ÇOKLU FAKTÖR ANALİZİ

Doç. Dr. Erol ÜÇDAL
İktisat Fakültesi
Öğretim Üyesi

1.1. *Modelin Tanımı ve Yöntemleri:*

Bu çeşit modellerde faktör sayısı sınırlandırılmamıştır. Gözlem değişkenlerinin m sayıda ortak faktör ve n sayıda özgül faktörden meydana geldiği kabul edilir. Yine de bu modelde ortak faktör adedini mümkün mertebe az tutmak genel ilke olarak alınır.

Çoklu faktör modelini şöyle kurabiliriz ve doygunlukları buradan hesaplayabiliriz.

$x_1, x_2, \ldots x_n$ tane gözlem değişkenimiz olsun ve m tane $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ ortak faktör ile n tane $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ özgül faktör bulunsun.

Buna göre modelimiz aşağıdaki gibi olacaktır.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1m}y_m + a_1u_1 \\
x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2m}y_m + a_2u_2 \\
&\vdots \\
x_n &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nm}y_m + a_nu_n
\end{aligned}
$$

Burada $m<n$'dir. Yani ortak faktör gözlemden az olmalıdır.

Buradaki çözümler için verilecek yöntemlerin ortak tarafı dönüşümlerle çözümü esas birleşenler çözümüne getirmektir.

Bu yöntemlerden belli iki tanesi şunlardır:

1'inci Metod: Merkezde toplama

2'nci Metod: Çoklu grup.

1.2. *Merkezde Toplama Yöntemi: (Centroid Yöntem)*

Bu metotda faktörlerin belirlenmesi işlemi doğrultuların ağırlık merkezinde birleşmesiyle sağlanır. Çünkü ağırlık merkezini ortak faktörler uzaymdaki gözlem değişkenlerinin noktaları oluşturur. Burada n değişken bir noktalar topluluğu ve vektörler de bir vektörler demeti oluşturur. Bu noktaların bir ağırlık merkezi vardır ve bu merkezden en çok tesirli olan faktörü geçiriyoruz.

Ortak Faktör sayısı m olsun. Buna göre,

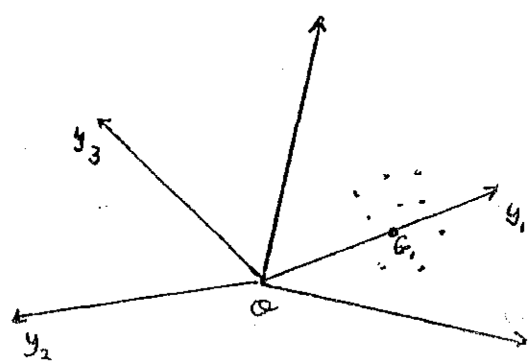
$$x''_j = a_{j1}y_1 + a_{j2}y_2 + \ldots + a_{jm}y_m$$

ifadesi yazılabilir.

Korelasyon katsayıları aşağıdaki bağıntıyla hesaplanır.

$$r_{jj'} = a_{j_1} . a_{j'_1} + a_{j_2} . a_{j'_2} + \ldots + a_{j_m} . a_{j'_m}$$

Ortak Faktör Uzayı:



Şekil: 1

Ağırlık merkezi G olsun. G'nin koordinatları bulunurken tüm değişkenlerin koordinatlarının ortalaması olarak bulabiliriz.

G'nin koordinatları $\sum_{j=1}^{n} aj_{m}/_{n}$ dir.

Örneğin, birinci faktör için koordinatı $\sum_{j=1}^{n} aj_{1}/_{n}$ olacaktır.

Diğer faktörler için de ayni şekilde hesaplanır. Ağırlık merkezini Y_1 üzerinde seçtiğimiz için ilk koordinat hariç diğerleri sıfır olacaktır.

Burada ağırlık merkezinin koordinatlarını bulmak, yani orijinden merkeze kadar olan uzaklığın bulunması ilk faktörün koordinatlarmm bulunmasıyla eş anlamlıdır.

Bunun için evvelâ korelasyonların toplamları hesaplanır.

$$\sum_{j'=1}^{n} r_{jj'} = a_{j_1} \Sigma a'_{j1} + a_{j_2} \Sigma a_{j'_2} + a_{j_3} \Sigma a'_{j_2} + \ldots$$

$$a_{j_2} \Sigma a_{j'_2} = 0 \,,\; a_{j_3} \Sigma a_{j'_2} = 0 \ldots \quad \text{olacağı için}$$

$$\sum_{j'=1}^{n} r_{jj'} = a_{j_1} \Sigma a_{j'_1} \quad \text{dir.}$$

Sütunlar içinde toplam hesaplanırsa ve korelasyon matrisi simetrik olduğu için aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{j'=1}^{n} r_{jj'} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{j_1}'\right)\left(\sum_{j'=1}^{n} a_{j_1}'\right) = \left(\sum_{j'=1}^{n} a_{j'_1}\right)^2$$

Her iki tarafın kare kökü alınarak

$$\sum_{j'=1}^{n} a_{j'_1} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sum_{j'=1}^{n} r_{jj'}} \quad \text{elde edilir.}$$

$$a_{j_1} = \frac{\sum_{j'=1}^{n} r_{jj'}}{\Sigma a_{j'_1}} \quad \text{olacağı için}$$

$$a_{j_1} = \frac{\sum_{j'=1}^{n} r_{jj'}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sum_{j'=1}^{n} r_{jj'}}} = \text{bulunur.}$$

Burada a_{j1} doygunluğunun bulunması birinci faktörün ortadan kaldırıldığı fikrini uyandırır. Çünkü tüm değişkenlere ait olan noktaların merkezi orijinde bulunur. Bu durumun gözönünde bulundurulması gerekir. Ayrıca her değişkene ait ortak varyansların da tahmin edilmesi gerekir. Bunun için de en uygun yöntem çoklu korelasyondan yararlanmaktır.

$$Rx_j . x_1 \quad \ldots > x_j < \ldots \; x_n \leq h_j^2$$

merkez orijinde iken bir kısım değişkenler koordinat sisteminde üçüncü bölgede bulunsun.

Merkezin, orijinden başka bir noktaya getirilmesi gereklidir. Çünkü bu değişkenlere ait olan noktaların 3'üncü bölgede toplanmalarından ötürü gerçek işaretleri haiz oldukları işaretlerin tersleridir. Bunu düzeltmek için 3'üncü bölgedeki değişkenlere ait olan noktaların 1'inci bölgeye taşınması gerekir. Bu taşınma işlemi, birinci faktör ekseni etrafında değişken vektörlerinin 180° döndürülmesiyle mümkündür. Bu döndürmede yön değişerek değişken noktaları esas işaretlerini alırlar. Bu işlem az sayıda değişkenin artık korelasyon matrisinde negatif korelasyon veren değişkenlere uygulanır. Bu işaret değişkenliklerini (+) veya (−) işaretle gösterebiliriz. Buna göre korelasyon matrisine karşılık getirilen işaretli matriste işaret (+) ise döndürme yok, işaret (−) ise döndürme işlemi yapıldığı anlaşılır.

Bu metotda yapılan işlemler netice olarak korelasyon matrisinden faktörleri teker, teker elimine etmektir diyebiliriz.

1.3. *Elimine İşleminde Belli Başlı Metotlar :*

Elimine işleminde başlıca iki metot kullanılır:

1. Metot : İkili vektörlerle gruplandırma (Binaire Sistem)

2. Metot : İkili birim vektörlerle gruplandırma.

İkili vektörlerle gruplandırma: Bu metot gözlem değerlerindeki hesaplama yollarının kısıtlı olduğu an kullanılır. Bu metodun esası korelasyon matrisinin rank'mı bir düşürmeye dayanır. Bu düşürme işlemi yapılırken korelasyon matrisi sağdan ve soldan ikili vektörlerle çarpılır. İkili vektörlerin elemanları 1 ve 0'dan meydana gelmiştir. Eğer elimine edilecek faktörlerle ilgili değişkenler var ise vektörün bu elemanı 1 yok ise 0 olarak alınır. Bu yolla birinci faktörle ilgili $\vec{b}_1$ keyfi vektörü elemanları 1,0 olarak belirlenir. Bu vektör vasıtasıyla $\vec{a}_1$ doygunluk vektörü elde edilir. Böylece her $\vec{b}_k$ keyfi vektörlerine ait $\vec{a}_k$ doygunluk vektörleri bulunur.

Bu metodun esas güç tarafı ortak varyansların tahmin edilmesi gerekliliğinden kaynaklanır.

İkili birim vektörlerle gruplandırma: Bu metot da ilke olarak elimine edilen faktörden faktör değişkenlerinin etkilenmiyenlerine ait doygunluklarının sıfır olmasını sağlamaktır. Bu metotda her faktör değişkenler grubunu daha iyi temsil eder.

Keyfi vektörü şöyle gösterebiliriz.

$$B_k = b_k - c_k I$$

c_k bir skaleri göstermektedir. c_k skalerinin seçilişi şu şartla belirlenir.

$$(I - b_k)' \, a_k = 0$$

Bu eşitliğin sıfır olması, çarpanlardan birinin sıfır olmasıyla mümkündür. $(I - b_k) = 0$ olursa $b_k = 1$ olur ve keyfi vektör birim vektörle aynı olur. Bu durum her zaman mümkün olamaz. İkinci çarpan olan $a_k = 0$ olmalıdır.

Bu durumda da doygunlukların sıfır olması demektir. Bu da b_k nin sıfır olacağı değişkenler için mümkün olur. Öyleyse c_k skalerini eşitliği sıfır yapacak şekilde seçmek gerekir.

c_k'yı şöyle bulabiliriz.

$(I - b_k) \, . \, R_{k-1} \, . \, B_k = 0$ eşitliğinde $B_k = b_k - c_k . 1$ ifadesini yerine koyalım.

$$(I - b_k)' \, . \, R_{k-1} \, (b_k - c_k I) = 0 \text{ olur.}$$

Bu eşitlik açılacak olursa,

$$I' R_{k-1} \, b_k - I' R_{k-1} \, c_k I - b_k' \, R_{k-1} \, . \, b_k + b_k' \, R_{k-1} \, c_k I = 0$$

netice olarak

$$c_k = \frac{I'R_{k-1}b_k - b_k'R_{k-I}.b_k}{I'R_{k-1}I - b_k'R_{k-1}.I} \quad \text{elde edilir.}$$

Sıfırlama işlemini c_k yerine getirecektir ve c_k yukarıda belirlendiği gibi seçilmelidir.

1.4. *Çoklu Faktör Modelinin Çözümünde İkinci Metod : Çoklu Grup Metodu :*

Çoklu grup metodu merkezde toplama (Centroid) metodun değişik bir şeklidir. Tesirli faktörleri elde ederken bir faktör yerine ayni yöntemle birkaç faktörün çıkarılması ilginçtir. Merkezde toplama metodunda yapıldığı gibi değişkenlerin tamamının ağırlık merkezinden geçirilen referans vektörler bu metotda grupların, ağırlık merkezinden geçirilir. Burada tek kısıtlama grupların lineer bağımsız olmalarından ileri gelir. Bu kısıtlamadan ötürü bağımsız grupların seçilebilmesi kâfi derecede bilinen değişkenlerle mümkündür.

Eğer gruplar lineer bağımsız değil ise bu metotla yapılan işlemlerin herhangi birinde sanal bir sayı neticesiyle karşılaşılır. Böyle bir sayı değeri herhangi bir işlemde gözükürse o takdirde grupların seçiminin tekrar yapılması gerekir.

Bir grup sayısal şekildeki verileri ihtiva ediyorsa, ağırlık merkezinden geçen vektör sayısal faktörün son dönmüş durumuna daha yakın olur.

Benzer yollarla birkaç faktör çıkarıldıktan sonra artıkların bir tablosu düzenlenebilir. Böylece başka ortak faktör varyansının hesaplanıp hesaplanamıyacağı araştırılır.

Eğer artık korelasyonlar tablosundan, başka faktörlerin olduğuna karar verilirse Merkezde toplama veya çoklu grup metoduyla başka faktörlerin aranmasıyla olur(6).

1.5. *Ortak Varyansların Elde Edilmesi :*

Bu metotda bütün faktörlerin oluşmasından sonra ortak varyansların hesaplanması kolay olur. Her test için ortak varyans hesabı merkezde toplama yöntemiyle yapılır (Centroid Metot).

---

(6) Introduction to Factor Analysis Benjamin Fruchter, Sayfa 83

Bu hesaplamada sıra aşağıdaki gibidir.

1) Korelasyonu en yüksek olan üç değişkenin meydana getirdiği bir korelasyon matrisi oluşturulur. Bu matrisin her sütunundaki en yüksek korelasyon köşegen üzerine yerleştirilir.

2) Ayrı, ayrı sütundaki değerlerin toplamı alınır ve

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k'} r_{ij}$$

ile gösterilir. Sonra matrisin bütün elemanlarının toplamı alınır ve ΣT ile gösterilir.

Ortak Varyans

$$h^2 = \frac{\Sigma r_i^2}{\Sigma T}$$

ifadesiyle hesaplanır.

3) Bulunan ortak varyanslar Korelasyon matrisinin köşegeni üzerine yerleştirilir.

1.6 *Eğik Faktör Doygunluklarının Bulunması :*

Değişkenlerin gruplandırılmasından sonra işlemler şu şekilde devam eder:

1) Gruplarda her sütunun toplamı bulunur. Her sütun grup adedi kadar toplam değeri verir. Bu değerler korelasyon matrisinin altındaki satıra yazılır. Bu işlemler her grup için ayrı, ayrı tekrar edilerek sütunlardaki grup toplamlarının meydana getirdiği matrise S matrisi diyelim.

2) S matrisinden gruplardaki grup elemanları toplanarak grup adedi n ise $(n \times n)$ mertebesinde bir T matrisi elde edilir.

3) Eğik faktörlerin doygunluklarının elde edilmesinde, T matrisinin köşegenindeki her değerin karekökünü alarak

$$w_j = \frac{1}{\sqrt{d_j}}$$

formülü ile bulabiliriz. Bu ifadede d_j T matrisinin j inci satırındaki köşegen elemanıdır. w_j değerleri S matrisindeki grup toplamları ile hesaba katılır. Şöyle ki, S matrisinin her satırındaki her bir değer ile o satırın ağırlık değeri w_j ile çarpılır ve yeni bir matris oluşturulur. Bu matrise V' matrisi diyelim.

$$V' = w_j . 5$$

V' matrisinin elemanları grupların ağırlık merkezinden geçen referans vektördeki değişkenlerin doygunluklarıdır. Genel olarak gruplara ait vektörler ortogonal değillerdir. Yani ağırlık merkezinden geçen eksenler eğiktirler. V' matrisi eğik faktörlerin doygunluklarının meydana getirdiği matrisin transpozesidir.

Eğer diğer değişkenlerin veya test kümelerinin bir anlam ifade etmesi açısından gruplar dikkatli seçilmişler ise, yani faktörler döndürülmiyecek veya gruplandırma değiştirilmeyecek ise artıkların tablosu hazırlanıp çıkarılan tüm ortak faktör varyansı hesaplandıktan sonra analiz bu noktada sona erdirilir.

Eğer faktörlerin döndürülmesi isteniyorsa faktörler önce ortogonal faktörler haline getirilmelidir.

Faktörlerin Döndürülmesinde Yapılacak İşlemler

1) T matrisinin her satırındaki elemanlar o satırın w_t değeri ile çarpılır. Elde edilen değerler yeni bir matris oluşturur, bu matrise U matrisi diyelim.

2) U matrisinin her sütunundaki her değer o sütunun numarasını taşıyan ağırlıklar w_j ler ile çarpılır. Şöyle ki 1'inci sütundaki değerler w_1, 2'nci sütundaki değerler w_2 ile çarpılarak bütün sütunlar bitinceye kadar devam edilir. Elde edilen yeni değerlerin oluşturduğu matris R_{pq} matrisidir.

Köşegendeki değerler birleşmenin yuvarlama hatası sınırları içinde olmalıdır. R_{pq} matrisindeki diğer değerler faktörler arasındaki korelasyonlardır. Yani birim uzunluktaki referans vektörlerin arasındaki açıların kosinüsleridir.

3) Eğik faktörlerdeki doygunlukların ortogonal sistemdeki doygunluklara transfer edilebilmesiyle bir dönüştürüm matrisi oluşturulur.

Bu matris F_{pm} matrisidir. Eğer gruplar lineer bağımsız değillerse, neticelerin sanal ifadelerinden ötürü metot anlamsız olur. Eğik faktör eksenlerini ortogonal eksenlere transfer eden matris F_{pm} matrisinin tersinin transpozesidir. $(F_{pm}^{-1})'$. F_{pm} matrisi esas köeşegnin üstü sıfır olan bir matristir. F_{pm} matrisinin tersini $(F_{pm})^{-1} = I$ formülüy- (F_{pm}). le matrislerin çarpım özelliklerini kullanarak bulabiliriz.

1.7. *Ortogonal Faktör Doygunlukları*

Ortogonal Faktör Doygunluklarını elde ederken eğik faktörlerin doygunluklarının meydana getirdiği V matrisini $(F_{mp}^{-1})'$ matrisi ile çarpmakla elde edilir. Kalıntıların tablosunu elde etmek için ortogonal doygunluklar kullanılır. Şöyle ki:

$$\rho_{jk} = r_{jk} - (a_{j1}a_{k1} + a_{j2}a_{k2} + \ldots + a_{jr}a_{kr})$$

ifadesiyle bulunur.

Elde edilen kalıntı korelasyonları çok küçük ise o takdirde başka faktör aranmaz, eldeki faktörler yeterli olur. Ortogonal faktör doygunluklarının döndürülmesi bundan sonraki bölümde anlatılacaktır.

1.8. *Esas Eksenler Metodu :*

Korelasyon matrisini faktörize eden (principal-Axes Metot) esas eksenler metodu bir kaç nedenden dolayı ilginçtir. Her faktör, varyansın maksimum miktarını oluşturur. Başka bir deyişle faktör doygunluklarının kareleri toplamı her faktörde maksimum olur ve mümkün olan en küçük kalıntıları verir. Bu metotla, korelasyon matrisi ortogonal faktörlerin en küçük sayısına indirgenir[1].

Bu metotla korelasyon matrisimiz ortogonal faktörlerin en küçük değerine indirgenir. Ayrıca bu metot verilen bir korelasyon tablosu için matematiksel çözümü verme avantajına sahiptir.

Pratikte bu metotda hesaplamalar daha fazla yorucudur. Fakat aynı neticeleri (Centroid) merkezde toplama metodu ile daha az bir çalışma ile elde edebiliriz. Eğer bir veya iki faktör çıkarılırsa daima iki çözüm tarzı da varyansın ayni değeri için sorumlu olur.

Hotelling istenilen gerçek değerlere göre taşınabilen ve esas eksenlerdeki doygunlukları elde eden bir iterasyon metodu geliştirdi.

Bu iterasyon yöntemini şu esaslar içinde gerçekleştirebiliriz:

---

(1) A.G.E., Benjamin Fruchter, sayfa 99

1) R korelasyon matrisinin her sütununun toplamı korelasyon matrisinin altındaki Σ_1 satırına yazılır.

2) Σ_1 satırındaki her değer bu satırın en büyük değerine bölünür ve onun altındaki U_i ile adlandırılan satıra yazılır.

3) Σ_1 satırının korelasyon matrisinin her satırının çapraz çarpımı bulunur ve toplanır. Bu değerler Σ_2 ile adlandırılan bir alt satıra yazılır. Bu işlemi biraz daha açık hale getirirsek şöyle açıklayabiliriz: Σ_2 satırının birinci elemanı; korelasyon matrisinin 1'inci satırındaki aynı sıradaki elemanlarla Σ_1 satırındaki elemanlar çarpılır ve toplanarak elde edilir.

Σ_2 satırındaki her değer o satırın en büyük değeri ile bölünür ve elde edilen değerler u_2 satırına yazılır.

4) U_1 ve U_2 satırındaki değerler karşılaştırılır. Eğer bunlar istenilen doğruluk derecesine erişmişler ise, iterasyon tamamlanmış sayılır.

Bu anda faktör doygunlukları hesaplanabilir. Eğer U_1 ve U_2 değerleri istenilen doğruluk derecesine erişmemişler ise karelendirme yöntemine göre, yani R^2 matrisinden iterasyona devam edilir. Eğer bu anda da doğruluk derecelerine erişilmemiş ise R^4 ve R^8... korelasyon matrisleri ile iterasyona ayni yoldan devam edilir.

Birinci Faktör Doygunlukların Hesabı:

1) Birinci faktördeki doygunlukları hesaplamak için en son bulunan U satırı ile R korelasyon matrisinin her satırının çapraz çarpımlarının toplamı bulunur ve neticeler V_{j1} diye adlandırılan satıra yazılır.

$$V_{j1} = RU$$

2) İlk faktördeki j değişkeninin doygunluklarını elde etmek için aşağıdaki genelleştirilmiş formül kullanılır:

$$a_{j1} = \frac{V_{j1}}{\sqrt{\Sigma uv}}$$

Bu formülde Σuv değeri, V_{j1} satırı ile U satırının çapraz çarpımlarının toplamına eşittir.

3) Faktör doygunluğu j indisinin alacağı değere göre ifadesiyle elde edilir.

$$a_{j1} = V_{j1} \cdot \frac{1}{\sqrt{\Sigma U_4 V_{j1}}}$$

İkinci ve Sonraki Faktörlerin Hesabı :

Kalıntılar tablosu, korelasyon matrisinden ve ayni metodun korelasyon matrisine uygulanması ile elde edilen ilk faktör doygunluklarından ve merkezde toplama doygunluklarından elde edilir.

$$\rho_{ijk} = r_{jk} - a_{j1} a_{k1}$$

p_1 ilk kalıntıyı, p_2 ikinci kalıntıyı göstermek üzere korelasyon matrisinden kalıntılar bulunur.

Bu anda ortak varyanslar tekrar hesaplanır ve birinci faktörün çıkarılması için kullanılan yöntem ile kalıntılar tablosundan yararlanarak 2'nci faktörü bulmak için de tekrarlanır.

v_{j2} değerini bulurken aşağıdaki formülden faydalanılır:

$$v_{j2} = \rho_1 \cdot u$$

Bu formüle göre ilk kalıntı matrisinin her satırı u_2 ile çarpılır. Bulunan neticeler V_{j2} satırına yazılır.

İkinci faktördeki doygunlukları elde etmek için sırasıyla şu hesaplamaları yapmak gerekir:

$\Sigma\, u_2 v_{j2}$ toplamları bulunur. Bu neticenin karekökünün tersi alınır.

İkinci faktörün doygunluğu $a_{j2} = \frac{v_{j2}}{\sqrt{\Sigma u_2 a_{j2}}}$ formülüyle

hesaplanır. Bulunan değerler kalmtı matrisinin son satırına yazılır.

Bir sonraki ve takip eden diğer faktörleri hesaplamak için ikinci kalmtı matrisi oluşturulur ve ortak varyanslar tekrar hesaplanır ve ilk faktörün hesaplanmasında kullanılan yöntem tekrarlanır. Bu işlemler kalıntıların yeteri kadar küçük olduğuna karar verilinceye kadar devam edilir.

Esas eksenler metodunda döndürülmemiş faktör matrisindeki herhangi bir çift sütunun çapraz çarpımının toplamı sıfıra eşittir.

Değişik faktör sütunları için doygunlukların kareleri toplamı (Σa^2_{jr})'e eşit olmadığı zaman u satırındaki müteakip değerler, uzunlu birkaç denemede istenilen doğruluk derecesine yaklaşır.

Σa^2_{jr} değerlerine bilinmeyen kök denir [Latent roots] (2). Bu değerlerin hemen bilinmemesinden ötürüdür ki esas eksenlerin elde edilmesi epeyce zordur.

Köşegen üzerindeki ortak varyansların hesaplanması veya bilinmesi ile esas eksen faktörleri hesaplandıktan sonra, vektörler ileriki bölümlerde anlatılacak metotlara göre problemin anlamma uygun döndürmelerle yapılabilir. Bu metotla bir matris faktörize edilir ve bu anda elde edilen faktörlere esas bileşenler adı verilir (Principal Companents) ve korelasyon matrisinden başka skor matrislerini üretmekte kullanılır. Elde edilen esas bileşenlerin sayısı gözlemlerin sayısına eşittir.

Faktörlerin Diğer Çıkarılış Metotları :

Bu bölümde anlatılan faktör elde etme metotları geliştirilen birçok metotlardan birkaçıdır. Bu bölümde anlatılmayan teorik önemi olan ve kullanımda da faydalanılan metotlar şunlardır:

1) Grup — Merkez Metot: (Group-Centroid)

2) Basit Toplamlar Metodu: (Simple Summation)

3) Maksimum Benzetme Metodu: (Maximum Likelihood)

Grup — Merkez Metot, merkezde toplama metodu ile çoklu grup metot arasında bulunmaktadır. Hesaplamada basitlik sağlar, fakat etkili değildir.

Basit toplamlar metodu merkezde toplama metoduna benzer, fakat işlem açısından çok yönlü olduğundan pek kullanılmaz.

Maksimum benzerlik metodu, faktör doygunluklarını hesaplamada daha etkin çözümünü verir, fakat işlem açısından diğerlerine nispeten daha yüklü sayılır.

(2) A.G.E., Benjamin Fruchter, sayfa 104

Örnek Problem :

Esas eksenler metoduna ait işlemleri tanımladıktan sonra şimdi bir (4×4) korelasyon matrisi üzerinde bu işlemleri gösterelim.

R^4 MATRİSİ

1	9.8557	7.6651	6.5699	8.7601
2	7.6651	5.9618	5.1102	6.8135
3	6.5699	5.1102	4.3802	5.8402
4	8.7601	6.8135	5.8402	7.7869
Σ_3	32.8508	25.5506	21.9005	29.2007
U_3	1.000	0.7777	0.6666	0.8888
Σ_4	919.3028	715.0133	612.8685	817.1581
U^4	1.0000	0.77777	0.66666	0.88888
V_{j1}	2.29999	1.78888	1.53333	2.04444
a_{j1}	0.90000	0.70000	0.60000	0.80000

TABLO-3

$V_{j1} = RU$,

$\Sigma U_4 V = 6.53086$ $\sqrt{\Sigma U_4 V} = 2.5555$

$\frac{1}{\sqrt{\Sigma U_4 V}} = 0,39130$ Buradan $a_{j1} = \frac{V_{j1}}{\sqrt{\Sigma U_4 V_{j1}}}$ ifadesi

ile bulunur.

KORELASYON MATRİSİ

	1	2	3	4
2	0.60	0.50	0.44	0.57
3	0.48	0.44	0.40	0.50
4	0.69	0.57	0.50	0.65
Σ_1	1.77	2.11	1.82	2.41
U_1	1.00	0.79	0.68	0.90
Σ_2	6.205	4.831	4.143	5.521
U_2	1.000	0.778	0.667	0.889
1	0.00	0.60	0.48	0.69

TABLO — 1

R^2 MATRİSİ

	1	2	3	4
1	1.876	1.444	1.233	1.651
2	1.144	1.128	0.969	1.289
3	1.233	0.969	0.834	1.107
4	1.651	1.289	1.107	1.473
Σ_2	6.205	4.831	4.143	5.521
U_2	1.000	0.778	0.667	0.889
Σ_3	32.8508	25.5500	21.9005	29.2007
U^2	1.0000	0.7777	0.6666	0.8888

TABLO — 2

BİRİNCİ KALINTI KORELASYON MATRİSİ

	1	2	3	4
1	0.09	—0.03	—0.06	—0.03
2	—0.03	0.01	0.02	0.01
3	—0.06	0.02	0.04	0.02
4	—0.03	0.01	0.02	0.01
Σ_1	—0.03	0.01	0.02	0.01
U_1	1.00	—0.33	—0.67	—0.33
Σ_2	0.1500	—0.050	—0.100	—0.050
U_2	1.00	—0.3333	—0.6667	—0.3333
V_{j2}	0.150	—0.050	—0.100	—0.050
a_{j2}	0.3000	—0.100	—0.200	—0.100

TABLO — 4

$$\Sigma U_2 V = 0.2500$$

$$\sqrt{\Sigma U_2 V} = 0.50$$

$$\frac{1}{\sqrt{\Sigma U_2 V}} = 2.00 \qquad a_{j2} = \frac{V_{j2}}{\sqrt{\Sigma U_2 V}}$$ = formülüyle bulunur.

FAKTÖR DOYGUNLUKLARI

	I	II	h^2
1	0.90	0.30	0.90
2	0.70	—0.10	0.50
3	0.60	—0.20	0.40
4	0.80	—0.10	0.65
Σa^2	2.30	0.15	

TABLO — 5