

Pinyon-Tipi Takımla İmal Edilen Evolvent Düz Dişlilerinin Matematiksel Modellerinin Karşılaştırılması

Cüneyt Fetvacı*

ÖZ

Bu çalışmanın amacı evolvent dişlilerin imalatında kullanılan pinyon-tipi takımın literatürde mevcut matematik modellerinin karşılaştırılmasıdır. İncelemede Litvin'in Vektör Yaklaşımını esas alan çalışmalar göz önüne alınmıştır. Kesici takımın profil denklemleri, koordinat dönüşüm, diferansiyel geometri ve dişli teorisi uygulanarak imal eden ve imal edilen yüzeyler tanımlanmıştır. Verilen matematik modellerden hareketle evolvent düz dişli grafiklerini oluşturmak için bilgisayar programları geliştirilmiştir. Karşılaştırılan makalelerde farklı düzenlemiş denklemlerle özdeş geometrilerin elde edildiği görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Evolvent dişliler, pinyon-tipi takım, matematik modelleme

Comparison of Mathematical Models of Involute Spur Gears Generated by Pinion-Type Cutters

ABSTRACT

The purpose of this study is to make a comparison of mathematical models of pinion-type cutters that generate involute gears in the literature. Journal papers based on Litvin's Vector Approach are taken into consideration in this investigation. The equations of the profile of the cutter, the principle of coordinate transformation, the theory of differential geometry and the theory of gearing are applied for describing generating and generated surfaces. Based on the given mathematical models, computer simulation programs are developed to obtain the tooth profile of involute spur gears. It has been seen that in comparative models, identical geometries are obtained with differently arranged equations.

Keywords: Involute gears, pinion-type cutter, mathematical modeling

Geliş/Received : 18.03.2018
Kabul/Accepted : 11.10.2018

* Prof. Dr., İstanbul Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makina Mühendisliği Bölümü, İstanbul - fetvacic@istanbul.edu.tr, ORCID: 0000-0002-1622-1583



1. GİRİŞ

Dişli çarkların seri imalatında yuvarlanma metodunu esas alan takımlar kullanılmaktadır. Bu takımlar azdırma, kremayer takım ve pinyon-tipi takım olarak sınıflandırılmaktadır. İç ve dış dişlilerin imalatında yaygın olarak kullanılan pinyon-tipi takım görünüş itibariyle dişli çarka benzer. Ancak dış yüksekliği arttırılmış ve yüzeylere talaş kaldırıcı özellikler verilmiştir. Takımın yüzeyleri evolvent yanak, dairesel yay formunda dış ucu ve düz formda dış başından oluşmaktadır. Bu yüzeyler sırasıyla imal edilen dişlinin evolvent profilini, dış kökünü ve dış tabanını şekillendirir [1].

Pinyon-tipi takımın matematik modellenmesi çeşitli makalelerde ele alınmıştır. Modellemede yaygın olarak Litvin tarafından sunulan Vektör Metodu kullanılmaktadır [2]. Bu metotta takım yüzeyinin vektörel ifadesinden hareketle matris dönüşüm, diferansiyel geometri ve dişli mekaniği kullanılarak imal edilen dişlilerin matematik modelleri elde edilmektedir. Chang ve Tsay [3], tüm şekillendirici yüzeyleri göz önüne alan düz dişli pinyon-tipi takımın matematik modelini sunmuş ve uygun dönüşümlerle eliptik dişlilerin matematik modelini elde etmiştir. Tsay ve arkadaşları [4], imal edilen dişlide taşlama payı ve fonksiyonel modifikasyonu sağlayan takımın matematik modelini sunmuştur. Takım parametrelerinin imal edilen dişli çark geometrisini üzerindeki etkilerini incelemek ve optimum parametreleri belirlemek üzere programlar geliştirilmiştir [4]. Figliolini ve Angeles [5], Chang ve Tsay'ın [3] modelinden hareketle eliptik dişli çarklar ve eliptik kremayerlerin matematik modellerini sunmuştur. Çalışmada sivri uçlu takım göz önüne alınmıştır. Wu ve arkadaşları [6], düz dişli pinyon-tipi takımla imal edilen helipoid dişli çarkların matematik modelini sunmuştur. Helipoid dişliler aykırı eksenli millerde çalışan hipoid ve çapraz helisel dişli çarkların üstün özelliklerini bir arada sunan yeni bir dişli uygulamasıdır [6]. Liu ve Wang [7], pinyon-tipi takım matematik modelinden hareketle beveloid iç düz dişli çarkın matematik modelini elde etmiştir. Dış dişli çarkın azdırma ile imal edildiği çalışmada mekanizmanın montaj hatalarına karşı duyarsız olduğu sonucuna varılmıştır [7]. Tsay and Fong [8], sivri uçlu pinyon-tipi takımla imal edilen helisel dişlilerin matematik modelini sunmuştur. Ayrıca face dişli için dönüşümler verilmiş ve dişli temasını iyileştirmek için profil modifikasyonu uygulanmıştır [8]. Liu ve arkadaşları [9], sivri uçlu pinyon-tipi takımla imal edilen düz beveloid dış dişli çarkların matematik modelini sunmuştur. Fetvacı [10], Chang ve Tsay'ın [3] ve Tsay ve Fong'un [8] çalışmalarından hareketle tüm şekillendirici yüzeyleri göz önüne alan helisel dişli pinyon-tipi takımın matematik modelini sunmuştur. Çalışmada ayrıca imal edilen dişli çarkın standart dış başını analitik olarak belirleyen bir yöntem geliştirilmiştir. Chen ve arkadaşları [11], düz beveloid iç dişli çark mekanizması için yeni bir imalat yöntemi geliştirmiştir. Geliştirilen yöntem ile konvansiyonel yöntem karşılaştırılmıştır. Çalışmada imal eden ve imal edilen yüzeylerin denklemleri, dönüşümler ve profil kaydırmanın modele uygulanması verilmiştir [11]. Tablo 1'de pinyon-tipi takımla imal edilen farklı dişli çark tipleri ve imalat yöntemleri listelenmiştir.

Tablo 1. Pinyon Takımla İmal Edilen Dişli Tipleri

Referans	Takım	İmal Edilen Dişli	İmalat Yöntemi
Chang ve Tsay [3]	Düz Dişli Pinyon-Tipi (Yuvarlatılmış Uçlu)	Eliptik Düz Dişli	Fellow
Figliolini ve Angeles [5]	Düz Dişli Pinyon-Tipi (Sivri Uçlu)	Eliptik Düz Dişli ve Kremayeri	Fellow
Wu ve arkadaşları [6]	Düz Dişli Pinyon-Tipi (Sivri Uçlu)	Helipoid Dişli Çark	Fellow (Takım mili taslağa göre eğimli)
Fetvacı [10]	Helisel Dişli Pinyon-Tipi (Yuvarlatılmış Uçlu)	Alın Helisel Dişli Çark	Fellow
Tsay ve Fong [8]	Helisel Dişli Pinyon-Tipi (Sivri Uçlu)	Helisel Dişli ve Face Dişli	Plastik Enjeksiyon Kalıplama
Liu ve Wang [7]	Düz Dişli Pinyon-Tipi (Sivri Uçlu)	Beveloid Düz İç Dişli	Fellow (Takım mili taslağa göre eğimli)
Liu ve arkadaşları [9]	Düz Dişli Pinyon-Tipi (Sivri Uçlu)	Beveloid Düz Dış Dişli	Fellow (Takım mili taslağa göre eğimli)
Chen ve arkadaşları [11]	Düz Dişli Pinyon-Tipi (Yuvarlatılmış Uçlu)	Beveloid Düz Dış ve İç Dişli	Fellow (Takım ve taslak mili paralel)

Yukarıda özetlenen çalışmalardan Chang ve Tsay'in düz dişli pinyon-tipi takım modelinin literatürde öncü çalışma olduğu ve takip eden birçok çalışmaya kaynak olduğu anlaşılmaktadır. Yuvarlatılmış uçlu takım için geliştirilen bu model takip eden çalışmalarda sivri uç, tam yuvarlak uç, asimetrik dişli, helisel dişli ve düz beveloid dişli durumlarına adapte edilmiştir. Bu çalışmalardan farklı olarak, Chen ve arkadaşları [11], evolvent düz dişli pinyon-tipi takımın matematik modelini değişik bir düzenleme ile sunmuştur. Aynı geometriyi elde etmekle birlikte modellerdeki farklılıklar yazarı bu iki çalışmayı inceleyerek kıyaslamaya teşvik etmiştir.

Çalışmanın ikinci bölümünde pinyon-tipi takımın matematik modelleri ele alınmıştır. Farklı koordinat sistemlerinde tanımlanmış parametrik denklemler, sınır değerler ve dönüşümler verilmiştir. Üçüncü bölümde imal edilen dişli çarkların matematik modelleri incelenmiştir. Takım-Taslak koordinat dönüşümleri verilmiştir. Dördüncü bölümde modeller koordinat sistemleri ve denklemler bakımından karşılaştırılmıştır. Takip eden bölümde modellerden hareketle geliştirilen bilgisayar programlarının çıktıları görselleştirilmiştir. Sonuçların vurgulandığı altıncı bölümle çalışma tamamlanmıştır.

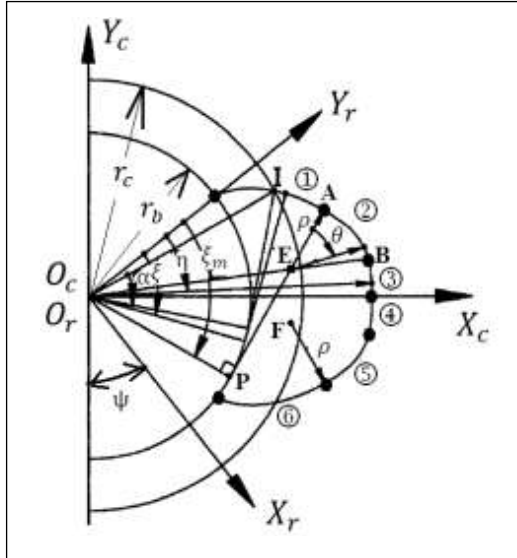


2. PİNYON-TİPİ TAKIMIN PROFİL DENKLEMİ

Takım üç farklı bölgeden oluştuğu için birleşme noktalarında konum, teğet ve eğrilik sürekliliği şartları sağlanacak şekilde denklemler türetilir. Değişkenler ve bölgesel parametreler takım geometrisinden tayin edilmektedir. Denklemler bir referans koordinat sisteminde türetilir, çizim ve diğer işlemler için takım kartezyen koordinat sistemine dönüştürülür. Bu çalışmada incelenen modeller aşağıda verilmektedir. Düz dişli çarklarda diş genişliği boyunca kesit geometrisi değişmediğinden modelleme iki boyutlu olarak yapılmaktadır. Takip eden kısımlarda literatürde mevcut Chang ve Tsay'in [3] ve Chen ve arkadaşları'nın [11] modelleri ayrı ayrı ele alınacaktır.

2.1 Birinci Model

Evolvent düz dişli çarkların imalatında kullanılan pinyon-tipi takımın geometrisi Şekil 1'de gösterilmektedir [3]. Dişler simetrik olduğu için bir yanda denklemler türetilmiş ve uygun işaretleme ile tam profil modellenmiştir. Takımın evolvent formda 1. ve 6. bölgeleri dişli çarkın evolvent yanaklarını, E ve F noktali merkezli dairesel yay formunda 2. ve 5. bölgeleri dişli çarkın dış köklerini, 3. ve 4. bölgeleri ise diş tabanlarını şekillendirmektedir. Denklemlerin türetildiği $S_r (X_r, Y_r)$ referans koordinat sisteminin Y_r eksenine sol evolvent profilin temel dairesi üzerinde başladığı noktadan geçer. Sol profilin Y_r eksenine göre yansıması ile sağ profil referans koordinat sisteminde elde edilir. $S_c (X_c, Y_c)$ kartezyen koordinat sisteminin X_c eksenine aynı zamanda dişin simetri eksenidir. Her iki dik koordinat sistemi sağ el kuralına uyar ve orijinleri takımın ağırlık merkezindedir.



Şekil 1. Pinyon Takımın Dış Profili [3]

Dönüşüm açısı ψ takımın dış sayısı z_c ve taksimat dairesindeki kavrama açısı α olmak üzere $\psi = \pi/2z_c + \tan\alpha - \alpha$ ifadesiyle hesaplanır. Böylelikle aşağıda verilen dönüşüm matrisi uygulanarak takım profili kartezyen koordinatlarda edilir. Bu ifadede alt işaret sol (1, 2, 3) üst işaret sağ (6, 5, 4) profil için uygulanmaktadır.

$$\begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \psi\right) & \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \psi\right) & 0 \\ -\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \psi\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \psi\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_r \\ y_r \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Şekil 1.'de görüldüğü üzere takımın 1. bölgesi evolvent yüzeydir ve ξ parametresi $0 \leq \xi \leq \xi_m$ aralığında değişerek bölgedeki keyfi bir noktanın yerini belirlemektedir. Temel dairesi yarıçapı r_b sembolü ile gösterilmektedir. ξ_m maksimum evolvent açısıdır. Sol ve sağ evolvent bölgenin yer vektörü $S_r(X_r, Y_r)$ referans koordinat sisteminde Eş.2'de ifade edilmiştir [2, 3].

$$\begin{Bmatrix} x_r^{1,6} \\ y_r^{1,6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mp r_b \sin \xi \pm r_b \xi \cos \xi \\ r_b \cos \xi + r_b \xi \sin \xi \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Koordinat sistemleri arasındaki ilişkiye göre bölgelerin yer vektörleri Eş. 1'de verilen ifade uygulanarak referans koordinat sisteminden kartezyen koordinat sistemine dönüştürülebilir. Böylece 1. ve 6. bölgenin yer vektörü $S_c(X_c, Y_c)$ koordinat sisteminde ifadesi Eş. 3'te elde edilir [2, 3].

$$\begin{Bmatrix} x_c^{1,6} \\ y_c^{1,6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_b \cos(\xi - \psi) + r_b \xi \sin(\xi - \psi) \\ \pm r_b \sin(\xi - \psi) \mp r_b \xi \cos(\xi - \psi) \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Takımın 2. ve 5. bölgeleri imal edilen dişlinin farklı taraflarındaki dış dibi köklerini şekillendirir. Şekil 1.'de görüldüğü üzere θ parametresi takımın yuvarlatılmış ucundaki keyfi bir noktanın yerini belirlemekte ve $0 \leq \theta \leq \pi/2 - \tan^{-1}(\xi_m - \rho/r_b)$ aralığında değişmektedir. Yuvarlatma yarıçapı ρ sembolü ile gösterilmektedir. A noktasında 1. ve 2. bölgelerin teğet sürekliliğini sağlamak üzere yuvarlatılmış ucun eğrilik merkezi E noktası \overline{PA} doğrusu üzerinde konumlandırılır. Takım geometrisinden hareketle 2. ve 5. bölgelerin yer vektörleri referans koordinat sisteminde Eş. 4'te elde edilir. Benzer işlemler uygulanarak takımın 2. ve 5. bölgelerinin yer vektörleri $S_c(X_c, Y_c)$ koordinat sisteminde Eş. 5'te ifade edilir [3].

$$\begin{Bmatrix} x_r^{2,5} \\ y_r^{2,5} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mp r_b \sin \xi_m \pm r_b \xi_m \cos \xi_m \mp \rho \cos \xi_m \pm \rho \cos(\theta + \xi_m) \\ r_b \cos \xi_m + r_b \xi_m \sin \xi_m - \rho \sin \xi_m + \rho \sin(\theta + \xi_m) \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{Bmatrix} x_c^{2,5} \\ y_c^{2,5} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_b \cos(\xi_m - \psi) + r_b \xi_m \sin(\xi_m - \psi) - \rho \sin(\xi_m - \psi) + \rho \sin(\theta + \xi_m - \psi) \\ \pm r_b \sin(\xi_m - \psi) \mp r_b \xi_m \cos(\xi_m - \psi) \pm \rho \cos(\xi_m - \psi) \mp \rho \cos(\theta + \xi_m - \psi) \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Takımın 3. ve 4. bölgeleri imal edilen dişlinin farklı taraflarındaki dış tabanlarını şekillendirir. η parametresi 3. bölgedeki keyfi bir noktanın yerini be-



lirlemekte ve $\xi_m + \beta - \pi/2 \leq \eta \leq \tan\alpha - \alpha + \pi/2z_0$ aralığında değişmektedir. $\beta = \pi/2 - \tan^{-1}(\xi_m - \rho/r_b)$ olarak hesaplanır. Takımın dış başı yarıçapı $r_{a0} = \sqrt{r_b^2 + (r_b\xi_m - \rho)^2} + \rho$ dir. Takımın 3. ve 4. bölgelerin yer vektörleri referans koordinat sisteminde Eş. 6'da elde edilir. Benzer işlemler uygulanarak takımın 3. ve 4. bölgelerinin yer vektörü Eş. 7'de elde edilir [3].

$$\begin{cases} x_r^{3,4} \\ y_r^{3,4} \end{cases} = \begin{cases} \mp r_{a0} \sin\eta \\ r_{a0} \cos\eta \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} x_c^{3,4} \\ y_c^{3,4} \end{cases} = \begin{cases} r_{a0} \cos(\eta - \psi) \\ \pm r_{a0} \sin(\eta - \psi) \end{cases} \quad (7)$$

Teğet vektörler eğrilerde sınır noktaların belirlenmesinde kullanılır. Eş çalışan dişli-lerde temasın herhangi bir noktasında ortak normalin ani dönme merkezinden geçme şartı gereğince normal vektörler de hesaplanmalıdır. Düzlem eğrilerde normal vektör eğrinin teğet vektörü ile z ekseninin birim vektörünün çarpaz çarpımı ile bulunur. Yer vektörü R ve bölge parametresi $l = \zeta, \theta, \eta$ olmak üzere $S_c(X_c, Y_c)$ koordinat sisteminde normal vektör Eş. 8'de ifade edilir [2]. Normal vektörün determinantına bölünmesi ile birim normal vektör bulunur.

$$N_c = \frac{\partial R_c}{\partial l} \times k \quad (8)$$

$$n_c = \frac{\frac{\partial R_c}{\partial l} \times k}{\left\| \frac{\partial R_c}{\partial l} \times k \right\|} \quad (9)$$

Pinyon-tipi takım yüzeylerinin birim normal vektörleri Eş. (3, 5, 7) ve Eş. 8 kullanılarak Eş. (10-12)'de elde edilir [3]. Alt işaret takımın sol (1-3) bölgeleri ve üst işaret sağ (4-6) bölgeleri içindir.

$$n_c^{1,6} = \begin{cases} \pm \sin(\xi - \psi) \\ -\cos(\xi - \psi) \end{cases} \quad (10)$$

$$n_c^{2,5} = \begin{cases} \pm \sin(\theta + \xi_m - \psi) \\ -\cos(\theta + \xi_m - \psi) \end{cases} \quad (11)$$

$$n_c^{3,4} = \begin{cases} \pm \cos(\eta - \psi) \\ \sin(\eta - \psi) \end{cases} \quad (12)$$

2.2 İkinci Model

Şekilde orijinleri temel dairesinin merkezinde konumlu referans ve kartezyen koordinat sistemlerinde ifade edilen evolvent düz dişli takımın normal kesiti görülmektedir. Kolaylık açısından simetrik dişin yarısı gösterilmektedir [11]. İmal edici yüzeyler ön-



$$\begin{cases} x_r^{1,6} \\ y_r^{1,6} \end{cases} = \begin{cases} \mp \frac{r_b}{\cos \alpha_k} \sin \left(\tan \alpha_k - \alpha_k - \eta + \frac{\pi}{z_c} \right) \\ \frac{r_b}{\cos \alpha_k} \cos \left(\tan \alpha_k - \alpha_k - \eta + \frac{\pi}{z_c} \right) \end{cases} \quad (14)$$

Koordinat sistemleri arasındaki ilişkiye göre bölgelerin yer vektörleri Eş. 13'te verilen ifade uygulanarak referans koordinat sisteminden kartezyen koordinat sistemine dönüştürülebilir. Böylelikle takımın sol ve sağ evolvent bölgelerinin yer vektörleri kartezyen koordinat sisteminde Eş. 15'te elde edilir [11].

$$\begin{cases} x_c^{1,6} \\ y_c^{1,6} \end{cases} = \begin{cases} \mp \frac{r_b}{\cos \alpha_k} \sin \left(\tan \alpha_k - \alpha_k - \eta \right) \\ \frac{r_b}{\cos \alpha_k} \cos \left(\tan \alpha_k - \alpha_k - \eta \right) \end{cases} \quad (15)$$

Takımın \overline{BC} bölgesi imal edilen dişlinin dış kökünü şekillendirmektedir. \overline{BC} bölgesindeki keyfi bir noktanın yerini θ parametresi belirlemekte ve $0 \leq \theta \leq \pi/2 - (\alpha_B - \zeta)$ aralığında değişmektedir. Noktanın yer vektörü referans ve kartezyen koordinat sistemlerinde sırasıyla Eş. 16 ve Eş. 17'de ifade edilebilir [11].

$$\begin{cases} x_r^{2,5} \\ y_r^{2,5} \end{cases} = \begin{cases} \pm \rho \cos \left(\alpha_B - \xi - \gamma + \theta + \frac{\pi}{z_c} \right) \pm (r_{a0} - \rho) \sin \left(\gamma - \frac{\pi}{z_c} \right) \\ \rho \sin \left(\alpha_B - \xi - \gamma + \theta + \frac{\pi}{z_c} \right) + (r_{a0} - \rho) \cos \left(\gamma - \frac{\pi}{z_c} \right) \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} x_c^{2,5} \\ y_c^{2,5} \end{cases} = \begin{cases} \pm \rho \cos \left(\alpha_B - \xi - \gamma + \theta \right) \pm (r_{a0} - \rho) \sin \gamma \\ \rho \sin \left(\alpha_B - \xi - \gamma + \theta \right) + (r_{a0} - \rho) \cos \gamma \end{cases} \quad (17)$$

Takımın \overline{CD} bölgesi imal edilen dişlinin dış tabanını şekillendirmektedir. λ parametresi \overline{CD} bölgesindeki keyfi bir noktanın yerini belirlemekte ve $-\gamma \leq \lambda \leq 0$ aralığında değişmektedir. \overline{CD} bölgesi referans koordinat sisteminde Eş. 18'de ve kartezyen koordinat sisteminde Eş. 19'da ifade edilebilir [11].

$$\begin{cases} x_r^{3,4} \\ y_r^{3,4} \end{cases} = \begin{cases} \mp r_{a0} \sin \left(\lambda + \frac{\pi}{z_c} \right) \\ r_{a0} \cos \left(\lambda + \frac{\pi}{z_c} \right) \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} x_c^{3,4} \\ y_c^{3,4} \end{cases} = \begin{cases} \mp r_{a0} \sin \lambda \\ r_{a0} \cos \lambda \end{cases} \quad (19)$$

Yer vektörü R ve bölge parametresi $l = \alpha_k, \theta, \lambda$ olmak üzere $S_c(X_c, Y_c)$ koordinat sisteminde normal vektör Eş. 20'de ifade edilir [2]. Normal vektörün determinantına bölünmesi ile birim normal vektör bulunur.

$$N_c = \frac{\partial R_c}{\partial t} \times k \quad (20)$$

$$n_c = \frac{\frac{\partial R_c}{\partial t} \times k}{\left\| \frac{\partial R_c}{\partial t} \times k \right\|} \quad (21)$$

Pinyon-tipi takım yüzeylerinin birim normal vektörleri Eş. (15, 17, 19) ve Eş.21 kullanılarak Eş. (22-24)'te elde edilir [11]. Denklemlerde alt işaret sol üst işaret sağ profil içindir.

$$n_c^{1,6} = \begin{cases} \cos(\tan\alpha_k - \eta) \\ \pm \sin(\tan\alpha_k - \eta) \end{cases} \quad (22)$$

$$n_c^{2,5} = \begin{cases} \cos(\alpha_B - \xi - \gamma + \theta) \\ \pm \sin(\alpha_B - \xi - \gamma + \theta) \end{cases} \quad (23)$$

$$n_c^{3,4} = \begin{cases} -\sin\lambda \\ \pm \cos\lambda \end{cases} \quad (24)$$

3. İMAL EDİLEN DİŞLİ ÇARKIN MATEMATİK MODELİ

İmalat esnasında takım ve taslak dişli, eş çalışan dişli çiftinde olduğu gibi senkron hızlarda hareket ederler. Açısal hızların veya dönme açılarının oranı diş sayılarının oranına bağlıdır. Takım yüzeyinin taslağın koordinat sisteminde elde edilmesi gerektiğinden takıma bağlı hareketli, taslağa bağlı hareketli ve taslağa bağlı sabit koordinat sistemleri oluşturulur. Şekil 3 ve Şekil 4'de gösterildiği üzere $S_c(X_c, Y_c)$ takım koordinat sistemi, $S_g(X_g, Y_g)$ taslak koordinat sistemi ve $S_f(X_f, Y_f)$ sabit koordinat sistemidir. Takım ϕ_c açısıyla döndüğünde $\phi_g = \phi_c x z/z_g$ taslak kadar döner. Takımın taksimat yarıçapı r_c sembolüyle ve imal edilen dişlinin taksimat yarıçapı r_g sembolüyle gösterilmektedir. Takımın imal edilen dişlinin koordinat sistemindeki geometrik yeri aşağıdaki ifade ile elde edilir. Üst indis i sırasıyla takımın 1, 2, 3, 4, 5 ve 6. bölgelerini gösterir. $[M_{gc}]$ koordinat dönüşüm matrisidir.

$$R_g^i = [M_{gc}]R_c^i \quad (25)$$

Dişli Ana Kanunu gereğince hareketin herhangi bir safhasında temas noktasındaki iki eş diş profilinin ortak normali yuvarlanma noktasından geçer. Bu kanunun matematiksel ifadesi olan eş çalışma denklemi aşağıda verilmiştir [2].

$$\frac{x_c^i - x_c^i}{n_{xc}^i} = \frac{y_c^i - y_c^i}{n_{yc}^i} \quad (26)$$

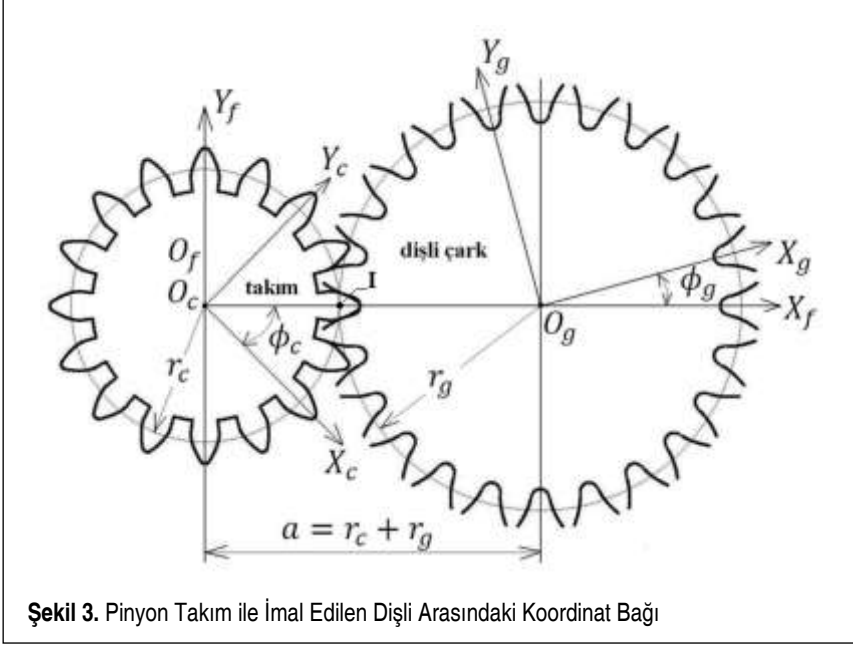
Yuvarlanma noktasının koordinatları (X_c, Y_c) dir. Takım yüzeylerinin koordinatları x_c^i ve y_c^i ; birim normal vektörün doğrultman kosinüsleri n_{cx}^i ve n_{cy}^i sembolleriyle gösterilmektedir. Yuvarlanma parametresi $l = \zeta$, θ , η ile $l = \alpha_k \theta$, λ yüzey parametresi veya ϕ_c arasındaki bağ Eş. 26 kullanılarak bulunur. Eş. 25 ve Eş. 26 eş zamanlı çözülerek imal edilen dişli çarkın matematik modeli elde edilir.

Takip eden kısımlarda incelenen iki modele ait dönüşümler verilmiştir. Takımlar kar-tezyen koordinat sistemine göre farklı konumlarda olduğundan dönüşüm matrisleri literatürde mevcut denklemlerden [2] faydalanılarak modellere adapte edilmiştir.



3.1 Birinci Model

Takım ve taslak arasındaki koordinat bağı Şekil 3'te gösterilmiştir. $S_c(X_c, Y_c)$ koordinat sisteminden $S_g(X_g, Y_g)$ koordinat sistemine dönüşüm matrisi Eş. 27'de verilmiştir [2].



Şekil 3. Pinyon Takım ile İmal Edilen Dişli Arasındaki Koordinat Bağı

$$[M_{gc}] = \begin{bmatrix} \cos(\phi_c + \phi_g) & \sin(\phi_c + \phi_g) & -(r_c + r_g)\cos\phi_g \\ -\sin(\phi_c + \phi_g) & \cos(\phi_c + \phi_g) & (r_c + r_g)\sin\phi_g \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

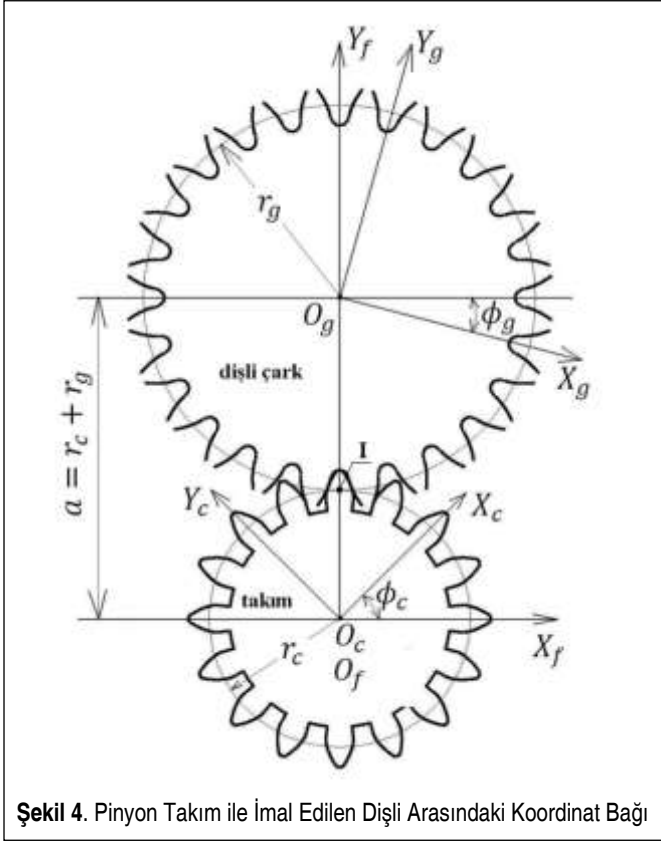
Bu modelde yuvarlanma noktasının (I noktası) koordinatları $X_c = r_c \cos\phi_c$ ve $Y_c = r_c \sin\phi_c$ dir.

3.2 İkinci Model

Takım ve taslak arasındaki koordinat bağı Şekil 4'te gösterilmiştir. $S_c(X_c, Y_c)$ koordinat sisteminden $S_g(X_g, Y_g)$ koordinat sistemine dönüşüm matrisi Eş. 28'de verilmiştir [2].

$$[M_{gc}] = \begin{bmatrix} \cos(\phi_c + \phi_g) & -\sin(\phi_c + \phi_g) & (r_c + r_g)\sin\phi_g \\ \sin(\phi_c + \phi_g) & \cos(\phi_c + \phi_g) & -(r_c + r_g)\cos\phi_g \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

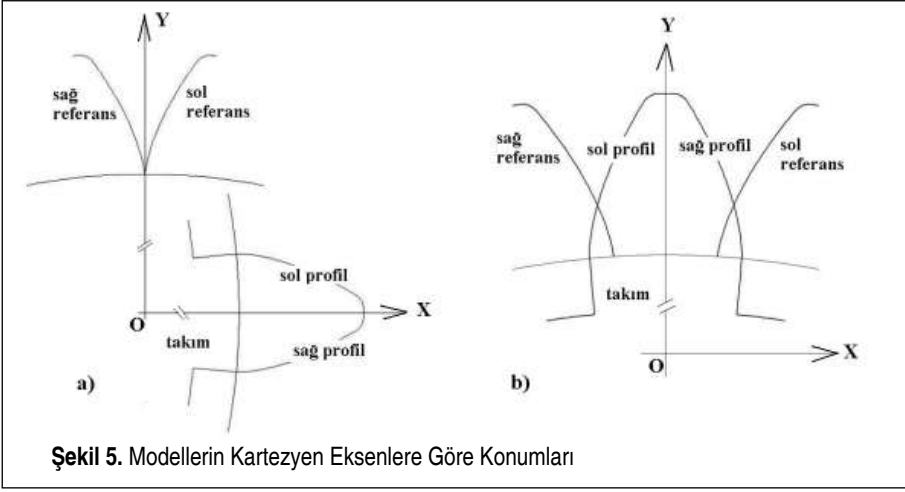
Bu modelde yuvarlanma noktasının (I noktası) koordinatları $X_c = r_c \sin\phi_c$ ve $Y_c = r_c \cos\phi_c$ dir.



4. KARŞILAŞTIRMA

Modellerin koordinat sistemlerindeki farklılıklardan dolayı dönüşüm matrisleri farklı karakteristik arz etmektedir. Birinci modelde $S_r(X_r, Y_r)$ referans koordinat sisteminin Y_r eksenini evolvent profilin başlama noktasından geçmektedir. Referans sağ ve sol profilleri $S_c(X_c, Y_c)$ takım koordinat sistemine dönüştürmek için dönme yönü aynı fakat dönme açıları farklıdır. İkinci modelde ise referans koordinat sisteminin Y_r eksenini takımın diş boşluğu merkez doğrusundan geçmektedir. Referans sağ ve sol profilleri takım koordinat sistemine dönüştürmek için dönme yönü farklı fakat dönme açıları aynıdır. Modellerde aynı diş geometrisi elde edilmektedir. Her iki modelde referans koordinat sistemleri kartezyen koordinat sistemleri ile çakıştırılmış ve referans profillerin kartezyen koordinatlardaki yerleri görselleştirilmiştir. Şekil 5a'da birinci model [3] ve Şekil 5b'de ikinci model [11] için profiller görülmektedir.

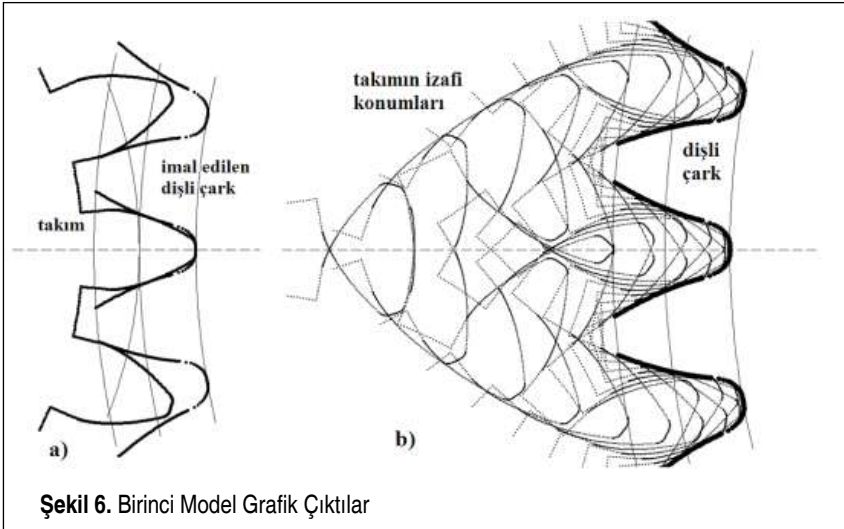
Birinci modelde yer vektörlerinin bileşenleri daha karmaşık bir görünüm arz etmektedir. İkinci modelde daha kompakt bir trigonometrik ifadeyle bölge denklemleri



elde edilmiştir ve programlama kolaylığı vardır. Örnek olarak (5) ve (17) numaralı denklemler incelendiğinde diş ucu profilinin ikinci modele ait (17) numaralı denklemle daha kolay hesaplandığı görülmektedir. Takım diş merkez doğrusu modellerde farklı eksenlere çakışık olduğundan takım-taslak dönüşüm matrisleri de farklıdır.

5. UYGULAMALAR

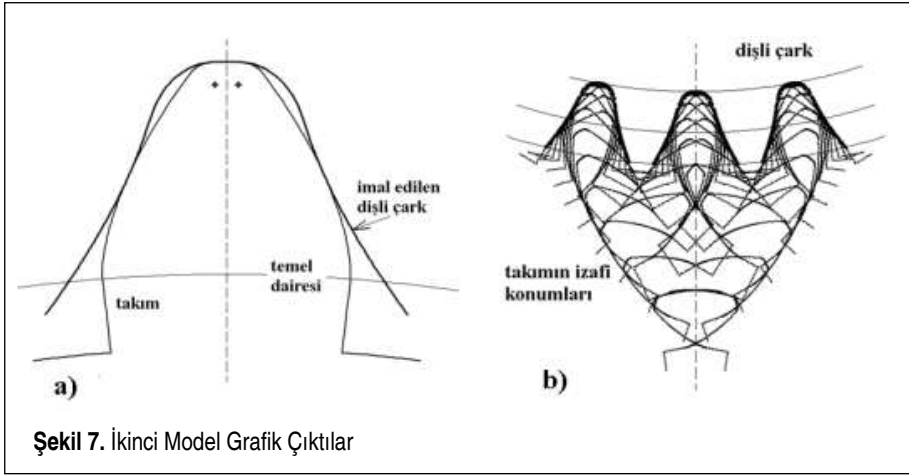
Önceki bölümlerde verilen matematik modellerden hareketle bilgisayar programları hazırlanmıştır. Böylece çeşitli dizayn parametreleri için programlar çalıştırılarak takımlar ve imal edilen dişli çark profillerinin koordinatlarını listeleyen çıkış dosyaları



elde edilmektedir. Bu dosyalar grafik işleme programlarında değerlendirilerek görselleştirme sağlanmaktadır.

Birinci matematik modelden hareketle geliştirilen programın çalıştırılması ile elde edilen çıktılar Şekil 6'da gösterilmiştir. Şekil 6a'da pinyon-tipi takım ve imal edilen dişli çark profilleri görülmektedir. Takımın izafi konumları Şekil 6b'de görselleştirilmiştir.

İkinci model için benzer çıktılar Şekil 7'de gösterilmektedir.



6. SONUÇLAR

Bu çalışmada pinyon-tipi takımın ve imal edilen dişli çarkların matematik modelleri ele alınmıştır. Literatürde mevcut iki ayrı model [3,11] incelenmiş, takım profil denklemleri ve dönüşümler verilmiştir. Referans koordinattan takım koordinatına dönüşüm matrisleri sağ ve sol profili sırasıyla gösterecek şekilde kompakt formda verilmiştir. Dişli modelinin elde edilmesine kadar tüm aşamalardaki matematik ifadeler açıklanmıştır.

Bilgisayar programları hazırlanarak çeşitli dizayn parametreleri için çıkış dosyaları elde edilmiş ve veriler görselleştirilmiştir. Her iki model için karşılaştırma yapılmıştır ve sonuç olarak farklı düzenlenmiş bu modellerin özdeş dişli geometrisi elde ettikleri görülmüştür. Profil denklemlerindeki farklılıklar seçilen referans koordinat sisteminin global kartezyen eksenlere göre konumundan kaynaklanmaktadır. Chen ve arkadaşları'nın [11] sunduğu matematik modelde takım profilini belirleyen denklemlerin kompakt formda olduğu ve daha kolay programlanabildiği görülmüştür.

Matematik modellerden hareketle geliştirilen programların çıkış dosyalarının görsel-



leştirmesi çeşitli dizayn parametrelerinin imal edilen dişli geometrisi üzerindeki etkilerini tasarım aşamasında inceleme fırsatı sağlamaktadır. Ayrıca takım izafi konumlarının görselleştirilmesi talaş miktarının belirlenmesinde kullanılabilir. Böylece kesme kuvvetleri ve takım ömrü hesabı yapılabilir.

Çalışmada verilen matematik modeller uygun düzenlemelerle evolvent profilli helisel dişli çarklara ve beveloid düz dişli çarklara genişletebilir. İç dişli çark mekanizmaları da modellenebilir. Ayrıca taşlama payı gibi modifikasyonlar takım modeline ilave edilebilir.

KAYNAKÇA

1. **Jelaska, D. T.** 2012. *Gears and Gear Drives*, ISBN: 978-111-99-4130-9, John Wiley & Sons, West Sussex.
2. **Litvin, F. L.** 1994. *Gear Geometry and Applied Theory*, ISBN: 978-013-21-1095-2 PTR Prentice Hall, New Jersey.
3. **Chang, S. L., Tsay, C. B.** 1998. "Computerized Tooth Profile Generation and Undercut Analysis of Noncircular Gears Manufactured with Shaper Cutters," *Journal of Mechanical Design*, vol. 120, no. 1, p. 92-99.
4. **Tsay, C. B., Liu, W. Y., Chen, Y. C.** 2000. "Spur Gear Generation by Shaper Cutters," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 104, no. 3, p. 271-279.
5. **Figliolini, G., Angeles, J.** (2003). "The Synthesis of Elliptical Gears Generated by Shaper-Cutters," *Journal of Mechanical Design*, vol. 125, no. 4, p. 793-801.
6. **Wu, J. L., Liu, C. C., Tsay, C. B., Nagata, S.** 2003. "Mathematical Model and Surface Deviation of Helipoid Gears Cut by Shaper Cutters," *Journal of Mechanical Design*, vol. 125, no. 2, p. 351-355.
7. **Liu, C. C., Wang, S. F.** 2007. "Tooth Contact Analysis and Contact Ellipse Simulation of Internal Conical Gear Pairs," 12th IFToMM World Congress, June 17-21, Besancon, France.
8. **Tsay, M. F., Fong, Z. H.** 2007. "Novel Profile Modification Methodology for Moulded Face-Gear Drives," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 221, no. 6, p. 715-725.
9. **Liu, C. C., Chen, Y. C., Peng, Y. L.** 2015. "Contact Pattern Simulation and Stress Analysis of Intersected Concave Conical Involute Gear Pairs Generated by Shaper Cutters," 14th IFToMM World Congress, October 25-30, Taiwan.
10. **Fetvacı, M. C.** 2016. "Determination of Effective Involute Parameter Limit in Generation Simulation of Gears Manufactured by Pinion-Type Cutters," *Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University*, vol. 31, no. 2, p. 449-455.
11. **Chen, Q., Song, C., Zhu, C., Du, X., Ni, G.** 2017. "Manufacturing and Contact Characteristics Analysis of Internal Straight Beveloid Gear Pair," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 114, p. 60-73.