
Derleme Makalesi / Review Article

Sonlu Noktası Çıkarılmış Disk Üzerindeki Örgüler

Alev MERAL*, Meryem DEMİRTAŞ

Dicle Üniversitesi, Matematik Bölümü, Diyarbakır
(ORCID: 0000-0002-9838-7906) (ORCID: 0000-0002-0790-8471)

Öz

Örgüler, düğüm teorisi, düşük boyutlu topoloji, sayı teorisi, cebirsel geometri, geometrik grup teorisi, cebirsel topoloji ve matematiksel fizik gibi birçok alanda önemli bir rol oynamaktadır. Örgü grupları ayrıca, kriptoloji, robotik, akışkan dinamikleri ve moleküler biyoloji gibi çoğu uygulamalı alanda çok geniş bir role sahiptir. Bu çalışmada geometrik örgü grup yapısı ele alınmıştır. Sonlu noktası çıkarılmış bir disk üzerindeki yön koruyan homeomorfizmaların izotopi sınıfları örgülerle temsil edilmektedir. Çalışmada amaç geometrik örgülerle ilgili genel özellikleri vermek, okuyucuya geometrik örgülerin grup yapısı, izotopi sınıfları ve disk üzerindeki bir geometrik örgünün bir Gönderim Sınıf Grubu (MCG)'na nasıl doğal olarak izomorfik olduğunu açıklamaktır.

Anahtar kelimeler: Geometrik Örgüler, n -Noktası Çıkarılmış Disk, Gönderim Sınıf Grubu (MCG).

Braids on a Finite Punctured Disk

Abstract

Braids play a remarkable role in the areas of knot theory, low dimensional topology, number theory, algebraic geometry, geometric group theory, algebraic topology and mathematical physics. Moreover, braid groups also have a comprehensive role mostly in applied fields such as cryptology, robotics, fluid dynamics and molecular biology. In this study, geometric braid structure is dealt with. Isotopy classes of orientation preserving homeomorphisms on the finitely punctured disk are represented by braids. The aim of this study is to give the general properties of geometric braids, to explain to the reader about the group structure of geometric braids, isotopy classes and how a geometric braid on the disk is naturally isomorphic to the Mapping Class Group (MCG).

Keywords: Geometric Braids, n -Punctured Disk, Mapping Class Group (MCG).

1. Giriş

Örgü gruplarının matematikteki önemi önce Gauss ve bundan bir asır sonra 19. yüzyılda Hurwitz tarafından fark edilmiştir. Ancak, bu gruplar 1920'lerde Emil Artin tarafından tanıtılmıştır [1]. Örgü grupları, geometri ve cebiri çok iyi bir şekilde birleştirir; matematiğin, fiziğin, son zamanlarda polimer kimyanın ve moleküler biyolojinin çok çeşitli alanlarında uygulamalara sahiptir. Örgü teorisinin uygulamalarından bazıları Garside tarafından çözülen eşlenik problemi, kriptoloji uygulamaları, kürenin homotopi grupları ile bağlantıları ve örgülerin dinamikleridir. n adet noktası çıkarılmış standart bir disk olan D_n (n adet işaretlenmiş noktalı disk ve bu işaretli noktalar diskin yatay eksenindedir) üzerinde, yön koruyan homeomorfizmaların izotopi sınıfları örgüler tarafından temsil edilmektedir [2]. Hall ve Yurttaş, Dynnikov koordinatlarını kullanarak her bir örgünün topolojik entropisini hesaplayan alternatif bir yöntem geliştirmişlerdir [3]. Bu yöntem n noktası çıkarılmış disk üzerindeki yön koruyan homeomorfizmaların izotopi sınıflarının aileleri üzerinde tanımlanmıştır. Bu izotopi sınıfları Artin örgü grup elemanları tarafından tanımlanabilmektedir. Yurttaş [4]'ün çalışmasında örgülerin de yardımıyla D_n 'deki bir integral laminasyonun (sonlu sayıdaki esas basit kapalı eğrilerin izotopi sınıflarının ayrık bir birleşimi) belirli bir türdeki başka bir integral laminasyon ile geometrik kesişim sayısını hesaplayan

*Sorumlu yazar: alev.meral@dicle.edu.tr

Geliş Tarihi: 01.11.2019, Kabul Tarihi: 28.04.2020

bir yöntem sunulmaktadır. Böylece, iki keyfi integral laminasyonun geometrik kesişim sayısını bulan bir yol geliştirilmiştir ve bu yol Yurttaş ve Hall [5]'de anlatılmaktadır. Bunun yanı sıra Yurttaş ve Hall, D_n 'deki bir integral laminasyonun bileşenlerinin sayısını hesaplamak için etkili bir algoritma geliştirmiştir [6]. Dynnikov ve Wiest, cebirsel ve geometrik bakış açılarıyla bir örgünün karmaşıklığını tanımlayan bir ölçü tanımlamışlardır [7]. Cebirsel olarak, bazı üreteçler tanımlayarak bir örgünün uzunluğunun standart kavramını değiştirmişlerdir. Böylece, örgü karmaşıklığı kavramlarının kıyaslanabilir olduğunu görmüşlerdir. Finn ve Thiffeault, geniş örgüleri analiz etmek ihtiyacından dolayı torus üzerindeki örgülerin topolojik entropisini hesaplamak için hızlı bir metot geliştirmişlerdir [8]. Dehornoy, Artin örgü grubunun kelime problemine en etkili çözümleri tanımlamıştır [9]. Diğer bir deyişle, örgü izotopi problemine en etkili çözümleri geliştirmiştir. Bu ise, özellikle kriptoloji uygulamaları açısından kullanışlı olmaktadır. Budisic ve Thiffeault 2015 yılında iki boyutlu akımlara uygulanabilir alternatif bir hesaplama sunmuştur [10]. Bu metot girdi olarak sadece akış yörüngelerinin seyrek bir kümesini kullanmaktadır. Burada, yörüngelerin seyrek kümesini temsil etmek için örgüler kullanılmıştır. Bu cebirsel nesnelere, yörüngelerin bir projeksiyon eksenine göre pozisyonları nasıl değiştirdiklerini kaydetmektedir. Bu çalışmada, geometrik örgü kavramı detaylı bir şekilde incelenip tanımlanacaktır.

2. Materyal ve Metot

Bu bölümde geometrik örgüler için gerekli olan temel tanım ve teoremler verilecektir. S bir yüzey olsun. Bu çalışmada yüzeyi kompakt, yönlü 2-manifold olarak düşüneceğiz. Bu yüzey sınıra sahip olabilir. (S, N) , S 'nin sonlu N altkümesi ile birlikte bir yüzey belirtsin. Burada N , S üzerindeki çıkarılmış/işaretlenmiş noktaların bir kümesi olarak alınmaktadır. Bu çalışmada (S, N) yüzeyini, n noktası çıkarılmış/işaretlenmiş D_n diski olarak düşüneceğiz.

Tanım 2.1. 2-boyutlu bir nesne, bir yüzey üzerinde bulunduğu yere tekrar geldiğinde kendi ayna görüntüsü olacak şekilde sürekli olarak hareket ettirilemiyorsa bu yüzeye *yönlendirilebilir yüzey* denir. Aksi takdirde bu yüzey *yönlendirilemez* olurdu. Yani, eğer bir yüzeyde sürekli bir şekilde ilerleyen tutarlı bir rotasyon tanımlanabiliyorsa bu yüzey yönlendirilebilirdir.

Tanım 2.2. Topolojik bir nesnenin, bağlantılılığını veya cebirsel özelliklerini koruyacak şekilde belirli bir alandaki temsiline *gömme* denir.

Tanım 2.3. $\alpha((0, 1)) \subseteq S \setminus N$ özelliğine sahip $\alpha: [0, 1] \rightarrow S$ sürekli dönüşümüne S 'de bir *yol* denir. α , başlangıç noktası $\alpha(0)$ ve bitiş noktası $\alpha(1)$ olan iki adet uç noktaya sahiptir. Uç noktaları eşit olan yola ise *kapalı eğri* denir ve c ile gösterilir.

Tanım 2.4. α , S 'de bir yol olsun. α yolu S 'ye gömülü ise, α 'nın görüntüsü S 'de bir *yay* olarak adlandırılır. c kapalı eğrisi kesişmiyor ve S 'ye gömülü ise c 'nin görüntüsüne S 'de bir *basit kapalı eğri* denir. Böylece, yay ve basit kapalı eğri, görüntüleri S 'nin alt kümesi olan birer dönüşüm olarak değil, doğrudan S 'nin birer alt kümesi olarak tanımlanır.

Tanım 2.5. S 'de α ve β iki yol olsun. α ve β yolları arasındaki *homotopi*, bir $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S$ sürekli dönüşümdür ve bu dönüşüm aşağıdaki bütün koşulları sağlar:

- (i) Her $x \in [0, 1]$ için $H(x, 0) = \alpha(x)$ ve $H(x, 1) = \beta(x)$,
- (ii) Her $t \in [0, 1]$ için $H(0, t) = \alpha(0) = \beta(0)$ ve $H(1, t) = \alpha(1) = \beta(1)$,
- (iii)

ve α ve β yollarının iki uç noktası dışındaki noktalarının hiçbirisi N kümesinde bulunamayacağı için

- (iv) Her $x \in (0, 1)$ ve her $t \in [0, 1]$ için $H(x, t) \notin N$

dir. α ve β yolları arasında böyle bir H homotopisi varsa α ve β yolları *homotopiktir* denir ve $\alpha \simeq \beta$ ile gösterilir. Her $t \in [0, 1]$ için $H(x, t)$ bir gömme ise, yani α ve β yollarının görüntüleri S 'de birer yay ise, o zaman bu yaylar *izotopiktir* ve bu durumda H , α 'dan β 'ya bir *izotopi* olarak adlandırılır.

S yüzeyinin sınırında ve N 'de ortak uç noktaları olan yaylar ve S 'deki basit kapalı eğriler için homotopi ve izotopi kavramları aynı olur [17]. İzotopi, (S, N) 'nin bütün homeomorfizmalarının kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı tanımlar ve f 'yi içeren izotopi sınıfı $[f]$ ile gösterilir. (S, N) 'nin yön koruyan homeomorfizmalarının izotopi sınıflarının kümesi bir grup oluşturur. Burada grup işlemi homeomorfizmaların birleşimi olarak alınmaktadır.

Tanım 2.6. (S, N) 'nin *Gönderim Sınıf Grubu (Mapping Class Group)*, (S, N) 'nin yön koruyan homeomorfizmalarının izotopi sınıflarının grubudur ve $MCG(S, N)$ ile gösterilir.

Bu çalışmada, n adet noktası çıkarılmış disk olan (D^2, N_n) 'nin standart bir modeli üzerinde çalışacağız. $D_n, (D^2, N_n)$ 'yi ifade etmek üzere,

$$D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2: \|x\| \leq 1\} \text{ ve } N_n = \{a_r = \left(-1 + \frac{2r}{n+1}, 0\right): 1 \leq r \leq n\}$$

olarak tanımlanmaktadır.

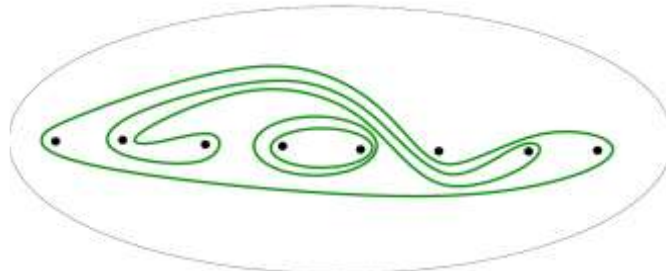
Teorem 2.1. (Alexander lemma). D_n 'nin Gönderim Sınıf Grubu $MCG(D_n)$, $n = 0$ ya da $n = 1$ ise birim gruptur.

$MCG(D_n)$, $n > 1$ olduğunda n -örgü grubunun kendi merkezine bölümüne izomorftur. Bu durum daha sonraki bölümlerde açıklanacaktır.

Tanım 2.7. İşaretlenmiş nokta içermeyen bir diski, sadece 1 adet işaretlenmiş nokta içeren bir diski veya işaretlenmiş nokta içermeyen bir halkayı sınırlandıran S 'deki bir basit kapalı eğriye *esas olmayan eğri* denir. Aksi takdirde, bu eğriye *esas eğri* denir.

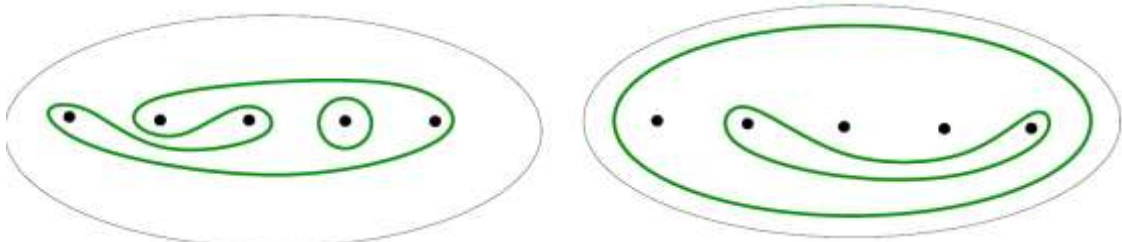
Tanım 2.8. S 'deki sonlu sayıda esas basit kapalı eğrinin izotopi sınıflarının ayırık bir birleşimine *integral laminasyon* denir ve S 'deki integral laminasyonların kümesi \mathcal{L}_n ile gösterilir.

Uyarı 2.1. Bir integral laminasyonun eğrileri karşılıklı olarak homotopik / izotopik olabilirler. Şekil 1 D_8 'de bir integral laminasyon örneğini göstermektedir.



Şekil 1. D_8 'de bir integral laminasyon

Şekil 2'deki D_5 'te bulunan basit kapalı eğrilerin ayırık birleşimleri bir integral laminasyon oluşturmamaktadırlar. Şekil 2'nin sol tarafındaki eğri sisteminde 1 adet işaretlenmiş noktayı sınırlandıran eğri vardır; sağ tarafındaki eğri sisteminde ise halkayı sınırlandıran eğri bulunmaktadır.

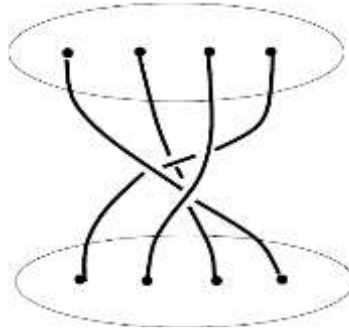


Şekil 2. Bu eğri sistemleri integral laminasyon değillerdir

3. Geometrik Örgüler

D_n üzerindeki yön koruyan homeomorfizmaların izotopi sınıfları örgülerle temsil edilmektedir [2]. Bu bölümde geometrik örgülerle ilgili bazı temel tanım ve teoremler sunulmuş, geometrik örgülerin grup yapısı incelenmiş ve son olarak D_n 'nin gönderim sınıf grubunun neden örgü grubunun kendi merkezine bölümüne izomorf olduğu açıklanmıştır.

Tanım 3.1. Bir geometrik örgü, $D_n = (D^2, N_n)$ olmak üzere, $D^2 \times [0, 1]$ 'de n adet ayırık $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ yaylarının bir koleksiyonudur ve B_n , geometrik örgülerin kümesi olmak üzere bir geometrik örgü $\beta \in B_n$ ile gösterilir. Bu koleksiyon, $N_n \times \{0\}$ 'in noktalarını $s \in [0, 1]$ olmak üzere her bir $D^2 \times \{s\}$ düzleminin her bir yay ile sadece tek bir noktada kesişeceği şekilde $N_n \times \{1\}$ 'in noktalarına bağlar. β geometrik örgüsü tarafından üretilen permütasyon p_β olmak üzere, başlangıç noktası $(a_r, 0)$ ve bitiş noktası $(a_{p_\beta(r)}, 1)$ olan yaya β 'nin r 'nci ipi denir. D_4 'te bir geometrik örgü örneği için Şekil 3'e bakınız. Her şeyin uygun izotopi altında alındığına dikkat ediniz.



Şekil 3. D_4 'te bir geometrik örgü

Geometrik örgülerin kümesi B_n , aşağıdaki bileşke işlemi altında bir grup oluşturur:

β_1 ve β_2 , sırasıyla $\alpha_j^1: [0, 1] \rightarrow D^2 \times [0, 1]$ ve $\alpha_j^2: [0, 1] \rightarrow D^2 \times [0, 1]$ yaylarıyla $D^2 \times [0, 1]$ 'e gömülü olan iki geometrik n -örgü olsun. $\theta: D^2 \times [0, 1] \rightarrow D^2$ izdüşüm fonksiyonu ve p_1, β_1 tarafından üretilen permütasyon olmak üzere, $\beta_1\beta_2$ bileşkesinin α_j yayları

$$\alpha_j(t) = \begin{cases} (\theta(\alpha_j^1(2t)), t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ (\theta(\alpha_{p_1(j)}^2(2t-1)), t) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

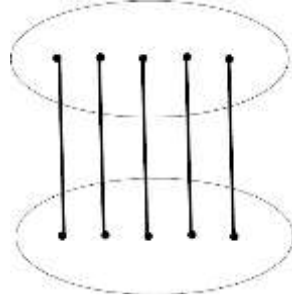
olarak tanımlanır. Görsel bir ifadeyle, bu işlem β_1 'in iplerinin alt tarafını β_2 'nin iplerinin üst tarafıyla birleştirir, ardından oluşturulan örgüyü I birim küme olmak üzere $D^2 \times I$ 'ya gömülecek şekilde ezer. Verilen bu işlem ile birlikte geometrik örgülerin kümesi bir grup oluşturur. Bu grupta $0 \leq i \leq 1$ olmak üzere, birim örgünün yayları (Şekil 4)

$$\alpha_j(t) = (a_i, t)$$

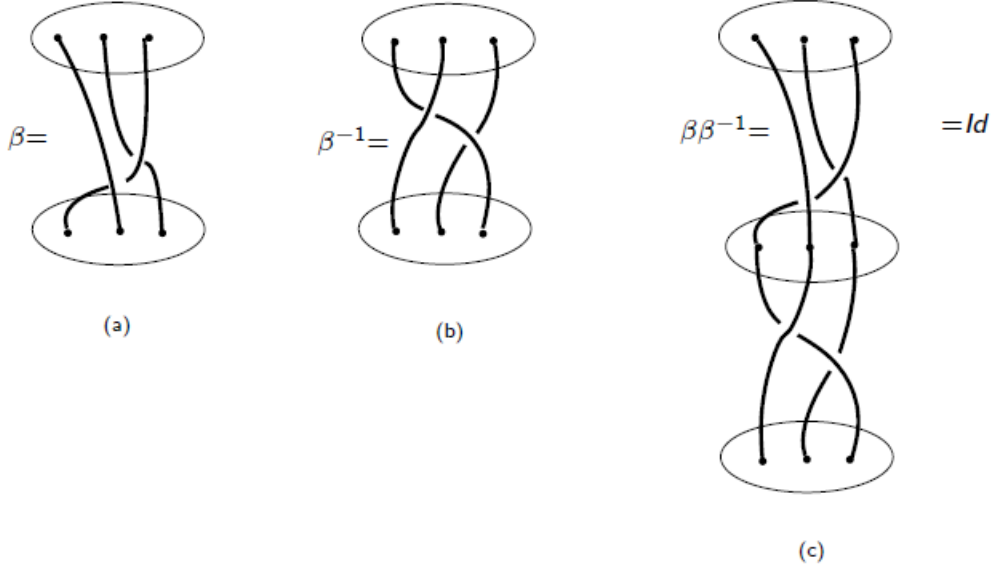
ve α_j yayları ile verilen örgünün tersi olan örgünün yayları (Şekil 5)

$$\alpha_j'(t) = (\theta(\alpha_i(1-t)), t)$$

olarak tanımlanır.



Şekil 4. D_5 'te birim örgü

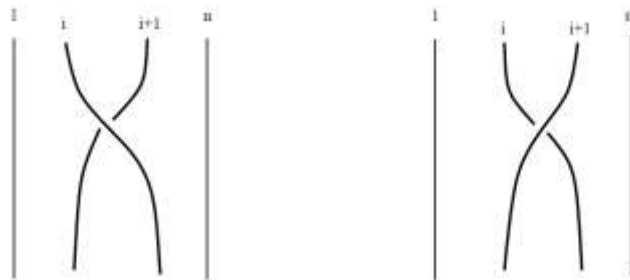


Şekil 5. a) D_3 'te bir β örgüsü, b) Bu β örgüsünün tersi: β^{-1} ve c) β ve β^{-1} 'in oluşturdukları birim örgü

Uyarı 3.1. Herhangi bir $\beta \in B_n$ geometrik örgüsü Şekil 6'da gösterilen σ_i ve σ_i^{-1} geometrik örgülerinin bir bileşimi olarak oluşturulabilir. Ayrıca, bu örgü

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \text{ ve } \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, |i - j| \geq 2$$

ilişkilerini sağlar.



Şekil 6. σ_i ve σ_i^{-1} örgüleri

Yukarıda bahsedilen grup doğal bir şekilde, aşağıda tanımlanan *Artin Örgü Grubu*'na izomorftur.

Tanım 3.2. *Artin Örgü Grubu*, $n - 1$ adet $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ üreteçlerine ve aşağıdaki ilişkilere sahip olan, sonlu bir şekilde üretilen gruptur:

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i && \text{eğer } 1 \leq i, j \leq n - 1, |i - j| \geq 2, \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} && \text{eğer } 1 \leq i \leq n - 2. \end{aligned}$$

İpleri diskin merkezi etrafında π ve 2π kadar çevirdiğimizde B_n 'de iki önemli örgü olan yarım burgu ve tam burgu örgüleri tanımlanır.

Tanım 3.3. B_n 'de yarım burgu

$$t_n = (\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})(\sigma_1 \dots \sigma_{n-2}) \dots (\sigma_1 \sigma_2)(\sigma_1),$$

ve tam burgu

$$T_n = t_n^2 = (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^n$$

ile verilir.

Teorem 3.1. ([11]). B_n 'nin merkezi $\mathcal{M}(B_n)$, $n \geq 3$ için tam burgu tarafından üretilen sonsuz devirli altgrupdur. Yani, $\mathcal{M}(B_n) = \langle T_n \rangle$ 'dir.

Teorem 3.2. ([18]). $MCG(D_n)$, Artin Örgü Grubu B_n 'nin kendi merkezine bölümüne izomorfudur. Yani, $MCG(D_n) \cong B_n/\mathcal{M}(B_n)$ 'dir.

Bu iki grup arasındaki benzerliğin nasıl çalıştığını kısaca açıklayalım. İlk olarak, verilen bir $g \in MCG(D_n)$ gönderim sınıfından bir örgünün nasıl oluşturulduğu aşağıdaki gibi açıklanabilir:

$f \in g$ olsun. $f : D^2 \rightarrow D^2$ olduğuna dikkat edelim. Teorem 2.1'den id birim fonksiyon olmak üzere, $\gamma_0 = id : D^2 \rightarrow D^2$ ve $\gamma_1 = f : D^2 \rightarrow D^2$ olacak şekilde bir $\{\gamma_t\} : D^2 \rightarrow D^2$ izotopisi vardır. $\bigcup_{t \in [0,1]} \gamma_t(N_n) \times \{t\}$ birleşimi alınarak bir geometrik örgü oluşturulabilir. Bu yapının belirli bir $\{\gamma_t\}$ alınarak oluşturulduğuna dikkat edilmelidir. Eğer farklı bir $\{\gamma_t\}$ izotopisi seçilseydi, başka bir örgü elde edilecekti. Ancak, farklı izotopiler seçmek T_n 'nin kuvvetlerine göre farklılaşan örgüler oluşturmaktadır. Bu nedenle, $MCG(D_n)$ 'den $B_n/\langle T_n \rangle = B_n/\mathcal{M}(B_n)$ 'ye bir homeomorfizma elde edebilmek için $B_n/\langle T_n \rangle$ bölümünü alırız. Şimdi, bir örgüden homeomorfizma elde edilmesini sağlayan ters yapıyı açıklayalım. $\kappa(0, r)$, merkezi \mathbb{R}^2 'nin orijini olan, r yarıçaplı bir küre olsun. $f : \kappa(0, 2) \rightarrow \kappa(0, 2)$ fonksiyonu kutupsal koordinat sisteminde

$$f(r, T) = \begin{cases} (r, T + \pi) & r \leq 1, \\ (r, T + \pi(2 - r)) & 1 \leq r \leq 2 \end{cases}$$

olarak tanımlanır. $1 \leq i \leq n - 1$ için yalnızca i ve $i + 1$ adet çıkarılmış nokta içeren, diğerlerini içermeyen $B_1^i \subseteq B_2^i \subseteq D_n$ diskleri seçilsin. Bir $h_i : B_2^i \rightarrow \kappa(0, 2)$ homeomorfizması seçilsin ve bu homeomorfizma $h_i(B_1^i) = \kappa(0, 1)$, $h_i(a_i) = (-1/2, 0)$ ve $h_i(a_{i+1}) = (1/2, 0)$ koşullarını sağlasın. $f_i : D_n \rightarrow D_n$,

$$f_i = \begin{cases} h_i^{-1} \circ f \circ h_i & x \in B_2^i, \\ id & x \notin B_2^i \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Verilen bir $\beta = \prod \sigma_{i_k}^{\epsilon_k}$ için, karşılık gelen gönderim sınıfı $[f] \in MCG(D_n)$, $f = \bigcirc f_{i_k}^{\epsilon_k}$ birleşimini içerir.

Uyarı 3.2. Teorem 3.2, $MCG(D_n)$ 'nin \mathcal{L}_n üzerindeki etkisinin B_n 'nin \mathcal{L}_n üzerinde bir etki tanımladığını ima etmektedir. Ancak, örgü etkilerinin birleşimi için düzene dikkat edilmelidir. Birleşme soldan sağa doğru olmalıdır. Yani, c bir eğri ve $\beta_1, \beta_2 \in B_n$ ise, $(\beta_1 \beta_2)(c) = \beta_2(\beta_1(c))$ 'dir.

4. Uygulama

Örgüler, \mathcal{L}_n üzerinde $MCG(D_n)$ 'nin etkisini görselleştirmek için uygun bir yol sağlamaktadır.

Tanım 4.1. Bir yüzey üzerindeki ölçülen yapraklanmaların (measured foliations) [12] çapraz bir çiftini, bu çiftten birini bir $\tau > 1$ gerçekte sayı ile düzgün bir şekilde gererek, diğeri $1/\tau$ ile düzgün bir şekilde büzerek koruyan otomorfizmaya *pseudo-Anosov* denir. Burada τ , pseudo-Anosov otomorfizmasının büyüme oranıdır.

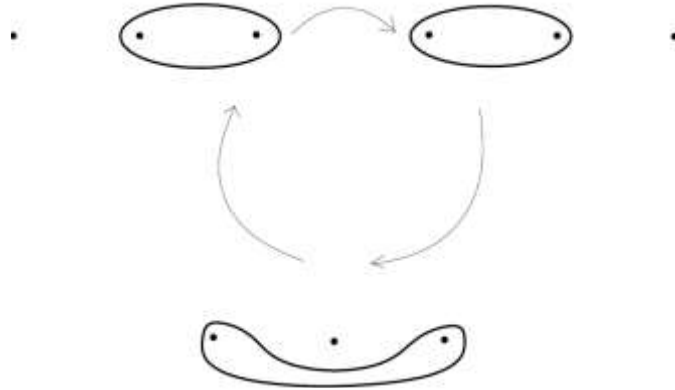
Uygulama için verilen aşağıdaki örnek, [19]'dan detaylı bir şekilde incelenebilir.

Örnek 4.1. Şekil 7'de gösterilen, basit kapalı bir eğri olan c olsun.



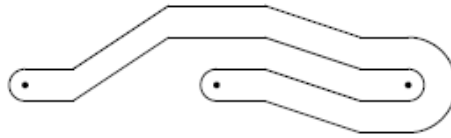
Şekil 7. D_3 üzerinde bir c basit kapalı eğrisi

Sonlu sıralı $\beta = \sigma_1\sigma_2$ örgüsünün etkisi Şekil 8 ile gösterilmektedir.

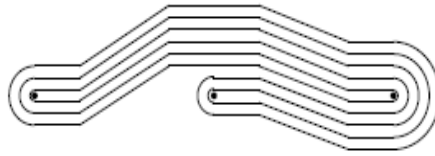


Şekil 8. $\beta^3(c) = c$

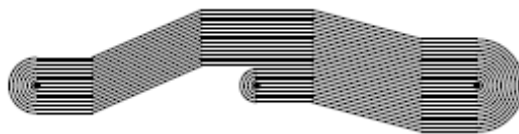
Pseudo-Anosov örgüsü olan $\gamma = \sigma_1\sigma_2^{-1}$ 'in etkisi ise Şekil 9'dan başlayarak Şekil 12'ye kadar gözlemlenebilir.



Şekil 9. $\gamma(c)$



Şekil 10. $\gamma^2(c)$



Şekil 11. $\gamma^3(c)$



Şekil 12. $\gamma^4(c)$

Şekillerden de gözlemleneceği gibi, pseudo-Anosov örgülerin etkisi altında basit eğriler izotopi sınıfı içindeki kompleks eğrilere dönüşmektedir.

6. Sonuç ve Öneriler

Pseudo-Anosov örgülerinin etkisi altında eğrilerin yinelenmelerini takip etmek oldukça zor olabilir (Şekil 12'ye bakınız). Bu problem, [13,14,19]'da \mathcal{L}_n kümesi koordinatlandırılarak ve σ_i ve σ_i^{-1} üreteçlerinin \mathcal{L}_n üzerindeki etkisini bu koordinatlar cinsinden veren *Güncelleme Kurallarıyla* çözülmüştür.

Yazarların Katkısı

Çalışmada her iki yazar da eşit oranda katkı sunmuştur.

Çıkar Çatışması Beyanı

Yazarlar arasında herhangi bir çıkar çatışması bulunmamaktadır.

Araştırma ve Yayın Etiği Beyanı

Yapılan çalışmada, araştırma ve yayın etiğine uyulmuştur.

Kaynaklar

- [1] Artin E. 1926. Theorie der Zöpfe, Abh. Math. Sem. Hamburg. Univ, 4: 47-72.
- [2] Birman J.S. 1974. Braids, links, and mapping class groups. Princeton University Press, N. J. Annals of Mathematics Studies, Princeton, 1-82.
- [3] Hall T., Yurttaş O. 2009. On the topological entropy of families of braids. Topology and its Applications, 156: 1554-1564.
- [4] Yurttaş O. 2013. Geometric intersection of curves on punctured disks. The Mathematical Society of Japan. J. Math. Soc. Japan, 65 (4): 1153-1168.
- [5] Yurttaş O., Hall T. 2018. Intersection of Multicurves from Dynnikov Coordinates. Bull. Aust. Math. Soc, 98: 149-158.
- [6] Yurttaş O., Hall T. 2017. Counting components of an integral lamination. Manuscripta mathematica, 153 (1-2): 263-278.
- [7] Dynnikov I., Wiest B. 2007. On the complexity of braids. J. Eur. Math. Soc, 9: 801-840.
- [8] Finn M.D., Thiffeault J.L. 2007. Topological Entropy of Braids on the Torus. SIAM J. Appl. Dyn. Syst., 6 (1): 79-98.
- [9] Dehornoy P. 2008. Efficient Solutions to the Braid Isotopy Problem, Discrete Applied Mathematics, 156 (16): 3091-3112.
- [10] Budisic M., Thiffeault J.L. 2015. Finite-time braiding exponents. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 25 (8): 087407. Doi: 10.1063/1.4927438.
- [11] Chow W-L. 1948. On the algebraic braid group. Ann. of Math, 49 (2): 654-658.
- [12] Thurston W. 1988. On the geometry and Dynamics of diffeomorphisms of surfaces. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 19 (2): 417-431.

- [13] Dynnikov I.A. 2002. On a Yang-Baxter mapping and the Dehornoy ordering. *Uspekhi Mat. Nauk*, 57 (3 (345)): 151-152.
- [14] Moussafir J.O. 2006. On computing the entropy of braids. *Funct. Anal. Other Math.*, 1 (1): 37-46.
- [15] Fathi A., Laudenbach F., Poenaru V. 1979. Travaux de Thurston sur les surfaces, *Astérisque. Séminaire Orsay, Société Mathématique de France, Paris*, 1-66.
- [16] Meral A. 2019. Sonlu İşaretlenmiş Noktalı Tor Yüzeylerinde Genelleştirilmiş Dynnikov Koordinatları. Doktora Tezi, Dicle Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Diyarbakır.
- [17] Epstein D.B.A. 1966. Curves on 2-manifolds and isotopies. *Acta Math*, 115: 83-107.
- [18] Farb B., Margalit D. 2012. *A Primer on Mapping Class Groups*. Princeton University Press, 1-463.
- [19] Yurttaş O. 2011. Dynnikov Coordinates and pseudo-Anosov braids. Doktora Tezi, Liverpool Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Liverpool.