TARTILI HAREKETLİ ORTALAMALAR

Prof. Dr. Özer SERPER

I

İktisadi olaylara ait zaman serileri grafikle gösterildiğinde, serinin gidişinde bazı düzensizliklerle yani birtakım inip çıkmalarla karşılaşılabilmektedir. Bu inip çıkmaların çok çeşitli sebepleri vardır. İktisadî olayı farklı veya aynı yönde ve şiddette etkileyen sözkonusu faktörler nelerdir? Harvard istatistikçilerine göre zaman serilerini, uzun devre eğilimi (trend), mevsimlik dalgalanmalar, konjonktürel dalgalanmalar ve düzensiz hareketler etkilemektedir (1). Bu faktörlerden ilkini tesbit, ikinci ve üçüncüsünü ise yok etmek amacıyla başvurulan hareketli ortalamalar yönteminin uygulanabilmesi için zaman serisinin şu şartları taşıması gerekir :

I) Trend doğrusal olmalı,

II) Dalgaların uzunluğu eşit olmalı,

III) Dalga şiddeti aynı olmalı. Bir zaman serisinin bu üç şartı taşımasına ender rastlanır. Diğer şartların yokluğunu bir yana bırakıp, trendin doğrusal olmaması halinde nasıl bir yol izlenebileceğini araştıralım.

Bilindiği gibi, hareketli ortalamalar yöntemi Y değişkeninin hesaba dahil edilen bütün değerleri arasında fark gözetmemekte, dolayısıyla bunlara herhangi bir tartı uygulanmaksızın hesaplama yapılmakta ve elde edilen sonuçlara "basit hareketli ortalamalar" adı verilmektedir. Bu hesaplama şekli, basit hareketli ortalamalar ve en küçük kareler (EKK) yönteminin sağladığı doğru denklemi arasındaki ileride açıklayacağımız bir ilişkinin sonucudur. İşte bu ilişki daha yüksek dereceden denklemler kullanmak suretiyle genelleştirildiğinde, trend doğrusal olmadığında başvurulabilecek "tartılı hareketli ortalama" hesabını yapmak mümkün olmaktadır.

Tartılı hareketli ortalama hesabına temel oluşturan tartıların nasıl bulunduğu bazı kitaplarda (2) anlatılmış ise de, gerek teorik gerekse pratik açılardan bazı noktalar eksik bırakılmış bulunmaktadır. Bu çalışmamızda konuyu kendi yaklaşımımızla ele alıp inceledikten sonra, sözkonusu eksiklikleri tamamlamaya çalışacağız. Bu arada orijinal kaynaklarda bulunmayan bazı tartıları kullanıcıların yararına sunacağız.

II

Elimizde aşağıdaki gibi bir zaman serisinin bulunduğunu varsayalım.

Yıllar	X	Y
1975	-1	Y_{-1}
1976	0	Y_0
1977	+1	Y_{+1}
1978	+2	Y_{+2}
1979	+3	Y_{+3}
1980	+4	Y_{+4}
1981	+5	Y_{+5}
1982	+6	Y_{+6}
1983	+7	Y_{+7}

Bu seriye 3'erli hareketli ortalama uygulamayı uygun gördüğümüzde (k = 3) yapacağımız işlemler.

$$\frac{1}{3}(Y_{-1} + Y_0 + Y_{+1})$$

$$\frac{1}{3}(Y_0 + Y_{+1} + Y_{+2})$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{3}(Y_{+5} + Y_{+6} + Y_{+7})$$

şeklinde olacaktır.

Şimdi de ilk 3 yılın verilerine en küçük kareler (EKK) yöntemini uygulayarak $Y = a + bX$ doğru denklemini elde etmeye çalışalım. Bu denklem bulunurken, EKK yönteminin

$$\Sigma [Y - (a + bX)]^2 = \min$$

şartını sağlamak üzere

$$\Sigma Y = ka + b\Sigma X$$

$$\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2$$

normal denklemlerinden yararlanılacağı açıktır. İlk 3 yıl için X değerleri $\{-1, 0, +1\}$ şeklinde simetrik olduğuna göre $\Sigma X = 0$' dır. Dolayısıyla sözkonusu normal denklemlerden,

$$\Sigma Y = ka$$

$$\Sigma XY = b\Sigma X^2$$

sadeleştirilmiş normal denklemlerine geçilebilir. Ayrıca bu denklemlerin ilkinden,

$$a = \frac{\Sigma Y}{k}$$

yazılabilir. Örneğimizde $k = 3$ olduğuna ve Y değerleri, $\{Y_{-1}, Y_0, Y_{+1}\}$ den oluştuğuna göre,

$$a = \frac{1}{3} (Y_{-1} + Y_0 + Y_{+1})$$

olur. Bu sonuç serinin ilk 3 değerinin hareketli ortalaması hesaplandığında da aynen bulunmuştu. Demek ki, serinin ilk 3 değerinden EKK yöntemiyle geçirilen doğru denkleminin a parametresi bu 3 değerin hareketli ortalamasını temsil etmektedir. Bu sebeple, hareketli ortalamayı hesaplamak için sadeleştirilmiş normal denklemlerden hareketle sadece a'yı bulmak yeterli olacaktır. Y değişkeninin $\{Y_0, Y_{+1}, Y_{+2}\}$ ... $\{Y_{+5}, Y_{+6}, Y_{+7}\}$ ardışık değerleri için de aynı işlemler tekrarlanabilir.

Daha sonraki açıklamalarımızda hareketli ortalamalar yöntemini EKK mantığı içinde ele alacağımız için, yukarıdaki sonucu bir defa da normal denklemlerden hareketle bulmaya çalışalım. Biraz önce de ifade ettiğimiz gibi, hareketli ortalama hesabı için sadece a'nın bulunması yeterlidir. O halde,

$$\Sigma Y = ka + b\Sigma X$$

$$\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2$$

normal denklemlerinden hareketle a'yı şu şekilde hesaplayabiliriz :

$$a = \frac{\begin{vmatrix} \Sigma Y & \Sigma X \\ \Sigma XY & \Sigma X^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k & \Sigma X \\ \Sigma X & \Sigma X^2 \end{vmatrix}}$$

Şimdilik $\Sigma X = 0$ eşitliğini bir yana bırakalım. Ayrıca X değişkeni $\{-1, 0, +1\}$ değerlerine sahip ve $Y = f(X)$ olduğundan Y ve X değişkenlerinin değerlerini sırasıyla $\{Y_{-1}, Y_0, Y_{+1}\}$ ve $\{X_{-1}, X_0, X_{+1}\}$ şeklinde ifade edelim.

Bir determinantın herhangi bir satırı (sütunu) iki veya daha çok elemanın toplamı şeklinde olduğunda, bu determinant iki veya daha çok determinantın toplamı şeklinde gösterilebileceğinden (3), yukarıdaki eşitlik payda sabit tutulmak suretiyle ve $k = 3$ olduğu için,

$$a = \frac{\begin{vmatrix} Y_{-1} & \Sigma X \\ X_{-1}Y_{-1} & \Sigma X^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & \Sigma X \\ \Sigma X & \Sigma X^2 \end{vmatrix}} + \frac{\begin{vmatrix} Y_0 & \Sigma X \\ X_0Y_0 & \Sigma X^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & \Sigma X \\ \Sigma X & \Sigma X^2 \end{vmatrix}} + \frac{\begin{vmatrix} Y_{+1} & \Sigma X \\ X_{+1}Y_{+1} & \Sigma X^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & \Sigma X \\ \Sigma X & \Sigma X^2 \end{vmatrix}}$$

haline dönüştürülebilir. Diğer taraftan, bir determinantın herhangi bir satırı (sütunu) aynı sayı ile bölündüğünde bütün determinant bu sayı ile bölünmüş olacağından (4), bu son eşitlik aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir.

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \Sigma X \\ X_{-1} & \Sigma X^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & \Sigma X \\ \Sigma X & \Sigma X^2 \end{vmatrix}} .Y_{-1} + \frac{\begin{vmatrix} 1 & \Sigma X \\ X_0 & \Sigma X^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & \Sigma X \\ \Sigma X & \Sigma X^2 \end{vmatrix}} .Y_0 + \frac{\begin{vmatrix} 1 & \Sigma X \\ X_{+1} & \Sigma X^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & \Sigma X \\ \Sigma X & \Sigma X^2 \end{vmatrix}} .Y_{+1}$$

$\Sigma X = 0$ eşitliğini şimdi dikkate alalım.

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ X_{-1} & \Sigma X^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \Sigma X^2 \end{vmatrix}} .Y_{-1} + \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ X_0 & \Sigma X^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \Sigma X^2 \end{vmatrix}} .Y_0 + \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ X_{+1} & \Sigma X^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \Sigma X^2 \end{vmatrix}} .Y_{+1}$$

Bu eşitlikte yer alan determinantları

$$\Delta_{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ X_{-1} & \Sigma X^2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ X_0 & \Sigma X^2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{+1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ X_{+1} & \Sigma X^2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \Sigma X^2 \end{vmatrix}$$

sembolleriyle gösterirsek, eşitlik şu şekli alır :

$$a = \frac{\Delta_{-1}}{\Delta} . Y_{-1} + \frac{\Delta_0}{\Delta} . Y_0 + \frac{\Delta_{+1}}{\Delta} . Y_{+1}$$

Determinant formüllerinden

$$\Delta_{-1} = \Sigma X^2$$

$$\Delta_0 = \Sigma X^2$$

$$\Delta_{+1} = \Sigma X^2$$

$$\Delta = 3 \Sigma X^2$$

sonuçları bulunabilir. Görüldüğü gibi, Δ diğerlerinir. toplamına eşittir. Determinantların yerlerine değerlerini koyalım.

$$a = \frac{\Sigma X^2}{3 \Sigma X^2} . Y_{-1} + \frac{\Sigma X^2}{3 \Sigma X^2} . Y_0 + \frac{\Sigma X^2}{3 \Sigma X^2} . Y_{+1}$$

$$a = \frac{1}{3} . Y_{-1} + \frac{1}{3} . Y_0 + \frac{1}{3} . Y_{+1}$$

$$a = \frac{1}{3} (Y_{-1} + Y_0 + Y_{+1})$$

Diğer yoldan elde edilenin aynısı olan bu eşitliğin anlamını bir daha vurgulayalım : a, Y değişkeninin $\{ Y_{-1}, Y_0, Y_{+1} \}$ de–

ğerlerinin tartısız aritmetik ortalamasıdır. Bu ise, ilk 3 değerle hesaplanan basit hareketli ortalamadan başka bir şey değildir.

k = 3 yerine k = 5 alınsa da bu ifademizde herhangi bir değişiklik olmaz. Nitekim k = 5 olduğunda X değişkeninin, -2, -1, 0, +1, +2 değerleri için,

$$a = \frac{\Delta_{-2}}{\Delta}.Y_{-2} + \frac{\Delta_{-1}}{\Delta}.Y_{-1} + \frac{\Delta_{0}}{\Delta}.Y_{0} +$$

$$\frac{\Delta_{+1}}{\Delta}.Y_{+1} + \frac{\Delta_{+2}}{\Delta}.Y_{+2}$$

ve sonuçta

$$a = \frac{1}{5}\left(Y_{-2} + Y_{-1} + Y_{0} + Y_{+1} + Y_{+2}\right)$$

eşitliği kolaylıkla bulunabilir. Hatta k'nin bütün tek değerleri (k = 2m + 1) için benzer işlemler yapılabilir.

Şimdi de k'nin çift değerlerini (k = 2m) meselâ k = 4'ü ele alalım. Bu durumda X değişkeninin {-3, -1, +1, +3} değerleri için

$$a = \frac{\Delta_{-3}}{\Delta}.Y_{-3} + \frac{\Delta_{-1}}{\Delta}.Y_{-1} + \frac{\Delta_{+1}}{\Delta}.Y_{+1} + \frac{\Delta_{+3}}{\Delta}.Y_{+3}$$

ve dolayısıyla,

$$a = \frac{1}{4}\left(Y_{-3} + Y_{-1} + Y_{+1} + Y_{+3}\right)$$

olduğu yukarıdakine benzer şekilde ortaya konulabilir. Ne var ki, k çift olduğunda a değerleri direkt olarak hareketli ortalamaları vermez. Çünkü bu durumda a gözlenen iki değerin ortasına düşer. Bu sakıncayı ortadan kaldırmak üzere, birbirini izleyen a değerlerinin ikişer ikişer aritmetik ortalamaları hesaplanır.

Basit hareketli ortalamanın k yıllık (mesela 3 yıllık) ardışık gruplardan EKK yöntemiyle elde edilecek $Y = a + bX$ doğru denkleminin a parametresine karşı geldiğini göstermiş bulunuyoruz. $k = 12$ ay olduğunda ise bir doğru denkleminden trendi veya mevsimlik dalgalanmaları göstermek için yararlanmanın uygun olmayacağı rahatlıkla ileri sürülebilir. Bu durumda daha yüksek dereceden fonksiyonlara başvurmak kaçınılmaz olmaktadır. İşte bu sebeple, hareketli ortalamalar yöntemini EKK mantığı içinde ele almaya devam edeceğiz.

III

k tane Y değeri arasından EKK yöntemiyle bir doğru yerine 2. dereceden bir eğri ($Y = a + bX + cX^2$) geçirmek istediğimizde sağlamamız gereken şart şu olacaktır:

$$\Sigma\,[\,Y - (a + bX + cX^2)\,]^2 = \min.$$

Bu şartı sağlamak üzere yararlanılacak normal denklemler aşağıdadır.

$$\begin{aligned} \Sigma Y &= ka + b\Sigma X + c\Sigma X^2 \\ \Sigma XY &= a\Sigma X + b\Sigma X^2 + c\Sigma X^3 \\ \Sigma X^2 Y &= a\Sigma X^2 + b\Sigma X^3 + c\Sigma X^4 \end{aligned}$$

Daha önce belirttiğimiz gibi, X değerleri simetrik olarak belirlendikleri takdirde, $\Sigma X = 0$ olmaktadır. Bunun yanında X'lerin bütün tek kuvvetlerinin toplamları da sıfıra eşit yani, $\Sigma X^3 = 0$, $\Sigma X^5 = 0$, ... olacağından, aşağıdaki sadeleştirilmiş normal denklemlere geçilebilir.

$$\begin{aligned} \Sigma Y &= ka + c\Sigma X^2 \\ \Sigma XY &= b\Sigma X^2 \\ \Sigma X^2 Y &= a\Sigma X^2 + c\Sigma X^4 \end{aligned}$$

k tane Y değerinin arasından bir doğru geçirip bunun a parametresini bulmanın, bunların hareketli ortalamasını hesaplamakla aynı anlamı taşıdığını yukarıda ifade etmiştik. O halde, doğru denkleminin b parametresinin herhangi bir rolü yoktur. Buradan bir genelleme yaparsak, $Y = a + bX + cX^2$ fonksiyonu (hatta daha yüksek dereceden fonksiyonlar) için de sadece a'yı belirlemek yeterli olacaktır. Bu sebeple, sadece a'yı da içeren iki denklemi dikkate alabiliriz.

$$\Sigma Y = ka + c\,\Sigma X^2$$
$$\Sigma X^2 Y = a\,\Sigma X^2 + c\,\Sigma X^4$$

Buradan,

$$a = \frac{\begin{vmatrix} \Sigma Y & \Sigma X^2 \\ \Sigma X^2 Y & \Sigma X^4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k & \Sigma X^2 \\ \Sigma X^2 & \Sigma X^4 \end{vmatrix}}$$

bulunduktan sonra, determinantın özelliklerinden yararlanmak suretiyle, meselâ k = 5 ve X değişkeninin { −2, −1, 0, +1, +2 } değerleri için,

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \Sigma X^2 \\ X^2_{-2} & \Sigma X^4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & \Sigma X^2 \\ \Sigma X^2 & \Sigma X^4 \end{vmatrix}} . Y_{-2} + \frac{\begin{vmatrix} 1 & \Sigma X^2 \\ X^2_{-1} & \Sigma X^4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & \Sigma X^2 \\ \Sigma X^2 & \Sigma X^4 \end{vmatrix}} . Y_{-1}$$

$$+ \frac{\begin{vmatrix} 1 & \Sigma X^2 \\ X^2_{0} & \Sigma X^4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & \Sigma X^2 \\ \Sigma X^2 & \Sigma X^4 \end{vmatrix}} . Y_{0} + \frac{\begin{vmatrix} 1 & \Sigma X^2 \\ X^2_{+1} & \Sigma X^4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & \Sigma X^2 \\ \Sigma X^2 & \Sigma X^4 \end{vmatrix}} . Y_{+1}$$

$$+ \frac{\begin{vmatrix} 1 & \Sigma X^2 \\ X^2_{+2} & \Sigma X^4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & \Sigma X^2 \\ \Sigma X^2 & \Sigma X^4 \end{vmatrix}} . Y_{+2}$$

yazabiliriz. Bu son eşitlikte yer alan determinantlara

$$\Delta_{-2} = \begin{vmatrix} 1 & \Sigma X^2 \\ X^2_{-2} & \Sigma X^4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{-1} = \begin{vmatrix} 1 & \Sigma X^2 \\ X^2_{-1} & \Sigma X^4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{0} = \begin{vmatrix} 1 & \Sigma X^2 \\ X^2_{0} & \Sigma X^4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{+1} = \begin{vmatrix} 1 & \Sigma X^2 \\ X^2_{+1} & \Sigma X^4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{+2} = \begin{vmatrix} 1 & \Sigma X^2 \\ X^2_{+2} & \Sigma X^4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & \Sigma X^2 \\ \Sigma X^2 & \Sigma X^4 \end{vmatrix}$$

dersek, sözkonusu eşitlik

$$a = \frac{\Delta_{-2}}{\Delta} .Y_{-2} + \frac{\Delta_{-1}}{\Delta} .Y_{-1} + \frac{\Delta_{0}}{\Delta} .Y_{0} + \frac{\Delta_{+1}}{\Delta} .Y_{+1} + \frac{\Delta_{+2}}{\Delta} .Y_{+2}$$

şekline dönüşür.

Hatırlanacağı gibi, 5 tane Y değerinin arasından doğru geçirdiğimizde de bu eşitliğe ulaşmıştık. Acaba Y değişkenine uygulanacak tartılar oradakilerle aynı mıdır? Bu soruya cevap verebilmek için öncelikle determinant değerlerini bulalım.

$$\Delta_{-2} = \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 4 & 34 \end{vmatrix} = -6$$

$$\Delta_{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 34 \end{vmatrix} = 24$$

$$\Delta_{0} = \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 34 \end{vmatrix} = 34$$

$$\Delta_{+1} = \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 34 \end{vmatrix} = 24$$

$$\Delta_{+2} = \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 4 & 34 \end{vmatrix} = -6$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 34 \end{vmatrix} = 70$$

Bu değerler yukarıdaki eşitlikte yerlerine konulduğunda,

$$a = 0{,}086Y_{-2} + 0{,}343Y_{-1} + 0{,}486Y_0 + 0{,}343Y_{+1} - 0{,}086Y_{+2}$$

olur. Demek ki, 5 tane Y değerinin arasından doğru yerine 2. dereceden bir eğri geçirdiğimizde tartılar birbirlerinden farklı fakat simetrik olmaktadır.

IV

k tane Y değeri arasından bu defa EKK yöntemiyle 3. dereceden bir eğri ($Y = a + bX + cX^2 + dX^3$) geçirmek isteyelim. O halde,

$$\Sigma [\,Y - (a + bX + cX^2 + dX^3)\,]^2 = \min.$$

şartını sağlamak üzere, X değerleri simetrik olduğunda,

$$\begin{aligned} \Sigma Y &= ka + c\Sigma X^2 \\ \Sigma XY &= b\Sigma X^2 + d\Sigma X^4 \\ \Sigma X^2 Y &= a\Sigma X^2 + c\Sigma X^4 \\ \Sigma X^3 Y &= b\Sigma X^4 + d\Sigma X^6 \end{aligned}$$

sadeleştirilmiş normal denklemlerinden yararlanacağız. Hemen ekleyelim ki, daha önce açıkladığımız sebepten dolayı sadece a'yı da içeren iki denklemi dikkate almamız yeterli olacaktır.

$$\begin{aligned} \Sigma Y &= ka + c\Sigma X^2 \\ \Sigma X^2 Y &= a\Sigma X^2 + c\Sigma X^4 \end{aligned}$$

Hatırlanacağı gibi, 2. dereceden eğri durumunda da bu denklemlere ulaşmıştık. Bundan sonraki işlemlerin aynı tartıları sağlayacağı açıktır. Bu duruma göre, 2. ve 3. dereceden eğrilere göre elde edilen tartıların benzer olduğunu söyleyebiliriz.

V

Şimdi de k tane Y değeri arasından EKK yöntemiyle 4. dereceden bir eğri ($Y = a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4$) geçirmeye çalışalım. Daha önceki açıklamalarımızın ışığı altında,

$$\Sigma [\, Y - (a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4)]^2 = \text{min.}$$

sağlamak üzere yararlanabileceğimiz sadeleştirilmiş normal denklemlerden sadece a'yı da içerenleri şu şekilde yazabiliriz:

$$\begin{aligned} \Sigma Y &= ka + c\Sigma X^2 + e\Sigma X^4 \\ \Sigma X^2 Y &= a\Sigma X^2 + c\Sigma X^4 + e\Sigma X^6 \\ \Sigma X^4 Y &= a\Sigma X^4 + c\Sigma X^6 + e\Sigma X^8 \end{aligned}$$

Buradan,

$$a = \frac{\begin{vmatrix} \Sigma Y & \Sigma X^2 & \Sigma X^4 \\ \Sigma X^2 Y & \Sigma X^4 & \Sigma X^6 \\ \Sigma X^4 Y & \Sigma X^6 & \Sigma X^8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k & \Sigma X^2 & \Sigma X^4 \\ \Sigma X^2 & \Sigma X^4 & \Sigma X^6 \\ \Sigma X^4 & \Sigma X^6 & \Sigma X^8 \end{vmatrix}}$$

eşitliğine ulaşılır. Determinantın daha önce belirttiğimiz bazı özellikleri dikkate alındığında, meselâ $k = 7$ ve X değişkeninin $\{-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3\}$ değerleri için,

$$\Delta_{-3} = \begin{vmatrix} 1 & \Sigma X^2 & \Sigma X^4 \\ X^2_{-3} & \Sigma X^4 & \Sigma X^6 \\ X^4_{-3} & \Sigma X^6 & \Sigma X^8 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{-2} = \begin{vmatrix} 1 & \Sigma X^2 & \Sigma X^4 \\ X^2_{-2} & \Sigma X^4 & \Sigma X^6 \\ X^4_{-2} & \Sigma X^6 & \Sigma X^8 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{-1} = \begin{vmatrix} 1 & \Sigma X^2 & \Sigma X^4 \\ X^2_{-1} & \Sigma X^4 & \Sigma X^6 \\ X^4_{-1} & \Sigma X^6 & \Sigma X^8 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{0} = \begin{vmatrix} 1 & \Sigma X^2 & \Sigma X^4 \\ X^2_{0} & \Sigma X^4 & \Sigma X^6 \\ X^4_{0} & \Sigma X^6 & \Sigma X^8 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{+1} = \begin{vmatrix} 1 & \Sigma X^2 & \Sigma X^4 \\ X^2_{+1} & \Sigma X^4 & \Sigma X^6 \\ X^4_{+1} & \Sigma X^6 & \Sigma X^8 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{+2} = \begin{vmatrix} 1 & \Sigma X^2 & \Sigma X^4 \\ X^2_{+2} & \Sigma X^4 & \Sigma X^6 \\ X^4_{+2} & \Sigma X^6 & \Sigma X^8 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{+3} = \begin{vmatrix} 1 & \Sigma X^2 & \Sigma X^4 \\ X^2{}_{+3} & \Sigma X^4 & \Sigma X^6 \\ X^4{}_{+3} & \Sigma X^6 & \Sigma X^8 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & \Sigma X^2 & \Sigma X^4 \\ \Sigma X^2 & \Sigma X^4 & \Sigma X^6 \\ \Sigma X^4 & \Sigma X^6 & \Sigma X^8 \end{vmatrix}$$

ve dolayısıyla,

$$a = \frac{\Delta_{-3}}{\Delta}.Y_{-3} + \frac{\Delta_{-2}}{\Delta}.Y_{-2} + \frac{\Delta_{-1}}{\Delta}.Y_{-1} + \frac{\Delta_{0}}{\Delta}.Y_{0}$$

$$+ \frac{\Delta_{+1}}{\Delta}.Y_{+1} + \frac{\Delta_{+2}}{\Delta}.Y_{+2} + \frac{\Delta_{+3}}{\Delta}.Y_{+3}$$

olur. Determinant değerleri,

$$\Delta_{-3} = \begin{vmatrix} 1 & 28 & 196 \\ 9 & 196 & 1588 \\ 81 & 1588 & 13636 \end{vmatrix} = 5760$$

$$\Delta_{-2} = \begin{vmatrix} 1 & 28 & 196 \\ 4 & 196 & 1588 \\ 16 & 1588 & 13636 \end{vmatrix} = -34560$$

$$\Delta_{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 28 & 196 \\ 1 & 196 & 1588 \\ 1 & 1588 & 13636 \end{vmatrix} = 86400$$

$$\Delta_{0} = \begin{vmatrix} 1 & 28 & 196 \\ 0 & 196 & 1588 \\ 0 & 1588 & 13636 \end{vmatrix} = 150912$$

$$\Delta_{+1} = \begin{vmatrix} 1 & 28 & 196 \\ 1 & 196 & 1588 \\ 1 & 1588 & 13636 \end{vmatrix} = 86400$$

$$\Delta_{+2} = \begin{vmatrix} 1 & 28 & 196 \\ 4 & 196 & 1588 \\ 16 & 1588 & 13636 \end{vmatrix} = -34560$$

$$\Delta_{+3} = \begin{vmatrix} 1 & 28 & 196 \\ 9 & 196 & 1588 \\ 81 & 1588 & 13636 \end{vmatrix} = 5760$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 28 & 196 \\ 28 & 196 & 1588 \\ 196 & 1588 & 13636 \end{vmatrix} = 266112$$

olarak bulunduktan sonra yukarıdaki eşitlikte yerlerine konulduğunda,

$$a = 0{,}022Y_{-3} - 0{,}130Y_{-2} + 0{,}325Y_{-1} + 0{,}566Y_0$$
$$+ 0{,}325Y_{+1} - 0{,}130Y_{+2} + 0{,}022Y_{+3}$$

sonucu elde edilir.

VI

k tane Y değeri arasından EKK yöntemiyle 5. dereceden bir eğri ($Y = a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4 + fX^5$) geçirmek istediğimizde sadece a'yı da içeren,

$$\Sigma Y = ka + c\Sigma X^2 + e\Sigma X^4$$
$$\Sigma X^2Y = a\Sigma X^2 + c\Sigma X^4 + e\Sigma X^6$$
$$\Sigma X^4Y = a\Sigma X^4 + c\Sigma X^6 + e\Sigma X^8$$

sadeleştirilmiş normal denklemlerinden yararlanmamızın yeterli olacağını gösterebiliriz. Hatırlanacağı gibi, bu denklemler 4. dereceden eğri durumunda da sözkonusu idi. O halde, işlemlere devam etsek aynı tartıları bulacağız. Diğer bir ifade ile, 4. ve 5. dereceden eğrilere göre elde edilen tartılar benzerdir. 2. ve 3. dereceden eğriler için de aynı durum sözkonusu olduğuna göre, şu genellemeyi yapabiliriz: 2r ve 2r+1'nci dereceden eğrilerden benzer tartılar elde edilmektedir.

VII

Buraya kadarki açıklamalarımızı şu şekilde toparlayabiliriz: k tane Y değeri arasında 2. veya 3. dereceden bir eğri geçirilmek istendiğinde a hesaplanırken Y_x değerlerinin tartıları genel olarak aşağıdaki şekilde bulunmaktadır.

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & \Sigma X^2 \\ X_x^2 & \Sigma X^4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k & \Sigma X^2 \\ \Sigma X^2 & \Sigma X^4 \end{vmatrix}}$$

Bu formüle uygulanacak X değerleri k tek (2m+1) olduğunda {-1, 0, +1}, {-2, -1, 0, +1, +2}, {-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3}, ... çift (2m) olduğunda ise {-3, -1, +1, +3}, {-5, -3, -1, +1, +3, +5} ... dir. Diğer taraftan, X değerleri aynı şekilde belirlenmek üzere, tartılar 4. veya 5. dereceden eğrilerden,

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & \Sigma X^2 & \Sigma X^4 \\ X^2_x & \Sigma X^4 & \Sigma X^6 \\ X^4_x & \Sigma X^6 & \Sigma X^8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k & \Sigma X^2 & \Sigma X^4 \\ \Sigma X^2 & \Sigma X^4 & \Sigma X^6 \\ \Sigma X^4 & \Sigma X^6 & \Sigma X^8 \end{vmatrix}}$$

genel formülü ile hesaplanmaktadır.

Tartılar bu şekilde bulunduktan sonra, k tek olduğunda tartılı hareketli ortalama hesabı bir aşamada bitirilir. Buna karşılık, k çift olduğunda elde edilecek değerlerin ikişer ikişer aritmetik ortalamalarını da ayrıca hesaplamak gerekir. Bu veya benzeri bir işlem yapıldığında simetrinin yararlarının kaybedileceği ifade edilmekte (5) ise de, bu görüşe katılmak mümkün değildir. Bunu bir örnek yardımıyla şu şekilde açıklayabiliriz:

Biraz sonra tablo üzerinde belirteceğimiz gibi, 2. (veya 3.) dereceden eğriden elde edilen tartılar meselâ k = 4 olduğunda sırasıyla -0,062; +0,562; +0,562 ve -0,062'dir. Bu tartılar $\{Y_{-3}, Y_{-1}, Y_{+1}, Y_{+3}\}$ şeklinde göstereceğimiz ilk dört terime uygulandığında ilk tartılı hareketli ortalama,

$$-0{,}062Y_{-3} + 0{,}562Y_{-1} + 0{,}562Y_{+1} - 0{,}062Y_{+3}$$

değerine sahip olur. İzleyen tartılı hareketli ortalama hesaplanırken $\{Y_{-1}, Y_{+1}, Y_{+3}, Y_{+5}\}$ den oluşan dört terime aynı tartılar uygulanacağı için, sözkonusu değer,

$$-0{,}062Y_{-1} + 0{,}562Y_{+1} + 0{,}562Y_{+3} - 0{,}062Y_{+5}$$

şeklinde bulunacaktır. Şimdi bunların aritmetik ortalamasını hesaplayalım.

$$[(-0{,}062Y_{-3} + 0{,}562Y_{-1} + 0{,}562Y_{+1} - 0{,}062Y_{+3})$$

$$+(-0{,}062Y_{-1} + 0{,}562Y_{+1} + 0{,}562Y_{+3} - 0{,}062Y_{+5})]/2$$

$$= -0{,}031Y_{-3} + 0{,}250Y_{-1} + 0{,}562Y_{+1} + 0{,}250Y_{+3} - 0{,}031\,Y_{+5}$$

Görüldüğü gibi, tartılar simetriktir. O halde simetrinin kaybedilmesi diye bir sorun yoktur. "Simetri kaybediliyor" denildiğinde tartıların Y_0 'a ilişkin tartıya göre değil de Y_{+1} 'e ilişkin tartıya göre simetrik olması kastediliyor olabilir. Ne var ki, buna katılmak mümkün değildir. Çünkü aynı durum basit hareketli ortalamalar için de sözkonusudur.

Doğru denkleminden elde edilen tartıların meselâ k = 4 olduğunda birbirine eşit ve 0,250 olduğu ispatlanabilir. Bu duruma göre, ilk dört terimin basit hareketli ortalaması,

$$0{,}250Y_{-3} + 0{,}250Y_{-1} + 0{,}250Y_{+1} + 0{,}250Y_{+3}$$

ve izleyen basit hareketli ortalaması ise,

$$0{,}250Y_{-1} + 0{,}250Y_{+1} + 0{,}250Y_{+3} + 0{,}250Y_{+5}$$

değerine sahiptir. Bunların aritmetik ortalaması hesaplandığında,

$$[(0{,}250Y_{-3} + 0{,}250Y_{-1} + 0{,}250Y_{+1} + 0{,}250Y_{+3})$$
$$+(0{,}250Y_{-1} + 0{,}250Y_{+1} + 0{,}250Y_{+3} + 0{,}250Y_{+5})]/2$$
$$= 0{,}125Y_{-3} + 0{,}250Y_{-1} + 0{,}250Y_{+1} + 0{,}250Y_{+3} + 0{,}125Y_{+5}$$

sonucuna ulaşılır. Açıkça görülmektedir ki, tartılar Y_0'a ilişkin tartıya göre değil de Y_{+1}'e ilişkin tartıya göre simetriktir.

Benzer duruma gerek doğru denkleminden gerekse 2. (veya 3.) dereceden eğriden tartı elde edilmesinde rastlanması k'nin çift (2m) olması halinde simetrinin kaybedilmesi diye bir sorunun ortaya çıkmayacağını göstermektedir. Özetle, k tek sayıda da olsa, çift sayıda da olsa, tartılı hareketli ortalama hesabının herhangi bir sorun yaratmadığını söylemek mümkündür.

VIII

Tartılı hareketli ortalama hesabında kullanılacak tartıları buraya kadarki açıklamalarımızın ışığı altında hesapladığımızda aşağıdaki tablolarda belirtilen sonuçlara ulaşırız. Sözkonusu tablolardan ilkinde k'nin tek sayıda, ikincisinde ise çift sayıda olması durumunda çeşitli derecelerden eğrilere göre hesaplanan tartılar gösterilmiştir. Hemen ekleyelim ki, ilk tablodaki tartılar yararlandığımız kaynaklarda da yer almaktadır. Buna karşılık, ikinci tablodaki tartılar tarafımızdan hesaplanmış ve kullanıcıların yararına sunulmuştur.

TABLO : 1

k	Denklemin Derecesi	Y DEĞERLERİ VE BUNLARA İLİŞKİN TARTILAR										
		Y_{-5}	Y_{-4}	Y_{-3}	Y_{-2}	Y_{-1}	Y_0	Y_{+1}	Y_{+2}	Y_{+3}	Y_{+4}	Y_{+5}
5	2. veya 3.				-0,086	+0,343	+0,486	+0,343	-0,086			
7	2. veya 3.			-0,095	+0,143	+0,286	+0,332	+0,286	+0,143	-0,095		
	4. veya 5.			+0,022	-0,130	+0,325	+0,566	+0,325	-0,130	+0,022		
9	2. veya 3.		-0,091	+0,061	+0,169	+0,234	+0,255	+0,234	+0,169	+0,061	-0,091	
	4. veya 5.		+0,035	-0,128	+0,070	+0,315	+0,416	+0,315	+0,070	-0,128	+0,035	
11	2. veya 3.	-0,084	+0,021	+0,103	+0,161	+0,196	+0,206	+0,196	+0,161	+0,103	+0,021	-0,084
	4. veya 5.	+0,042	-0,105	-0,023	+0,140	+0,280	+0,332	+0,280	+0,140	-0,023	-0,105	+0,042

T A B L O : 2

k	Denklemin Derecesi	Y DEĞERLERİ VE BUNLARA İLİŞKİN TARTILAR											
		Y_{-11}	Y_{-9}	Y_{-7}	Y_{-5}	Y_{-3}	Y_{-1}	Y_{+1}	Y_{+3}	Y_{+5}	Y_{+7}	Y_{+9}	Y_{+11}
4	2. veya 3.					−0,062	+0,562	+0,562	−0,062				
6	2. veya 3.				−0,094	+0,219	+0,375	+0,375	+0,219	−0,094			
	4. veya 5.				+0,012	−0,098	+0,586	+0,586	−0,098	+0,012			
8	2. veya 3.			−0,0,94	+0,094	+0,219	+0,281	+0,281	+0,219	+0,094	−0,094		
	4. veya 5.			+0,029	−0,135	+0,166	+0,440	+0,440	+0,166	−0,135	+0,029		
10	2. veya 3.		−0.088	+0,038	+0,131	+0,194	+0,225	+0,225	+0,194	+0,131	+0,038	−0.088	
	4. veya 5.		+0,039	−0,117	+0,012	+0,215	+0.351	+0,351	+0,215	+0,012	−0,117	+0.039	
12	2. veya 3.	−0,080	+0,009	+0,080	+0,134	+0,170	+0,187	+0,187	+0,170	+0,134	+0,080	+0,009	−0,080
	4. veya 5.	+0,044	−0,093	−0,044	+0,085	+0,215	+0,293	+0,293	+0,215	+0,085	−0,044	−0,093	+0,044

KAYNAKLAR

1) Bu konuda bkz. : Özer Serper, "İstatistik (Genişletilmiş 2. Baskı)", Filiz Kitabevi, İstanbul-1980, s. 204 ve d.

2) Murice Kendall, Alan Stuart and J. Keith Ord, "The Advanced Theory of Statistics (Volume 3)", Charles Griffin and Company Limited, London-1983, s. 452 ve d.
G. Udny Yule and M. G. Kendall, "An Introduction to the Theory of Statistics", Charles Griffin and Company Limited, London-1973, s. 617 ve d.
Taro Yamane, "Statistics an Introductory Analysis", Harper and Row, New York-1973, s. 1062 ve d.

3) Nakibe Uzgören, "Genel Matematik ve İktisatta Uygulanması", Yalkın Ofset Matbaası, İstanbul-1972, s. 326.

4) Uzgören, a.g.k. s. 323.

5) Kendall-Stuart-Ord, a.g.k. s. 452.