys. Rev. B*, 41: 9257-9263 (1990).
15. Hilfer, R. and Wilding, N.B., 'Are critical finite-size scaling functions calculable from knowledge of an appropriate critical exponent?', *J. Phys. A*, 28: L281-L286 (1995).
16. Tsypin, M.M. and Blöte, H.W.J., 'Probability distribution of the order parameter for the three-dimensional Ising-model Universality class: A high-precision Monte Carlo study', *Phys. Rev. E*, 62: 73-76 (2000).
17. Privman, V. and Fisher, M.E., 'Universal critical amplitudes in finite-size scaling', *Phys. Rev. B*, 30: 322-327 (1984).
18. Privman, V., 'Finite-size scaling theory', in *Finite-Size Scaling and Numerical Simulation of Statistical Systems*, edited by V. Privman, *World Scientific*, Singapore, 1-98 (1990).
19. Aktekin, N., 'The finite-size scaling functions of the four-dimensional Ising model', *J. Stat Phys.*, 104: 1397-1406 (2001).
20. Metropolis, N., Rosenbluth, A.W., Rosenbluth, M.N., Teller, A.H. and Teller, E., 'Equation of state calculations by fast computing machines', *J. Chem. Phys.*, 21: 1087-1092 (1953).
21. Gaunt, D.S., Sykes, M.F. and McKenzie, S., 'Susceptibility and fourth-field derivative of the spin 1/2 Ising model for  $T > T_c$  and  $d=4$ ', *J. Phys. A*, 12: 871-877 (1979).
22. Kenna, R. and Lang, C.B., 'Renormalization group analysis of finite-size scaling in the  $\phi_4^4$  model', *Nucl. Phys. B*, 393: 461-479 (1993).
23. Aktekin, N., 'Simulation of the four-dimensional Ising model on the Creutz cellular automaton', *Physica A*, 232: 397-407 (1996).
24. Stauffer, D. and Adler, J., 'Logarithmic factors, critical temperature, and zero temperature flipping in the 4D kinetic Ising model', *Int. J. Mod. Phys. C*, 8: 263-267 (1997).
25. Aktekin, N., Günen, A. and Sağlam, Z., 'A finite-size scaling study of the four-dimensional Ising model on the Creutz cellular automaton', *Int. J. Mod. Phys. C*, 10: 875-881 (1999).