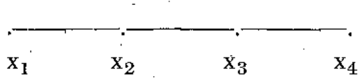
İSTATİSTİKTE KULLANILABİLECEK PRATİK BİR ENTERPOLASYON METODU

Doç. Dr. Kenan URAL

Bir doğru üzerinde bulunan 4 noktanın ikişer ikişer birleştirilmesi suretiyle meydana getirilecek 4 doğru parçası için aşağıdaki çift oranı teşkil edelim :

$$\frac{\overline{x_1x_3}}{\overline{x_2x_3}} : \frac{\overline{x_1x_4}}{\overline{x_2x_4}} .$$

4 nokta bir doğru üzerinde 24 farklı şekilde yer alabilir. Fakat bunların hepsi yukarıda yazılan oranlar gibi birbirinden farklı durumlar meydana getirmez; ancak 4 noktanın ikişerli kombinezon sayısı $\binom{4}{2}=6$ kadar farklı çift oran teşkil edilebilir.



Önce, yukarıda işaret edilen oranı aşağıdaki şekilde yazalım :

$$(1) \quad \frac{\overline{x_1x_3}}{\overline{x_2x_3}} : \frac{\overline{x_1x_4}}{\overline{x_2x_4}} = \frac{\overline{x_1x_3}}{\overline{x_2x_3}} \cdot \frac{\overline{x_2x_4}}{\overline{x_1x_4}}$$

Bunun gibi diğer çift oranları teşkil edelim :

$$(2) \quad \frac{\overline{x_1x_2}}{\overline{x_2x_3}} : \frac{\overline{x_1x_4}}{\overline{x_3x_4}} = \frac{\overline{x_1x_2}}{\overline{x_2x_3}} \cdot \frac{\overline{x_3x_4}}{\overline{x_1x_4}}$$

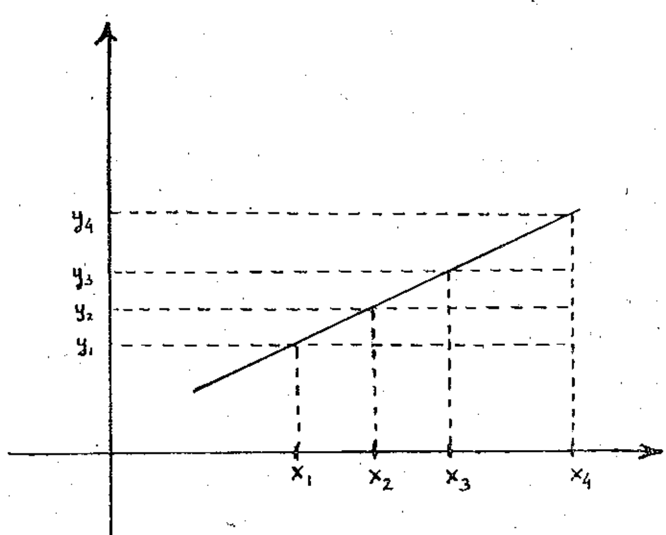
$$(3) \quad \frac{\overline{x_2x_3}}{\overline{x_1x_2}} : \frac{\overline{x_3x_4}}{\overline{x_1x_4}} = \frac{\overline{x_2x_3}}{\overline{x_1x_2}} \cdot \frac{\overline{x_1x_4}}{\overline{x_3x_4}}$$

$$(4) \quad \frac{\overline{x_1x_3}}{\overline{x_1x_2}} : \frac{\overline{x_3x_4}}{\overline{x_2x_4}} = \frac{\overline{x_1x_3}}{\overline{x_1x_2}} \cdot \frac{\overline{x_2x_4}}{\overline{x_3x_4}}$$

$$(5) \quad \frac{\overline{x_1x_2}}{\overline{x_1x_3}} : \frac{\overline{x_2x_4}}{\overline{x_3x_4}} = \frac{\overline{x_1x_2}}{\overline{x_1x_3}} \cdot \frac{\overline{x_3x_4}}{\overline{x_2x_4}}$$

$$(6) \quad \frac{\overline{x_2x_3}}{\overline{x_1x_3}} : \frac{\overline{x_2x_4}}{\overline{x_1x_4}} = \frac{\overline{x_2x_3}}{\overline{x_1x_3}} \cdot \frac{\overline{x_1x_4}}{\overline{x_2x_4}}$$

Bu dört noktanın karteziyen koordinat sisteminde bir doğru üzerinde bulunduğunu düşünelim. Aşağıdaki şekle bakarak noktaların yerini tesbitle :



Şekil 1

benzer üçgenler için şu iki oram yazabiliriz :

$$\frac{(x_3-x_2)}{(x_2-x_1)} = \frac{(y_3-y_2)}{(y_2-y_1)}$$

ve :

$$\frac{(x_4-x_3)}{(x_4-x_1)} = \frac{(y_4-y_3)}{(y_4-y_1)}$$

Her iki eşitliği taraf tarafa bölelim; böylece önce çift oranlar topluluğu :

$$\frac{(x_3-x_2)}{(x_2-x_1)} : \frac{(x_4-x_3)}{(x_4-x_1)} = \frac{(y_3-y_2)}{(y_2-y_1)} : \frac{(y_4-y_3)}{(y_4-y_1)}$$

ve nihayet şu eşitlik elde edilir :

$$\frac{(x_3-x_2)}{(x_2-x_1)} \cdot \frac{(x_4-x_1)}{(x_4-x_3)} = \frac{(y_3-y_2)}{(y_2-y_1)} \cdot \frac{(y_4-y_1)}{(y_4-y_3)}$$

Bu ifadelere benzer ifadeler yukarıda sıraladığımız diğer bütün çift oranların herbiri için yazılabilir. Bir doğru üzerinde mevcut 4 nokta için çift oranlar geometride bilinen homografik bölünme esasına göre de ifade edilebilirler[1]. Diğer taraftan i = 1, 2, 3, 4 olmak üzere x_i absis değerleri için a, b, c, d sabitleriyle yapılacak :

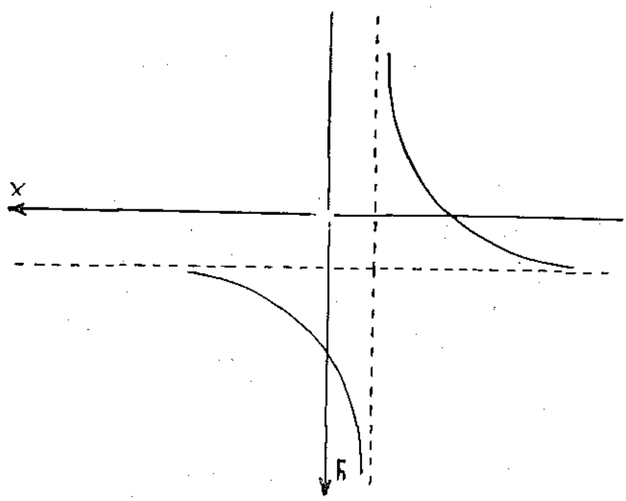
$$y_i = \frac{ax_i + b}{cx_i + d}$$

tipindeki dönüşüm sayesinde çift oranları verecek 4 noktanın ordinat değerleri bulunmuş olur. x değişkenini y'ye bağlayan fonksiyon homografik adiyle bilinen aşağıdaki fonksiyondur[2] :

[ ] işareti içinde bulunan sayılar bibliyografyada belirtilen kitapların sırasını gösterir.

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

Bu fonksiyonun değişimi incelenirse şu tipte bir grafik elde edilir :



Şekil 2

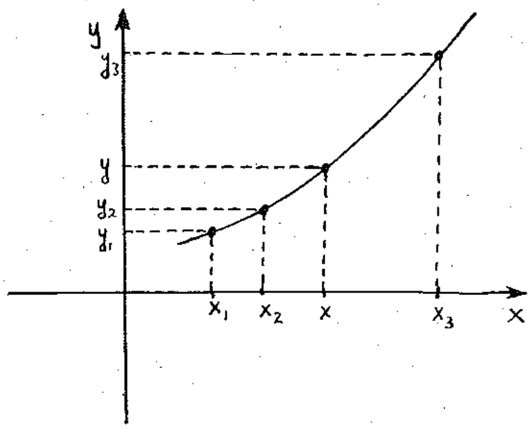
Görüleceği gibi homografik fonksiyonun bir dik koordinat sistemindeki değişim eğrisi ikizkenar bir hiperbolden başka bir şey değildir; asimtotlariyle eksenler birbirine paraleldir[3].

3 noktası belli olan ikizkenar hiperbol tâyin edilebilir. Dördüncü bir noktanın bilinen x absisine tekabül eden y ordinatı aşağıdaki çift oranlar denkleminden bulunabilir :

$$\frac{(x_3-x_2)(x-x_1)}{(x_2-x_1)(x-x_3)} = \frac{(y_3-y_2)(y-y_1)}{(y_2-y_1)(y-y_3)}$$

Artan veya azalan herhangibir fonksiyonun küçük bir aralık içindeki değişimi yukarıda bahsedilen ikizkenar hiperbol değişiminin yaklaşımı olarak kabul edilebilir. Bunu verilen 4 nokta için kontrol etmek kabildir.

Aşağıdaki şekilde verilen x_1, x_2, x_3 gibi absis noktalarından hareket ederek koordinatları (x, y) olacak bir noktayı tayin etmek isteyelim.



Şekil 3

x noktası görüldüğü gibi $x_1 < x < x_3$ şartına uyacaktır. y nin değeri yukarıda belirtilen çift oran formülüyle hesap edilecektir. Önce şu farkları yazalım :

$$f_1 = (x_3 - x_2) \quad , \qquad f_2 = (x_2 - x_1)$$

$$f_3 = (x - x_1) \quad , \qquad f_4 = (x_3 - x)$$

ve

$$\Delta_1 = (y_3 - y_2)$$

$$\Delta_2 = (y_2 - y_1)$$

Buna göre çift oran bağıntısı şu şekle girer :

$$\frac{f_1 \cdot f_3}{f_2 \cdot f_4} = \frac{\Delta_1 (y_1 - y)}{\Delta_2 (y - y_3)}$$

Burada y bilinmiyenini yalnız bırakarak :

$$y = \frac{y_1 f_3 f_4 \triangle_1 + y_3 f_1 f_3 \triangle_2}{f_2 . f_4 . \triangle_1 + f_1 . f_3 . \triangle_2}$$

buluruz.

Bu formül sayesinde bir eğri üzerindeki değerlerin enterpolasyon yoluyla kolayca hesap edilmesi mümkün olabilir. Dikkat edilirse formülün aynı zamanda y_1 ve y_3 değerlerinin bir çeşit tartılı aritmetik ortalamasını vermekte olduğu görülür. Tartılar sırasiyle $(f_2 f_4 \triangle_1)$ ve $(f_1 f_3 \triangle_2)$ değerlerini almaktadır. Böyle bir enterpolasyonda y_1 ve y_3 değerlerinin bir doğru üzerinde olmayıp bir hiperbol üzerinde olduğu esası kabul edilir.

Çift oran münasebetini şöyle yazalım :

$$\frac{f_1 f_3 \triangle_2}{f_2 f_4 \triangle_1} = \frac{(y_1 - y)}{(y - y_3)}$$

Eğer x_1, x_2, x_3 absis ve y_1, y_2, y_3 ordinatlarının tarif ettiği noktalar bir doğru üzerinde bulunursa, aşağıdaki oran yazılabilir :

$$\frac{\triangle_2}{\triangle_1} = \frac{f_2}{f_1}$$

yani $\triangle_2 f_1 = \triangle_1 f_2$ olur. Bu sayede enterpolasyon formülü daha da sadeleştirilerek şu şekle sokulabilir :

$$y = \frac{y_1 f_4 + y_3 f_3}{f_4 + f_3}$$

Belirttiğimiz enterpolasyon formülü istatisfikte sık sık kullanılan J, ters J veya U frekans eğri tipleri içinde kolaylıkla uygulanabilir

Eğer 4 nokta arasındaki mesafeler biribirine eşit olursa, yani $(x_2 - x_1) = (x_3 - x_2) = (x_4 - x_3) = h$ ise çift oranlar için aşağıdaki sonuç elde edilir :

$$\frac{(x_3-x_2)(x_4-x_1)}{(x_2-x_1)(x_4-x_3)} = \frac{h\,.\,3h}{h\,.\,h} = 3\ .$$

Bu özel hal tatbikatta çok sık karşılaşılan bir problem çeşididir.

Şimdi de iki farklı fonksiyon alarak enterpolasyon formülünün nasıl uygulanacağını görelim :

Problem 1 : Frekans eğrisine örnek olarak iskonto faktörü v^n nin, faiz yüzdesi i nin fonksiyonu olarak değişimini gözönünde tutabiliriz. $v = 1$ (1+i ile ve n in de 10 yıl gibi belli bir süre olduğunu gözönünde tutarak $i_1 = 0{,}035$, $i_2 = 0{,}04$ ve $i_3 = 0{,}05$ için bilinen v^{10} değerinden hareketle $i_4 = 0{,}045$ e tekâbül eden v^{10} yi enterpolasyon yolu ile bulalım. Önce enterpolasyon formülünde :

$$y = \frac{y_1 f_2 f_4 \triangle_1 + y_3 f_1 f_3 \triangle_2}{f_2 f_4 \triangle_1 + f_1 f_3 \triangle_2}$$

mevcut faktörleri hesap edelim :

$$\begin{aligned}
f_1 &= (x_3-x_2) = (0{,}05 - 0{,}04) = 0{,}01\\
f_2 &= (x_2-x_1) = (0{,}04 - 0{,}035) = 0{,}005\\
f_3 &= (x-x_1) = (0{,}045 - 0{,}035) = 0{,}01\\
f_4 &= (x_3-x) = (0{,}05 - 0{,}045) = 0{,}005
\end{aligned}$$

ve

$y_1 = 0{,}7089188$, $y_2 = 0{,}6755642$, $y_3 = 0{,}6139133$ için :

$$\begin{aligned}
\triangle_1 &= (y_3-y_2) = (0{,}6139133 - 0{,}6755642)\\
&= -0{,}0616509
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\triangle_2 &= (y_2-y_1) = (0{,}6755642 - 0{,}7089188)\\
&= -0{,}0333546.
\end{aligned}$$

Yerlerine koymak suretiyle :

$$y = \frac{0{,}7089188.0{,}005.0{,}005.(-0{,}0616509) + 0{,}6139133.0{,}01.0{,}01(-0{,}033546)}{0{,}005.0{,}005(-0{,}0616509) + 0{,}01.0{,}01\ (-0{,}0333546)}$$

$y = 0{,}64393394$

bulunur. Hakiki değer ise $v^{10}(0,045) = 0,6439277$ dir. Enterpolasyon yolu ile işlenen hata $\varnothing = 0,0000117$ olur ki esas değere oranı %00,0019 gibi küçük bir seviyede kalır.

Eğer bu yolu takip etmeyip lineer enterpolasyona başvurmuş olsaydık $i_2 = 0,04$ ve $i_3 = 0,05$ absis değerlerine tekabül eden 0,6139133 ve 0,6755642 ordinat değerlerinden :

$$y = \frac{0,6139133 + 0,6755642}{2} = 0,6447388$$

bulmuş olacaktık. Hakiki değer 0,6439277 den farkını alalım :

$$\triangle = 0,6447388 - 0,6439277$$
$$\triangle = 0,0008111.$$

Şimdi de esas formülü kullanmakla işlenen hata $\varnothing$ ile lineer enterpolasyon yoluyla işlenen hatayı mukayese edersek aradaki farkın 1/70 nisbetinde birincisinin lehinde olduğu görülür.

Problem 2 : Standart normal eğrinin simetrik ekseninin sağ tarafındaki kısmı gözönünde tutalım. Absis değerleri $t = 1,60$, $t_2 = 1,85$, $t_3 = 2,32$ olarak alınsın. Tekabül eden ordinat değerleri de sırasiyle :

$$y(t_1) = 0,1109$$
$$y(t_2) = 0,0721$$
$$y(t_3) = 0,0270$$

olacağına göre $t = 2,14$ için $f(t)$ değerini enterpolasyon yoluyla bulalım.

Önce gerekli faktörleri hesaplıyalım :

$$f_1 = (2,32 - 1,85) = 0,47$$
$$f_2 = (1,85 - 1,60) = 0,25$$
$$f_3 = (2,14 - 1,60) = 0,54$$
$$f_4 = (2,32 - 2,14) = 0,18$$

$$\triangle_1 = (0,0270 - 0,0721) = -0,0451$$
$$\triangle_2 = (0,0721 - 0,1109) = -0,0388$$

ve buradan

$$y = \frac{0{,}1109.0{,}25.0{,}18.(-0{,}0451) + 0{,}0270.0{,}47.0{,}54.(-0{,}0388)}{0{,}25.0{,}18(-0{,}0451) + 0{,}47.0{,}54\ (-0{,}0388)}$$

$$y = 0{,}0413366$$

bulunur.

Hakiki değerin ise $y(t) = 0{,}0413$ olduğu bilinmektedir. Yalnız 4 ondalık alındığı için aynı sonuç elde edilmiştir; hiçbir hata müşahede edilmemektedir.

Eğer aynı problem lineer enterpolasyonla çözülmüş olsaydı t_2 ve t_3 değerlerinden yararlanarak :

$$y = 0{,}0443$$

bulunurdu; hakiki değer olan 0,0413 den farkı $\triangle = 0{,}0030$ dur. Verdiğimiz formüle göre temin edilen sonuçla bu sonuç mukayese edilince lineer enterpolasyonun sebep olduğu hatanın önemi göze çarpar.

Görüleceği üzere incelenen enterpolasyon formülü çok yaklaşık bir değer vermekte, işlenen hata önemsiz bir seviyede kalmaktadır; kullanılması bazı farkların hesaplanmasına bağlı olup tamamiyle tatmin edici sonuçlar temin etmektedir.

BİBLİYOGRAFYA

[1] **C. E. Springer** : "Geometrie and Analysis of Projective Spaces"
Freeman and Cie. 1964, **London.**

[2] **G. Valiron** : "Théorie des Fonctions"
Masson et Cie.
1966, **Paris** s. 329.

[3] **R. Deltheil** : "Cours de Mathématiques Générales"
J. B. Bailliers et Fils
1966, **Paris,** s. 143.