Araştırma Makalesi / *Research Article* **Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 9(4): 2200-2206, 2019**
Matematik / *Mathematics* ***Journal of the Institute of Science and Technology,* 9(4): 2200-2206, 2019**

DOI: 10.21597/jist.566855 **ISSN: 2146-0574, eISSN: 2536-4618**

Eğrilik Teorisi Kullanarak Regle Yüzey Tasarlamada Yeni Bir Yaklaşım

Fatma GÜLER[1]*

ÖZET: Bu çalışmada küresel gösterge eğrisi tarafından üretilen regle yüzeyler için yeni bir yaklaşım elde edildi. Üreteç çatısı yardımıyla striksiyon eğrisi dayanak eğrisi olarak alınan regle yüzey araştırıldı. Regle yüzeylerin eğrilik teorisi kullanılarak striksiyon eğrisinin yüzey üzerinde geodezik eğri ve asimptotik eğri olması için teoremler verildi. Ayrıca, regle yüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleri ile temel formları hesaplandı. Küresel gösterge eğrisi tarafından üretilen regle yüzeye örnek verildi.

Anahtar Kelimeler: Regle Yüzey, Asimptotik Eğri, Geodezik Eğri, Üreteç Çatı.

A New Approach for Designing Ruled Surface Using the Curvature Theory

ABSTRACT: In this paper, we obtain new approach ruled surface generated by a curve on the surface of sphere called the spherical indicatrix. We expressed ruled surface which the striction curve of the surface will be taken as the base curve using the generator trihedron. We have given theorems for to be the asymptotic and geodesic curve on the surface of the striction curve using the curvature theory of the ruled surfaces. Also, we have calculated the Gaussian and the mean curvature of the ruled surface. We illustrate ruled surface generated by a curve on the surface of sphere called the spherical indicatrix.

Keywords: Ruled surface, Asymptotic curve, Geodesic curve, Generator trihedron.

[1] Fatma GÜLER (**Orcid ID:** 0000-0002-5107-8436), Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 55200, Samsun, Türkiye

*Sorumlu Yazar / Corresponding Author: Fatma GÜLER e-mail: f.guler@omu.edu.tr

Geliş tarihi / *Received:* 17.05.2019
Kabul tarihi / *Accepted:* 23.07.2019

GİRİŞ

Regle yüzeyler, eğri boyunca bir doğrunun hareketi ile oluşan yüzeylerdir. Bu yüzeyler geometrik modellemede en basit nesnelerden biridir. Nesneler koordinat düzleminde noktalardan oluşur. Nesnenin pozisyonu x, y ve z koordinatları ile belirlidir. Bu koordinatlar, bu nesneyi belirli bir yöne döndürerek bulunabilir. Regle yüzeyler inşaat mühendisliğinde, gemilerde ve araba tasarımında yaygın olarak kullanılmaktadır. Bir parametreli doğrular kümesi bir regle yüzey oluşturur, (J. Hoschek 1973; V. Hlavaty 1945). 3-boyutlu Öklid uzayında kinematik ve konumsal mekaniği incelemek için regle yüzeylerin eğrilik teorisi gereklidir, (Kirson, Y., 1975; Karadag, H. B. ve ark., 2014.).

Eğrilik teorisi, doğru ve düzlemlerin basit geometrik özelliklerini inceler ve uzay katı hareketlerini belirlemenin en kolay yoludur. Ayrıca, hareketli katı cismin hız ve ivme dağılımı ile ilgilenir. Eğrilik teorisinden elde edilen sonuçlar, küresel, düzlemsel ve uzaysal mekanizmaların sentezine ve analizine uygulanır. Uzayda katı bir nesneye sabitlenmiş bir nokta ve bir doğru bir regle yüzey çizer. Bir regle yüzeyin diğer yüzeylerde olmayan striksiyon eğrisi olarak adlandırılan eşsiz bir eğrisi vardır. Bu eğri, komşu iki ana doğru arasındaki ortak bir dik çizgi yardımı ile en kısa mesafe olarak tanımlanır. (Ryuh, 1989), çalışmasında, bir robot uç hareketinin diferansiyel özelliklerini ve robot ucuna sabitlenmiş bir noktanın hızını ve ivmesini belirlemek için eğrilik teorisini kullandı. Bu metot eğrinin geometrik modelleme tekniğini kullanarak regle yüzeyin nasıl üretildiğini göstermektedir. (Mc Carthy ve Roth,1987), bir regle yüzeyin eğrilik teorisinin hem skaler hem de dual formüllerini elde ederek bu iki formül arasında bağıntılar verdi. (Oh Y. S ve ark., 2017) yazarlar çalışmalarında regle yüzeyin dual eğrilik teorisini kullanarak robot yörüngesinin diferansiyel özellerini incelediler. (Güler F., ve Kasap E., 2018) çalışmalarında regle yüzeylerin eğrilik teorisini kullanarak robot yörünge planlaması için yeni bir metot verdiler. Bu metot ile robotun bir sonraki konumu ve diferansiyel özelliklerinin hesaplanabildiğini gösterdiler. Ayrıca regle yüzeylerin eğrilik teorisi ile ilgili Minkowski uzayında bir çok çalışma mevcuttur, (Ekici ve ark.,2008; Turhan ve Ayyıldız, 2011; Karadağ ve ark.,2014; Şahiner ve ark.,2016; Şahiner ve ark.,2018). Bu çalışmada, dayanak eğrisi striksiyon eğrisi olan regle yüzey için eğrilik teorisi kullanılarak Gauss, ortalama eğrilikleri ve temel formları hesaplandı. Striksiyon eğrisinin yüzey üzerinde geodezik eğri ve asimptotik eğri olması için teoremler verildi. Ayrıca çalışmamızı doğrulayan örnek verildi.

MATERYAL VE YÖNTEM

Regle yüzey için bir parametrik gösterim

$$X(\varphi, v) = \alpha(\varphi) + v\overline{R}(\varphi) \tag{1}$$

yazılabilir. Burada $\alpha(\varphi)$ yüzeyin dayanak eğrisi ve $\overline{R}(\varphi)$ küresel gösterge eğrisidir.

Regle yüzey φ parametresinin seçiminden bağımsızdır bu nedenle standart bir parametre

$$s(\varphi) = \int_0^{\varphi} \left| \frac{d\overline{R}}{d\varphi} \right| d\varphi \tag{2}$$

şeklinde alınabilir. Burada $R = \left| d\overline{R}/d\varphi \right|$, $\overline{R}(\varphi)$ nin hızı olarak düşünülebilir.

$\{e, t, g\}$, X regle yüzeyinin üreteç çatısı olarak adlandırılır. Burada $e = \overline{R}/\left|\overline{R}\right|$, $t = \overline{R}\,'$ ve $g = e \times t$ birim vektörlerdir, sırasıyla regle yüzeyin , $\overline{R}$ doğrultusunda birim vektörü, merkez normal ve asimptotik normali olarak adlandırılır. Üreteç çatısının türev formülleri

$$\begin{bmatrix} de/ds \\ dt/ds \\ dg/ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/R & 0 \\ -1/R & 0 & \gamma/R \\ 0 & -\gamma/R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ t \\ g \end{bmatrix} \tag{3}$$

ile verilir. Burada γ fonksiyonu küresel gösterge eğrisinin geodezik eğriliğidir, (Kirson, Y., 1975) . Küresel gösterge eğrisi yardımıyla γ fonksiyonu

$$\gamma = \frac{e \times de/d\varphi \cdot d^2e/d\varphi^2}{|de/d\varphi|^3}, \tag{4}$$

şeklinde tanımlanır, (Guggenheimer, H., 1977). Burada "$\cdot$" işlemi Öklid iç çarpım işlemidir. $X(s,v) = \alpha(s) + ve(s)$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi

$$\beta(s) = \alpha(s) - \mu(s)e(s) \tag{5}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\mu = \alpha'(s) \cdot \overline{R}'(s) \tag{6}$$

uzaklığı dayanak eğrisinin striksiyon eğrisine uzaklığıdır. (5) denkleminden s parametresine göre türev alınırsa

$$\frac{d\beta}{ds} = \left(\frac{d\beta}{ds} \cdot e\right)e + \left(\frac{d\beta}{ds} \cdot t\right)t + \left(\frac{d\beta}{ds} \cdot g\right)g \tag{7}$$

elde edilir. Böylece striksiyon eğrisinin teğet vektörü üreteç çatısına bağlı olarak

$$\frac{d\beta}{ds} = \Gamma(s)e(s) + \Delta(s)g(s) \tag{8}$$

yazılır. Burada

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &= (1/R)\,d\alpha/ds \cdot e(s) - R\,d\mu/ds \\ \Delta(s) &= (1/R)\,d\alpha/ds \cdot e(s) \times de/ds. \end{aligned} \tag{9}$$

fonksiyonlarına $X(s,v)$ regle yüzeyinin eğrilik fonksiyonları denir, (O'Neill, B., 1966). X regle yüzeyi bu fonksiyonlar ile tamamen bellidir. $\alpha(s)$ eğrisi boyunca Frenet çatısı $\{t(s), n(s), b(s)\}$ olmak üzere $t(s) = \alpha'(s),\ n(s) = \alpha''(s)/|\alpha''(s)|,\ b(s) = t(s) \times n(s)$ vektörleri sırasıyla eğrinin teğet, asli normal ve binormal vektörleri olarak tanımlanır. Frenet formüllerinin türev formülleri matris formunda

$$\begin{bmatrix} t' \\ n' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix} \tag{10}$$

şeklinde yazılır, (O'Neill, B., 1966). Burada κ ve τ, $\alpha(s)$ eğrisinin eğrilik ve burulmasıdır. Üreteç vektörü e ve $\alpha(s)$ eğrisinin binormal vektörü b arasındaki açı η olsun. Burada, Frenet çatısı ve üreteç çatısının merkez normal vektörleri aynıdır. Bu çatılar arasındaki ilişki matris formunda, (Ryuh, B. S., 1989.)

$$\begin{bmatrix} e \\ t \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin\eta & \cos\eta \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\eta & \sin\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix}, \tag{11}$$

şeklinde yazılır. Böylece eğrinin Frenet elemanları için
$t = \bar{R}' = Rr',\ n = \frac{1}{\kappa}t',\ b = t \times n \ \ ve\ \kappa = |t'|$
yazılabilir. Ayrıca eğrinin burulması merkez normal vektörünün dönme açısının açısal hızına eşittir, (Ryuh B. S., 1989). Yani

$$\eta' = -\tau. \tag{12}$$

dir.

Tanım 1. Yüzey üzerinde bir eğrinin yüzeyin asimptotik çizgisi olması için gerekli ve yeterli koşul k_n normal eğriliğinin sıfır olmasıdır. Ayrıca, yüzey üzerindeki eğrinin yüzeyin geodezik çizgisi olması için gerek ve yeter koşul k_g geodezik eğriliğinin sıfır olmasıdır, (O'Neill, B., 1966).

Tanım 2. Denklemi $X(s,v) = \alpha(s) + ve(s)$ olan bir regle yüzeyin dağılma parametresi

$$P_e = \frac{det(\alpha'(s), e(s), e'(s))}{|e'(s)|^2} \tag{13}$$

ile tanımlıdır, (O'Neill, B., 1966).

Teorem: Denklemi $X(s,v) = \alpha(s) + ve(s)$ olan bir regle yüzeyin açılabilir olması için gerekli ve yeterli koşul

$$det(\alpha'(s), e(s), e'(s)) = 0 \quad (14)$$

dir, (O'Neill, B., 1966). Regle yüzeyin Gauss eğriliği $K(s,v)$ ve ortalama eğriliği $H(s,v)$

$$K(s,v) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad H(s,v) = \frac{GL + EN - 2FM}{2(EG - F^2)} \quad (15)$$

dir. Burada X (s,v) regle yüzeyi üzerinde birinci temel form elemanları

$$E = |X_s|^2, \quad F = X_s . X_v, \quad G = |X_v|^2 \quad (16)$$

ve ikinci temel form elemanları

$$L = X_{ss} \cdot X_s \times X_v, N = X_{vv} \cdot X_s \times X_v, M = X_{sv} \cdot X_s \times X_v \quad (17)$$

şeklindedir. Böylece X(s,v) regle yüzeyinin birinci ve ikinci temel formları sırasıyla,

$$\begin{aligned} I &= E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2, \\ II &= L(du)^2 + 2Mdudv + N(dv)^2 \end{aligned} \quad (18)$$

denklemleriyle verilir, (O'Neill, B., 1966).

BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, amacımız eğrilik teorisi kullanarak küresel gösterge eğrisi tarafından üretilen regle yüzeyin dayanak eğrisi olarak striksiyon eğrisi olarak alındığında yüzeyin diferansiyel özelliklerinin yeniden hesaplanmasını sağlamaktır. Yüzey için bir parametrik denklem

$$X(s,v) = \beta(s) + v\overline{R}(s) \quad (19)$$

yazılabilir. Eşitlik 8. ve Eşitlik 11. kullanılırsa striksiyon eğrisinin teğet vektörünün Frenet çatısına göre ifadesi

$$\beta'(s) = (\Delta(s)\cos\eta - \Gamma(s)\sin\eta)n + (\Gamma(s)\cos\eta + \Delta(s)\sin\eta)b \quad (20)$$

şeklinde yazılabilir. Eşitlik 19. dan s ve v parametrelerine göre türev alınır ve Eşitlik 11. kullanılırsa $X(s,v)$ yüzeyinin parametre eğrileri

$$\begin{aligned} X_s(s,v) &= \beta'(s) + v\overline{R}'(s) \quad , \\ X_v(s,v) &= \overline{R}(s) = e\left|\overline{R}\right| = R(-\sin\eta n + \cos\eta b) \end{aligned} \quad (21)$$

şeklinde hesaplanır. Eşitlik 21. den s ve v parametrelerine göre tekrar türev alınır, Eşitlik 10. ve Eşitlik 12. kullanılırsa $X(s,v)$ yüzeyi üzerinde X fonksiyonunun ikinci türevleri

$$\begin{aligned} X_{ss}(s,v) &= \kappa(\Gamma\sin\eta - \Delta\cos\eta)t + (\Delta'\cos\eta - \Gamma\sin\eta + v\kappa)n + (\Gamma\cos\eta + \Delta'\sin\eta)b \\ X_{sv}(s,v) &= t \quad X_{vv}(s,v) = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

şeklinde hesaplanır. Böylece Eşitlik 21. kullanılırsa X yüzeyinin birim normal vektör alanı Frenet çatısına göre

$$\overline{N}(s,v) = \frac{X_s \times X_v}{|X_s \times X_v|} = \frac{\Delta t - v\cos\eta n - v\sin\eta b}{\sqrt{\Delta^2 + v^2}} \quad (23)$$

olarak bulunur.

Eşitlik 20. den türev alınır ve Eşitlik 12. ve Eşitlik 23. kullanılırsa v=0 için dayanak eğrisinin geodezik eğriliği ve normal eğriliği

$$k_g = \overline{N} \times \beta' \cdot \beta'' = \Delta\Gamma' - \Gamma\Delta' \quad (24)$$

$$k_n = \overline{N} \cdot \beta'' = \kappa(\Gamma\sin\eta - \Delta\cos\eta) \quad (25)$$

şeklinde elde edilir.

Eşitlik 13. Kullanılırsa, X regle yüzeyinin dağılma parametresi regle yüzeyin eğriliğine bağlı olarak

$$P_{\overline{R}} = R\Delta . \quad (26)$$

şeklinde bulunur. Böylece, aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 1. $X(s,v)$ yüzeyi üzerinde dayanak eğrisi $\beta(s)$ nin geodezik eğri olması için gerek ve yeter koşul $\frac{\Delta}{\Gamma}=\text{sabit}$ olmasıdır.

Sonuç 2. $X(s,v)$ yüzeyi üzerinde dayanak eğrisi $\beta(s)$ nin asimptotik eğri olması için gerek ve yeter koşul $\tan\eta=\frac{\Delta}{\Gamma}$ olmasıdır.

Açılabilir yüzeyler regle yüzeylerin bir alt kümesidir. Bu yüzeylerin doğrultman boyunca yüzey normalleri sabittir. Açılabilir yüzeylerin yüzeyin tüm noktalarında Gauss eğrilikleri sıfırdır. Bu yüzeyler, geometrik tasarım, yüzey analizi ve üretim sistemlerinde kullanılır.

Sonuç 3. Eşitlik 19. da verilen regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter koşul $\Delta=0$ olmasıdır.

Eşitlik 10. , Eşitlik 12. ve Eşitlik 22. kullanılırsa $X(s,v)$ yüzeyinin birinci ve ikinci temel form elemanları

$$E=\Gamma^2+\Delta^2+v^2,\quad F=R\Gamma,\quad G=R^2$$

ve

$$\begin{aligned}L&=\Delta' R\Gamma\sin^3\eta+v\kappa R\left(\Gamma\sin^2\eta-\Delta\cos^2\eta\right)+\Delta R\left(\kappa\Gamma-\Delta'\right)\cos\eta\sin^2\eta\\&+R\left(\kappa\Gamma^2-\kappa\Delta^2+\Delta'\Gamma\right)\cos^2\eta\sin\eta+\kappa vR\left(\Gamma-\Delta\right)\sin\eta\cos\eta-\Delta R\left(\Delta'+\kappa\Gamma\right)\cos^3\eta,\\&N=0,\ M=R\Delta\end{aligned},$$

şeklinde hesaplanır.

Sonuç 4. $X(s,v)$ regle yüzeyinin Gauss eğriliği K ve ortalama eğriliği H

$$K=-\frac{\Delta^2}{\Delta^2+v^2},$$

$$H=\frac{R}{2\left(\Delta^2+v^2\right)}\begin{pmatrix}\Delta'\left(\Gamma\sin^3\eta-\Delta\cos^3\eta\right)+v\kappa\left(\Gamma\sin^2\eta-\Delta\cos^2\eta\right)\\+\kappa v\left(\Gamma-\Delta\right)\sin\eta\cos\eta+\Delta\left(\kappa\Gamma-\Delta'\right)\sin\eta+\left(\kappa\Gamma^2-\kappa\Delta^2+\Delta'\Gamma\right)\cos\eta-\frac{2\Delta\Gamma}{R}\end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 5. $X(s,v)$ yüzeyinin birinci ve ikinci temel formları

$$I=\left(\Gamma^2+\Delta^2+v^2\right)ds^2+2R\Gamma dsdv+R^2dv^2,$$

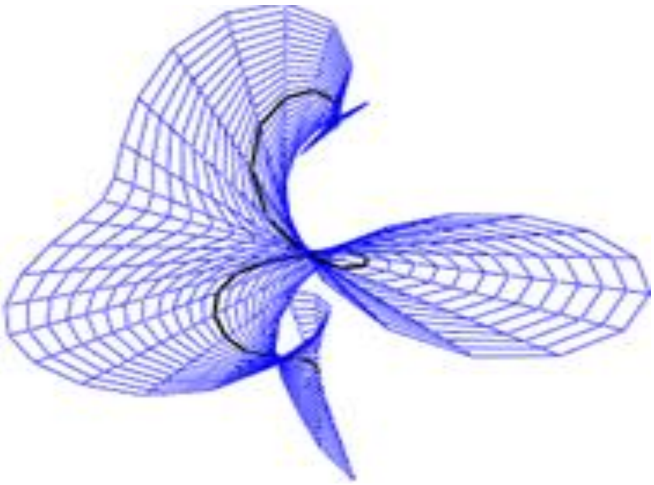
$$II=\begin{pmatrix}\Delta' R\Gamma\sin^3\eta+v\kappa R\left(\Gamma\sin^2\eta-\Delta\cos^2\eta\right)+\Delta R\left(\kappa\Gamma-\Delta'\right)\cos\eta\sin^2\eta\\+R\left(\kappa\Gamma^2-\kappa\Delta^2+\Delta'\Gamma\right)\cos^2\eta\sin\eta+\kappa vR\left(\Gamma-\Delta\right)\sin\eta\cos\eta-\Delta R\left(\Delta'+\kappa\Gamma\right)\cos^3\eta\end{pmatrix}ds^2$$
$$+\left(2R\Delta\right)dsdv$$

şeklinde hesaplanır.

Örnek : $\alpha(s)=\left(\frac{3}{5}\cos(s),\frac{3}{5}\sin(s),\frac{4}{5}s\right)$ dayanak eğrisi ve $\overline{R}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos^2(s),\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2(s),\frac{1}{2}\sin(2s)\right)$ doğrultman vektörüne sahip bir regle yüzeyin parametrik denklemi $X(s,v)=\alpha(s)+v\overline{R}(s)$, olmak üzere bu yüzeyin striksiyon eğrisi

$$\beta(s)=\begin{pmatrix} \frac{3}{5}\cos s-\frac{3}{5\sqrt{2}}\cos^2 s\sin 2s(\cos s+\sin s)-\frac{4}{5}\cos 2s\cos^2 s, \\ \frac{3}{5}\sin s-\frac{3}{5\sqrt{2}}\sin 2s\sin^2 s(\sin s+\cos s)-\frac{4}{5}\cos 2s\sin^2 s, \\ \frac{4}{5}s-\frac{3}{10}(\sin 2s)^2(\sin s+\cos s)-\frac{2\sqrt{2}}{5}\cos 2s\sin 2s \end{pmatrix}$$

şeklinde hesaplanır. Böylece dayanak eğrisi striksiyon eğrisi alındığında küresel gösterge eğrisinin çizdiği regle yüzeyin grafiği Şekil 1. ile -2<s<2, -2<v<2, değerleri için verilir.



Şekil 1

SONUÇ

Bu çalışmada, Ryuh, B. S., (1989) referanslı çalışmada yer alan regle yüzeyler ile robot uç hareketinin tanımlanması problemi analiz edildi. Söz konusu çalışmada, robot uç hareketi üreteç çatının e yön vektörüne bağlı özel yörüngeler için tanımlanmıştır. Bu çalışmada ise eğrilik teorisi kullanılarak küresel gösterge eğrisi tarafından üretilen regle yüzeyler çalışıldı. Çalışma boyunca bu yüzeyin dayanak eğrisi striksiyon eğrisi alınarak bazı teorem ve sonuçlar elde edildi. Son olarak tanımlanan bu regle yüzeye bir örnek verildi.

KAYNAKLAR

Carthy Mc, Roth B, 1981. The curvature theory of line trajectories in spatial Kinematics, Journal of Mechanical Design, 103(4), 718-724.

Ekici C, Ünlütürk Y, Dede M, Ryuh B. S, 2008. On Motion of Robot End-Effector Using the Curvature Theory of Timelike Ruled Surfaces with Timelike Rulings. Hindawi Publishing Corporation, Mathematical Problems in Engineering.

Guggenheimer H, 1977. Differential Geometry,Dover Publications, 378 pp.

Güler F, Kasap E. 2018. A path planning method for robot end effector motion using the curvature theory of the ruled surfaces. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 15(03), 1850048.

Hoschek J, 1973. Integral invarianten von regel flachhen, Archiv der Mathematik., XXIV ,218-224.

Karadag H. B, Kılıç E, Karadağ M. 2014. On the developable ruled surfaces kinematically generated in Minkowski 3-Space. Kuwait Journal of Science 41(1): 21-34.

Kirson Y, 1975. Curvature theory of in space kinematics, Doctoral dissertation, University of California,Berkley, Calif, USA.

O'Neill B, 1966. Elementary Differential Geometry, Academic Press, New York, 411 pp.

Oh Y. S, Abhishesh P, Ryuh B. S. 2017. Study on Robot Trajectory Planning by Robot End-Effector Using Dual Curvature Theory of the Ruled Surface. World Academy of Science, Engineering and Technology, International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering, 11(3), 577-582.

Ryuh B. S, 1989. Robot trajectory planing using the curvature theory of ruled surfaces, Doctoral dissertion, Purdue University, West Lafayette, Ind, USA.

Şahiner B, Kazaz M, Ugurlu H. H. 2016. On the curvature theory of non-null cylindrical surfaces in minkowski 3-space.TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics, 6(1), 22.

Şahiner B, Kazaz M, Uğurlu H. H, 2018. Dual Lorentziyen Birim Küresel Timelike Eğrilerin Eğrilik Teorisi Kullanılarak Robot Uç-işlevci Hareketinin İncelenmesi. Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi, 18(2), 468-476.

Turhan T, Ayyıldız N, 2011. On curvature theory of ruled surfaces with lightlike ruling in Minkowski 3 Space. International Journal of Mathematical Sciences & Applications. **1**(3).