ÇOK AMAÇLI LİNEER KESİRLİ PROGRAMLAMA PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNDE BİR PARAMETRİK YAKLAŞIM KULLANILMASI ÖNERİSİ

İ. Müfit Giresunlu
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi Matematik Bölümü

Kısa Özet

Bu çalışmada Kesirli Programlama (KP) problemlerinin çözüm yöntemlerinden olan parametrik yaklaşım yöntemlerinden biri kullanılarak, Çok Amaçlı Lineer Kesirli Programlama (ÇALKP) problemi Çok Amaçlı Lineer Programlama (ÇALP) problemine dönüştürelerek çözülmüştür.

Anahtar Sözcükler: Kesirli Programlama, Çok Amaçlı Proglamlama (ÇAP), Parametrik Yaklaşım, Etkin Çözüm.

GİRİŞ

Yaşam problemlerinin ve bilhassa ekonomik problemlerin bazıları matematik model olarak KP problemidir. Örneğin; kar/maliyet, getiri/risk, maliyet/zaman {9}. Bu tür problemlerin çözümündeki amaç, optimum çözümünü bulunmasıdır.

KP problemlerini optimum çözümünü bulmak için parametrik yaklaşım kullanan birçok çalışma bulunmaktadır. Chames ve Cooper'ın değişken dönüşümü yöntemi {2} bu konuda öncülük özelliği taşıyan bir çalışmadır. Bir diğeri ise güncelleştirilmiş amaç fonksiyonu yöntemidir. {10}. Dinkelbach algoritması {4}, Mazzkoleni'nin hareketli kesimler yöntemi {6}, Iberaki'nin Newton-Raphson ile ikili araştıma yöntemlerini kullanarak yapmış olduğu çalışma {5} KP probleminin çözümü için kullanılan parametrik yaklaşımlardır. Bu yöntemlerin ortak özelliği tek amaçlı KP problemini kesirsiz hale dönüştürerek çözmektir.

Bu çalışmada da aynı düşünce ile hareket edilmiş ve {4},{5},{6} yöntemlerinden yararlanarak bir **ÇALKP** problemi eşdeğeri olan **ÇALP** problemine dönüştürülerek çözülüp bir etkin çözüm elde edilmiştir. Etkin çözüm denilmesini nedeni amaç fonksiyonu sayısın birden fazla olmasıdır{10}.

2. LİNEER KESİRLİ PROGRAMLA VE BİR λ PARAMETRESİNE BAĞLI PARAMETRİK YAKLAŞIM İLİŞKİSİ

KP problemi genel olarak, $j=1,2,\ldots,n$ ve $v=1,2,\ldots,m$ için;$S=\{x\in R^n | h_v(x)\leq b_v, x_j\geq\}\subseteq \mathbf{R}^n$ uygun bölge ve $\forall x\in S$ için $g(x) > 0$ olmak üzere

$$P.\text{maks}\left\{p(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\, x \in S\right\}$$

şeklinde tanımlanır. Şayet f(x), g(x), h(x) fonksiyonları lineer ise (1) problemi Lineer Kesirli Programlama (LKP) problemi olarak adlandırılır [4]. Burada S boş olmayan kompakt bir küme, f(x) ve g(x) fonksiyonları süreklidir.

P probleminin çözümü için giriş bölümünde verilen yöntemlerden birisi, bir $\lambda\in$ **R** bir parametre olmak üzere

şeklinde oluşturulan parametrik yaklaşım yöntemidir [5].

$$Q(\lambda): \text{maks}\ \{q(x) = f(x) - \lambda g(x)\ | q\in S\}$$

Teorem: x*, P probleminin çözümü ve

$$\frac{f(x^*)}{g(x^*)} = \lambda^* \text{ olsun. O zaman;}$$

$$P.\text{maks}\left\{p(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\, x \in S\right\} = \lambda^* \Leftrightarrow Q(\lambda^*) : \text{maks}\ \{q(x) = f(x) - \lambda^* g(x)\ |\ x \in S\} = 0$$

ISPAT. $\Rightarrow$: x*, P probleminin çözümü olduğundan, $\forall$ x $\in$ S için

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{f(x^*)}{g(x^*)} = \lambda^*$$

dır. (3)'den $\forall$ x $\in$ S için

(i) : $f(x) - \lambda^* g(x) \leq 0$

(ii): $f(x^*) - \lambda^* g(x^*) = 0$

elde edilir. Eğer (i) durumu göz önüne alınırsa

$$\text{maks } \{f(x) - \lambda^* g(x) \mid x \in S\} = 0$$

olur. Çünkü "0" üst sınırdır. (ii) ise ispat açıktır.

$\Leftarrow$: x*, $Q(\lambda^*)$ = maks $\{g(x) \mid x \in S\}$ probleminin bir çözümü ise

$$f(x^*) - \lambda^* g(x) = 0$$

ve (2) tanımı gereği $\forall$ x $\in$ S için;

$$f(x) - \lambda^* g(x^*) \leq f(x^*) - \lambda^* g(x^*) = 0$$

olacaktır. (4)'den $\forall$ x $\in$ S için;

(iii) : $f(x) - \lambda^* g(x) \leq 0$

(iv) : $f(x^*) - \lambda^* g(x^*) = 0$

elde edilir. Şayet (iii) eşitsizliği gerçekleniyorsa $\forall$ x $\in$ S için; $\frac{f(x)}{g(x)}$ oranı $\lambda^* \in R$ ile üstten sınırlanıyor demektir, yani;

$$\text{maks } \left\{ p(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \mid x \in S \right\} \leq \lambda^*$$

dır. Öyle ise x*, P probleminin maksimum değerini veren çözümüdür. (iv) eşitliği sağlanıyorsa x*'ın P'nin maksimum değerini veren çözüm olduğu açıktır.

Bu teoremin sonucu olarak $\forall$ x $\in$ S ve $\lambda \in R$ olmak üzere aşağıdaki bağıntıları yapabiliriz [5].

$$\text{maks } \{f(x) - g(x)\} > 0 \Leftrightarrow \lambda < \lambda^*$$

$$\text{maks } \{f(x) - g(x)\} > 0 \Leftrightarrow \lambda > \lambda^*$$

$$\text{maks } \{f(x) - g(x)\} > 0 \Leftrightarrow \lambda = \lambda^*$$

3. YÖNTEMİN AÇIKLANMASI

Verilen teorem ve sonucu olan (5), (6), (7) bağıntıları göz önüne alınarak $Q(\lambda)$ yardımı ile [6]'da verilen yönteme benzer biçimde P'nin çözümünün nasıl hesaplandığını açıklayalım.

Herhangi bir $x_0 \in S$ başlangıç noktası alınsın. Bu nokta kullanılarak

$$\frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \lambda_0; \lambda_0 \in R$$

değeri elde edilir ve

$$\text{maks } \{q_1(x) = f(x) - \lambda_0 g(x) \ x \in S\}$$

oluşturulur. (9) Problemi çözülerek (simpleks algoritması ile) bir $x_1 \in S$ noktası elde edilir. Bu çözümü

$$\text{maks } \{q_1(x) = f(x) - \lambda_0 g(x) \ x \in S\} = q_1(x_1)$$

ile gösterelim. Eğer, $q_1(x_1) = 0$ ise yani (7) sağlanıyorsa x_0, P probleminin amaç fonksiyonunun maksimum değerini veren çözümüdür. Şayet $q1(x1) \neq 0$ ise işlemin ikinci adımına geçilir. Problemin optimum çözümüne ulaşılıncaya kadar benzeri işlemler sürdürülür.

Çözümün sonlu bir t adımda bulunduğunu varsayalım. O zaman, $x_t \in S$ için

$$\frac{f(x_t)}{g(x_t)} = \lambda_1; t \in \mathbf{N} \text{ ve maks } \{q_{t+1}(x) = f(0) - \lambda_t g(x) \ x \ S\} = q_{t+1}(x_{t+1})$$

elde edilir. Burada, $x_{t+1} \in S$, P probleminin etkin noktasıdır. Yani; optimum çözüm

$$x_t = x^* \text{ için maks } \left\{ p(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \mid x \in S \right\} = \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda^*$$

dır. LKP problemlerinde bu yaklaşım kullanıldığında aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$x_t = x_{t+1} = x^*$$

İlerideki bölümlerde kullanılacağı için, (11)'de verilen ve t'inci adımda P'nin etkin çözümünü veren problemi

$$Q(\lambda^*) = \text{maks } \{q^*(x) = f(x) - \lambda^* g(x)\ x \in S\}$$

şeklinde tanımlayalım.

4. ÇALKP PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN ÖNERİLEN YÖNTEM

ÇALKP ve ÇALP problemlerini sırası ile genel tanımları ile verelim: j = 1,2...., k için ÇALKP problemi

$$x \in S \text{ olmak üzere; maks} \left\{ p_i(x) = \frac{f_i(x)}{g_i(x)} \right\}$$

dir. Burada fi (x) ve gi(x) fonksiyonları lineer ve $\forall\ x \in S\ g_i(x) > 0$'dır. ÇALP problemi ise

$$x \in S \text{ olmak üzere; maks } \{\pi_i(x)\}$$

şeklinde tanımlanır. $\pi_i(x)$ fonksiyonları lineerdir.

Şimdi çözüm önerimizi açıklayalım: 2. Bölüm'de verilen bilgiler altında (14) problemindeki herbiri amaç fonksiyonu için (13) tanımını kullanarak

$$P_i\text{: maks} \left\{ p_i(x)\ \frac{f_i(x)}{g_i(x)} \mid x \in S \right\} \approx Q_i(\lambda_i^*)\text{: maks } \{q_i(x) = f_i(x) - \lambda_i^* g_i(x) \mid x \in S\}$$

eşdeğer problemlerini oluşturalım. Genel tanımları (14), (15) ile verilen ÇALP ve ÇAKLP problemlerini gözönüne alırsak, (16) eşdeğerliliğini kullanarak $x \in S$ olmak üzere

$$\text{maks} \left\{ p_i(x) = \frac{f_i(x)}{g_i(x)} \right\} \approx \text{maks } \{q_i(x) = f_i(x) - \lambda_i^* g_i(x)$$

elde edelim.

(17)'nin sağ tarafı bir ÇALP problemidir. Bu problem literatürde bilinen çözüm yöntemlerinden biri ile çözülerek (14) probleminin bir etkin çözümü bulunur. Çünkü; x^* (14) probleminin bir etkin çözümü ise $\forall\ x \in S$ için $p_i(x) \leq p_i(x^*)$. Bu çözüm aynı zamanda tam etkin bir çözümüdür [3].

5. ÖRNEK

$$P = \begin{bmatrix} \text{maks}\left\{p_1(x) = \dfrac{x_1 - x_2 + 6}{x_1 + 2x_2 + 3}\right\} \\ \text{maks}\left\{p_2(x) = \dfrac{3x_1 + x_2}{2x_1 + x_2 + 4}\right\} \\ \text{maks}\ \{p_3(x) = 8x_1 + 3x_2\} \end{bmatrix};\ x \in S = \left\{\begin{array}{c} x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 + 4x_2 \geq 6 \\ x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ 3x_1 - 4x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + x_2 \leq 27 \\ -x_1 + 7x_2 \leq 35 \\ x_1 \geq 0\,.\ x_2 \geq 0 \end{array}\right\} \subseteq \mathbf{R}^2$$

(18) probleminin bir etkin çözümünü bulmak için (17)'deki P_i, $Q_i(\lambda_i^*)$'leri oluşturalım.

$$P_1 : \left\{p1\ (x) = \frac{x_1 - x_2 + 6}{x_1 + 2x_2 + 3} \mid x \in S\right\}$$

1. Adım:

$x_{10} = (4,3) \in S$ başlangıç noktası olsun.

$q_1\ (x_{10}) = \lambda_{10} 7/13 \Rightarrow q_{11}\ (x) = (6/13)\ x_1 - (27/13)\ x_2 + 57/13 \Rightarrow$

maks $\{q_{11}(x) \mid x \in S\} = q_{11}\ (x_{11}) \Rightarrow x_{11} = (4,1/2) \Rightarrow q_{11}(x_{11}) = (67{,}5/13)$

$q_{11}(x_{11}) > 0 \Rightarrow \lambda_{10} < \lambda_1^*$ ((5) nedeni ile)

2. Adım:

$x_{11} = (4,1/2) \in S$ için;

$q_1\ (x_{11}) = \lambda_{11} 19/16 \Rightarrow q_{12}\ (x) = (-3/16)\ x_1 - (54/16)\ x_2 + 39/16 \Rightarrow$

maks $\{q_{12}(x) \mid x \in S\} = q_{12}\ (x_{12}) \Rightarrow x_{12} = (4,1/2) \Rightarrow q_{12}(x_{12}) = 0$

$q_{12}(x_{12}) = 0 \Rightarrow \lambda_{11} = \lambda_1^*$ ve $x_1^* = (4,1/2)$, ((7), (12) gerçeklendi: $\Rightarrow$)

$$q_{12}(x) = q_1^*\ (x)$$

$$P_2 : \left\{ p_2(x) = \frac{3x_1 + x_2}{2x_1 + 2x_2 + 4} \mid x \in S \right\}$$

1. Adım:

$x_{20} = (4,3) \in S$ başlangıç noktası olsun.

$q_2(x_{20}) = \lambda_{20} = 1 \Rightarrow q_{21}(x) = x_1 - (27/13)x_2 + 57/13 \Rightarrow$

maks $\{q_{21}(x) \mid x \in S\} = q_{21}(x_{21}) \Rightarrow x_{21} = (8,3) \Rightarrow q_{21}(x_{21}) = 4 > 0$

$q_{21}(x_{21}) > 0 \Rightarrow \lambda_{20} < \lambda_2^*$ ((5) nedeni ile)

2 Adım:

$x_{21} = (8,3) \in S$ için;

$q_2(x_{21}) = \lambda_{31}\ 27/23 \Rightarrow q_{22}(x) = (15/23)x_1 - (4/23)x_2 - 108/23 \Rightarrow$

maks $\{q_{21}(x) \mid x \in S\} = q_{22}(x_{22}) \Rightarrow x_{22} = (8,3) \Rightarrow q_{22}(x_{22}) = 0$

$q_{22}(x_{22}) = 0 \Rightarrow \lambda_{21} = \lambda_2^*$ ve $x_2^* = (8,3)$, ((7), (12) gerçeklendi: $\Rightarrow$)

$q_{22}(x) = q_2^*(x)$

P_3: maks $(p_3(x) = 8x_1 + 3x_2 \mid x \in S\} \approx \Rightarrow x_3^* = (7,6) \Rightarrow q_3^*(x)$.

P_1: maks $(p_1)(x) \mid x \in S\} \approx Q_1(\lambda_1^*)$: maks $\{$maks$\{q_1^*(x) = (-3/16)x_1 - (54/16)x_2 + 39/16 \mid x \in S\}$,

P_2: maks $(p_2)(x) \mid x \in S\} \approx Q_2(\lambda_2^*)$: maks $\{$maks$\{q_2^*(x) = (15/23)x_1 - (4/23)x_2 - 108/23 \mid x \in S\}$,

P_1: maks $(p_3)(x) \mid x \in S\} \approx Q_3(\lambda_3^*)$: maks $\{$maks$\{q_3^*(x) = 8x_1 + 3x_2 \mid x \in S\}$,

$i = 1,2,3$, olmak üzere, (22) problemlerindeki $Q_i(\lambda_i^*)$ eşdeğer problemlerinin $q_i^*(x)$ fonksiyonlarım kullanarak (19) probleminin bir etkin çözümünü bulmaya yardım edecek olan ÇALP problemini oluşturalım.

$x \in S$ olmak üzere; maks $\{q_1^*(x), q_2^*(x), q_3^*(x)\}$

(23) problemini, her $q_2^*(x)$ fonksiyonuna karşılık gelen ve

$$\sum_{i=1}^{3} \mu_1 = 1, 0 \le \mu_1$$

özelliklerini sağlayan i ağırlıklarmı bularak, literatürde bilinen ağnlıkh-toplamlar yöntemi [1] uygulanırsa

$$\mu_1 = 3/4,\ \mu_2 = 0,\ \mu_3 = 1/4;$$

$$F(x) = (3/4)\, q_1^*(x) + (1/4) q_3^*(x) = (119/64)x_1 - (114/64)x_2 + 117/64$$

elde edilir. Buradan

$$\text{maks}\ \{F(x) \mid x \in S\} \Rightarrow x^* = (8,3)$$

etkin çözümü bulunur. (19) probleminin amaç fonksiyonlarım optimum değerlerini vektörü

$$P = (0.65,\ 1.174,73)$$

dır.

6. YORUM

4. bölümde önerilen yöntem ile çözülen örnek problem Nykowski ve Zolkiewski'nin [7] çalışmasından alınmıştır. [7] çalışmasından elde edilen etkin çözüm ve amaç fonksiyonlarının optimum değerleri gösteren vektör $x_1^* = (6,3/2)$, $P_1^* = (0.875,\ 1.1143,52.5)$ ve bu çalışmada elde edilen etkin çözüm ve amaç fonksiyonlarının optimum değerleri gösteren vektör $x_2^* = (8.3)$, $P_2^* = (0.65,\ 1.174,73)$ dır.

Verilen örnek problemin her amaç fonksiyonun S uygun bölgesinde optimum değerlerini veren vektör $P^* = (1.1875,\ 1.174,747$ dir. P_t^* ve P_2^* vektörlerinin her bileşenini P^* vektörünün aynı sıradaki bileşenine oranlarsak x_1^* etkin çözümü için, her amaç fonksiyonu kendi optimum değerinin sırası ile; % 74, % 95, % 71 oranında bir diğerine, x_2^* etkin çözümünde ise % 55, % 100, % 99 oranında bir değerine ulaştığı görülür.

Böylece x_2^* etkin noktasının seçilmesi halinde son iki amaç fonksiyonunda % 5 ve % 28 bir artış, birinci amaç fonksiyonunda % 19 bir azalış görülmektedir.

Burada belirtilmesi gereken bir nokta da şudur: Birbirlerine alternatif olan bu çözümler için, kesin seçimi yapacak olan kişi; karar verici (decision maker) olacaktır.

KAYNAKÇA

1. Belenson, S.M., "An algorithm for solving multicriterion linear programming problems with examples", Operational Research Quarterly, Vol. 24, No.1, 1973, 65-77.

2. Chames, A., Cooper, W.W., "Programming with linear fractional functionals", Naval Research Logistics Quarterly, Vol.9, 1962, 181-186.

3. Choo, E.U., "Propper efficiency and the linear fractional vector maximum, problem", Operational Research Vol.3, No. 1, 1983, 216-220.

4. Dinkelbach, W., "On nonlinear fractional programming", Mathematical Programming, Vol. 26, 1983, 345-362.

5. İberaki, T., "Parametric approachs to fractional programs", Mathematical Programming, Vol. 26, 1983, 345-362.

6. Mazzoleni, P., "Some experience on a moving - truncation method applied to a nonlinear programming problem with fractional objective function", Towards Global Optimization, Edited by L.C.W. Dixon, G.P. Szeegö, 1974, 350-360.

7. Nykowski, İ., Zolkiewski, Z., "A compromise procedure for the multiple objective linear fractional programming problem", Europan Journal of Operational Research, Vol. 19, 1985, 91-97.

8. Schaible, S., "Fractional programming: Aplications and algorithms", Europan Journal of Operational Research, Vol. 7, 1981, 111-120.

9. Schaible, S., "Fractional programming", Z. Operations Research, Vol. 27, 1983, 39-54.

10. Steuer, R.E., "Multiple criteria optimization: Theory, computation and the applications", John Wiiley and Sons, 1986, 343-359.