İLKÖĞRETİM DÜZEYİNDE MATEMATİK YETERLİLİĞİ İÇİN GEREKLİ DÖRT TEMEL PRENSİPTEN BİRİSİ "TERSİNE ÇEVİRME PRENSİBİ" NEDİR? NEDEN ÖNEMLİDİR? STRATEJİLERİ NELERDİR?

Esin ACAR [*]

ÖZ

Bu makalede matematiği anlama, işlem pratiğinde kullanma ve günlük hayata uyarlamada oldukça önemli olan matematik yeterliliğinin dört temel prensibinden biri olan "Tersine Çevirme" prensibinin ne olduğu, önemi ve kullanımı ile ilgili durumlara dikkat çekilmiştir. Çalışma, bu konuda öne sürülen kuramsal bilgilerin ve bu konuda yapılan deneysel çalışmaların taranması, derlenmesi ve yorumlanmasıyla oluşturulmuştur.

Anahtar Sözcükler: Tersine çevirme prensibi, tersine çevirme stratejisi, aritmetik, ilköğretim matematik

YAPILANDIRILMIŞ ÖZET

Araştırmanın Temelleri ve Amacı: Bu çalışmada, Türkiye'deki aritmetik öğretiminde çok da ön planda olmayan bir konuyu günyüzüne çıkarmaktadır. Matematiksel düşünmesinin temel bilişsel aktivitelerinden biri de "Tersine Çevirme Stratejisinin" kullanılmasıdır. Tersine çevirme prensibi, çocukların farklı bilgi türlerini ve olaylar arasındaki ilişkileri anlamaları için oldukça önemli bir araçtır. Sayıların dört işlem içinde birbirlerini tamamlayıcı özelliklerinin ve aritmetiğin mantığında yer alan parça-bütün ilişkisinin tamamıyla anlaşılması için tersine çevirme prensibinin anlaşılması gerekir. "Tersine Çevirme Prensibinin" anlaşılması, çocuklar, öğretmenler, aday öğretmenler ve veliler için oldukça önemlidir. Bu çalışma, aynı zamanda ilköğretim matematik düzeyinde tersine çevirme ile ilgili yapılacak çalışmalar için de bir kaynak olarak kullanılacaktır.

* Adnan Menderes Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, Sınıf Öğretmenliği Anabilim Dalı Öğretim Üyesi, Yrd. Doç. Dr.

Metot: Bu derleme çalısması, tersine çevirme ilişkilerini ortaya çıkarmak amacıyla bu prensiple ilgili temel bilgi ve aritmetik problemlerinde kullanılan stratejisinden bahseder. İlgili literatürün taranması, okunması, keşfedilmesi ve yazarların fikirlerinin tartışılması bu makalenin derleme yöntemleridir.

Tartışma: Tersine çevirme prensibinin anlaşılması ve stratejisinin kullanılmasıyla birlikte bu prensibin kullanıldığı problemlerin kolaylıkla çözülebilmesi ve analitik düşünmenin olumlu yönde gelişmesi beklenir. Aynı zamanda, daha fazla çocuğun tersine çevirme ile ilgili bilgisi aritmetikle birlikte gelişmeli ve ilkokul matematik dersindeki akademik başarısı yükselmelidir.

Sonuç: Bu çalışmada, tersine çevirme prensibinin özellikle ilköğretim aritmetik öğretiminde ve okul öncesinden 8 inci sınıfa kadar yer alan farklı sınıf düzeylerindeki aritmetik öğreniminde dikkate alınması önerilmektedir. Aynı zamanda, alandaki araştırmacıların bu prensibin deneysel çalışmalarda uygulanmasını gözlemlemeleri ve değerlendirmeler yapmaları da önerilir.

What Is "Inversion Principle", Which Is One Of Four Basic Principles Of Mathematical Proficiency In Elementary School Level? Why Is It Important? What Are The Strategies In Relation To The Principle?

ABSTRACT

This article points out that understanding of "inversion principle"- one of four principles of mathematical proficiency-is important for comprehending math, using it in procedure, adapting it to daily life, and understanding the significance of principle. The study includes some theoretical information and empirical researches about the topic acquired by scanning, compiling and discussing the related studies.

Key Words: Inversion principle, inversion strategy, arithmetic, elementary school math

STRUCTURED SUMMARY

Purpose and significance: In this paper, the author brings to light an ignored subject in elementary school arithmetic teaching in Turkey. One of the cognitive activities in mathematical thinking is use of "Inversion Strategy". Inversion principle is a very important tool from the viewpoint of children about the

relationships between different kinds of information and events as well. Seeing the numbers' supplementary qualification in four operations and constitution of knowledge about that arithmetic reasoning is wholly related to the principle in part-all relation are required for understanding " inversion principle". Understanding of inversion principle is very important for children, teachers, prospective teachers and even parents. This paper would be used as a resource for the future studies related to "Inversion Principle" in elementary school math.

Methods: This review paper presents the basic knowledge and the popular studies about inversion principle and its strategy for revealing the inverse relations in arithmetical problems. Scanning, reading and exploring the associated literature and discussing the authors' ideas about the topic are the reviewing methods of this composed paper.

Results: Through understanding the principle of inversion, and use the strategy, the problems related to this principle are expected to be solved easily and to affect the development of analytical thinking positively. Also, it is expected that the more children's knowledge of inversion is improved in arithmetic, the better their academic achievement occurs in elementary school math.

Discussion and Conclusions: It is suggested that this principle should be considered in especially elementary arithmetic teaching as a basic for rapidity in problem solving. Also it should be taught in different grade levels from even kindergarten to grade 8th. It is also recommended that the researchers in the field should observe and evaluate the application of inversion principle on the classroom based research studies.

1. GİRİŞ

Matematiksel yeterlilik, günlük hayatta, okulda ya da matematik dersinde karşılaşılan problemleri matematiksel mantık yürüterek çözebilme olarak tanımlanabilir. Matematiksel yeterliliğin oluşabilmesi için matematiksel düşünmenin öğrenilmesi ve bu düşüncenin uygulanabilmesi gereklidir. Amerikan Ulusal Araştırma Kurulunun da tanımladığı gibi matematiksel yeterlilik beş çeşit matematiksel beceriye ya da başarısızlığa sahip olmayla ilişkilidir. Bu yeterlilikler; "matematiksel kavramların, işlemlerin ve ilişkilerin kavramsal olarak anlaşılması; doğru, etkili ve uygun işlemlerin yapılabilmesini içeren işlemlerde akıcılık; matematiksel problemlerin formüle edilmesi, ifade edilmesi ve çözülmesini içeren stratejik beceri; mantıksal olarak düşünme, yorumda bulunma, açıklama ve kanıtlamayı içeren bildiklerini uygulayabilme becerisi ve matematiği akla uygun, kullanışlı ve değerli görmeyi içeren ve kişinin çabasına dönük inancı ve kişisel yeterlilikleriyle birleştirilebilecek alışılagelmiş bir eğilime karşılık gelen matematiğin yaratıcı ve üretkenliğine dönük eğilim" dir (National Research Council, 2001, p.116; Akt: Lester, 2007).

Matematiksel düşünmenin işleme geçirilmesinde ise bilişsel strateji kullanmak oldukça önemlidir. Tersine çevirme (Inversion) stratejisi de bu stratejiler arasında oldukça önemli bir yer tutar, çünkü tersine çevirme stratejisi mantıksal düşünmenin gerçekleştirildiğinin bir göstergesi olduğu gibi aynı zamanda aritmetiksel işlemlerin yapılmasında çocuklar tarafından türetilmiş diğer birçok stratejiden daha zordur ve 5 ile 9 yaş arasındaki çocuklar tarafından nadiren kullanılır (Dowker, 2005). Matematiksel düşüncenin gelişmesinde karşılaşılabilecek en önemli sorun, çocukların temel matematik kavramlarını anlamaları ve bu kavramları kullanmaları konusunda karşılaştıkları zorluklar arasında yer almaktadır. Genel anlamda zihinsel işlem, problem çözme davranışının basamaklarıyla paralel olarak işleme konur. Bu basamaklar problemi anlamayı, niteliklerini belirlemeyi, açıklamayı, çözmeyi, sonucu yansıtmayı ve iletişim kurmayı içermektedir. Çocuklar okula başlamadan önce bazı temel matematiksel esasları kavramaya ve genel olarak çoğunlukla objeleri içeren aritmetik problemlerini çözmek için akla uygun problem çözme basamakları oluşturmaya başlarlar (Ginsburg, Klein ve Starkey, 1998; Klein, Bisanz, 2000; Nunes ve Bryant, 1995; Siegler ve Shrager, 1984; Akt: Rasmussen, Ho ve Bisanz, 2003). Bu durum çocukların okula başlamalarına kadar devam eder fakat bu çocukların okuldaki eğitim süreci içersinde yer alan matematik dersindeki odaklanmaları daha sembolik ve zamanla daha soyut matematiksel işlemlere doğru kayar.

Okula başlama ve devam etme sürecinde, dört işlem olarak da bilinen "toplamsal ifadeler", yani toplama-çıkarma ile ilgili problemlerin sonucunu doğru olarak bulabilmek her zaman için bu ifadelerin mantığının anlaşılmış olduğunun göstergesi olmayabilir. Piaget' nin (1952) de desteklediği gibi, toplama ve çıkarmayı doğru olarak yapabilmek, toplama ve çıkarmanın gerçekten anlaşıldığını göstermemektedir. Bu yüzden toplama ve çıkarma işlemlerinin öğretimi, bu işlemlerin mantığının gerçekten benimsetilmesi üzerine kurulmalıdır. Bryant (1999) küçük çocukların aritmetik anlamda toplama ve çıkarmayı kullanmalarından önce toplama ve çıkarma işlemlerinin birbirinin tersi işlemler olduğunu iyi biliyor olmaları gerektiğini belirtmiştir. Bu işlemlerin kullanılmasından önce de mantıksal olarak birbirlerinin tersi işlemler olduklarının bilinip bilinmediği kontrol edilmelidir. Eğitim sistemimiz içinde aritmetiksel işlemlerin birbirlerinin tersi olma durumları mantıksal olmaktan ziyade işlemsel olarak öğrencilere öğretilmektedir; örneğin, toplama işleminin tersi çıkarma, çarpma işleminin tersi bölmedir.

Piaget ve Moreau'ya göre çocuklar somut işlemler dönemi öncesinde toplama ve çıkarmanın ters işlemler olduğunun farkında değildirler (Piaget ve Moreau, 1977). Bunun yanı sıra Piaget çocukların bir nesnenin yerinin değiştirilmesi sonucu oluşan tersine çevrilebilirliği 18 aylıktan itibaren anlayabildiklerini fakat sayısal işlemlerdeki tersine çevrilebilirliği 6-7 yaştan önce anlayamadıklarını belirtmiştir (Piaget, 1952). Matematikte tersine çevirme üzerine yapılan araştırmalar okul çağı çocuklarının ve yetişkinlerin toplama ve çıkarmanın tersine çevrilebilir işlemler olduğunu yaygın bir biçimde anladıklarını göstermektedir (Bisanz ve LeFevre, 1990; Stern, 1992). Bisanz'a göre ise tersine çevirme prensibini uygulayabilen çocukların oranı yaşlarıyla birlikte artmaktadır.

Daha yeni araştırmalar ise okul öncesi çocukların bile tersine çevirme ilkesini algılayabildiklerini göstermiştir (Bryant, 1999; Klein ve Bisanz, 2000; Rasmussen, 2003; Vilette, 2002). Örneğin; Bryant (1999) tersine çevirme ilkesinin nitel mi nicel mi olduğunu incelemiş, yaptığı çalışmada tersine çevirmenin okul çağı ve okul öncesi çocuklarda kullanılması için bir metot geliştirmiş, sayı yerine bloklar kullanmıştır. Kullanılan problemler de çocukların düzeyine uygun zorlukta hazırlanmıştır. Bu çalışmada 5-8 yaş arası çocuklar tersine çevirme problemlerine standart problemlere nazaran daha doğru cevaplar vermişlerdir. En küçük okul çağı çocuğunun bile çok yoğun toplama çıkarma işlemlerinden ziyade tersine çevirme kısa yollarını kullandıkları görülmüştür. Bryant'ın blokları kullanmasındaki amaç benzer olan ve benzer olmayan koşulları katarak nicel ve nitel tersine çevirme arasındaki farkı gözlemleyebilmektir. Tersine çevirmenin nitel mi nicel mi olduğunu anlamak amacıyla baştaki bloklara ilk olarak aynı bloklar eklenmiş ve çıkarılmış, ikinci olarak ise farklı bloklar eklenip çıkarılmıştır ve çocuklar bu ekleme çıkarma olayını izlemişlerdir. İlk verilen bloklara farklı blokların eklenmesi, çıkarılması sonucu bir şey değişmediğini fark eden çocukların nicel yani rakamları kullanarak işlem yapma seklinde tersine çevirme ilkesini kullandıkları, aynı bloklarla yapılan ekleme çıkarma sonucunda ise çocukların nitel yani rakamları kullanmadan başlangıç noktasına tekrar geri dönmenin mantığıyla tersine çevirme ilkesini kullandıkları belirlenmiştir.

Klein ve Bisanz yaptıkları çalışmada 4 yaşındaki çocuklara sözsüz olarak standart problemler ve tersine çevirme problemleri sormuşlar, sonuçların doğruluğunu, çözümlerini ve çözüm sürelerini kaydetmişlerdir. Kaydedilen verilere süre ve doğruluk-yanlışlık açısından bakıldığında çocukların kısa yollar kullanmasalar da aynı sonuca ulaştıkları görülmüştür. Fakat bu genellemenin yanlış bir genelleme olduğu ortaya çıkmıştır, çünkü bu problemlerde çocuklar cevapların doğruluğu ve çözüm süreleri açısından birbirleriyle büyük ölçüde farklı olan çeşitli çözüm yolları üretmişlerdir. Rasmussen, Ho ve Bisanz'a (2003) göre, yapılan analizler açıkça kıyaslanabilen çözüm yollarıyla kısıtlandırıldığında tersine çevirme problemleri standart problemlerden daha hızlı çözülmüştür.

2. İLKÖĞRETİM MATEMATİK DERSİ ÖĞRETİM PROGRAMINDA TERSİNE ÇEVİRME PRENSİBİ

Çocukların okula başladıkları zaman hâlihazırda sahip oldukları bilgi düzeylerini ve ne tür bilgiye sahip olduklarını anlamak hem öğrenme ihtiyaçlarını tanımlayabilmek hem de kendilerine yapılacak öğretimde nelerin vurgulanması gerektiğini belirlemek açısından önemlidir. Programda yer alan bu kazanımlar Siegler'in (2003) belirttiği gibi evrensel iken çocuğun yaşadığı çevre ile ilgili olan öğrenmeler ise sosyal ve kültüreldir.

Türkiye'de değişen matematik programı ile birlikte ilköğretim matematik eğitiminin genel amaçları da bazı değişikliklere uğramıştır. Bu amaçlardan iki tanesi "Tersine Çevirme Prensibi" ile uyum içindedir. Bu amaçlardan ilki; *öğrencilerin tahmin etme ve zihinden işlem yapma becerilerini etkin kullanabilmeleri*, diğeri de *problem çözme stratejileri geliştirebilmeleri ve bunları günlük hayattaki problemlerin çözümünde kullanabilmeleridir (MEB, 2005)*.

İlköğretim matematik programında matematik yeterlilikleri konusunda gerekli olan prensiplere ayrı ayrı doğrudan yer verilmemiş ancak dolaylı yoldan bu prensibin gerekliliği ve öğretilmesi gerektiği vurgulanmıştır. *Matematiksel kavramlar ve sistemlerin anlaşılması ve arasında ilişkiler kurulabilmesi; problem çözümlerinin probleme uygunluğunu ve akla yakınlığını kontrol etme ve yorumlama ve değişik problemleri çözmek için farklı problem çözme stratejileri kullanabilme*; *matematiksel örüntü ve ilişkileri analiz edebilme*; *mantığa dayalı çıkarımlarda bulunabilme* ve *bir matematiksel durumu analiz ederken örüntü ve ilişkileri kullanabilme* gibi ayrıntılı tanımlamalar içeren akıl yürütme becerisinin geliştirilmesi gibi genel ve alt konu alanı ile ilgili amaçlar araştırmacı tarafından fark edilmiş ve bu durum konuya ilgi çekilmesi gerekliliğini ortaya çıkarmıştır.

3. "TERSİNE ÇEVİRME PRENSİBİ" NEDİR?

Tersine çevirme işleminin kökeni ve başlangıcı tam olarak bilinmemesine rağmen, bu prensip (Inversion Principle) iki olasılık altında incelenebilir. Bu olasılıklardan bir tanesi nitel düşünmeden hareketle genellemenin nasıl yapıldığıdır. Öğrencinin bir nesnenin aynı miktarda eklenip aynı miktarda çıkarılmasının mevcut durumu değiştirmediğini günlük deneyimleri sayesinde anlayabilmesi, öğrencide genel anlamda tersine çevirme işlemi ile ilgili ilk düşüncelerin oluşmasını sağlamaktadır (Sherman ve Bisanz, 2007). Bu da öğrenci tarafından genellemenin nasıl yapıldığını ve bu genellemenin çıkış noktasını göstermektedir. Bu durum aslında bu prensibin anlaşılması için çocuklarda gerekli donanımın var olduğunu göstermektedir. Her ne kadar kavramsal anlamda bu donanıma sahip olunsa da, matematik öğretiminde kullanılan yanlış yöntemler ve öğrencilerin başarılarının, aritmetiksel işlem ve problem sonuçlarını bulmaya hapsedilmesi bu donanımı köreltmektedir. Edindikleri bu ilk nitel ya da anlamsal izlenimlerin nicel olarak işlemlere dökülmesi esnasında, daha hızlı ve daha doğru şekilde hesap yapabilmek için öğrenciler bir takim kısa yollara başvururlar. Bisanz ve LeFevre' nin (1990) belirttiği gibi hesaplanması zor problemlerin kolayca çözülebilmesini sağlayan kısa yollar oluşturabilmek için ve sayıları toplamanın anlaşılabilmesi için de tersine çevirme bilincinin oluşması önemlidir. Toplama ve çıkarma arasındaki ilişkinin bir yönü "Tersine Çevirme Prensibi"ni tanımlar, yani "a + b – b, a" ya eşit olmak zorundadır; hesaplama gerekmez (Sherman ve Bisanz, 2007).

Tersine çevirme prensibi ile ilgili bilgiler, günlük yaşam deneyimlerini, verilen problemde hangi sayı değerlerinin ya da ipuçlarının diğerlerinden daha önemli olduğunu, sayısal işlemleri ve matematiksel prensipleri içerir. Bu prensip, nesneler, nesnelerin resimleri, somut sayılar ve cebirsel değişimler kullanılarak ifade edilebilir (Schneider & Stern, 2009).

3.1. "Tersine Çevirme Prensibi" Neden Önemlidir?

Matematik dersinde anlamlı öğrenmenin öğretmen tarafından gerçekleştirilmesi oldukça önemli ancak bir o kadar da zor gerçekleştirilebilen bir amaçtır. Öğretmenlerin öğrenmeyi anlamlı kılabilmek için, öğrencilerin derslerdeki uygulamalar sırasında kullandıkları öğrenme stratejilerini ve neden bu stratejileri kullandıklarını bilmeleri gerekir. Bu stratejilerden bir tanesi de Piaget'e (1952) göre somut işlemler (7-11 yaş) döneminde kazanılması gereken tersine çevirme stratejisidir. O halde tersine çevirme prensibini anlayabilmek anlamlı öğrenme için gerekli bir yeterliliktir. (Baroody, Torbeyns ve Verschaffel (2009) tersine çevirme prensibinin tanımlanmasında yaşanılan karışıklığı, a+b = c ise c–b = a ilişkisinin a +b – b = a ilişkisiyle bağlantılı olduğunu ancak aynı olmadıklarını, matematiksel ve psikolojik açıdan fark bulunduğunu ileri sürmüşlerdir. Onların tanımları, a+b= c ise c–b= a ilişkisini deneysel ya da deneysel (ampirik) tersine çevirme, a+b–b=a ilişkisinin ise tersine çevirme prensibini ifade ettiğini ileri sürmüştür.

Tabii ki tersine çevirme stratejisini aritmetik problemlerin çözümünde kullanmadan önce bu kavramın idrak edilmesi gerekir. Sherman ve Bisanz (2007) verdikleri temiz elbisenin kirletilmesi ve sonra tekrar temizlenerek ilk alındığı yere yerleştirilmesi örneğiyle, niteliksel olarak bu kavramı anlamanın niceliksel yani sayısal olarak tersine çevirme stratejisini kullanmanın temelini oluşturduğundan bahsetmişlerdir. Bununla bağlantılı olarak stratejinin niceliksel olarak kullanımı, daha üst düzeyde kullanımlara ve işlemleri kolaylaştırmaya da temel oluşturmaktadır. Bu stratejinin somut nesneler boyutunda anlaşılması (yani herhangi bir nesnenin sayısı), bu nesnelerin sembolik aritmetik düzeyde (örneğin, 5+3-3=5) kullanılmasına, daha sonra da sayısal değerlerin bağımsız bir şekilde geçerli olduğu (örneğin, a + b – b = a; Bisanz, Watchorn, Piatt and Sherman, 2009) cebirsel içgörürün kazanılmasına yardımcı olabilir. Tersine çevirme prensibi aynı zamanda çıkarmada hükümsüzlük prensibi (a – a = 0), çıkarmada özdeşlik prensibi (a – 0 = a) ve bütünleme ya da tamamlama prensibi *(a + b = c* işlemi eşittir *a=c-b* işlemine) gibi kendisiyle ilişkili prensiplerin anlaşılmasına yardımcı olur (Baroody, Lai, Li and Baroody, 2009). Aslında bütün bu prensiplerin daha net anlaşılması genel aritmetik bilgisine ve aritmetik problemlerinin çözülmesinde gerekli yeteneklerin gelişmesinde de önemli katkı sağlayabilir (Schneider and Stern, 2009).

Tersine çevirme prensibi, matematiksel yeterliliğin oluşmasında gerekli olan dört temel prensipten bir tanesidir. *Olumsuzlama* (eksiklik), *özdeşlik, tersine çevirme* ve *tümleme* prensiplerinin bilinmesi matematiksel yeterliliğin kilit noktalarını geliştirebilir. Bunlar, kavramsal anlama, uyarlanabilir akıl yürütme, hesaplama hızı ve stratejik yeterliliktir (Matematiksel yeterlilik, Ulusal Araştırma Kurumu'na "National Research Council" göre K-8 öğretiminin genel amacıdır) (Kilpatrick, Swafford ve Findell, 2001; Akt: Baroody, Torbeyns ve Verschaffel, 2009).

Zihinsel işlem yapma, herhangi bir araca başvurmadan yapılan hesaplamalardır (Pesen, 2003). Günlük hayatta olmazsa olmaz gerekliliklerden birisi olan zihinden işlem yapma becerisinin en önemli faydası, Pesen (2003), Olkun ve Toluk'a (2007) göre bir kavramın farklı durumlarda algılanabilmesini, mantıklı analiz yapabilmeyi, farklı teknikler kullanabilmeyi ve günlük hayatta pratik karar verebilmeyi sağlamaktadır.

Matematiksel düşünme sürecinde yer alan önemli zihinsel etkinliklerden birisi "Tersine Çevirme" stratejisinin kullanımıdır. Tersine çevirme stratejisinin ne ölçüde kullanıldığının araştırmacılar tarafından keşfedilmesi iki nedenden dolayı önemlidir (Bisanz ve digerleri, 2009). Bu nedenlerden ilki, Bisanz ve digerlerinin (2009) da üzerinde durduğu, *farklı türlerdeki bilgiler arasındaki ilişkilerin kurulabilmesi açısından çocuklarda öncelikle tersine çevirme prensibinin geliştirilmesi* gerektiğidir. Tersine çevirme mantığının anlaşılması, temelde olaylar arasında neden sonuç ilişkisi kurulması ile yakından ilişkilidir. Piaget ve Moreau (2001) da işlemsel ya da doğru bir şekilde yapılan mantıksal düşünme için tersine çevirme prensibinin anlaşılması gerektiğini ifade etmiştir (Akt: Baroody, Torbeyns ve Verschaffel, 2009).

İkinci neden olarak ise tersine çevirme prensibinin anlaşılmasının matematik pedagojisi açısından önemli olarak kabul edilen sorunların anlaşılmasına potansiyel oluşturması söylenebilir. Dört işlemde sayıların tamamlayıcı niteliğinin anlaşılması ve parça-bütün ilişkisinin içinde aritmetik akıl yürütmenin tamamıyla birbirleriyle ilişkili olduğu bilgisinin oluşması, "tersine çevirme" kavramının anlaşılması için gereklidir (Bryant, 1992; Christie ve Rendu, 1999; Piaget, 1965; Inhelder ve Piaget, 1958; Rasmussen, Ho, ve Bisanz, 2003; Vilette, 2002; Akt: Baroody ve diğerleri, 2009). Tersine çevirme prensibi ile ilgili bilgilerin bir kısmına bile sahip olmak matematiğin değişkenler arasında var olan soyut bir ilişki sistemi olarak algılanması konusunda çocuklara yardımcı olarak (Baroody ve diğerleri, 2009; Nunes, Bryant, Hallett, Bell and Evans, 2009) ve aynı zamanda öğrencilerin kullandıkları problem çözme stratejilerini uygulamalarında onlara kolaylık sağlayabilir (Torbeyns, De Stassens, Chesquiere, & Verschaffel, 2009; Akt: Schneider,M. & Stern,E., 2009). Daha genel açıdan bakıldığında ise çocukların sahip oldukları tersine çevirme soyut kavramının, ki çok erken yaslarda sahip oldukları bir bilgidir aslında, bu çocukların matematik öğrenmelerini ve işlem yapmalarını etkilediği söylenebilir (Siegler, 2003). Gelman ve Gallistel'in (1978) uzun yıllar önce net bir şekilde tanımladığı ve çocukların hesap yapmalarındaki çabuklukla ilgili olarak hızlı öğrenmenin de temelini oluşturan temel hesaplama prensipleri de aslında öncelikle soyut anlama ile ilgilidir. Aynı zamanda bu prensipler okul öncesi dönemde bulunan çocukların sahip oldukları prensiplerdir. Bir nesneye sadece o nesneyi ifade eden bir sayının ismiyle değer verme anlamına gelen "*Değer Verme Prensibi*"; sayılara her zaman ayni düzende ya da sırada değer vermeye karşılık gelen "*Sabit Düzen Prensibi"*; bir dizide yer alan nesnelerin sayısının en son söylenen sayı değerine karşılık geldiğini belirten "*Nicelik Prensibi* "; sayılan nesnelerin sıralarının önemli olmadığını içeren "*Düzen Dışı Olma Prensibi*" ve belirtilen dört prensibinde herhangi bir nesne dizisine uygulanabileceğini savunan "*Soyutlama Prensibine* " (Siegler, 2003) bakıldığında tersine çevirme prensibinin anlaşılmasını destekler nitelikte paralellik olduğu görülmektedir. Özellikle değer verme ve düzen dışı olma prensiplerinin iyi bir şekilde anlaşılması, tersine çevirme stratejisinin uygulanmasında oldukça önemlidir, çünkü yerleri sabit ve değişmez gibi görünen sayılar aslında tersine çevirme stratejisi ile düzen dışı pratik bir düşünme işlemi ile çok kısa sürede hesaplanabilmektedir. Tersine çevirme stratejisinde hangi sayının hangi sayıyı ortadan kaldıracağının belirli bir sırası yoktur.

3.2. Aritmetiksel Uygulamalarda Tersine Çevirme (Inversion) Prensibi ve Stratejisi

Dört işlem kavramı içinde yer alan toplamsal ifadeleri içeren "toplama ve çıkarma", çocuklara öğretilecek olan en temel matematiksel akıl yürütme şeklidir. Tersine çevirme prensibi (İnversion Principle), temel matematiksel akıl yürütme işlemine oldukça katkıda bulunabilecek bir düşünme temelidir ve stratejik olarak kullanılabilen bir düşünme şekli olduğu için matematiksel düşünme ve matematik yeterliliğinin olmazsa olmazıdır. Bu yüzden bu prensibin anlaşılmasının ve strateji olarak kullanılmasının, toplamsal ifadeler içeren problemlerin çözülmesinde üstünlük sağlayacağı düşünülmektedir.

İlginç bir şekilde 6 ve 9 yaşlarındaki çocukların (a + b - b) türü problemlerin çözümündeki performansları daha küçük yaslardaki çocuklara göre daha hızlıdır ve standart bir işlemin yapılmasına (b'nin sayı değerinin büyük olmadığı işlem durumu) dönük performans hızlarında bu iki yaş arasında bir farklılık yoktur. Ancak 9 yaşındaki çocuklar da "b" nin sayı değeri büyüdüğünde 6 yaşındakiler gibi problemin çözümüne yönelik daha fazla zaman harcarlar (Bisanz & LeFevre, 1990; Stern, 1992). Aynı miktarda sayının eklenmesi ve çıkarılmasının orijinal sayı miktarını değiştirmediğini içeren "tersine çevirme prensibinin" daha ilkokulun ilk yıllarında keşfedildiğine dair bir anlayış vardır. Bu prensibin anlaşılıp anlaşılmadığı "a + b - b = ?" (örneğin, 25 + 8 - 8 = ?) formatındaki bir problemle ilgili performansın incelenmesiyle değerlendirilebilir. Bu tür problemleri tersine çevirme prensibini uygulayarak çözen çocuklar soruyla karşılaştıkları anda ikinci "b" yi dikkate almadan cevap verirler çünkü toplama ve çıkarma yapma gerekliliği duymazlar. Tam tersine "b" yi ekleyerek ve çıkararak problemi çözen yani aritmetik işlem yapan çocuklar, "b" sayısının değeri büyük olduğunda soru çözümünde daha fazla zaman harcarlar (Siegler, 2003). Çünkü sayı değeri büyüdüğünde işlem için harcanan zaman küçük değerdeki sayılarla yapılan işlemlere göre daha uzun zaman alır.

Piaget ve Moreau (2001) yaptıkları bir araştırmada çocuklara sayılarını bilmedikleri tuğlalar vererek bir deney düzenlemişlerdir. Çocuklara önce önlerindeki tuğlalara 3 adet tuğla eklemeleri komutu verilmiş ve toplamda kaç tuğlaları olduğu sorusu yöneltilmiştir. Daha sonra ise 3 adet tuğla çıkartmaları istenmiş ve ekleme çıkarma yapmadan önce kaç tuğlaları olduğu sorulmuştur. Bu deneyde çocuklara verilen ve işlem yapmaları istenen tuğlalar rakam olarak değil, adet olarak ifade edilmiştir. Çocuklara 'nasıl bildiniz?'sorusu sorulduğunda çocukların bir kısmı bunu nasıl bildiklerini açıklayamazken, 10 yaş ve üstü çocukların açıklayabildikleri görülmüştür. Yaptıkları bu çalışma sonrasında Piaget tersine çevirme prensibini bilişsel gelişim dönemlerinden birisi olan somut işlemler (7-11 yaş) dönemi içinde incelemiştir. Piaget tarafından sıkça belirtilmiş olan fakat başka hiç kimse tarafından ciddi şekilde ele alınmamış bir nokta da şudur ki; bir kişi toplama ve çıkarma işlemleri arasındaki ters ilişkiyi anlamadığı sürece bu iki işlemin doğasını algılayamaz. Bunun yanı sıra bir çocuğun sayının doğasını anlayabilmesi için, bir sayıya diğer bir sayıyı ekleme ve eklenen sayıyı çıkarma işleminin bu sayıyı aynı oranda arttırıp aynı oranda azalttığını fark edebilmesi gerekir. Örneğin, sayı doğrusu üzerinde düşünecek olursak 7 sayısını 9 yapan 2 birimlik bir artıştır ve 9 sayısında geriye doğru ayni birim oranında eksilme bizi yine 7 sayısının bulunduğu noktaya götürür; yani işlemi gerçekleştiren sadece iki birimin pozitif ve negatif yönlerdeki hareketleridir. Piaget, somut işlemlerin altında yatan gruplamanın tersine çevirme mantığının kullanılmasının çok önemli bir parçası olduğunu belirtmiştir (Bryant, Christie ve Rendu, 1999).

Gilmore ve Spelke'nin (2008) çocukların toplama ve çıkarma işlemleri arasındaki ilişkileri anlamaları konusunda yaptıkları bir araştırmada, çocukların tersine çevirmeyi büyük sayılarla yapılan işlemlerde başarılı bir şekilde tanımaları ve kullanmalarının yine bu çocukların büyük sayıları içeren özdeş problemlerde tersine çevirmeyi kullanmalarındaki başarısızlıklarıyla çeliştiğini ortaya çıkardıkları görülmektedir. Çocukların aritmetiğin mantıksal yapısı üzerindeki hâkimiyetleri öncelikle yaklaşık durumları ifade eden sayıları (sembolik ya da sembolik olmayan) içeren durumlarda ifade edilebilir ve daha sonra bu ifadeler okulda karşılaşılan özdeş aritmetik işlemlerinde kendini göstermektedir.

(a+b-b) şeklindeki bir tersine çevirme probleminde herhangi bir hesaplamaya ihtiyaç duymadan sonucun (a) olduğunu bilmek kişinin toplama ve çıkarmanın tersine çevrilebilir işlemler olduğunu anladığını gösterir ve çözümü oldukça zor olacak bir problemin çabuk ve kolayca çözülmesini sağlar (Rasmussen, Ho, Bisanz, 2003). Rasmussen, Ho ve Bisanz'a göre 7+5-5 gibi tersine çevirmenin kullanılabileceği bir problemde hesap yapmaya gerek kalmaz ve 6+5-3 gibi bir işlemden daha hızlı ve daha doğru bir şekilde çözülebilir. 6+5-3 gibi bir problem daha yüklü bir toplama ve çıkarma yapmayı gerektirir ve 7+5-5 tipinde bir problemden daha uzun sürede çözülmesi ve hatalı olma olasılığı yüksektir (Rasmussen, Ho, Bisanz, 2003). Bu nedenle tersine çevirme matematiksel bilişin gelişmesinde önemli bir yer tutmaktadır. Tersine çevirmeyi ya da işlemlerin tersine çevrilebilirliğini anlamak sayıların doğasını anlamak açısından gereklidir(Piaget, 1952; Akt: Bryant, Christie, Rendu, 1999).

Piaget'in belirttiği gibi, toplama ve çıkarmayı doğru olarak yapabilmek, toplama ve çıkarmayı gerçekten anlamış olmayı göstermemektedir. Bu yüzden toplama ve çıkarma işlemlerinin öğretiminin gerçekten benimsetmek üzere koordine edilmesi gerekmektedir. Bryant (1999), küçük çocukların aritmetik anlamda toplama ve çıkarmayı kullanmalarından önce toplama ve çıkarma işlemlerinin birbirinin tersi işlemler olduğunu iyi biliyor olmaları gerektiğini belirtmiştir. Bu işlemlerin kullanılmasından önce de birbirlerinin tersi işlemler olduklarının bilinip bilinmediği kontrol edilmelidir. Bryant, Christie ve Rendu (1999), çocukların tersine çevirme prensibini problemlerde kullanmalarındaki başarısızlığın iki olağan sebebi olduğundan bahsetmişlerdir. Bu sebeplerden bir tanesi bu prensibi anlamamış olmaları, bir diğeri de prensibi anlamış olmalarına rağmen bir ya da başka bir sebepten dolayı onu kullanma kararı vermiş olmalarıdır. Eğer bu sebeplerden ikincisi doğru olan ise bu prensibi bazı durumlarda kullanmaları diğerlerinden daha fazla olabilir.

Yapılan araştırmalar incelendiğinde çocukların toplama çıkarmanın birbirinden bağımsız işlemler değil de birbirinin tersi işlemler olduklarını anladıklarında işlemler üzerinde daha kolay mantık yürütebildikleri görülmüştür. Vilette'ye (2002) göre, çocuklara toplama ve çıkarmanın birbirine bağlı işlemler olarak verilmesi, onların parça-bütün arasındaki ilişkileri fark etmelerini ve bu ilişkiyi kullanarak doğru aritmetik mantık yürütmelerini sağlamaktadır. Bu iki işlemin birlikte verilmemesi durumunda çocukların a+b-b tipinde sunulmuş bir problemin çözümünde doğru bir mantık yürütüp tersine çevirmeyi kullanabilmeleri pek mümkün olamaz. PISA'nın değerlendirmesine göre bir çözüm oluştururken, problemi çözen kişi değişkenler arasındaki ilişkiyi tanımlamalıdır. Stratejinin seçiminde, problem çözen kişi problemin sebebini ve etkisini dikkate almalıdır. Bu aktiviteler sıklıkla analitik düşünme, sayısal mantık yürütme, analojik ve bir araya getirici düşünme yetenekleri gerektirir (PISA, 2003). PISA'nin değerlendirmeleri dikkate alındığında, problemde yer alan değişkenlerin arasındaki ilişkinin anlaşılıp tanımlanabilmesi, "Inversion" yani "tersine çevirme" prensibinin varlığının bir göstergesi olabileceği gibi, aynı zamanda bu stratejinin kullanılabilmesi için bir önkoşul olarak da kabul edilebilir.

Nunes, Schliemann ve Carraher (1993) tersine çevirme prensibini kullanmanın ayrıştırma işlemlerinde de kolaylık sağlayacağını belirtmişlerdir. Örneğin 52+28-27 gibi bir problemde bir kişinin 28'i 27+1 şeklinde ayrıştırabilmesi ve buradan da 52+1 sonucuna kolayca ulaşması da tersine çevirme kısa yollarını kullandığını göstermektedir. Ayrıştırma işlemlerinin yapıldığı zihinden işlem yapma stratejileri, Öztürk ve arkadaşlarının (2009) matematik dersinde yapılan alıştırmaların ilköğretim 2. ve 5. sınıf öğrencilerinin zihinden işlem yapmalarına etkisi üzerine yaptıkları çalışmada zihinden işlem yapma becerilerinin anlaşılması için incelenmiştir. Bu çalışmada zihinden işlem yapmada strateji kullanan öğrencilerin, işlem sürelerinde zihinden işlem stratejisi yerine parmakla sayma ya da biçimsel yöntemleri kullanan öğrencilere göre bir kısalma gözlenmiştir. Aynı zamanda bazı öğrencilerin zihinden toplama stratejilerini geliştirebildikleri ya da verilen etkinliklerde bazı yöntemleri fark edebildikleri belirlenmiştir. Bu iki çalışma göz önüne alınırsa, tersine çevirme stratejisini kullanan ve bu stratejiyi kullanırken doğal olarak zihinden işlem yapan öğrencilerin kesinlikle zamandan kazandıkları ve kolaylıkla sonuca ulaşabildikleri söylenebilir.

Robinson ve Ninowski (2003), a + b - b tipindeki probleme ek olarak d x e / e şeklindeki yeni bir tersine çevirme problem tipini vererek yetişkinlerin her iki tip tersine çevirme problemindeki performanslarını incelemişlerdir. Yapılan incelemeler sonucu yetişkinlerin her iki tip tersine çevirme probleminde de kısa yollar kullandıkları fakat a+b-b tipindeki problemlerde daha çok kullandıkları görülmüştür. Yapılan çalışmada bu iki tip problemden (a + b - b; d x e / e) hangisinin önce çözülmüş olduğu, kullanılan kısa yolların hızını ve sıklığını etkilememiştir. Genel olarak yetişkinlerin çarpma bölme arasındaki ters ilişkiyi anlamalarının, toplama çıkarma arasındaki ilişkiyi anlamalarından daha zayıf olduğu görülmüştür. Ve bu çalışma ile tersine çevirme kavramını bir problem tipi üzerinde kullanmanın, bir diğerine transfer edebilmek anlamına gelmediği belirlenmiştir.

Robinson, Ninowski ve Gray (2006) tarafından 47 adet 6. sınıf ve 43 adet 8. sınıf öğrencilerinin katılımlarıyla gerçekleştirdikleri "Çocukların tersine çevirmeyle ilgili aritmetik kavramları ve ilişkileri anlamaları" konusundaki çalışmalarında, aritmetik problemlerinin çözülmesi için öğrenciler tarafından beş strateji kullanıldığı anlaşılmıştır. Bu stratejiler *Tersine çevirme*, *Olumsuzlama* ya da yok sayma, *Soldan-sağa işlem*, *Sağdan-sola işlem* ve *Reddetme* ya da görmezden gelme stratejileri olarak belirlenmiştir. Bu çalışmanın sonuçları, her iki sınıf düzeyindeki öğrencilerin tersine çevirme üzerine oluşturulan kestirme yolların çalışmada öğrencilere sorulan tersine çevirme problemlerinin çözümünde kullanıldığı ve yaşı daha büyük olan öğrencilerin kestirme yol çözümlerini yaşı küçük olan öğrencilerden daha sık kullandıkları belirtilmektedir.

Çocuklar tarafından basit toplama ve çıkarma problemlerini çözmek icin kullanılan kendine özgü stratejiler bir kültürden diğerine az çok farklılık gösterebilir, fakat hesaplama işlemine yardımcı olmak için genellikle somut nesnelerin kullanılmasını içerir (Geary, 2006). Birleşik Devletlerde (Amerika) yaşı küçük çocuklar "3+4 kaç eder?" gibi sözel problemlerle karşılaştıklarında topladıkları her bir rakamı genellikle nesneleri sayısıyla ilişkilendirerek ifade edecekler ve daha sonra bütün nesneleri "bir" den başlayarak sayacaklardır; üç parçayı ve sonra dört parçayı birer birer sayacaktır. Eğer ortamda nesneler mevcut değilse onların yerine çoğu kez parmaklar kullanılacaktır (Siegler ve Shrager, 1984; Akt: Geary, 2006). Koreli ve Japon çocuklar da görünürde benzer bir strateji kullanırlar (Hatano, 1982; Song ve Ginsburg, 1987; Akt: Geary, 2006). Bir şekilde olan Papua Yeni Gine'nin Telefomin bölgesinde yasayan ve Oksapmin dilini konuşan eski insanlar, vücutlarındaki kısımları sayma temeline dayanan benzer bir stratejiyi kullanırlar (Saxe, 1982; Akt: Geary, 2006). Her ne kadar farklı ülke ve kültürlerde bulunsalar da küçük yastaki çocukların basit toplama ve çıkarma işlemlerinin yapılmasında kullandıkları stratejiler benzerlik göstermektedir. Bu durum, bu çocukların "tersine çevirme" stratejisini kullanma şekillerinin de farklı ülke ve kültürler arasında benzerlik gösterebileceğini göstermektedir.

4. TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Temel bir akıl yürütme yolu olan bir miktara yenisini ekleme ve çıkarma, tersine çevirme mantığıyla birlikte öğretildiğinde çok daha kalıcı olabilir, çünkü aritmetiğin temelini oluşturan toplama ve çıkarma işlemlerini gerçekleştirebilen matematiksel akıl yürütme işlemine katkıda bulunabilir. Okul öncesi dönemde kavram olarak anlaşılabilen tersine çevirme stratejisini ilkokul dönemine geldiğinde kullanamayan çocuklar, belirli bir süre sonra matematiğin ya da aritmetik problemi çözmenin sadece işlemlerden ibaret olduğunu algılayabilir. Bu durum, sayı sembolleri ve işlemler arasındaki ilişkileri kurmada yeterli olmadığı zaman çocuğun matematik dersinden uzaklaşması ve kendini başarısız görmesine kadar gidebilir. Peki ne yapılabilir? Bu prensibin anlaşılması için problem çözümü esnasında tersine çevirme stratejinin öğretmen tarafından kullanılması ve ne yaptıklarını ve neden yaptıklarını bilmeden öğretmenleriyle aynı yolu kullanan öğrencilerin, diğer arkadaşlarına göre aritmetik problemlerini daha hızlı çözmeleri yeterli midir? Bu öğrencilerin diğerlerine göre problem çözme hızında üstünlük sağlamaları ve ilerleyen zamanlarda daha karmaşık işlemlerle karşılaştıklarında bu eksikliğin artarak devam etmesi olağan mıdır? Tabii ki bu soruların cevapları tartışmalı olabilir. Ancak şu bir gerçektir ki "Tersine Çevirme" kavramının anlaşılması, içinde tersine çevirme mantığı olan problemlerin çözümünde çocukların izledikleri zihinsel süreçlerin keşfedilmesi ve kullandıkları stratejilerin belirlenmesi çocukların aritmetikteki başarılarını değerlendirebilmek ve daha iyiye götürmek için önemlidir.

Çocuk eğitimiyle uğraşanların oldukça iyi bir şekilde bildiği ve bu makalede açıklanan *tersine çevirme prensibinin* anlaşılması için bir ön koşul olabilecek "*Korunum prensibi* " bize miktarların yerlerinin veya şekillerinin değişmesinin, sonuçtaki miktarı ya da toplamın sonucunu değiştirmediğini söyler. Carey'in (1987) bu fenomenini tekrar analiz etmesiyle *korunumun* aslında, Piaget'nin de daha önceden ileri sürdüğü gibi, mantıksal gerekliliğin bir sonucu olmadığı, bu yüzden korunumu mantıksal analiz ile öğrenemeyeceğimiz sonucu belki de birçok kişinin tahmin edebileceği bir durumdu. Ancak, "korunum prensibinin "yaşadığımız dünya ile ilgili deneysel bir gerçeği içerdiği ve eğer miktarın içinde bulunduğu şekilde ve durumda bir değişiklik varsa, bu değişimin anlamlı ve miktar ile ilişkili olması fikri dikkate değer bir ilgi uyandırdı (Gordon, 2008). Peki, bu prensibin tersine çevirme prensibi ile ilişkisi nedir? Daha önceki bölümlerde de belirtildiği gibi, korunum prensibini anlayamayan bir çocuğun tersine çevirme prensibini anlamasının da hemen hemen mümkün olmadığı söylenebilir. Bu yeterliliğin okul öncesi dönemdeki çocuklarda var olduğu bilgisini hatırladığımızda tersine çevirme prensibinin, korunum prensibini kazanmış bir çocukta oluşma olasılığının paralelliğini görebiliriz.

İlkokul matematik öğretiminde, "Toplamsal" ifadelerin çözümünde tersine çevirme prensibi konusundaki yeterliliklerin değerlendirilmesi, bütün ilkokul öğrencilerini kapsayan genel bir mantık yürütme sürecinin öğretilmesine ve dolaylı yoldan günlük hayatta düz mantıktan uzak analitik düşünme yeteneği kazandırılmış bireylerin yetiştirilmesine katkıda bulunabilir. Bu yordama ile doğru orantılı olarak ilköğretim düzeyinde tersine çevirme prensibinin mantıklı düşünme sürecine katkısı konusunda bilinçlenmiş öğretmenlere ihtiyaç vardır. Bu ihtiyaç, öğretmenlerin matematik yeterliliğinin prensipleri konusunda yeteri kadar bilinçli olmaları için bilgilendirilmeleri gereğini doğurur. Matematiksel yeterliliğin var olduğunun kabul edilmesi için çocukların kavramsal olarak matematiksel işlemleri anlayabilmeleri, işlemleri akıcı bir şekilde yapabilmeleri, işlemleri yaparken strateji kullanabilme yeterliliklerinin bulunması, işlemlere uyarlayabilecekleri bir mantık yürütebilmeleri ve yeni fikirler ya da çözüm yolları üretme eğilimlerinin bulunması gerekir. Bu durumda "tersine çevirme" prensibini anlamış olan bir öğrenci, aritmetik ya da cebirsel işlemleri kavramsal olarak anlamış, mantık yürüterek strateji kullanabilen ve kullandığı bu strateji sayesinde matematiksel problemlere çok kısa sürede farklı çözümler getirebilecek durumda olan bir öğrencidir. Örneğin; Çocukların ayrıştırma stratejilerini kullanmaları için "*tersine çevirme prensibini*" net olarak anlamaya ihtiyaçları vardır (Bryant, Christie, ve Rendu, 1999; Akt: Carr ve Hettinger, 2003).

Bu prensibin okul öncesi ve ilköğretim dönemindeki çocukta geliştirilmesi görevi okul içinde öğretmenlere okul dışında da ailelere düşmektedir. Bunun yapılabilmesi için öncelikle aritmetiğin mantığının ve sayıların bu mantığın üzerine oturtuluş şeklinin öğretmenler tarafından öğretilmesi önerilebilir. Çocukların büyük bir kısmının bu stratejiyi bilmeden parmakları ile sayma yoluna gitmeleri ya da işlemi uzun uzun yapması durumu, bu stratejiyi kullanan öğrencilerle kullanamayan öğrenciler arasında işlemin sonucuna ulaşma zamanı arasında önemli bir fark yaratmaktadır. Ki bu fark matematik üzerine yapılan genel sınavlardan tutun da günlük hayatta karşılaşılan problemlerin çözümüne kadar birçok alanda stratejiyi kullananlara avantaj sağlayacaktır. Bu prensibin anlaşılması ve stratejisinin öğretilmesi nitel olarak ve oyunlarla yapılabileceği gibi sayıların kullanıldığı aritmetiksel işlem problemlerinin çözümünde de anlatılarak pratik yapılabilir. Fakat bütün bunlardan önce araştırmacıların ve öğretmenlerin, bir çocuğun tersine çevirme problemlerini nitelik mi yoksa nicelik temelinde mi çözdüğünü anlamaya ihtiyaçları vardır. Öğretimi her ne şekilde yapılırsa yapılsın, çocuklara mantıksal olarak öğretildiğinde sadece aritmetik problemlerde değil, günlük hayatta karşılaşılan benzeri durumlarda da çocuklar bu prensibin mantığı uygulayabilecekler ve bir takım şeyleri değiştirebileceklerinin farkına varabileceklerdir.

Bu makaledeki bilgiler, öğretmenlere ve öğretmen adaylarına bilgi verme amacını da gütmektedir. Öğretmenlerin aritmetiği öğretme yöntemlerindeki farklılıklar ya da eksikliklerin giderilmesi ve matematiği öğretmesinde, "tersine çevirme" ye (inversion principle) yeteri kadar önem verilmesinin öğrencilerin aritmetik başarısını arttıracağı hipotez edilmektedir. Ayrıca, "aritmetikte uzman olan kişiler analitik düşünmeye eğilimlidirler ve tersine çevirme ilişkisinin anlaşılması da aritmetikteki uzmanlık için gereklidir" ilişkisinin toplumda analitik düşünen bireylerin sayılarının artması ve toplum için üretebilen, var olan kaynakları en iyi şekilde değerlendirebilen, problem üreten değil problem çözen bireyler yetiştirilmesi konusunda yararlar sağlayabileceği düşünülmektedir.

"Aritmetikte Tersine Çevirme Prensibi ve Stratejisi" konusunda kuramsal anlamda genel bir temel oluşturulduğu düşünülen bu makale, konu ile ilgili yapılacak deneysel çalışmaları içtenlikle teşvik etmeyi de amaçlamaktadır.

KAYNAKÇA

Baroody, A. J., Torbeyns, J. & Verschaffel, L. (2009). Young children's understanding and application of subtraction-related principles. *Mathematical Thinking and Learning*, 11, 2-9.

Baroody, A. J., Lai, M., Li, X & Baroody, E. (2009). Preschoolers' understanding of subtraction-related principles. *Mathematical Thinking and Learning, 11*, 41-60.

Bisanz, J., ve LeFevre, J. (1990). Strategic and nonstrategic processing in the development of mathematical cognition. In D. F. Bjorklund (Eds.), *Children's strategies: Contemporary views of cognitive development.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 213–244.

Bisanz, J., Watchorn, R. P. D., Piatt, C. (2009). On 'understanding' children's developing use of inversion. *Mathematical Thinking and Learning*, *11*, 10-24.

Bryant, P., Christie, C., Rendu, A. (1999). Children's understanding of the relation between addition and subtraction: Inversion, identity, and decomposition. *Journal of Experimental Child Psychology, 74*, 194-212.

Carr, M. ve Hettinger, H. (2003). Perspectives on mathematics strategy development. In J. M. Royer (Eds.), *Mathematical cognition* (pp.33–69). USA: Information Age Publishing Inc.

Dowker, A. (2005). *Individual differences in arithmetic: Implications for psychology, neuroscience and education* (pp. 123–148). New York: Psychology Press.

Geary, D. C. (2006). Development of mathematical understanding. In D. Kuhl

& R. S. Siegler (Eds.) *Cognition, perception, and language, Vol. 2* (pp. 777–810). W. Damon (Gen. Ed.), Handbook of child psychology (sixth edition). New York: John Wiley & Sons,

Gilmore, C. K. & Spelke, E. S. (2008). Children’s understanding of the relationship between addition and subtraction. *Cognition, 107*, 932-945.

Gordon, P. (2008). Look ma, no fingers! Are children numerical solipsists? *Behavioral and Brain Sciences, 31*, 654-655. Doi: 10.1017/S0140525X08005712.

Klein, J. S. & Bisanz, J. (2000). Preschoolers doing arithmetic: The concepts are willing but the working memory is weak. *Canadian Journal Experimental Psychology, 54*, 105-114.

Lester, F.K. (2007). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). USA: Information Age Publishing Inc.

MEB (2005), *İlköğretim Matematik Programı 1-5. Sınıflar*. Ankara: MEB Yayınları.

Nunes, T., Bryant, P., Hallett, D., Bell, D. & Evans, D. (2009). Teaching children about the inverse relation between addition and subtraction. *Mathematical Thinking And Learning, 11*, 61-78.

Nunes, T., Schliemann, A. L. & Carraher, D. (1993). *Street mathematics and school mathematics*. New York: Cambridge Univ. Press.

Olkun S., Toluk Z. (2007). *İlköğretimde etkinlik temelli matematik öğretimi* (Genişletilmiş 3. baskı).Ankara: Maya Akademi Yayıncılık.

Piaget, J. & Moreau, A. (2001). *The inversion of arithmetic operations*. In J. Piaget (Ed.), Studies in reflecting abstraction (R.L. Campbell, Trans., pp.69-86). Hove, UK: Psychology Press (Original work published 1977).

Piaget, J. (1952). *The child's conception of number*. London: Routledge ve Kegan Paul.

Rasmussen, C., Ho, E. & Bisanz, J. (2003). Use of the mathematical principle of inversion in young children. *Journal of Experimental Child Psychology, 85*, 89-102.

Robinson, K. M., Arbuthnott, K. D., Rose, D. McCarron, M.C., Globa, C. A. & Phonexay, S. D. (2006). Stability and change in children's division strategies. *Journal of Experimental Child Psychology, 93*, 224-238.

Robinson, K. M., Ninowski, E.J. & Gray L.M. (2006). Children's understanding of the arithmetic concepts of inversion and associativity. *Journal of Experimental Child Psychology, 94*, 346-362.

Royer, J. M. Sherman, J., Bisanz, J. (2007). Evidence for Use of Mathematical Inversion By Three-Year-Old Children. *Journal of Cognition and Development*, 8, 3, 333-344.

Schneider,M. & Stern,E. (2009). The inverse relation of addition and subtraction: A knowledge integration perspective. *Mathematical Thinking and Learning, 11*, 92-101.

Sherman, J., & Bisanz, J. (2007). Evidence for use of mathematical inversion by three-year-old children. *Journal of Cognition and Development*, *8*, 333-344.

Stern, E. (1992). Spontaneous use of conceptual mathematical knowledge in elementary school children. *Contemporary Educational Psychology, 17*, 266-277.

Vilette, B. (2002). Do young children grasp the inverse relationship between addition and subtraction? Evidence against early arithmetic. *Cognitive Development, 1,* 365-383.