DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

Ekonometrik (IVa) ve Matematiksel (IVb) Konular

FAKTÖRLERİN FAKTÖR ANALİZİNDE İNCELENMESİ (IVa_1)

Doç. Dr. Erol ÜÇDAL
İktisat Fak. Öğt. Üyesi

1.1. Faktörlerin Geometrik Gösterilişi :

Evvelâ gözlenen değişkenlerin gösterilmesinden bahsetmek gerekir. N birim içinde n tane farklı gözlem var ise n farklı gözlem n boyutlu uzayda gösterilebilir. Her gözlem koordinatları ile belirtildiği zaman uzayda bir noktaya tekabül eder. Buna göre her nokta bir birim ifade edeceği için N tane nokta uzayda yer alacaktır.

n boyutlu uzayda her noktanın n tane koordinatı bulunur. Bu koordinat değerleri gözlem değerleri ile ifade edilir.

Gözlemlerin diğer bir gösterilişi de vektörlerle olabilir. Şöyleki : Birim sayısı N uzayın boyut sayısı olarak alınırsa N boyutlu uzayda n gözlem için n tane vektör oluşturulur.

Gözlem matrisi şöyle olsun,

$$(x_{ij}) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \cdots & x_{1N} \\ x_{21} & x_{22} \cdots & x_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{nN} \end{pmatrix}$$

Matrisin her satırı bir vektördür. Böylece n satırda n tane vektör meydana getirilir. Bu vektörlerin cümlesi bir alt uzay oluşturur.

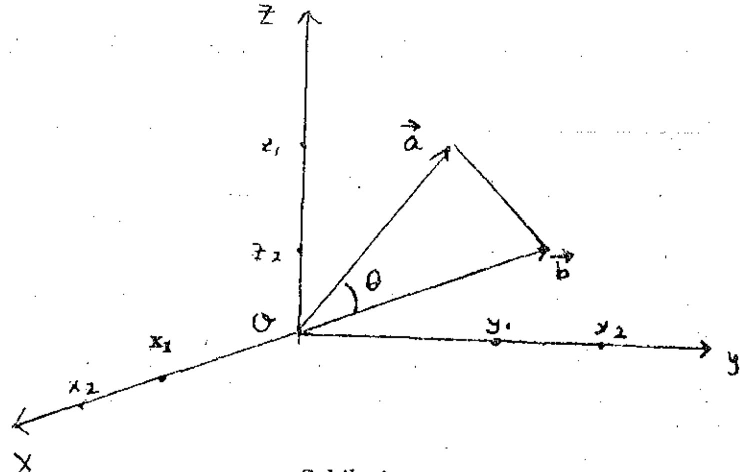
Bir vektörün norm'u; orijin ile vektörün bitiş noktası arasındaki uzunluğun karesidir.

$$\text{Norm } (x_j) = d^2 = \sum_{k=1}^{M} x_{jk}^2 = N\,\sigma_j^2 \qquad (1)$$

İki vektör arasındaki açı:

Üç boyutlu uzayda iki tane a ve b vektörleri alalım:

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1) \quad \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$$



Şekil: 1.

a ile b vektörü arasındaki açı θ ise bu iki vektörün orijinle meydana getirdiği üçgene kosinüs teoremi uygulanacak olursa,

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a}-\vec{b}|^2}{2|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$

θ açısı bu tarzda bulunabilir.

Ayrıca iki vektörün skaler çarpımındaki aradaki θ açısını bulmak mümkündür.

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} \quad \text{dür.}$$

N boyutlu uzayda verilecek iki vektör x_j ve x'_j ise ve arasındaki açı 0 ve uzunluğu d_j, d'_j ise

(1) Mathematical Tools for Applied Multivariate Analysis Paul E. Green and J. Douglas Carrol s. 93.

$$\text{Cos } \theta = \frac{\Sigma x_j x'_j}{d_j d'_j} = \frac{\Sigma x_j x'_j}{N\sigma_j \sigma'_j} \qquad \text{olur.}$$

N boyutlu uzaydan n vektör yarı çapı $\sqrt{N}$ olan küre üzerinde bulunur.

1.2. *Faktör Uzayı :*

Ortak Faktör adedi m sayıda olan bir modelde n gözlem yapılmış ise faktörlerin her gözlemdeki sayısı (m+n) olur. Faktörleri m boyutlu uzayda gösterebileceğimiz gibi gözlem sayısına eşit boyut (n boyutlu) bir uzayda da gösterilebilir. Ayrıca bu faktörler birim sayısı N olan bir modelde N boyutlu uzayda da gösterilebilir.

Faktör sayısı herbir gözlem için (m+1) adettir. Faktör sayısı gözönünde tutularak seçilecek uzayın (m+1) boyutta olması en iyi bir seçim tarzıdır.

Eğer Faktörlere tekabül eden vektörler ortogonal ise ve faktör uzayı (m+1) boyutlu ve bu vektörlerin normları

$$\text{norm}(\vec{x}'_j) = \sum_{k=1}^{m} a^2_{jk} + a^2_j = 1$$

$\vec{x}_j$ ile $\vec{x}'_j$ vektörleri arasındaki açı θ olduğuna göre

$$\text{Cos } \theta = \frac{\Sigma a_{jk} a_{j'k}}{d_j d_{j'}}$$

Sadece m tane ortak faktör düşünülürse vektörün norm'u ortak varyansa eşit olur.

$$\text{norm} \quad (\vec{x'_j}) = \sum_{k=1}^{M} a^2_{jk} = h^2_j$$

Netice olarak vektör uzayının gösterilişi n, N, (m+n), m boyutlu olabilir. Bu uzaylar birbirlerinin alt uzayları olduklarından hepsini ayni uzay gibi düşünebiliriz.

Bu uzaylardan birinden diğerine geçişler rotasyon veya projeksiyon işlemleri ile mümkündür.

1.3. *Faktörlerin Matrislerle Gösterilişi :*

N tane birim ve her birim için n tane gözlem değeri yapıldığını düşünelim. Buna göre (x_{ij}) gözlem değerleride i indisi n gözlemi j indisi N birimi ihtiva eder.

(x_{ij}) matrisinin gösterilişi

$$(x_{ij}) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1N} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nN} \end{pmatrix}$$

Bu matrisin transpozesini $(x_{ij})'$ ile gösterelim

$$(x_{ij})' = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{1N} & x_{2N} & & x_{nN} \end{pmatrix}$$

$$(x_{ij}).(x_{ij})' = \begin{pmatrix} \Sigma x_{1i}^2 & \cdots\cdots\cdots\cdots & \Sigma x_{1i}\, x_{ni} \\ \Sigma x_{2i} x_{1i} & \cdots\cdots\cdots & \Sigma x_{2i} x_{ni} \\ \vdots & & \\ \Sigma x_{ni} x_{1i} & \cdots\cdots\cdots & \Sigma x_{ni}^2 \end{pmatrix}$$

$$(r_{ij}') = N^{-1} (x_{ij}) (x_{ij})'$$

$$(r_{ij}') = \begin{pmatrix} h_1^2 & r'_{12} & r'_{13} & \cdots & r'_{1n} \\ r'_{21} & h_2^2 & r'_{23} & \cdots & r'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ r'_{n1} & r'_{n2} & & & h_n^2 \end{pmatrix}$$

$$(r'_{jj'}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{13m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jm} \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & & a_{mm} \end{pmatrix}$$

Buradan elde edilecek matris doygunluk (yük) matrisidir.

Faktör Analizindeki esas çözülecek problem n gözlem sonucundan bulunan değerlerin mümkün mertebe sınırlı sayıda ortak faktörlerle belirtilmesidir. Burada doygunluklardan itibaren korelasyon matrisini düzenlemek Faktör Analizi için iyi bir kontrol olacaktır.

Korelasyon matrisi 2 farklı korelasyon matrisi halinde düzenlenebilir. Bunlardan 1 incisi gözleme dayanan diğeri ise Teorik verilere göre düzenlenen matrislerdir.

$(r_{ij}) = N^{-1} (x_{ji}) (x_{ji})'$ (Gözlem değerlerine göre düzenlenmiş)

$(r_{ji}) = (a_{jk}) (a_{jk})'$ (Teorik verilere göre düzenlenmiş)

Buradan bulunan iki değer arasındaki fark korelasyon kalıntılarını verir.

Gözlem değerleri m ortak faktör ve n tek faktör ile ifade edilebiliyorsa toplam faktör sayısı (m+n) tane olup elde edilen (x_{ji}) matrisi tekil olmıyan bir matrisdir. Bu matrisin satır sayısı n tane olup rank'ı n'e eşittir. Diğer yandan teorik değerlerden elde edilen (r'_{ji}) matrisinin rank'ı m'e eşit olacaktır.

Burada $m < n$ dir.

Bulunan sonucu ortak faktör modeli içinde matris gösteriliş olarak şöyle gösterebiliriz.

$$(x''_{ji}) = (a_{ji}) (y_{kj})$$

(x''_{ji}) matrisi ortak faktörlerden oluşan matristir. Bu matrisin rank'ı m'e eşittir. Yani m satır bağımsızdır. Matrisin rank'ı m olmadığı durumlarda ayarlamalarla (m+1) ci mertebeden minörleri sıfır yapacak matrisin rank'ını m yapmak gerekir. Denklem sistemlerinin çözümünde çözümün var olabilmesi için ortak faktör sayısı ve gözlem sayısının eşit olması gerekir. Bu da her zaman gerçekleşmeyebilir. Bu takdirde belirsizlik söz konusu olur ve çözümün bulunması da denklem sisteminin katsayılar matrisinin rank'ını gözönünde bulundurmak ve ona göre keyfi seçilecek bilinmiyen adedini saptamak gerekir.

1.4. *Ortak Faktörler Uzayı :*

Değişkenlerin meydana getirdiği çokboyutlu uzaylardan ortak faktör uzayına geçiş daha az boyutlu uzaylara (sınırlı boyutlu) izdüşürmekle olur.

x_{ji} gözlem değerleri normal ve tek faktörlerden arındırılmış olsun. (x''_{ji}) doygunluk matrisi ile verilmişse bunların mertebesi $(n \times N)$ dir. Rank'ı ise farklıdır.

$$(x''_{ji}) = (a_{jk}) \; (y_{ki})'$$

(x_{ji}) matrisinin rank'ı n ise (x''_{ji}) matrisinde bağımsız değişken m tane olduğu için rank'ı m dir.

Faktör analizinde hareket noktası olarak (x_{ji}) gözlem matrisinden hareketle gözlem korelasyon matrisi (r_{ij}') elde edilir. Bu korelasyon matrisinde esas köşegen üzerine h^2_j değerleri yerleştirilir. Bununda sebebi hesaplanan teorik korelasyon matrisi önce h^2_j (ortak varyanslar) ve sonra doygunlukları tahmin etmeye yardım etmesi içindir. Bu takdirde tam faktör modeli oluşturulur.

Bu tahminlerin yapılabilme problemini çözümlemek için 2 yol düşünülebilir:

1) Ortak Faktör sayısının önceden bilinmesi veya ortak faktör sayısını önceden saptamak. Bunu yapabilmek için m tane bağımsız değişkene haiz bir modelde meydana gelen matrisin m'den fazla mertebeli minörlerin sıfır olmasını gerektirir. Böylece ortak varyansların tahmini için denklemler elde edilir. Misal olarak Spearman ortak faktör sayısını, önceden $m = 1$ olarak saptamış ve buna göre bulmuştur.

2) Ortak faktörlerin önceden koşulları belirtilmez, fakat tek faktörlerin bulunduğu ifadelerde değerlerin maksimum olması aranır. Burada da güdülen gaye Faktör analizinde değişkenlerin ortak faktör sayısını mümkün olduğu kadar küçük tutmaktır. Buda ortak faktör matrisinin daha önce belirlenen gözlem matrisinin rank'ından daha küçük olmasının sağlanmasıyla mümkün olabilir.

1.5. *Ortak Faktörlerin Sayısının Bilinmesi Halinde Varlık Koşulları :*

a) Bir Ortak Faktör olma durumu :

n tane gözlem değişkenlerinden elde edilen teorik korelasyon matrisi

$$
(r_{jj'}) = \begin{pmatrix} h_1^2 & r_{12} & \cdots & r_{1j'} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ r_{j1} & r_{j2} & \cdots & r_{jj'} & \cdots & r_{jn} \\ \vdots & & & & & \\ r_{n1} & r_{n2} & & r_{nj'} & \cdots & h_n^2 \end{pmatrix}
$$

Bu matriste ikinci mertebeden bütün minörler sıfır olmalıdır. Burada 3 tip minör oluşur.

1 ci tip minörde ortak Varyans yoktur.

$$
\begin{vmatrix} r_{12} & r_{14} \\ r_{32} & r_{34} \end{vmatrix} = 0
$$

Bu determinantın açmımmda $r_{12}\, r_{34} - r_{14}\, r_{32} = 0$ olur. Buradan ortak varyans tahmini yapılamaz. (dörtlü gruplar)

2 ci tip minörde bir ortak varyans var ise

$$
\begin{vmatrix} h_1^2 & r_{14} \\ r_{31} & r_{34} \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} r_{3j'} & r_{3n} \\ r_{nj'} & h_n^2 \end{vmatrix} = 0
$$

$$
h_1^2 . r_{34} - r_{14} . r_{31} = 0 \qquad r_{3j'} . h_n^2 - r_{3n} . r_{nj'} = 0
$$

Bu durumda ortak varyans tahmini yapılır.

$$
h_1^2 = \frac{r_{31} r_{14}}{r_{34}} \qquad h_n^2 = \frac{r_{3n}\, r_{nj'}}{r_{3j'}}
$$

Ayni ortak varyans için çeşitli gruplar ile tahmin yapılabilir. (3. lü gruplar)

(n—1) değişken için grup sayısı,

$$\upsilon = C^{2}_{n-1} - 1 = \frac{n\,(n\text{-}3)}{2}$$

bu ifade ile bulunabilir(2).

3 cü tip olarak iki ortak varyans var ise

$$\begin{vmatrix} h_1^2 & r_{13} \\ r_{31} & h_3^2 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} h_j^2 & r_{3n} \\ r_{nj} & h_n^2 \end{vmatrix} = 0$$

Burada da varyans tahmini yapmak herhangi bir varyansm bilinmesiyle mümkündür.

b) m Ortak Faktör hali :

n tane değişken için n tane özgül faktör mevcuttur. Burada koşulların belirlenmesi, yani m ortak faktörün mevcut olabilmesi için tek faktörde takip ettiğimiz yoldan farklı bir yol izlenmez.

Burada (m+1) ci mertebeden minörlerin sıfır olması gereklidir. Tek faktörde elde ettiğimiz 2 nci mertebe minörlerine göre yapılan varyans tahminleri gibi (m+1) ci mertebe minörlerinden elde edilen determinantları sıfır yaparak varyansm tahmin edilip edilemiyeceği koşullar elde edilir.

---

(2) A.E.G. Harry, H. Harman s. 84.