ERCIYES JOURNAL OF EDUCATION (EJE)
2019, VOL. 3 NO. 2, 105-122
http://dergipark.org.tr/eje

The Relationship of Visual Proof Skills with van Hiele Levels of Geometric Thinking and Spatial Ability

Kübra Polat[1]

Sivas Cumhuriyet University and Faculty of Education

Gülçin Oflaz[2]

Sivas Cumhuriyet University and Faculty of Education

Levent Akgün[3]

Atatürk University and Kazım Karabekir Faculty of Education

ABSTRACT

In mathematics the process of visualization requires the process of forming and manipulating images to explore and understand. Indeed, according to mathematicians, it is difficult to understand without visualization. There is consensus that visual proofs are important tools in mathematics education. However, there is no consensus on the effects of the visualization on proof. Therefore, this study aims to reveal the relationship between van Hiele levels of geometric thinking, spatial ability and visual proofs. In this study, relational survey method is used. The study is conducted on 85 pre-service elementary mathematics teachers studying in the Faculty of Education at a public university located in Turkey. The data is analyzed via Spearman correlation. In the study, it was seen that most of the elementary mathematics teachers were at the 3rd level of van Hiele's geometric thinking. Another result is that there is a significant relationship between van Hiele's level of geometric thinking and visual proof skills. However, there is no significant relationship between visual proof skills and spatial ability. The relationship between visual proofs skills and spatial ability can be investigated deeply with qualitative research. Moreover, experimental studies can be done to investigate the effect of training on visual proofs on the level of van Hiele geometric thinking.

Keywords: Visual proof, proof without words, van Hiele geometric thinking level, spatial thinking.

Erciyes University, Faculty of Education, Kayseri/TURKEY
Erciyes Journal of Education (EJE)
DOI: 10.32433/eje.604126

SCREENED BY iThenticate Professional Plagiarism Prevention

Type: Research

Article History
Received : 08.08.2019
Accepted : 02.10.2019
Published : 26.10.2019

Suggested Citation

Polat, K., Oflaz, G. & Akgün, L. (2019). The relationship of visual proof skills with van Hiele levels of geometric thinking and spatial ability. *Erciyes Journal of Education*, *3*(2), 105-122. DOI: 10.32433/eje.604126

1. Dr., Department of Mathematics and Science Education, kubraapolaat@hotmail.com.tr, https://orcid.org/0000-0002-1435-1771
2. Assist. Prof. Dr., Department of Mathematics and Science Education, erengulcin3@hotmail.com, https://orcid.org/0000-0002-5577-712
3. Assoc. Prof. Dr., Department of Mathematics and Science Education, levakgun@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-1435-1771

ERCIYES JOURNAL OF EDUCATION (EJE)
2019, VOL. 3 NO. 2, 105-122
http://dergipark.org.tr/eje

Görsel İspat Becerisinin, van Hiele Geometrik Düşünme Düzeyleri ve Uzamsal Yetenek ile İlişkisi

Kübra Polat[1]

Sivas Cumhuriyet Üniversitesi, Eğitim Fakültesi

Gülçin Oflaz[2]

Sivas Cumhuriyet Üniversitesi, Eğitim Fakültesi

Levent Akgün[3]

Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi

ÖZET

Matematikte görselleştirme süreci, araştırmak, keşfetmek ve anlamak için, zihinsel olarak görüntü oluşturma ve manipüle etme sürecini gerektirir. Nitekim matematikçilere göre görselleştirme olmadan anlamanın gerçekleşmesi zordur. Görsel temsillerin kullanıldığı görsel ispatların matematik eğitiminde önemli araçlar olmalarıyla ilgili fikir birliği vardır. Ancak görselleştirmenin ispat üzerinde etkileri hususunda fikir birliği yoktur. Dolayısıyla bu çalışma ile van Hiele geometrik düşünme düzeylerinin ve uzamsal düşünmenin görsel ispatlarla ilişkisini ortaya koymak amaçlanmaktadır. Çalışmada korelasyonel araştırma yöntemi kullanılmıştır. Bu çalışma Türkiye'de bir devlet Üniversitesi'nde İlköğretim Matematik Öğretmenliğinde öğrenim gören 85 öğretmen adayıyla yürütülmüştür. Verilerin analizi için Spearman korelasyon katsayısına bakılmıştır. Çalışmada ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının van Hiele geometrik düşünme düzeylerinin 3. düzeyde yoğunlaştığı görülmüştür. Ortaya çıkan sonuçlardan bir diğeri van Hiele geometrik düşünme düzeyi ve görsel ispat becerisi arasında anlamlı bir ilişki olmasıdır. Buna karşın görsel ispat becerisi ve uzamsal yetenek arasında anlamlı bir ilişki bulunamamıştır. Görsel ispatlar ile uzamsal yetenek arasındaki ilişkinin derinlemesine incelenmesi için uzamsal yetenek gerektiren görsel ispatların yer aldığı nitel çalışmalar ve görsel ispatlar ile ilgili eğitimin van Hiele geometrik düşünme düzeyine etkisini araştırmak için deneysel çalışmalar yapılabilir.

Anahtar Kelimeler: Görsel ispat, sözsüz ispat, van Hiele geometrik düşünme düzeyleri, uzamsal düşünme

Erciyes Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Kayseri/TÜRKİYE
Erciyes Journal of Education (EJE)
DOI: 10.32433/eje.604126

SCREENED BY iThenticate Professional Plagiarism Prevention

Tür: Araştırma

Makale Geçmişi
Gönderim : 08.08.2019
Kabul : 02.10.2019
Yayınlanma : 26.10.2019

Önerilen Atıf

Polat, K., Oflaz, G. & Akgün, L. (2019). Görsel ispat becerisinin, van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ve uzamsal yetenek ile ilişkisi. *Erciyes Eğitim Dergisi*, *3*(2), 105-122. DOI: 10.32433/eje.604126

1. Dr., Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, kubraapolaat@hotmail.com.tr, https://orcid.org/0000-0001-8060-0732
2. Dr. Öğr. Üyesi., Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, erengulcin3@hotmail.com, https://orcid.org/0000-0002-5577-712X
3. Doç. Dr., Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, levakgun@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-1435-1771

Erciyes Journal of Education 2019, Vol 3, No 2, 105-122

EXTENDED ABSTRACT

Introduction

In mathematics the process of visualisation requires the process of forming and manipulating images to explore and understand. The aim of visualization is creating concrete images of abstract mathematical objects and concepts (Jones, 2001). There are discussions about whether a visual proof is a real proof. Despite these discussions there is consensus that visual proofs are important tools in mathematics education (Alsina & Nelsen, 2010; Bardelle, 2009; Bell, 2011; Gierdien, 2007; Miller, 2012; Nelsen, 1993). According to Lean and Clements (1981) a relationship exists between visualization and spatial ability. Thus there are studies to reveal the relationship between spatial ability and problem solving and visualization (Guay & McDaniel, 1977; Lean & Clements, 1981). However, according to Hanna and Sidoli (2007) there is no consensus on the effects of the visualization on proof. Therefore, this study aims to reveal the relationship between van Hiele levels of geometric thinking, spatial ability and visual proofs.

Visual proofs are diagrams or pictures that will help us to see why a specific mathematical expression is correct and even how we can handle while proving the accuracy of a mathematical expression (Nelsen, 1993). There are rotation, three-dimensional thinking and translation in visual proofs. Visual proofs have positive effects on proof skills and these proofs require visual reasoning so it is important to reveal the relationship between spatial ability, van Hiele geometry thinking levels and visual proofs.

Dina van Hiele-Geldof and Pierre Marie van Hiele developed a theory explaining the levels of geometrical thinking. The Van Hiele theory guides of geometry (Gutierrez & Jaime, 1999; Sezen Yüksel, 2017). The van Hiele model describes levels of geometric thinking that prepare the students for formal proof-writing. According to this theory, student geometric thought can be classified into five levels. These levels are visualization, analysis, abstraction, deduction, rigor. This research addresses the following questions:

- What are spatial ability, van Hiele geometric thinking levels and visual proof skills of pre-service elementary mathematics teachers?
- What is the relationship between pre-service elementary mathematics teachers' Van Hiele geometric thinking levels and visual proof solving skills?
- What is the relationship between pre-service elementary mathematics teachers' spatial ability and visual proof solving skills?

Method

In this study the relationship between van Hiele levels of geometric thinking, spatial ability and visual proofs were tried to reveal. In this study, relational survey method is used. The study is conducted on 85 pre-service elementary mathematics teachers studying in the Faculty of Education at a public university located in Turkey. The data collection tools of the study were the van Hiele geometry test which is developed by Usiskin (1982) and translated into Turkish by Duatepe (2000), the spatial visualization test which is developed by Sezen Yüksel (2017) and visual proof test which is developed by Polat (2018). SPSS 17.00 was the packet programme used for analyzing the data. In order to check the normality, the Kolmogorov-Smirnov normality test

Erciyes Journal of Education 2019, Vol 3, No 2, 105-122

was used. In visual proof test the distribution is accepted as normally distributed while the significant level is greater than .05 but in spatial visuality test the distribution is accepted as non-normally while the significant level is not greater than .05. If we wanted to calculate between variables, we would look Pearson, Spearman and Kendall's Tau correlation coefficient. Pearson correlation coefficient requires that the data are interval and normally; Spearman correlation coefficient is a non-parametric statistic and so can be used for non-normally data; Kendall's Tau is non-parametric correlation and you can use if you have small data (Field, 2009). In this study the data is analyzed via Spearman correlation.

Findings

Based on analyze the geometry thinking level of pre-service mathematics teachers using Van Hiele Geometry Test, 2 (2%) pre-service mathematics teachers were included in the level 1 (visualization), 13 (15%) pre-service mathematics teachers level 2 (analysis), 37 (44%) pre-service mathematics teachers level 3 (informal deduction), 25 (29%) pre-service mathematics teachers level 4 (deduction) and 8 (10%) pre-service mathematics teachers level 5 (rigor) were categorized. So it can be said 52 (61%) pre-service mathematics teachers are under the deduction level. This means that 17% of pre-service teachers can recognize the geometric figures and the relationship between them, %44 of pre-service teachers can reason informally, 39% of them can prove mathematical statement.

According to Spearman correlation coefficient (r_s=.344; p=.001) the results of the study indicated that there is relation between van Hiele geometric thinking levels and visual proof skills. But according to Spearman correlation coefficient (r_s=.162; p=.139) there is no relation between spatial ability and visual proof skills.

Discussion & Conclusion

In this study most of pre-service elementary mathematics teachers were at level 3. Similar results were seen in the study Oral and İlhan (2012). In the study of Kaleli Yılmaz and Koparan (2016) the geometry thinking level of 40% of pre-service mathematics teachers were at the level 1 and 30% of pre-service mathematics teachers were at level 3. Also there was no pre-service teacher at level 5. So it can be said that pre-service teachers are not at the level required to do proof. The students below level 3 should not be able to do proofs (Senkl, 1989). According to Gutierrez and Jaime (1998) the students in level 4 can do proof with different proof methods.

One of the results of this study there is relation between van Hiele geometric thinking levels and visual proof skills. This result is not surprising. Thus according to research there is relation proof and van Hiele geometric thinking levels (Çoşkun, 2009; Fuys, Geddes, Tischler, 1988; Jupri, 2018; Senk, 1989; Usiskin, 1982). In this study there is no relation between visual proof skills and spatial ability. In fact, this result is contrary to expectations. Because the researches refer to the relation between visual proof and spatial ability (Cain, 2019; Lam, 2007). There are rotation, three-dimensional thinking and translation in visual proofs. According to Demircioğlu and Polat (2016) visual proofs force the students but they have potential to develop spatial reasoning. So the relationship between visual proofs skills and spatial ability can be investigated deeply with qualitative research. Also experimental studies can be done to investigate the effect of training on visual proofs on the level of van Hiele geometric thinking.

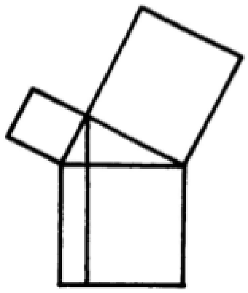
Erciyes Journal of Education 2019, Vol 3, No 2, 105-122

GİRİŞ

Görselleştirme matematiğin önemli kavramlarından biridir. Görselleştirme ile ilgili tanımlar incelendiğinde, görselleştirmenin hem süreç hem de ürün olarak değerlendirildiği görülmektedir. Nitekim Arcavi'e (2003) göre, görselleştirme zihnimizdeki resim, diyagram veya imajların yansıması yönüyle bir ürün; bunların yorumlanması, bilinmeyen fikirler hakkında düşünebilmeyi sağlaması ve var olan fikirleri geliştirmesi yönüyle ise bir süreçtir. Hershkowitz'e (1989) göre ise görsel bilgileri temsil etme, dönüştürme, yaratma, belgeleme ve görsel bilginin yansıtılması yeteneğidir. Giaquinto'a (2007) göre ise matematiksel bir fikri iletmek, açıklamak ve keşfetmek için iyi bir araçtır. Bu nedenle matematik konularının görselleştirmeyle birlikte sunulması ile ilgili araştırmalar yapılmaktadır (Duval, 1999; Flores, 2000; Hanna & Sidoli, 2007). Esasında son yıllarda matematikte görselleştirmeye verilen önem artmıştır. Nitekim Şan (2012) görselleştirmeye 20. yüzyıla kadar aldatıcı ve güvenilmez gözüyle bakıldığını ancak 2000'li yıllarda matematik eğitimcilerinin aldıkları kararlarla görselleştirme lehine tutumlar oluşmaya başlandığını belirtmiştir. Flores (2000) görsel sunumların soyut kavramlara somutluk kazandırdığını ifade etmektedir. Ayrıca matematikte görselleştirme süreci; araştırmak, keşfetmek ve anlamak için, zihinsel olarak görüntü oluşturma ve manipüle etme sürecini gerektirir ve matematiksel görselleştirmenin amacı, birçok matematik alanı için etkili görselleştirme araçları sunmak ve böylece soyut matematiksel nesnelerin ve kavramların somut deneyimlerini yaratmaktır. Dolayısıyla görselleştirme soyut imgeler için somut araç sağladığından uzamsal akıl yürütme için elzemdir (Jones, 2001). Görselleştirme; farklı öğrenme stillerine önem verilmesi, problem çözmek için basit, şık ve güçlü yaklaşımlar sunması ve matematiğin farklı alanları arasında bağlantı kurabilmesinden dolayı önemlidir (Thornton, 2001).

Lean ve Clements'e (1981) göre görselleştirme ve uzamsal yetenek ilişkilidir. Uzamsal görselleştirme, uzamsal yeteneğin bir alt bileşeni olarak görülmekte olup iki ve üç boyutlu cisimlerin zihinde manipülasyonunu gerektirmektedir (Olkun & Altun, 2003). Dolayısıyla iki boyutlu gösterimlerden üç boyutlu gösterimlere geçebilmenin ve cisimlerin farklı bağlamlardaki görüntülerini zihinde canlandırabilmenin uzamsal yetenek ile ilişkili olduğu söylenebilir. Nitekim Velez, Silver, Tremaine (2005) uzamsal yeteneğin görsel anlamaya etkisi olduğunu belirtmişlerdir. Ayrıca uzamsal yetenek ile problem çözme ve görsellik arasındaki ilişkileri ortaya çıkarmak üzere yapılan çalışmalar mevcuttur (Guay & McDaniel, 1977; Lean & Clements, 1981). Ancak görselleştirmenin ispat üzerinde etkileri hususunda fikir birliği henüz yoktur (Hanna & Sidoli, 2007).

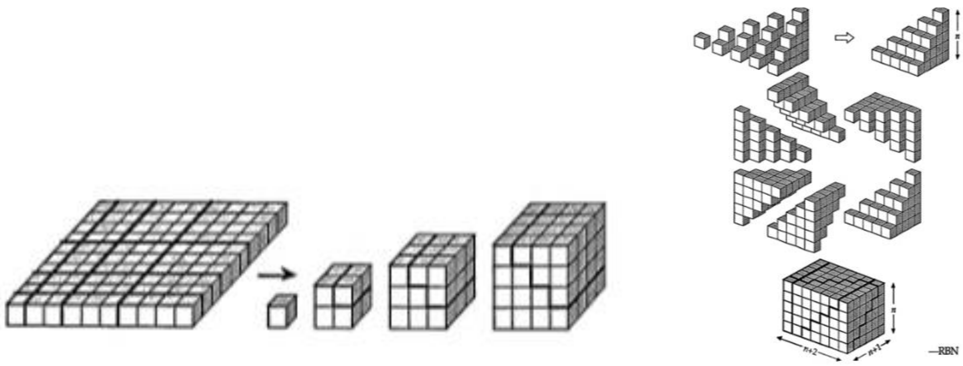
Görsel temsillerin kullanıldığı, sözsüz ispatlar olarak da ifade edilen (Polat & Demircioğlu, 2016) görsel ispatların formal ya da gerçek ispatlar olup olmadığıyla ilgili tartışmalar sürmektedir. Örneğin Fishbein (2002) Pisagor teoreminin Şekil 1'de verilmiş görseli için, teoremin ve ispatın sezgisel şekilde anlaşılmasını sağlayamayacağını belirtmiştir. Çünkü Fishbein'e (2002) göre sezgisel bilgi görsel temsille tanımlanır ancak görsel temsil kendi başına sezgisel bir bilgi değildir. Bu tartışmalara rağmen görsel ispatların matematik eğitiminde önemli araçlar olmalarıyla ilgili fikir birliği vardır (Alsina ve Nelsen, 2010; Bardelle, 2009; Bell, 2011; Gierdien, 2007; Miller, 2012; Nelsen, 1993).



Şekil 1. *Pisagor teoremi*

Gierdien (2007) görsel ispatları matematiksel bir fikrin ya da teoremin gösteriminde görsel sunumların kullanılması olarak tanımlarken; Alsina ve Nelsen (2010) matematiksel bir ifadenin niçin doğru olduğunu görmemizi sağlayan, hatta teoremin ispatını görselleştiren diyagramlar olarak tanımlamaktadırlar. Matematiksel fikirleri farklı sunuşlar aracılığıyla ilişkilendirmede önemli araçlar olan görsel ispatlar, formüllerin geometrik yorumunu ve şekillerin cebirsel yorumunu yapabilmeye yardımcı olmaktadır (Gierdien, 2007).

Görsel ispatlarda zihinde döndürme, üç boyutlu düşünme ve öteleme kullanılmaktadır. Şekil 2'de görüldüğü üzere bazı görsel ispatlarda üç boyutlu görseller kullanılmaktadır ve bu ispatlar yapılandırılırken bu görsellerin zihinde döndürülmesi, birleştirilmesi ya da parçalara bölünmesi gerekmektedir. Dolayısıyla özellikle üç boyutlu görsellerin kullanıldığı görsel ispatların uzamsal yetenek ile ilişkisinden söz edilebilir. Çünkü uzamsal yetenek 2 ve 3 boyutlu cisimlerin zihinde manipülasyonunu gerektirmektedir.



Şekil 2. *Üç boyutlu görsellerin kullanıldığı görsel ispatlar (Nelsen, 1993)*

Jones (2001) sözel akıl yürütmenin ve uzamsal akıl yürütmenin, akıl yürütmede yaygın iki yöntem olduğunu belirtmiş ve sözel akıl yürütmeyi; sembollerin anlamlı cümlelerle birleştirilmesiyle düşüncelerin şekillenme süreci olarak, uzamsal akıl yürütmeyi ise; nesneler arasındaki uzamsal ilişkiler aracılığıyla düşüncelerin şekillenme süreci olarak tanımlamış ve çoğu matematikçinin matematiksel ilişkileri görselleştirirken uzamsal yeteneklerini kullandıklarını belirtmiştir. Dolayısıyla uzamsal akıl yürütmenin, matematik ve matematik eğitimi için önemli olduğu söylenebilir. Nitekim Karaman ve Yontar Toğrol (2010) uzamsal düşünmenin, matematik başarısında önemli bir yere sahip olduğunu ve uzamsal yetenek ve matematik başarısı arasında pozitif ilişki bulunduğunu ifade etmişlerdir.

Erciyes Journal of Education 2019, Vol 3, No 2, 105-122

Uzamsal yetenek Linn ve Petersen (1985) tarafından uzamsal algı, uzamsal görselleştirme ve zihinsel rotasyon olmak üzere üç kategoride incelenmiştir. Uzamsal algı; dikkat dağıtıcı bilgilere rağmen uzamsal ilişkileri belirlemeyi gerektirir. Zihinsel rotasyon, bir nesnenin fiziksel rotasyonuna benzer bir bilişsel süreç olarak ortaya çıkmakta olup, hareket esnasında nesnenin pozisyonlarını belirleyebilme ile ilgilidir. Uzamsal görselleştirme ise, zihinsel rotasyondan ayrı olup uzamsal olarak sunulan bilgilerin karmaşık ve çok aşamalı manipülasyonlarını içermekte ve statik bilgileri dinamik bilgilere dönüştürerek doğru cevaba ulaşmayı sağlamaktadır. Olkun ve Altun (2003) uzamsal düşünmeyi nesnelere ait görüntülerde zihinsel oynamalar yapabilme olarak ifade etmişler ve farklı görüşler olmasına rağmen uzamsal düşünme ile matematiksel düşünme arasında güçlü bir ilişki olduğunu belirtmişlerdir. Nitekim matematiği öğrenmek için görsel muhakeme ile yeni araçların geliştirilmesi gerektiği düşünülmektedir (Karrass, 2012). Görsel muhakeme matematik eğitiminde yeni bir araştırma alanı olarak ifade edilse de matematik tarihindeki pek çok gelişme görselleştirme ile bağlantılıdır. Pek çok teoremin ispatında diyagramlar kullanılmıştır (Borwein ve Jörgenson, 2002). Çoğu araştırmacı görselleştirmenin matematiksel ispatlara katkılarını araştırmış (Bardelle, 2010) ve ispat ile görsel unsurları birleştirmenin ispatın daha iyi anlaşılmasına sebep olduğunu belirtmişlerdir (Uğurel, Moralı, Karahan, Boz, 2016).

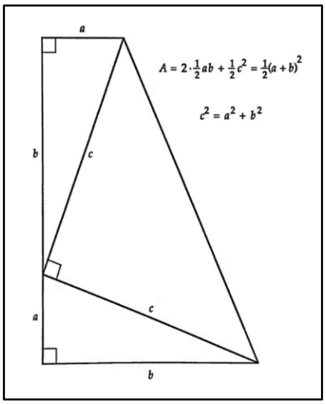
Van Hiele Geometrik Düşünme Düzeyleri

Hollandalı matematik eğitimcileri Pierre van Hiele ve Dina van Hiele Geldof tarafından ortaya konulan van Hiele teorisi, öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerini ortaya koyan bir modeldir. Van Hiele teorisi geometriye yön veren bir kuram haline gelmiştir (Gutierrez & Jaime, 1999). Bu kuram ile ilgili olarak öğrenci, öğretmen ve öğretmen adaylarının van Hiele geometrik düşünme düzeylerinin ortaya çıkarılmasına yönelik (Kaleli Yılmaz ve Koparan, 2016; Kurtuluş ve Akay, 2017; Oral ve İlhan, 2012; Şahin, 2008), van Hiele geometrik düşünme düzeylerin iyileştirilmesine yönelik (Toluk, Olkun ve Durmuş, 2002), van Hiele geometrik düşünme düzeylerinin çeşitli değişkenlerle ve ispatla ilişkisini ortaya koymaya yönelik (Çoşkun, 2009; Jupri, 2018; Karrass, 2012; Senkl, 1989;) olmak üzere pek çok çalışma yapılmıştır. Karrass (2012) matematik öğretmen adaylarına görsel ispatlar vermiş ve bu ispatları yapan öğretmen adaylarının görsel akıl yürütmeleri, uzamsal yetenekleri ve van Hiele düzeyleri arasında ilişki olup olmadığını incelemiştir. Senk (1989) ise ispat ve van Hiele geometrik düşünme düzeyleri arasındaki ilişkiye yönelik çalışma yapmıştır. Pusey'e (2003) göre van Hiele modeli, öğrencilerin formal ispat yapabilmek için geometrik akıl yürütme düzeylerini açıklayan bir modeldir. Teoriye göre geometrik düşünme; görselleştirme, analiz, mantıksal çıkarım öncesi, mantıksal çıkarım ve son düzey olmak üzere 5 düzeydir. Bu düzeyler görsel ispat ile ilişkilendirilerek sunulmaya çalışılmıştır.

Görsel ispatlarda matematiksel ifade veya teorem bir görselle sunulmaktadır. Teoremin anlaşılması için verilen görsel açıklanmalıdır. Öğrenenler verilen görselde görmüş oldukları geometrik şekilleri herhangi bir ilişki kurmaksızın sadece hangi geometrik şekiller olduğunu söylüyorlarsa birinci düzeyde oldukları söylenebilir. Nitekim van de Walle, Karp, Bay-Williams'ye (2014) göre birinci düzeyde öğrenen şekilleri tanır ve adlandırabilir. İkinci düzey olan analiz düzeyinde, bireyler şekilleri oluşturan parçalar arasındaki ilişkiyi fark edebilir ve şekilleri özelliklerine göre sınıflandırabilir (Fuys ve diğerleri, 1988). Bu aşamada öğrenen, şekli oluşturan parçalar arasındaki ilişkiyi ortaya koyabiliyorsa şekle dair analizi doğru biçimde yapabilmiştir. Örneğin Şekil 3'te verilen Pisagor teoremine ait görsel ispatta, öğrenenin görsele

Erciyes Journal of Education 2019, Vol 3, No 2, 105-122

dair açıklama yaparken sadece üçgenleri ve yamuğu fark edebilmesi görselleştirme düzeyiyken; üçgenlerinin bir araya gelmesiyle yamuk oluşması arasında ilişki kurabilmesi analiz düzeyindedir.



Şekil 3. *Pisagor teoremine ait görsel ispat (Nelsen, 1993)*

İnformal çıkarım düzeyindeki öğrenciler, gözlemlerin ötesine giderek argümanlar ortaya koyabilirler ve daha önceden kavradıkları bilgiler ve kurallar hakkında informal yollarla akıl yürütebilirler (van de Walle vd., 2014). Dolayısıyla öğrenen daha önceden öğrenmiş olduğu Pisagor teoremi ile verilen görseli ilişkilendirebiliyorsa ve alan kavramıyla görseldeki şekillerin alanları arasında ilişki kurabiliyorsa informal çıkarım düzeyinde olduğu söylenebilir.

Çıkarım düzeyinde ise sezgisel olarak yaptığı çıkarımlardan ziyade varsayım hakkında ispat yapmanın gereğini anlayabilir. Bir önceki düzey olan informal çıkarım düzeyinden farkı argümanı takip etmenin ötesine gitmek ve ispata yönelmektir (van de Walle vd., 2014). Öğrenen, Pisagor teoreminin görsel ispatında alanlar arasındaki ilişkiyi fark etmesinin ardından gerekli işlemlerden sonra Pisagor teoremini elde edip teoremi ispatlaması ve bunu üçgende bağıntı olarak ifade edebilmesi ve genelleyebilmesi çıkarım düzeyine ait bir davranış olarak görülebilir.

Geometrik düşünmenin son düzeyi olan sistematik düşünme düzeyine göre somut modellere ihtiyaç yoktur. Çıkarımlardan ziyade aksiyomatik sistemlerin kendileri söz konusudur. Bu düzeyde geometri oldukça soyuttur. Dolayısıyla görsel ispatların farklı aksiyomatik sistemlerle ilişkisi bu çalışmanın konusu değildir. Farklı aksiyomatik sistemlerde görsel ispatlar farklı alanda bir araştırmayı gerekli kılmaktadır. Nitekim van de Walle vd. (2014) bu düzeyin geometri üzerinde yoğunlaşan üniversite matematik programı düzeyinde olduğunu belirtmektedir.

Görsel ispatların gerek ispat becerisi üzerinde olumlu etkisi olduğundan ve bu ispatların görsel akıl yürütmeyi gerektirmesinden dolayı görsel ispatların uzamsal yetenek ve van Hiele geometrik düşünme düzeyleriyle ilişkisini ortaya koymak önemlidir. Uzamsal yetenek ve van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ile ilgili ayrı ayrı yapılmış çalışmalar olmasına karşın görsel ispatlarla ilişkisini inceleyen çalışmalar çok azdır. Bu bağlamda bu çalışma gelecekte görsel ispatların kullanılmasının uzamsal yeteneğe ve van Hiele geometrik düşünme düzeylerine etkisinin araştırılması için ayrıca önemlidir. Bu çalışma ile eğitim alanında son yıllarda kullanılmaya başlanan görsel ispatların van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ve uzamsal yetenek ile ilişkisini ortaya koymak amaçlanmaktadır. Çalışma kapsamında cevabı aranan alt problemler aşağıdaki gibidir:

Erciyes Journal of Education 2019, Vol 3, No 2, 105-122

- İlköğretim matematik öğretmen adaylarının uzamsal yetenekleri, van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ve görsel ispat düzeyleri nedir?
- İlköğretim matematik öğretmen adaylarının van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ve görsel ispat becerileri arasındaki ilişki nedir?
- İlköğretim matematik öğretmen adaylarının uzamsal yetenekleri ile görsel ispat becerileri arasındaki ilişki nedir?

YÖNTEM

Araştırmanın Deseni

Çalışmada öğretmen adaylarının görsel ispat becerisi, uzamsal yetenek ve van Hiele geometrik düşünme düzeyleri arasındaki ilişkiyi ortaya konulmaya çalışılmıştır. Veriler toplanmaya başlanmadan önce gerekli izinler alınmıştır. Katılımcılara vermiş oldukları cevapların bilimsel bir çalışma için kullanılacağı bilgisi verilmiştir. Çalışma, değişkenler arasındaki ilişkiyi açıklaması sebebiyle nicel araştırma yönteminin bir çeşidi olan korelasyonel araştırmadır. Korelasyonel araştırmalar, iki veya daha fazla değişken arasındaki ilişkileri betimlemek amacıyla yürütülür ve ilişkiler betimlenirken değişkenlerin birbirini ne kadar etkileyip etkilemediğine bakılmaz (Tanrıöğen, 2009).

Evren ve Örneklem

Bu çalışma Türkiye'de bir devlet Üniversitesi'nde İlköğretim Matematik Öğretmenliğinde öğrenim gören 2. 3. ve 4. sınıftaki öğretmen adaylarıyla yürütülmüştür. Çalışmaya birinci sınıftaki öğretmen adaylarının alınmamasının sebebi, ispat yöntemleriyle ilgili temel dersleri almamış olmalarıdır. Çalışmaya 2. sınıftan 31, 3. sınıftan 28 ve 4. sınıftan 26 olmak üzere toplam 85 öğretmen adayı katılmıştır. Çalışmanın örneklemi sistematik rastgele örnekleme yöntemiyle seçilmiştir. Sistematik rastgele örnekleme yönteminde araştırmacı hangi grupla çalışacağına karar verir ve bazı değişkenleri göz önüne alarak katılımcıları rastgele seçer (Metin, 2014). Nitekim bu çalışmada öğretmen adaylarının temel ispat becerileri ile ilgili dersleri almış olmaları için 1. sınıflar araştırmaya dâhil edilmemiş, 2, 3 ve 4. sınıf öğretmen adayları çalışmaya dâhil edilmiştir. 2, 3 ve 4. sınıf düzeyinin her birinde yaklaşık olarak eşit sayıda öğretmen adayı bulunmakta olup uygulamanın yapıldığı derste bulunan öğretmen adayları çalışmada yer almıştır. Araştırmanın örneklemi ile ilgili bilgiler Tablo 1'de sunulmuştur.

Tablo 1. *Örnekleme ait bilgiler*

Sınıf Düzeyi	**Cinsiyet**		**Toplam**
	Kız	**Erkek**	
2. Sınıf	24	7	31
3. Sınıf	22	6	28
4. Sınıf	21	5	26
Toplam	67	18	85

Veri Toplama Araçları

Öğretmen adaylarının geometrik düşünme düzeyleri, uzamsal yetenekleri ve görsel ispat becerileri arasındaki ilişkiyi ölçmek için Usiskin (1982) tarafından geliştirilen, Duatepe (2000) tarafından Türkçe'ye uyarlanan van Hiele geometri testi, Sezen Yüksel (2017) tarafından

Erciyes Journal of Education 2019, Vol 3, No 2, 105-122

geliştirilen uzamsal yetenek testi ve Polat (2018) tarafından geliştirilmiş olan görsel ispat beceri testi veri toplama araçları olarak kullanılmıştır. Korelasyonel çalışmalarda geçerlik ve güvenirliğin sağlanmasında baş ölçüt; veri toplama araçlarının geçerliği ve güvenirliğidir (Metin, 2014). Çalışmada kullanılan veri toplama araçları geçerlik ve güvenirlik çalışmaları yapılmış olan Polat'ın (2018) doktora tez çalışmasında kullanmış olduğu görsel ispat testi, Sezen Yüksel'in (2017) geliştirmiş olduğu uzamsal düşünme testi ve van Hiele geometrik düşünme testidir. Polat'ın (2018) çalışmasında kullanılan görsel ispat beceri testinde gerek cebir, gerekse geometri sorularına yer verilerek görsel ispatların kullanıldığı farklı alanları yeterince kapsaması sağlanmaya çalışılmıştır. Testin pilot çalışması yapılmış olup, testin sorularının açık uçlu sorular olması sebebiyle şans başarısının önüne geçilmiştir. Soruların puanlama cetveli ise Boero'un (1999) ispat modelini öğrencilere uyarlayan Heinze ve Reiss (2004)'in ispat aşamalarına göre oluşturulmuş olup uzmanlar tarafından değerlendirilmiştir. Sezen Yüksel (2017) ise veri toplama aracının güvenirlik çalışmasında Cronbach α iç tutarlılık katsayısını göz önünde bulundurmuş ve katsayıyı ,85 olarak bulmuştur. Ayrıca testin yapı geçerliğine kanıt oluşturmak amacıyla Winter, Lappan, Fitzgerald ve Shroyer (1989) tarafından hazırlanan testi aynı çalışma grubuna uygulamış ve uygulama sonucunda iki testten elde edilen veriler arasındaki korelasyon katsayısını 0,66 olarak hesaplamıştır. Van Hiele testi ise Usiskin (1982) tarafından geliştirilmiş olup Türkçe'ye Duatepe (2000) tarafından uyarlanmış ve geçerlik güvenirlik çalışmaları yapılmıştır.

Veri Analizi

Polat (2018) tarafından geliştirilen görsel ispat testi on tane açık uçlu sorulardan oluşmaktadır. Her bir soru 10'ar puan olup uzmanlar tarafından modelin aşamalarına uygun olarak puanlama cetveli oluşturulmuştur. Puanlama cetvelinde modelin birinci aşaması olan "şeklin incelenmesi" aşamasında ve beşinci aşaması olan "sonuca ulaşabilme" aşamasında davranışın kısmen gözlenmesi durumu olduğu için "davranış gözlemlenmiştir, davranış kısmen gözlemlenmiştir ve davranış gözlemlenmemiştir" olmak üzere üç durum söz konusudur. Diğer aşamalar için ise "davranış gözlemlenmiştir ve davranış gözlemlenmemiştir" olmak üzere iki durum bulunmaktadır. Sezen Yüksel'in (2017) geliştirmiş olduğu uzamsal yetenek testinde 4'er seçenekli 27 test sorusu bulunmakta olup soruların her biri aynı puan değerine sahiptir. Görsel ispat testinden alınan puanlar 100'lük sistemde verildiğinden uzamsal yetenek testinden alınan puanlar da 100'lük sisteme çevrilerek sunulmuştur.

Çalışmada testlerden alınan puanlar SPSS 17.00 paket programı ile analiz edilmiştir. Verilerin normal dağılım gösterip göstermediğini ortaya çıkarmak için normallik testi yapılmıştır. Testlerden alınan puanların normal dağılım gösterip göstermediği, Kolmogorov-Smirnov testine, çarpıklık (skewness)-basıklık (kurtosis) katsayılarına bakılarak incelenmiştir. Çarpıklık ve basıklık katsayılarının sırasıyla çarpıklık ve basıklık standart hatasına bölündüğünde elde edilen değer -1,96 ile +1,96 arasında kalıyorsa dağılım normal kabul edilmektedir (Can, 2014). Verilerin analizi sonucunda basıklık-çarpıklık katsayıları ve Kolmogorov-Smirnov testinin sonuçları Tablo 2'de verilmiştir.

Tablo 2. *Veri setinin normallik testi*

	Basıklık	Basıklık S.H.	Çarpıklık	Çarpıklık S.H.	Kolmogorov-Smirnov
Görsel İspat	,377	,517	,350	,261	,067
Uzamsal Yetenek	-,397	,517	,-423	,261	,026

Erciyes Journal of Education 2019, Vol 3, No 2, 105-122

Tablo 2'de görsel ispat testi için, Kolmogorov-Smirnov testinin sonucunun p>,05 olduğu görülmektedir. Ayrıca basıklık 0,377, standart hata 0,517; çarpıklık 0,350 ve standart hata 0,261 çıkmıştır. Çıkan çarpıklık ve basıklık katsayılarının sırasıyla çarpıklık ve basıklık standart hatasına oranı -1,96 ile +1,96 arasında kalmıştır. Ayrıca Kolmogorov-Smirnov testinin sonucuna göre de dağılımın normal olduğu söylenebilir. Uzamsal yetenek testinde ise basıklık -0.,397, standart hata 0,517; çarpıklık -0,423 ve standart hata 0,261 çıkmıştır. Çıkan çarpıklık ve basıklık katsayılarının sırasıyla çarpıklık ve basıklık standart hatasına oranı -1,96 ile +1,96 arasında değildir. Ayrıca Kolmogorov-Smirnov testinin sonucuna göre de uzamsal yetenek testinin sonuçları normal dağılım göstermemektedir.

Korelasyonel çalışmalarda korelasyona bakmak için Pearson, Spearman ve Kendall's Tau korelasyon katsayılarına bakılmaktadır. Pearson korelasyon katsayısı sürekli ve normal dağılımlı veriler için kullanılırken; Spearman korelasyon katsayısı normal dağılım göstermeyen verilerin arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarmak için kullanılan parametrik olmayan bir testtir. Kendall's Tau korelasyon katsayısı da normal dağılım göstermeyen daha küçük veri setleri için kullanılmaktadır (Field, 2009). Ayrıca Spearman korelasyon katsayısı sınıflamalı ölçme düzeyinde ölçülen iki değişken arasındaki ilişki için (Çokluk, Şekercioğlu ve Büyüköztürk, 2012) ve değişkenlerin en az biri sıralı veri türünde olduğunda ya da değişkenlerin aralık/oran ölçeği ile ölçülmesine rağmen normal dağılıma sahip olmadıklarında kullanılmaktadır (Bursal, 2017). Van Hiele geometrik düşünme testi 25 çoktan seçmeli sorudan oluşmakta olup, 1-5. sorular 1. düzeyi, 6-10. sorular 2. düzeyi, 11-15. sorular 3. düzeyi, 16-20. sorular 4. düzeyi, 21-25. sorular ise 5. düzeyi ölçmeye yöneliktir. Her bir düzeyi geçebilmek için o düzeye ait 5 sorudan en az 3'ünü doğru cevaplamak gerekmektedir. Örneğin öğrenci 1. düzeydeki sorulardan en az 3'ünü, 2. düzeydeki sorulardan en az 3'ünü cevaplayabilmiş, ancak 3, 4 ve 5. düzeydeki her bir 5 sorulardan en az 3'ünü cevaplayamamışsa öğrenci 2. düzeydedir (Usiskin, 1989). Dolayısıyla van Hiele testinin verileri sıralı veri türünde olduğu için bu araştırmada görsel ispat becerisinin van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ile ilişkisi olup olmadığını ortaya çıkarmak için Spearman korelasyon katsayısına bakılmıştır. Ayrıca uzamsal yetenek testinin sonuçları normal dağılım göstermediğinden görsel ispat becerisinin uzamsal yetenek ile ilişkisi olup olmadığını ortaya çıkarmak için de Spearman korelasyon katsayısına bakılmıştır.

BULGULAR

Araştırmanın bu bölümünde alt problemlere ilişkin bulgular ve yorumlar yer almaktadır. Bulgular kısmı 1. alt probleme yönelik ve 2. ile 3. alt probleme yönelik bulgular olmak üzere iki alt başlık halinde sunulmuştur.

Birinci Alt Probleme Yönelik Bulgular

Araştırmanın ilköğretim matematik öğretmen adaylarının uzamsal yeteneklerini, van Hiele geometrik düşünme düzeylerini ve görsel ispat düzeylerini belirlemeye yönelik alt problemine ait betimsel istatistikler Tablo 3 ve Tablo 4'te verilmiştir. Tablo 3 görsel ispat ve uzamsal yetenek testlerinden alınan puanlara ilişkin betimsel istatistikleri, Tablo 4 ise, van Hiele geometrik düşünme düzeyinin sınıflara göre dağılımını sunmaktadır.

Tablo 3. *Puanlara yönelik betimsel istatistikler*

	N	A.O	S.S	Min	Max
Görsel ispat beceri	85	40,55	13,59	5	77

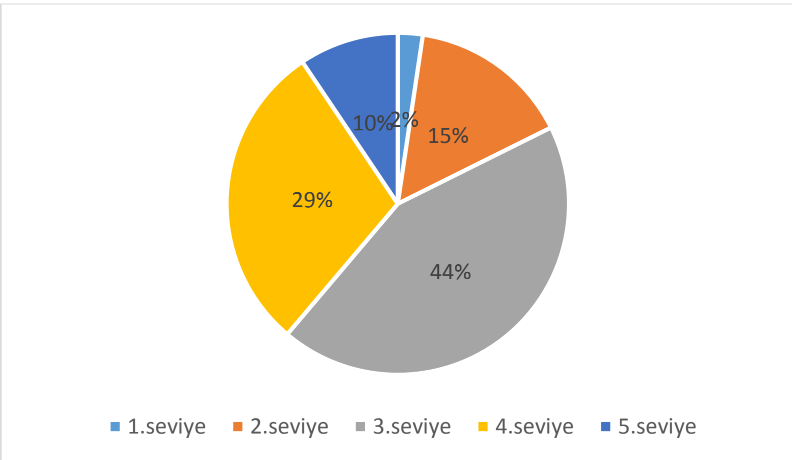
Uzamsal düşünme	85	67,27	12,50	37	93

Tablo 3'te görsel ispat testinden alınan puanların ortalamasının 40,55, uzamsal yetenek testinden alınan puanların ortalamasının 67,27 olduğu görülmektedir. Ayrıca görsel ispat testinden alınan en düşük puan 5 iken; uzamsal yetenek testinden alınan en düşük puan 37 ve görsel ispat testinden alınan en yüksek puan 77; uzamsal yetenek testinden alınan en yüksek puan ise 93'tür. Görsel ispat ve uzamsal yetenek testinden alınan puanların ortalaması incelendiğinde öğretmen adaylarının görsel ispat beceri testinden almış oldukları puanların uzamsal yetenek testinden alınan puanlara kıyasla daha düşük olduğu söylenebilir. Nitekim görsel ispat beceri testinden alınan en düşük puanın 5, en yüksek puanın 77 olması öğretmen adaylarının görsel ispat testinde yer alan soruları çözemediklerinin bir göstergesidir.

Tablo 4. *Van hiele geometrik düşünme düzeylerinin sınıflara göre dağılımı*

	1.seviye	2.seviye	3.seviye	4.seviye	5.seviye
2.sınıf	1	8	13	8	2
3.sınıf	1	5	11	8	3
4.sınıf	-	-	13	9	3

Van Hiele geometrik düşünme düzeylerinin sınıflara göre dağılımının yer aldığı Tablo 4 incelendiğinde, 2. sınıftaki öğretmen adaylarından biri, 1. seviyede; 8'i 2. seviyede; 13'ü 3. seviyede; 8'i 4. seviyede ve 2'si 5. seviyede; 3. sınıftaki öğretmen adaylarından biri, 1. seviyede; 5'i 2. seviyede; 11'i 3. seviyede; 8'i 4. seviyede ve 3'ü 5. seviyede yer almaktadır. 4. sınıftaki öğretmen adaylarından ise 1 ve 2. seviye bulunmamakla birlikte; öğretmen adaylarından 13'ü 3. seviyede; 9'u 4. seviyede; 3'ü de 5. seviyede yer almaktadır. Tablo 4'te görüldüğü üzere 37 öğretmen adayı 3. düzeydedir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının çoğunun 3. düzeyde olduğu söylenebilir. Öğretmen adaylarının van Hiele düzeylerinin yüzde grafiği Şekil 4'te verilmiştir. Şekil 4'te görüldüğü üzere en düşük düzey olan 1. düzeyde yer alan öğretmen adaylarının sayısının oranı % 2 iken; en yüksek düzey olan 5. düzeyde yer alan öğretmen adaylarının sayısının oranı %10'dur.



Şekil 4. *Öğretmen adaylarının van Hiele düzeylerinin yüzde grafiği*

Şekil 4 incelendiğinde öğretmen adaylarının % 2'si 1. seviyede; % 15'i 2. seviyede; % 44'ü 3. seviyede; % 29'u 4. seviyede ve % 10'u 5. seviyededir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının % 61'nin mantıksal çıkarım seviyesinin altında olduğu söylenebilir. Yani van Hiele teorisine göre bu

Erciyes Journal of Education 2019, Vol 3, No 2, 105-122

durum, çalışmadaki öğretmen adaylarının %17'sinin ancak şekilleri tanıyıp, şekiller arasındaki ilişkileri fark edebileceği, % 44'ünün daha önceden kavradıkları bilgiler ve kurallar hakkında informal yollarla akıl yürütebileceği, %39'unun ise ispat yapabileceği anlamına gelmektedir.

İkinci ve Üçüncü Alt Probleme Yönelik Bulgular

Çalışmanın "İlköğretim matematik öğretmen adaylarının görsel ispat becerileri ile van Hiele geometrik düşünme düzeyleri arasında bir ilişki var mıdır?" alt problemine ilişkin Spearman korelasyon katsayısına bakılmış ve analizden elde edilen sonuçlara göre orta düzeyde bir ilişki olduğu görülmüştür.

Van Hiele geometrik düşünme düzeyi ve görsel ispat becerisi puanları arasında Spearman korelasyon katsayısı (rs=,344; p=,001) için hesaplanan anlamlılık değeri p<,05 olduğundan, van Hiele geometrik düşünme düzeyi ve görsel ispat becerisi arasında anlamlı bir ilişki olduğu sonucu çıkmıştır. $,30 < |r| \leq ,70$ değeri Büyüköztürk'e (2011) göre orta kuvvette ilişkinin olduğu aralık olarak kabul edilmektedir. Dolayısıyla yapılan analize göre korelasyon katsayısının mutlak değeri değişkenler arasında orta düzeyde bir ilişkinin var olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla elde edilen sonuca göre görsel ispat yapabilme becerisi yüksek olan öğretmen adaylarının van Hiele geometrik düşünme düzeylerinin de yüksek olduğu ve van Hiele geometrik düşünme düzeyi düşük olan öğretmen adaylarının görsel ispat becerilerinin de düşük olduğu söylenebilir.

"İlköğretim matematik öğretmen adaylarının görsel ispat becerileri ile uzamsal yetenekleri arasında bir ilişki var mıdır?" alt problemine ilişkin Spearman korelasyon katsayısına bakılmış ve analizden elde edilen sonuçlara göre anlamlı bir ilişki bulunamamıştır. Görsel ispat becerisi ve uzamsal yetenek puanları arasında Spearman korelasyon katsayısı (rs=,162; p=,139) için hesaplanan anlamlılık değeri p>,05 olduğundan görsel ispat becerisi ve uzamsal yetenek arasında anlamlı bir ilişki bulunamamıştır.

SONUÇ VE TARTIŞMA

Çalışmada ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının van Hiele geometrik düşünme düzeylerinin 3. düzeyde yoğunlaştığı görülmüştür. Benzer sonuç Oral ve İlhan'ın (2012) çalışmasında da görülmüştür. Kurtuluş ve Akay'ın (2017) matematik öğretmeni adaylarıyla yapmış olduğu çalışmada öğretmen adaylarının %40'ının 2. seviyede, %3'lük kısmının 4. seviyede oldukları, Kaleli Yılmaz ve Koparan'ın (2016) çalışmasında ise %40'nın 1. seviyede, %30'unun ise 3. seviyede yer aldığı ve 5. seviyeye erişen öğretmen adayının bulunmadığı belirtilmiştir. Dolayısıyla matematik öğretmeni adaylarının 1, 2 ve 3. seviyede yığıldıkları ve üst düzeylere erişemedikleri ya da çok azının erişebildiği söylenebilir. Sınıf öğretmeni adaylarıyla yapılan çalışmalar incelendiğinde ise öğretmen adaylarının ilk iki seviyede yığıldıkları, 3. seviyede az, 4 ve 5. seviyelere ise neredeyse ulaşan öğretmen adayı bulunmadığı sonuçları elde edilmiştir (Gökbulut, Sidekli ve Yangın, 2010; Toluk ve Olkun, 2004). Benzer durum yurt dışında öğretmen ve öğretmen adaylarıyla yapılan çalışmaları inceleyen Pusey'in (2003) çalışmasında da belirtilmiştir. Dolayısıyla matematik öğretmeni adaylarının ispat yapma için uygun seviyeye erişemedikleri söylenebilir. Nitekim 3. seviye, ispatta informalden formale geçiş evresi olarak görülmektedir. 3. seviyede yer alan bir öğrencinin kendi başına ispat yapamayacağı ancak 4. seviyede bulunanların formal ispat yapabileceği düşünülmektedir (Senkl, 1989). Gutierrez ve Jaime'e (1998) göre ise 4. seviyedeki bir öğrenci farklı ispat türlerini de yapabilmelidir.

Erciyes Journal of Education 2019, Vol 3, No 2, 105-122

Bu çalışmada kullanılan görsel ispat beceri testinden alınan puanlara göre ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının görsel ispat düzeyleri yüksek değildir. Polat'ın (2018) lise öğrencileriyle yapmış olduğu çalışmada da benzer durum söz konusudur. Ayrıca Demircioğlu ve Polat'ın (2016) ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarıyla yapmış oldukları çalışmada öğretmen adaylarının çoğu uzamsal düşünmeyi ve matematiksel bilgileri kullanmayı gerektiren görsel ispatları yaparken zorlandıklarını belirtmişlerdir. Öğretmen adaylarının uzamsal yetenek testinde görsel ispat testine nazaran daha iyi oldukları görülmüştür. Bu durumun sebebi olarak öğretmen adaylarının uzamsal yetenek testinde yer alan durumlarla daha önceleri karşılaşmış olmaları gösterilebilir. Çalışmada görsel ispat becerisi ve uzamsal yetenek arasında anlamlı bir ilişki bulunamamış olması beklenenin aksine bir sonuçtur. Çünkü özellikle görsel ispatlarda zihinde döndürme, öteleme gibi uzamsal yetenekler önemli rol oynamaktadır. Yapılan araştırmalarda da görsel ispatlar ile uzamsal yetenek arasındaki ilişkiden söz edilmektedir (Cain, 2019; Lam, 2007). Ayrıca Demircioğlu ve Polat'a (2016) göre görsel ispatlarla uğraşmak öğrenciyi zorlamakla beraber uzamsal muhakeme becerisini geliştirme potansiyeline sahiptir. Ancak görsel ispatlar zihinde döndürme, öteleme, çevirme gibi uzamsal yeteneğin bir parçası olarak görülen zihinsel işlemlerin yanında çeşitli matematiksel bilgileri kullanmayı da gerektirmektedir. Dolayısıyla görsel bir ispatı anlamak için uzamsal yeteneğin yanında başka bilgilere de ihtiyaç vardır. Bu durum ile ilgili olarak görsel ispatlar ile uzamsal yetenek arasındaki ilişkinin derinlemesine incelenmesi için nitel çalışmalar ve farklı uzamsal yetenek testlerinin kullanıldığı çalışmalar yapılabilir.

Bu çalışmada ortaya çıkan sonuçlardan bir diğeri van Hiele geometrik düşünme düzeyi ve görsel ispat becerisi arasında anlamlı bir ilişki olmasıdır. Öğretmen adaylarının geometrik düşünme düzeyleri ve görsel ispat becerileri arasında böyle bir ilişkinin olması şaşırtıcı değildir. Nitekim yapılan araştırmalara göre ispat ve van Hiele düzeyleri arasında ilişki mevcuttur (Çoşkun, 2009; Fuys, 1988; Jupri, 2018; Karrass, 2012; Senk, 1989; Usiskin, 1982). Ayrıca görsel ispatları kullanarak matematik öğretmen adaylarının görsel akıl yürütmeleri ve van Hiele geometrik düşünme düzeyleri arasındaki ilişkiyi araştıran Karrass (2012), geometrik düşünmede üst düzeylerde yer alan öğretmen adaylarının görsel ispatları ispatlamada daha iyi olduklarına dair elde etmiş olduğu sonuç bu çalışmanın sonucu ile uyumludur. Ayrıca Jupri (2018) sınıf öğretmeniyle yapmış olduğu çalışmada, van Hiele modeli çerçevesinde hazırlanmış 5 derslik eğitim sonunda öğretmenlerin tümdengelimsel düşünme ve geometrik ispatlarda yeterli düzeye ulaşamadığı ancak van Hiele teorisine göre hazırlanmış uzun soluklu bir eğitimle öğretmenlerin tümdengelimsel düşünme ve geometrik ispatlardaki gelişiminin incelenmeye değer olduğunu belirtmiştir. Ayrıca görsel ispatlarda ispatın anlaşılabilmesi için görseller ve görsellerin birbiri ile ilişkisinin analiz edilmesi gerekmektedir. Toluk, Olkun ve Durmuş (2002) görsel modellerle desteklenmiş geometri öğretimi ile ilgili deneysel çalışmalarında, görsel modellerin geometrik düşünme düzeylerine pozitif yönde etkisi olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Dolayısıyla görsel ispatlar ile ilgili etkinliklerin öğrencilerin van Hiele geometri düşünme düzeylerinin gelişimi için pozitif yönde etkisi olabileceği söylenebilir. Bu nedenle görsel ispatlar ile ilgili eğitimin van Hiele geometrik düşünme düzeyine etkisini araştırmak için deneysel çalışmaların yapılmasının da alana katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Erciyes Journal of Education 2019, Vol 3, No 2, 105-122

KAYNAKÇA / REFERENCES

Alsina, C., & Nelsen R. (2010). An invitation to proofs without words. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, *3*(1), 118-127. Retrieved from http://www.labjor.unicamp.br/comciencia/files/matematica/ar_roger/ar_roger.pdf

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 215–241.

Bardelle, C. (2010). *Visual proofs: An experiment*. In V. Durand-Guerrier et al (Eds), Paper presented at the annual meeting of CERME6, Lyon, France. INRP, 251-260. Retrieved from http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg2-08-bardelle.pdf

Bell, C. J. (2011). Proof without words: A visual application of reasoning. *Mathematics Teachers, 104*(9), 690–695. Retrieved from http://is234mathforum.webs.com

Borwein, P., & Jörgenson, L. (2002). Visible structures in number theory. *The American Mathematical Monthly, 108(5), 897-910. Retrieved from* https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Ford/Borwein897-910.pdf

Bursal, M. (2017). SPSS ile temel veri analizleri. Ankara: Anı Yayıncılık

Büyüköztürk, Ş. (2011). *Sosyal bilimler için veri analizi el kitabı* (14. baskı). Pegem Akademi: Ankara

Cain, A. J.(2019). Visual thinking and simplicity of proof. *Philosophical Transactions A*. 377 (2140) Doi: https://doi.org/10.1098/rsta.2018.0032

Can, A. (2014). *SPSS ile bilimsel araştırma sürecinde nicel veri analizi (2.baskı). Ankara:Pegem Yayınevi.*

Çokluk, Ö., Şekercioğlu, G., Büyüköztürk, Ş. (2012). *Sosyal bilimler için çok değişkenli istatistik SPSS ve Lisrel uygulamaları (2.baskı). Ankara: Pegem Akademi.*

Çilingir Altıner, E. (2018). İlkokul öğrencilerinin uzamsal düşünme ile yapboz oyunlarındaki becerileri arasındaki ilişki. *International Online Journal of Educational Sciences*, *10*(1), 75 -87.

Çoşkun, F. (2009). Ortaöğretim öğrencilerinin van Hiele geometri anlama seviyeleri ile ispat yazma becerilerinin ilişkisi. (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi.

Demircioğlu, H., Polat, K. (2016). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının sözsüz ispatlar ile ilgili yaşadıkları zorluklar hakkındaki görüşleri. *Uluslararası Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, 81-89.

Duatepe, A. (2000). An investigation of the relationship between van Hiele geometric level of thinking and demographic variable for pre-service elementary school teacher (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Duval R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the Twenty-first Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Mexico, 1, 3-26. Retrieved from https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED466379.pdf

Field, A. (2009). *Discovering statistics using SPSS* (3th Edition). Los Angeles: Sage

Fishbein, E. (2002). *Intution in science and mathematics*. New York: Kluwer Academic Publishers.

Flores, A. (2000). *Geometric representations in the transition from arithmetic to algebra.* In F. Hitt (Ed.), North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. *Reprensentation and Mathematics Visualization* (pp. 9-29).

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education*, 3, 1-196

Giaquinto, M. (2007). *Visual thinking in mathematics: an epistemological study*. Oxford University Press: New York. doi: 10.1093/acprof:oso/9780199285945.001.0001

Gierdien, F. (2007). From "Proofs without words to proofs that explain" in secondary mathematics. *Pythagoras*, 65, 53 – 62. doi:10.4102/pythagoras.v0i65.92

Gökbulut, Y., Sidekli S., & Yangın, S. (2010). Sınıf öğretmeni adaylarının van Hiele geometrik düşünce düzeylerinin bazı değişkenlere göre (Lise türü, lise alanı, lise ortalaması, ÖSS puanları, lisans ortalamaları ve cinsiyet) incelenmesi. *Türk Eğitim Bilimleri Dergisi, 8*(2), 375-39.

Guay, R. B., & McDaniel, E. D. (1977). The relationship between mathematics achievement and spatial abilities among elementary school children. *Journal for Research in Mathematics Education, 8*(3), 211-215.

Gutierrez, A., & Jaime, A. (1998). On the assessment of the van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 20*(2-3), 27-46.

Gutierrez, A., & Jaime, A. (1999). Preservice teachers' understanding of the concept of altitude of a triangle. *Journal of Mathematics Teacher Education* 2, 253–275.

Hanna, G., & Sidoli, N. (2007). Visualisation and proof: A brief survey of philosophical perspectives. *ZDM Mathematics Education*, *39*(1–2), 73–78. doi:10.1007/s11858-006-0005-0

Hershkowitz, R (1989), Visualization in geometry: Two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *11*(1-2), 61-76.

Jones, K. (2001). Spatial thinking and visualization. In *Teaching and learning geometry* (pp. 11–19): A report of the Royal Society/Joint Mathematical Council Working Group, edited by The Royal Society.

Jupri, A. (2018). Using the Van Hiele theory to analyze primary school teachers' written work on geometrical proof problems. 4th International Seminar of Mathematics, Science and Computer Science Education IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1013 (2018) 012117 doi :10.1088/1742-6596/1013/1/012117

Kaleli Yılmaz, G., & Koparan, T. (2016). The effect of designed geometry teaching lesson to the candidate teachers' van Hiele geometric thinking level. *Journal of Education and Training Studies, 4*(1), 129-140.

Karaman, T., & Toğrol, A. Y. (2010). Relationship between gender, spatial visualization, spatial orientation, flexibility of closure abilities and performance related to plane geometry subject among sixth grade students. *Bogazici University Journal Education*, *26*(1), 1-25.

Karrass, M. (2012). *Diagrammatic Reasoning Skills of Pre-Service Mathematics Teachers*. (Doctoral dissertation). Retrieved from ProQuest LLC.

Kurtuluş, A., & Akay, S. (2017). Öğretmen adaylarının geometrik düşünme düzeyleri ve beyin baskınlıklarının bazı değişkenler açısından incelenmesi. *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 1*(41), 38-61.

Lam, T. T. (2007). Contextual approach in teaching mathematics: an example using the sum of series of positive integers, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38*(2), 273-282, Doi: 10.1080/00207390600913376

Lean, G., & Clements, M. A. (1981). Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance**.** *Educational Studies in Mathematics* 12, 267-299.

Linn, M. C., & Petersen, A. C. (1985). Emergence and Characterization of Sex Differences in

Spatial Ability: A Meta-Analysis. *Child Development*, 56, 1479-1498.

Metin, M. (2014). *Kuramdan uygulamaya bilimsel araştırma yöntemleri* (1. baskı). Ankara: Pegem Yayıncılık.

Miller R. L. (2012). On Proofs Without Words. Retrieved from: http://www.whitman.edu/mathematics/SeniorProjectArchive/2012/Miller.pdf

Nelsen. R. (1993). *Proofs without words: Exercises in visual thinking*. Washington: Mathematical Association of America.

Olkun, S., & Altun, A. (2003). İlköğretim öğrencilerinin bilgisayar deneyimleri ile uzamsal düşünme ve geometri başarıları arasındaki ilişki. *The Turkish Online Journal of Educational Technology, 2*(4), 86-115.

Oral, B., & İlhan, M. (2012). İlköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının geometrik düşünme düzeylerinin çeşitli değişkenler açısından incelenmesi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi, 6*(1), 201-219.

Polat, K., & Demircioğlu, H. (2016). Matematik eğitiminde sözsüz ispatlar: Kuramsal bir çalışma. *Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28, 129-140. doi:10.14582/DUZGEF.686

Polat, K. (2018). Alternatif bir ispat yöntemi olarak sözsüz ispatlar: Lise öğrencilerinin ispat yapabilme becerilerinin incelenmesi (Yayımlanmamış doktora tezi), Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Pusey, E. L. (2003). The van Hiele model of reasoning in geometry: A literatüre review. (Yüksek Lisans Tezi). North Carolina State University.

Senkl, S. L. (1989). Van hiele levels and achievement in writing geometry proofs. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(3), 309-321.

Sezen Yüksel, N. (2017). Measuring Spatial Visualization: Test Development Study. *Visual-spatial Ability in STEM Education: Transforming Research into Practice*. Khine, Myint Swe (Ed.). s.59-84.) : Springer.

Şan, İ. (2012). Matematik Öğretiminde Görselleştirme. *Journal of Qafqaz University*, 34, 109-123. https://www.researchgate.net/publication/283211854 adresinden edinilmiştir.

Şahin, O. (2008). Sınıf öğretmenlerinin ve sınıf öğretmeni adaylarının van Hiele geometrik düşünme düzeyleri (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Afyon Kocatepe Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü .

Tanrıöğen, A. (2009). *Bilimsel araştırma yöntemleri*. Ankara: Anı Yayıncılık.

Toluk, Z., & Olkun, S. ve Durmuş, S. (2002). Problem merkezli ve görsel modellerle destekli geometri öğretiminin sınıf öğretmenliği öğrencilerinin geometrik düşünme düzeylerinin gelişimine etkisi. 5. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi:2 (p.1118– 1123), Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara.

Thornton, S. (2001). A Picture is worth a thousand words. Retrieved from http://math.unipa.it/grim/AThornton251.PDF

Türnüklü, E., Özcan, B. N. (2014). Öğrencilerin geometride RBC teorisine göre bilgiyi oluşturma süreçleri ile van Hiele geometrik düşünme düzeyleri arasındaki ilişki: Örnek olay çalışması. *Mustafa Kemal Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, 11*(27), 295-316

Uğurel, I., Moralı, H. S., Karahan, Ö., & Boz, B. (2016). Mathematically gifted high school students' approaches to developing visual proofs (vp) and preliminary ideas about VP. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, *4*(3), 174-197. doi:10.18404/ijemst.61686

Usiskin, Z. (1982). Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry. University of Chicago. ERIC Document Reproduction Service.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. W. (2014). *İlkokul ve ortaokul matematiği gelişimsel yaklaşımla öğretim*. (S. Durmuş *çev. ed*.). Ankara: Nobel Yayınları. (Çalışmanın orijinali 2010'da yayımlanmıştır)

Velez, M.C., Silver, D., Tremaine, M. (2005). Understanding Visualization Through Spatial Ability Differences, *Proceedings of the IEEE Visualization Conference* (VIS 2005; 511–518). New York: IEEE.

Winter, J.W., Lappan, G., Fitzgerald, W. & Shroyer, J. (1989). Middle Grades Mathematics Project. Spatial Visualization. N. Y. Addison- Wesley.