Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi (H. U. Journal of Education) 43: 398-409 [2012]

ÜNİVERSİTE ÖĞRENCİLERİNİN GÖRSEL VE ANALİTİK STRATEJİLERİ *

UNIVERSITY STUDENTS VISUAL AND ANALYTIC STRATEGIES

Yasemin SAĞLAM 1**, Ali BÜLBÜL 2***

ÖZET: Bu çalışmanın amacı, üniversite öğrencilerinin integral konusu kapsamındaki problem çözme sürecinde görsel ve analitik düşünme stratejileri arasındaki bağlantıyı nasıl sağladıklarını araştırmak; görsel stratejiyi daha etkili ve analitik süreçlerle bağlantı kurarak kullanmalarını sağlamak için gerçekleştirilen öğretim deneyinin öğrencilerin görsel tercihlerinde meydana getirdiği değişikliği incelemektir. Bir nitel araştırma yöntemi olan öğretim deneyi kullanılarak gerçekleştirilen bu araştırmanın katılımcılarını altı matematik öğretmen adayı oluşturmaktadır. Katılımcıların görsel tercihleri "Matematiksel Süreç Aracı" kullanılarak tespit edilmiştir. Öğretim deneyi, tercihleri görsel yönde olmayan katılımcılarla dört haftalık zaman periyodunda gerçekleştirilirmiş ve öğretim deneyi öncesinde ve sonrasında katılımcıların görsel tercihlerinde meydana gelen değişimleri belirlemek amacıyla klinik görüşmeler yapılmıştır. Araştırma sonucunda, katılımcıların analitik stratejileri tercih etmelerinin değişik nedenleri ortaya çıkmıştır. Bunlardan bazıları öğrenimleri sırasında integral hesaplama yöntemlerini yoğun olarak kullanmaları, bu nedenle integral ile ilgili özelliklerin analitik anlamda biliniyor olmasına karşılık grafiksel uygulamalarla ilgili sorun yaşanması ve öğretmenlerin analitik çözümlere verdiği değer şeklinde özetlenebilir. Katılımcıların öğretim deneyi sonucunda görsel strateji kullanma tercihlerindeki değişimlerin farklı düzeylerde gerçekleştiği gözlenmiştir. Bu farklılığın nedenleri önceki öğrenim hayatlarından getirdikleri matematiksel inançların farklılığıyla açıklanmıştır.
Anahtar Kelimeler: integral, görsel strateji, analitik strateji, matematik eğitimi

ABSTRACT: The aim of this study is to investigate how university students provide the connection between the visual and analytic thinking strategies during the problem solving process in integral, and to examine the changes the teaching experiment creates in their visual preferences, which is realized in order to enable them to use the visual strategy more effectively and by relating it to the analytical process. In this study teaching experiment which is a qualitative research method was used and the participants of the study are six preservice mathematics teachers. The visual preferences of the participants were identified with Mathematical Processing Instrument. The teaching experiment was designed with six nonvisual participants during the four weeks time period. Before and after the teaching experiment, clinical interviews were conducted to identify the change of visual preference of participants. As a result of the study, different reasons for the preference of participants' analytical strategies over visual ones were identified. Some of these reasons for this preference are that analytical methods are more commonly used methods at problem solving than visual methods and lecturer gives emphasis mostly on analytical strategies. Consequently, analytical features of some mathematical concepts are better known than the visual features of these concepts by the participants. The teaching experiment was observed to result in different preference changes in participants. This difference among the participants can be partially explained by the difference of their mathematical beliefs gained through previous learning experiences.
Keywords: integral, visual strategies, analytic strategies, mathematics education

1. GİRİŞ

Görselleştirmenin matematik ve matematik eğitimi içindeki yeri ve önemine ilişkin farklı bakış açılarıyla yapılmış araştırmalar bulunmaktadır. Bu farklılık görselleştirme kavramı için birden fazla tanımın oluşmasına neden olmuştur. Ancak bu tanımlar incelendiğinde temel olarak öğrencinin kavrayışı ile dışsal bir araç arasında ikili bir yol izleyen bilişsel bir süreçten bahsedilmektedir (Borba & Villarreal, 2005, s. 81). Bazı araştırmacılar bu sürecin tek yönü üzerinde dururken (öğrenci kavrayışından dışsal araca veya tersi) bazı araştırmacılar ise bu sürecin iki yönlü olarak işlediğini (Zaskis, Dubinsky, & Dautermann, 1996) ve bu ikisi arasında geçiş yapmakta esnek olan öğrencilerin daha başarılı olduğunu belirtmişlerdir (Arcavi, 2003; Presmeg, & Balderas-Cañas, 2001). Bu bağlamda görselleştirme, içsel bir yapı ile erişimin duyularla sağlandığı şey arasında güçlü bir bağlantı kurma eylemi olarak tanımlanabilir

---

* Bu çalışma ilk yazarın doktora tez çalışması olarak yürütülmüş ve Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu tarafından desteklenmiştir.
** Öğrt. Gör. Dr., Hacettepe Üniversitesi, e-posta: ysaglam@hacettepe.edu.tr
*** Prof. Dr., Hacettepe Üniversitesi, e-posta: bulbul@hacettepe.edu.tr

(Zaskis, Dubinsky, & Dautermann, 1996). Görüldüğü gibi bu tanımda üzerinde durulan nokta, zihinsel ve dışsal olaylar arasındaki dönüşüm ve bireyin bu ikisi arasında kurduğu bağlantıdır.

Görselleştirme ile ilgili geniş bir alan yazın olmasına rağmen, araştırmaların daha çok problem çözme ile ilgili olduğu göze çarpmaktadır. Süreç içinde görselleştirmenin problem çözme içindeki yeri zaman zaman değişse de son 20 yılda tekrar önemli bir faktör haline gelmeye başlamıştır. Amerikan Ulusal Matematik Öğretmenleri Birliği'nin (National Council of Teachers of Mathematics) hazırladığı Okul Matematiği için Prensip ve Standartlar (Principles and Standards for School Mathematics) dokümanında, gösterimlerle ilgili bir madde bulunması bu durumu vurgulamaktadır (Stylianou & Silver, 2004). Analiz ise geçmişi antik çağa kadar uzanan, matematiğin temel taşlarından biri ve üst düzey matematiksel düşünme becerilerinin geliştirilmesi için bir geçiş kapısıdır. Temelinde yatan kavramların anlaşılabilmesi için cebir, geometri, trigonometri gibi diğer matematik konularıyla bağlantı gerektiren ve sonraki matematik konuları için "ilk basamak" niteliğinde olan analizin önemi, matematik eğitimine de yansımış, bu konuda yapılan çalışmaların artmasına neden olmuştur. Matematik öğreniminde önemli bir yere sahip olan analiz dersinin içeriği incelendiğinde ise aslında çok fazla görsel öğe içerdiği ve bir öğrencinin bu konuları anlayabilmesi için ne kadar çok görselleştirmeye ihtiyaç duyabileceği görülecektir. Zimmerman (1991, akt. George, 1997) da görselleştirme yeteneğinin temel analiz kavramlarını (limit, türev ve integral) anlamada önemli olduğunu ve analizdeki birçok problemi başarıyla çözmenin diyagramlar ve grafikler şeklindeki görsel imajlara bağlı olduğunu belirtmektedir. Zimmerman'a (1991, akt. George, 1997) göre analizde görsel düşünmenin ilk koşulu diyagramlardan belirli özellikleri çıkarma, cebir ve geometrinin matematiksel fikirleri anlamada alternatif diller olduğunu ve kuralları anlamanın matematiksel grafiklerle ilgili olduğunu bilmedir. Buna rağmen öğrencilerin integralle ilgili problemlerde kendi bakış açılarıyla çözüme ulaşamadıkları durumlarda tıkandıkları ve herhangi bir gelişme gösteremedikleri, cebirsel olarak verilen bir integral ifadesini çözmek için geometrik yardım almaya isteksiz oldukları, bir belirli integral ifadesi cebirsel olarak verildiyse grafiksel veya geometrik metotlar yerine cebirsel metotları kullanmayı tercih ettikleri gözlenmiştir (Oberg, 2000). Oberg'e (2000) göre bunun altında yatan neden öğrencilerin tamamıyla kendi bakış açılarına veya imajlarına kilitlendikleri için daha yararlı bakış açılarına yönelememeleri; dışarıdan bir yönlendirmeye ihtiyaç duymalarıdır. Yine öğrencilerin integral ile ilgili öğrendikleri ilk kavramlar arasında olan ve görsel özellikler taşıyan 'işaretli alan' kavramının çok da iyi anlaşılmadığı belirtilmektedir (Oberg, 2000). Eğri altında kalan alan kavramı, belirli integralin anlaşılması için yeterli olmamakla birlikte, belirli integralin temelinde yatan kavramları anlatmak için etkili bir araç olarak kullanılabilir ve bu kavramın eksikliği de sorunlara yol açabilir (Sealey, 2006).

Görselleştirmenin sağladığı bilişsel avantajlar yanında, kavram oluşturma sürecinde bir takım sınırlılıklara veya problem çözme sürecinde bilişsel zorluklara neden olabileceği yönünde sonuçlara ulaşan araştırmalar da mevcuttur (Aspinwall, Shaw & Presmeg, 1997; Rösken & Rolka, 2006). Kontrol edilemeyen görsel imajların matematiksel kavramlar için anlam oluşturma sürecini bazen engelleyebileceği, bu konuda öğrencilerin karşılaşabileceği zorluklara dikkat edilmesi gerektiği belirtilmektedir (Aspinwall, Shaw ve Presmeg, 1997). Bunun yanında sembolizme yapılan vurgu ve analitik metotları öğrenmenin ve öğretmenin daha kolay olması, öğrencilerin görselleştirmeye karşı isteksiz davranmasına ve cebirsel ya da algoritmik yöntemleri görsel düşünmeye tercih etmelerine neden olmaktadır (Eisenberg & Dreyfus, 1991). Bu nedenle görselleştirmeye karşı direncin öğrenilmiş bir fenomen olduğunu ve bu bilişsel süreci desteklemeyen bir öğretimin sonucu oluşabileceği fikri ortaya çıkmıştır (Eisenberg & Dreyfus, 1991). Görselleştirmeye, yansıtıcı düşünmenin eşlik etmesi durumunda öğrencilerin, görselleştirmenin neden olabileceği zorluklardan kurtulabilecekleri çeşitli araştırmalarda (Rösken, & Rolka, 2006) ifade edilmektedir.

Görselleştirmenin matematik öğrenimi ve öğretiminde sağladığı avantajlar ve dezavantajlar, bu sürecin öğrenci ve öğretmenler tarafından kullanımının farklı boyutlarda gelişmesine neden olmuştur. Presmeg (1999) öğrencilerin matematiksel görselliğinin (rutin olmayan matematiksel problemlerin çözümünde görsel yöntemleri kullanmayı tercih etme) öğretmenlerine göre anlamlı bir şekilde daha yüksek olduğunu tespit etmiştir. Görselleştirme sürecinde ortaya çıkan güçlüklere rağmen öğretmenler ve hatta matematikçiler tarafından da kullanılan bu sürecin daha etkili kullanılması için yaşanılan zorluklar konusunda önceden yaratılacak farkındalıklar, öğrencilerin daha başarılı olmasını sağlayacaktır. Her ne kadar analitik stratejileri öğretmenin daha kolay olduğu belirtilse de yoğun olarak analitik stratejilerle yapılan eğitim, bazı öğrencilerin tercihlerinin görmezden gelinmesine neden olacak, bazı öğrencilerin de kavramları farklı açılardan keşfetmesine engel olacaktır. Bu nedenle, üniversite öğrencilerinin analiz dersi integral konusu kapsamında problem çözerken kullandıkları görsel stratejilerdeki performanslarını etkileyen faktörleri incelemek bu çalışmanın hedeflerinden biridir.

Farklı muhakeme türlerini bir arada kullanmanın matematiksel anlamaya olan katkısı çeşitli araştırmalarda vurgulanmaktadır. Bu çalışmanın hedeflerinden biri de integral konusundaki problem çözme sürecinde görsel ve analitik düşünmenin birbirine olan etkilerini incelemektir. Zaskis, Dubinsky ve Dautermann (1996) görsel düşünmenin karşısında analitik düşünmenin (analiz) yer aldığını - ikisi arasında başka bir düşünme türünün var olup olmadığı sorusunu açık bırakarak- ifade etmiş ve şöyle tanımlamışlardır: Analitik düşünme, nesne veya süreçlerin, sembollerin yardımıyla veya yardımı olmadan zihinsel manipülasyonudur. Daha sonra görselleştirme ve analitik düşünmenin bir sentezi olarak matematiksel düşünme için G/A modelini (Görselleştirme /Analiz Modeli) ortaya koymuşlardır. Bu modelde düşünme, görselleştirme eylemiyle başlar; G_1. Bu aşama, bilgisayar ekranına veya her hangi bir resme bakmayı içerir ve zihinsel bir süreç veya nesne oluşturulur; ya da dışsal bir araç oluşturma da bu aşamada görselleştirme olarak ifade edilir. Sonraki adım analiz aşamasıdır; A_1. G_1 basamağında oluşturulan nesne ve süreçlerin bazı koordinasyonlarını içerir. Bu analiz aşaması yeni yapıların oluşmasına neden olur. İkinci alt aşama olan G_2'de öğrenci G_1'de oluşturduğu şekle tekrar döner, fakat A_1 basamağı sonucunda bir takım değişiklikler olmuştur. Zaskis ve arkadaşları bu aşamaların G_1, A_1, G_2, A_2, G_3… şeklinde birbirini takip edeceğini öne sürmüşler ve bu süreci üçgensel bir şekille ifade etmişlerdir. Üçgenin en altında yer alan G_1 ve A_1 basamakları bireye ayrı iki basamak gibi görünebilirken, tekrar eden aşamalar boyunca düşünmenin bu iki boyutu birbirine daha çok yaklaşmakta, G/A üçgeninin tepesinde birey tarafından birbiriyle daha ilişkili görünmeye başlamakta ve matematiksel anlama zenginleşmektedir.

Bu çalışmanın amacı, üniversite öğrencilerinin integral konusu kapsamındaki problem çözme sürecinde görsel ve analitik düşünme stratejileri arasındaki bağlantıyı nasıl sağladıklarını araştırmak; görsel stratejiyi daha etkili ve analitik süreçlerle bağlantı kurarak kullanmalarını sağlamak için gerçekleştirilen öğretim deneyinin öğrencilerin görsel tercihlerinde meydana getirdiği değişikliği incelemektir.

2. YÖNTEM

2.1. Veri Toplama Süreci ve Katılımcılar

Çalışmada, bir nitel araştırma yöntemi olan öğretim deneyi kullanılmıştır. Öğretim deneyinin amaçlardan biri öğretim deneyi boyunca katılımcıların gelişimini anlamaktır. Bu nedenle öğretim deneyinin daha sonra geriye dönük olarak gözden geçirilmesi için her bir öğretim bölümünün ve klinik görüşmelerin görüntü ve ses kayıtları alınmıştır.

Çalışmanın katılımcılarını Ankara'daki bir üniversitenin matematik öğretmenliği bölümünde öğrenim gören altı öğrenci oluşturmaktadır. Öğrencilerin belirlenmesinde Presmeg (1985) tarafından geliştirilen Matematiksel Süreç Aracı (MSA) kullanılmıştır. MSA, rutin olmayan matematiksel problem durumlarında, öğrencilerin görsel tercihlerini belirlemek üzere geliştirilmiştir. Görsel tercih, öğrencilerin problem çözme girişiminde, görsel veya görsel olmayan yöntemleri kullanmaları olarak açıklanmaktadır (Presmeg, 1986). İki aşamalı bir araç olan MSA, üç bölümden oluşmaktadır. Bu çalışmada, daha önce üniversite öğrencileri için kullanılmış olan B bölümü kullanılmıştır. Test, gerekli izinler alındıktan sonra Türkçe'ye adapte edilmiş ve güvenirlik çalışması test-tekrar test yöntemi kullanılarak yapılmıştır. Ölçümler sonucunda elde edilen veriler arasında pozitif ve anlamlı bir ilişki ($r=0.803$, $p<0.01$) bulunmuştur.

MSA'dan alınan puanlara göre tercihleri görsel yönde olmayan altı öğrenciyle (Elif, Hale, Şeyda, Gülay, Zehra, Funda) integral konusu kapsamında birer klinik görüşme yapılmıştır. Çalışmada kullanılan katılımcı isimleri, araştırmanın yazarları tarafından verilmiş takma isimlerdir. Ön klinik görüşmelerin amacı, öğrencilerin MSA'na göre belirlenen görsel tercihlerini integral konusu kapsamında yeniden gözlemlemek, görsel olmayan tercihlerinin nedenleri hakkında bilgi sahibi olmak ve çalışmanın ikinci aşaması olan öğretim deneyi için ön veri elde etmektir. Ön klinik görüşmelerde öğrencilere integral konusu kapsamında altı soru sorulmuştur. Bu sorulardan ikisi görsel muhakeme kullanılarak çözülebilirken dört tanesi görsel ve analitik muhakemeler bir arada kullanılarak çözülebilmektedir. Ön klinik görüşmelerde kullanılan sorulara üç örnek aşağıda verilmiştir:

Ö1.f sürekli ve artan bir fonksiyon olmak üzere $f(0)=1$, $f(2)=9$ ve $\int_0^2 f(x)dx = 8$ veriliyor. $\int_1^9 f^{-1}(x)dx$'i hesaplayınız. (Alexopoulos & Barb, 2001)

Ö2. $\int_{-2}^{2} \sin^3(x)dx$ integralini hesaplayınız.

Ö3. $y = \sqrt{3-x}$ eğrisinin (-1,3) aralığında x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz?

Ön klinik görüşmelerin ardından, katılımcıların görsel tercihlerinde değişiklik meydana getirmek amacıyla dört hafta süreyle öğretim deneyi düzenlenmiştir. Öğretim deneyinde kullanılan soruların seçiminde, bazı soruların hem görsel hem de analitik stratejiler kullanılarak çözülebilir olmasına, bazı soruların ise görsel muhakemenin ağırlıklı olarak veya tek başına kullanılmasını gerektirmesine dikkat edilmiştir. Dört haftalık öğretim deneyi boyunca incelenen konuları gösteren tablo aşağıda verilmiştir (Tablo 1).

Tablo 1: Öğretim Deneyi Konularının Haftalara Göre Dağılımı

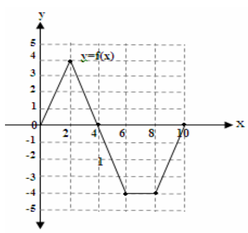
Haftalar	Öğretim Deneyi Konuları
Birinci Hafta	• Eğri altında kalan alan • İntegral değeri ile eğri altında kalan alan değeri arasındaki ilişki • Fonksiyonun tersinin grafiği ile kendisinin grafiğinin eğri altında kalan alan yönünden incelenmesi
İkinci Hafta	• Tek ($f(-x)= -f(x)$) ve çift ($f(-x)=f(x)$) fonksiyonların, belirli integrallerinin ($\int_{-a}^{a} f(x)dx$) incelenmesi • Mutlak değer fonksiyonlarının belirli integrallerinin incelenmesi
Üçüncü Hafta	• İntegralin $\frac{1}{x+1} < \int_x^{x+1} \frac{1}{t}dt < \frac{1}{x}$, $(x>0)$ özelliği için geometrik bir kanıt* oluşturma • Yukarıdaki özelliği kullanarak $\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$, $(x>0)$ eşitsizliğini doğrulama • Belirsiz integraldeki "*c*" sabitinin grafiksel anlamını inceleme
Dördüncü Hafta	• Fonksiyonun türevi, kendisi ve integralinin grafikleri arasındaki ilişki

*Buradaki geometrik kanıt, görsel kanıt anlamında kullanılmıştır.

Öğretim deneyinin ardından gerçekleştirilen son klinik görüşmelerde, ön klinik görüşmelerdeki sorulara paralel ya da öğretim deneyinde kullanılan soru türlerine benzer beş soru kullanılmıştır. Son klinik görüşmelerde kullanılan sorulardan bazıları şöyledir:

S1. $F(x) = \int_0^x \tan^{-1}(t)dt$, ($x$>0) ve $\int_{-1}^{1} [\frac{\sqrt[3]{x}}{(1+x^2)^7} - x^{17}\cos x]dx$ integrallerinin değerlerini bulunuz.

S2. Aşağıdaki grafik y=f(x) fonksiyonuna aittir. $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ olmak üzere;

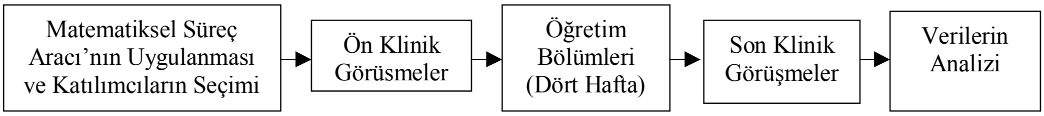


a) $g(0)$, $g(2)$, $g(4)$, $g(6)$, $g(8)$ ve $g(10)$'un değerlerini bulunuz.
b) Hangi aralıklarda $g(x)$ artmakta, hangi aralıklarda azalmaktadır.
c) (0,10) aralığında $g(x)$'in maksimum ve minimum noktalarını bulunuz.
d) y=$g(x)$'in olası grafiklerinden birini çiziniz.

2.2. Verilerin Analizi

Araştırmanın veri toplama sürecini oluşturan ön ve son klinik görüşmeler ile öğretim deneyinin ses kayıtları araştırmacılar tarafından yazılı metne çevrilmiştir. Yazılı metne çevrilen klinik görüşmeler, içerik analizine göre açık kodlama kullanılarak analiz edilmiştir. Öğrencilerin araştırma problemlerini çözerken verdikleri yanıtlardan elde edilen kodlar, daha önce kodlayıcılar arası güvenirliğin hesaplanması için tanımlanmıştır. Tanımlanan bu kodlar eğitim araştırmaları ve nitel araştırmalar konusunda deneyimli başka bir uzman tarafından tekrar kodlanmıştır. İki kodlayıcı arasındaki uyum SPSS 13.0 programı kullanılarak analiz edilmiş ve Cohen's-kappa katsayısı hesaplanmıştır. Patton'a (2002) göre kodlayıcılar arasındaki 0,80 ve üstü korelasyon yüksek güvenirlik olarak kabul edilir. Bu çalışmada kodlayıcılar arası korelasyon ön klinik görüşmeler için 0,853; son klinik görüşmeler için 0,906 ($p=0.00<0.05$) bulunmuştur. Farklılığın ortaya çıktığı kodlar ise kodlayıcılar tarafından tekrar incelenmiş ve araştırmacılar tarafından tekrar değerlendirilmiştir.

Çalışmanın ikinci aşamasını oluşturan öğretim deneyi süresince görüntü ve ses kaydı alınmış; üç hafta boyunca da bir gözlemci çalışmaya katılmıştır. Öğretim deneyi süresince elde edilen görüntü ve ses kayıtları, araştırmacı notları ve katılımcılardan elde edilen notlar öğretim deneyinin verilerini oluşturmaktadır. Video kayıtları Lesh ve Lehrer (2000) tarafından öğretim deneyi için önerilen yöntem (telescoping analysis) dikkate alınarak analiz edilmiştir. Buna göre öğretim deneyi boyunca toplanan verilerin analiz aşamaları şu bölümlerden oluşmuştur: Gözlem notlarının ve kaybolabilecek bilgilerin toplanması, video kayıtlarının sonraki bölüm için araştırmacılar tarafından tekrar incelemesi, her bir bölümün (haftanın) yazılı metne çevrilmesi ve bu bölümlerin özetlenmesi, bir problem çözme aşamasının birden fazla grupta ve bir grubun birden fazla problem çözme aşamasındaki davranışlarının özetinin çıkarılması, sonraki araştırmalar için ilginç ve umut verici bölümlerin, grupların veya problemlerin ek analizlerinin yapılması. Araştırmanın akış şeması ise Şekil 1'deki gibidir.



Şekil 1: Araştırmanın Akış Planı

3. BULGULAR

3.1. Ön Klinik Görüşmeler

Öğrenciler ön klinik görüşmelerde en çok analitik muhakeme kullanmışlardır. MSA'na göre tercihleri görsel yönde olmayan katılımcılar için bu beklenen bir durumdur. Öğrenciler, soruları çözerken çoğunlukla daha önceden kullandıkları yöntemleri kullanma eğilimi göstermişlerdir. Bu bazı durumlarda ders veren öğreticinin kullandığı yöntemken bazı durumlarda ezberlenen bir formül olmuştur.

A: Ne düşünüyorsun?

H: Şey dönüşümü yapıyorduk ya. Tan veya sin dönüşümü yapıyorduk. Hani ondan hangisini elde edebilirim, beni neye götürür ona bakıyorum. Gerçi o dönüşümü yaparken... Burada da çıkmış olur. Deneyim bakayım belki sonuca götürür. Önce belirsiz integralini çözmek daha çok işime gelir.

Analitik yöntemler dışında öğrenciler, görsel yöntemler ve bazı durumlarda düşünmelerini kolaylaştıran görsel destek de kullanmışlardır. Ancak öğrencilerin –tercihleri görsel yönde olmamasına rağmen- zaman zaman görsel muhakemeye de başvurmaları, ön klinik görüşmelerdeki soru tarzlarının görsel muhakemeyi öne çıkaran yapıda olmalarından kaynaklandığını düşündürmüştür.

H: Ben önce şekil verildiyse çizmeyi yeğlerim.

A: Şekil verildiyse derken?

H: Mesela $y=x^2-3x-10$ eğrisi dendiğinde formülden önce bir şekille (*grafikle*) görmeyi yeğliyorum. Belki o an soruya bir katkısı olmuyor ama görmeyi istiyorum. Şekli (*grafiği*) görünce daha böyle bir şey oluyor. Kafamda daha iyi canlanıyor. Aslında benim için biraz zaman kaybı oluyor ama sorularda lüzumlu ya da lüzumsuz bir şekil çizebiliyorsam çizerim. Belki o an işime yaramıyordur. Ama öyle psikolojik bir şey… Öyle şey yapıyorum *(çözüyorum)* soruları…

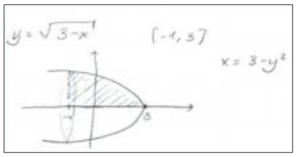
Daha önceki araştırmalarda olduğu gibi bu araştırmada da ortaya çıkan bir diğer sonuç, öğrencilerin integrale ilişkin en çok benimsedikleri anlamlardan birinin belirli integral-alan ilişkisi olduğudur. Öğrenciler tüm çalışma boyunca bu anlamı sıklılıkla kullanmışlardır. Her ne kadar belirli integral-alan ilişkisi öğrenciler tarafından en çok benimsenen ve en çok kullanılan ilişki olsa da öğrencilerin bu konuda da kavramsal eksikliklerinin ve yanılgılarının bulunduğu gözlenmiştir. Örneğin ön klinik görüşmelerdeki altıncı soruda öğrencilere, bir $f(x)$ fonksiyonunun bir belirsiz integralinin grafiği verilmiş ve bu fonksiyonunun başka bir belirsiz integralinin grafiğini çizmeleri istenmiştir. Fakat öğrencilerden bir kısmı

(Zehra, Şeyda ve Gülay) bu grafiği belirli integral grafiği olarak yorumlamış ve soruyu bu şekilde çözmeye çalışmışlardır.

A: Bir fonksiyonun belirsiz integrali ne demek?
Z: Normal bir fonksiyonun grafiğinin altında kalan alan.
A: Belirsiz integral ne demek?
Z: Sınırlar yok!
A: Sınırlar yoksa alandan bahsedebilir miyiz?
Z: Alana geçemeyiz. İntegralini alırsak neyi bulacağız o zaman

İntegral-alan ilişkisinin öğrencilerin en çok benimsediği anlam olduğu düşünülürse bu konuda kavramsal eksikliklerinin bulunması oldukça şaşırtıcıdır. Ön klinik görüşme sorularında, öğrencilerin alan hesaplamalarında negatif-pozitif alan konusunda yaşadıkları sıkıntı, belirli integralin grafiksel anlamı ile ilgili sorun yaşamaları, bu alanda da yeterince deneyimleri olmadığını ve kavramsal eksikliklerinin bulunduğunu göstermektedir.

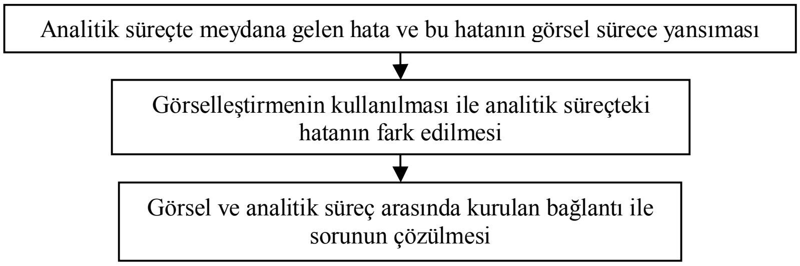
Öğrencilerin ön klinik görüşmelerde yaşadıkları bir diğer problem de görsel ifadeye bağlı bilişsel karmaşadır. Görsel ifadeye bağlı bilişsel karmaşa, araştırmada kullanılan bir görselin (çoğunlukla bir grafik) neden olduğu bilişsel karmaşa olarak tanımlanmıştır. Aspinwall, Shaw ve Presmeg (1997) çalışmalarında kontrol edilemeyen görsel imajların bazen matematiksel kavramlar için anlam oluşturma sürecini engelleyebileceğini, bu konuda öğrencilerin karşılaşabileceği zorluklara dikkat edilmesi gerektiğini belirtmektedirler. Ön klinik görüşmelerde öğrencilerin hatalı olarak oluşturduğu grafikler bazı durumlarda soruların çözümünde karmaşa yaşamalarına neden olmuştur. Bu durumu en iyi örnekleyen soru, ön klinik görüşme sorularından üçüncü sorudur. Funda bu soruyu çözmek için “$y = \sqrt{3-x}$ ise “$y^2 = 3 - x$” işlemini yapmış ve $y^2 = 3 - x$ ifadesinin grafiğini çizmiştir. Bu işlemi yapmasındaki amaç, $y = \sqrt{3-x}$ ifadesine göre grafiği daha kolay olan $y^2 = 3 - x$ ifadesinin grafiğini çizmektir. Böylece bir eğrinin x-ekseni etrafında döndürülmesi sonucunda ortaya çıkan cismin hacmi hesaplanırken kullanılan formülde karıştırdığı bazı noktaları (integral alması gereken değişkeni) belirleyebilecektir. Fakat $y^2 = 3 - x$ ifadesinin grafiği, zihninde oluşturduğu dönme işlemiyle tutarlılık göstermemektedir. Funda, 360°’lik bir dönme beklerken çizdiği grafik için 180°’lik bir dönme de yeterli olmaktadır (Şekil 2). Bu durum Funda’nın düşünme sürecinde bir karmaşa yaratmış ve hatanın nerden kaynaklandığını aramasına neden olmuştur.



Şekil 2: Funda’nın $y = \sqrt{3-x}$ Eğrisi İçin [-1,3] **Aralığında Çizdiği Grafik**

F: Bu şekli görmem zor olduğu için x’i çektim buradan [$y = \sqrt{3-x}$ *ise* $x=3-y^2$]. Normalde bildiğimiz $y^2=x$ vardı. Ama ben tam bir dönme düşünmüştüm. Yani bunu yarım döndürsem de yine aynı şekil olacak.
A: Peki ben sana bir şey sorabilir miyim? $y^2 = 3 - x$ ile $y = \sqrt{3-x}$ arasında fark var mı?
F: Hmm… Evet, burada pozitif tarafını almam gerekiyor sadece. Şu kısmını yani (*çizdiği parabolün üst kısmını gösteriyor)*. Evet, şimdi oldu sanırım.

Funda, Matematiksel Süreç Aracı’ndan aldığı puana göre görsel olmayan tercihe sahiptir. Dolayısıyla çizdiği grafik aslında Funda’nın çözüm sürecinin bir parçasını oluşturmamaktadır. Grafiği değişkenlerin sınırlarını belirlemek için kullanmaktadır. Ancak Funda’nın yapacağı işlem Zaskis, Dubinsky ve Dautermann’ın (1996) ortaya koyduğu G/A Model’in G_1 aşamasından A_2’e geçmesinde sorun yaratmaktadır. G_1’deki grafiğin oluşturulma sürecinde yaptığı analitik işlemler (A_1) bu karmaşanın yaşanmasına neden olmuştur. Çünkü kullandığı eşitlik için çizdiği grafik ve yaptığı işlemler doğrudur. Ancak G_1 aşamasında oluşturulan grafiğin yaşattığı bilişsel karmaşa, –başlangıçta çizilen görselden kaynaklanıyor gibi görünse de- süreçte meydana gelen hatanın ortaya çıkmasını sağlamıştır (Şekil 3).



Şekil 3. Analitik Süreçte Meydana Gelen Bilişsel Karmaşanın Çözüm Süreci

3.2. Öğretim Deneyi

Katılımcılarla gerçekleştirilen dört haftalık öğretim deneyinde her hafta bir çalışma kağıdı (ÇK) kullanılmıştır. ÇK'larındaki soruların seçiminde bazı soruların sadece görsel, bazılarınınsa hem görsel ve hem de analitik stratejiler kullanılarak çözülebilir olmasına dikkat edilmiştir.

Öğretim deneyinin birinci haftasında daha çok belirli integralin eğri altında kalan alan anlamı üzerinde durulmuştur. Belirli integralin en çok benimsenen ve kullanılan anlamı olmasına rağmen ön klinik görüşmelerde öğrencilerin bu konuda da bazı sıkıntılar yaşadıkları, özellikle integral değeri ile belirli integralin eğri altında kalan alan anlamını kullanmakta zorlandıkları gözlemlenmiştir. Bu nedenle öğretim deneyinin birinci haftasında bu konu üzerinde durulmuştur. Birinci hafta kullanılan ÇK-1'de yer alan sorular, diğer haftalarla karşılaştırıldığında öğrenciler için daha kolaydır.

Öğretim deneyinin ikinci haftasında, bir fonksiyonun grafiğinin sahip olduğu özelliklerin, belirli integral hesabında kullanımının öne çıktığı türden örneklere yer verilmiştir. Bu amaçla özel tanımlı fonksiyonların ya da tek-çift fonksiyonların belirli aralıklardaki integrallerinin hesaplanmasında, fonksiyonun grafiğinin göz önünde bulundurulmasının önemi anlatılmıştır. ÇK-2'deki birinci soruda özel tanımlı bir fonksiyonun belirli integrali sorulmuştur. Bu soru, verilen fonksiyonun integrali parçalanıp, integral hesaplama yöntemleri kullanılarak yapılabileceği gibi bu fonksiyonun verilen aralıkta grafiği çizilerek, grafik altında kalan alanın hesaplanmasıyla da elde edilebilir. Katılımcıların çoğu bu soruyu integral hesaplama yöntemi kullanarak çözmüşlerdir. Bu yöntemi kullanmalarının nedenlerini akıllarına gelen ilk yöntem olması, integralinin kolay alınıyor olması, mutlak değer fonksiyonunun grafiğini çizmeyi sevmemeleri, integral ile ilgili sorularda çoğunlukla integral hesaplama yöntemlerinin kullanılıyor olması şeklinde ifade etmişlerdir.

Üçüncü haftada katılımcılardan ilk olarak bir eşitsizliğin geometrik kanıtı istenmiştir. Bu kanıt integral alınarak da yapılabilmektedir. Formal kanıt öğrencilerin derste sıklıkla yaptığı ancak zor bir aktiviteyken görsel kanıt, öğrencilerin daha önce karşılaşmadıkları türden bir aktivitedir. Her ne kadar görsel kanıtın, matematiksel kanıt içinde geçerli bir yol olduğunu belirten araştırmalar (Barwise and Etchemendy, 1991, s.9) bulunsa da çoğumuza, içinde grafik veya diyagramların ağırlıkta bulunduğu kanıtlara şüphe ile bakmak öğretilmekte ve bu küçümseme öğrencilere de aktarılmaktadır (Arcavi, 2003). Aslında görselleştirme, bir çözümün analitik boyutunu (semboller, sözel ifadeler vb.) tamamen dışarıda tutma amacını gütmemekte, aksine analitik sürecin tamamlayıcısı olmaktadır (Arcavi, 2003) ve daha önce yapılan bazı çalışmalarda (Harel & Dreyfus, 2009) öğrencilerin bu sürece oldukça açık olduğu belirlenmiştir.

Öğretim deneyinin dördüncü haftası ise öğrencilerin, analitik olarak sıklıkla kullandıkları bir özellik olan türev-fonksiyon-integral ilişkisinin grafiksel yorumu konusuna ayrılmıştır. Öğrenciler üçüncü haftadan itibaren görsel stratejileri daha çok kullanmaya başlamışlardır. Bu değişimin en açık gözlendiği öğrencilerden biri Funda'dır. Öğretim deneyinin birinci haftasında çözümün grafik üzerinden yapıldığı bir soru için "Bunun çözümü grafikle yapmak mıdır yani?" diyerek görsel çözümlere yönelik güvensizliğini dile getiren Funda, sonraki haftalarda görsel çözümü daha sık ve etkili kullanmaya başlamıştır.

> Funda ve Hale: Biz yine türev mantığıyla gidelim dedik. f türevlenmiş fonksiyon ya, F de türevlenmiş fonksiyonun normale dönüşmüş hali. Şimdi ben bu fonksiyona burada bir teğet çiziyorum. Sıfır. Bu noktanın diğer grafikte karşılık geldiği nokta sıfır. Yani bu f oluyor. Bu da f'nin integrallenmiş hali (F).

Benzer şekilde Zehra da görsel strateji kullanma konusunda en isteksiz öğrenciyken, öğretim deneyinin son haftasında görsel strateji kullanmıştır. Ancak Zehra'nın görsel tercihindeki bu değişim fonksiyon ve türev arasındaki ilişki kullanma konusunda diğer katılımcılara oranla daha rahat olmasından kaynaklanmaktadır.

G: (*Zehra ile*) Ben bir mantık yürüttüm aslında. Büküm noktalarını düşün, bunda 3 bunda 2, bir x^2 fonksiyonunu düşün bir de 2x.
Z: Ben de şöyle düşündüm. x-eksenini kestiği noktalar. Biri x^3'lü bir şey olsa, biri x^4'lü bir şey olacak ya, bunun üç tane kökü olacak gibi.
G: Aaa, o daha mantıklı… Aynı kapıya çıkar. *g* 'de iki tane var, *f* 'de üç. O zaman bu *F* oluyor. Yani bu integrali oluyor, bu da kendisi oluyor.

3.3. Son Klinik Görüşmeler

Son klinik görüşmelerde, öğrencilerin görsel muhakeme kullanma eğiliminin ön klinik görüşmelere göre arttığı gözlenmiştir. Özellikle birinci soru ($F(x)=\int_0^x \tan^{-1}(t)dt$, integral değerini hesaplayınız) katılımcıların normalde sadece analitik muhakeme kullanarak çözebileceği bir soru iken, katılımcılardan ikisi (Gülay ve Hale) bu soruyu görsel ve analitik muhakemeyi bütünleştirerek çözmüşler; ikisi (Funda ve Elif) görsel muhakemeyi kullanmayı denemişler ya da bu yolla çözülebileceğini düşünmüşlerdir. İki katılımcı (Şeyda ve Zehra) ise yalnızca analitik muhakeme kullanarak çözmüşlerdir.

G: Fonksiyonun tersinde y-eksenine göre sınırları değiştirip şu alanı alabiliyorduk. Yani aslında benden şu alanı istiyor.
A: O alanı bulmak için ne yapman lazım?
G: tan'ın sınırları sıfırdan… İşte… 0'dan x'e *(kadar)* aslında alamam. O zaman şurayı almış olurum.
A: O alanı bulabilir misin?
G: Bulabilirim galiba.
A: O alanı bulduktan sonra öbür alanı bulmak için ne yapman gerekir?
G: 0'dan x'e *(kadar)* tan'ın integralini alır xt'den (*Öğreci değişkenleri kendi belirlediği için aslında x.arctanx'ten bahsetmektedir*) çıkartırım.

Katılımcılardan Zehra, bir problemi çözerken o konuyla ilgili daha önce sıklıkla kullandığı yöntemi kullanmayı tercih etmektedir. Öğretim deneyi ve son klinik görüşmelerde, görsel muhakemeden de yararlanmasına rağmen analitik muhakeme öncelikli tercihleri arasındadır. Bu anlamda Zehra'nın diğer öğrencilerden daha fazla görsel muhakeme türüyle ilgili deneyim kazanması gerektiği söylenebilir.

Öğretim deneyi sırasında tek ve çift fonksiyonların grafiksel özellikleri verilirken analitik özellikleriyle ($f(-x)=-f(x)$ ve $f(-x)=f(x)$) bağlantı kurularak anlatılmış ve sorular bu iki yöntem kullanılarak çözülmüştür. Ancak son klinik görüşmeler sırasında öğrencilerin tek ve çift fonksiyon özelliklerini farklı anlamlandırdıkları gözlenmiştir. Bazı öğrenciler fonksiyonların grafiksel özelliklerinden yararlanırken bazıları –daha zor olmasına rağmen- analitik özellikleri kullanmayı tercih etmişlerdir.

F: Burası tek fonksiyon. Çarpımı da tek fonksiyon... Burası çift fonksiyon sanırım ama bölüm olduğu için yine tek fonksiyon olacak. Sınırları da birbirinin ters işaretlisi olduğu için sıfır oluyordu.
A: Tek fonksiyonun özelliği neydi neden sıfır oluyordu hatırlıyor musun?
F: Çünkü şey oluyordu. Birbirinin zıttı olduğu için $f(-x)$'i $-f(x)$ olarak. Oradan da onlarda birbirini götürüyordu.
A: Nasıl götürüyordu?
F: Hım…. Açtığımızda bunun başına bir tane daha eksi geliyordu. Yani şu fonksiyon üzerinden düşünürsek $-f(x)$ olarak çıkacaktı, yukarıdaki. O da $-(-f(x))$ olacaktı. Yani birbirini götürüyor integrali açtığımızda.

Son klinik görüşmelerde gözlenen bir diğer durum da görsel strateji kullanımının öğrencilerin görsel tercihleri arasında, ön klinik görüşmelere oranla daha çok yer bulmasıdır. Ön klinik görüşmelerde katılımcılar, görsel strateji kullanmama nedenleri arasında analitik stratejilerin akıllarına gelen ilk yöntem olmasını göstermişlerdir. Oysa öğretim deneyinden sonra bu durumun değiştiği gözlenmiştir. Öğretim deneyi boyunca integral uygulamaları arasında bulunan hacim hesaplamalarına değinilmemiş olmasına rağmen Şeyda, ön klinik görüşmelerde çözemediği ve uygulanan formülden başka bir çözüm düşünemediği soruyu son klinik görüşmelerde görsel strateji kullanarak çözmüştür.

Ş: x-ekseni etrafında döndüreceğim, o zaman böyle bir şekil oluşur. Ben bu şeklin hacmini hesaplayamam.
A: Neden hesaplayamazsın?
Ş: Çünkü formülünü hatırlayamıyorum. Silindiri (*silindir yöntemi*) hatırlamaya çalışmıştım ama hatırlamıyorum gerçekten!
A: Peki silindir yöntemine neden silindir yöntemi deniyor?

Ş: Silinidir oluşturuyoruz çünkü.
A: Nasıl silindir oluşturuyoruz?
Ş: Şöyle. Silindiri döndürüyoruz. (*Bir silindir oluşturuyor*)
A: Tamam. O silindirin yüksekliği ne?
Ş: y
A: y dediğimiz şey ne?
Ş: Yani fonksiyonun aldığı değerleri, yani *f*(x) oluyor. Burasına da Δ(x) diyorduk.
A: O zaman silindirin hacmi neydi?
Ş: $\pi r^2 h$

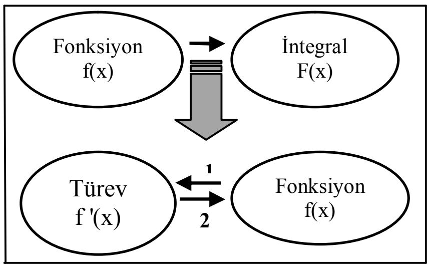
Öğretim deneyine başlamadan önce yapılan klinik görüşmelerde ve öğretim deneyi sırasında Gülay eğri altında kalan alan kavramında negatif ve pozitif alan değerleriyle problem yaşamıştır, ancak son klinik görüşmelerde bu kavramla ilgili yaşadığı güçlükleri aştığı gözlenmiştir.

G: 0'dan 2'ye alan aldım. 0'dan 4'e alan aldım. 0'dan 6'ya alan adım. Ama bu alan negatif… Negatif pozitifi götürecek. Sadece şu alanı aldım. 0'dan 8'e bu bunu götürdüğü için bunu sadece şu negatif alana ekledim. Hepsinin alanını sorduğunda bu, bunu götürecek dedim bu da bunu götürecek dedim. Geriye sadece bu alan kaldı.

Katılımcılardan bazılarında (Elif, Zehra ve Şeyda) ortak olarak gözlenen bir diğer özellik öğrencilerin integrali kavramsallaştırma süreçlerindeki benzerliktir. Bu durumun en belirgin olarak görüldüğü katılımcı olan Elif'in integrale ilişkin zihnindeki şemalar, türev üzerine kuruludur. Dolayısıyla grafikle ilgili bir soru çözerken önce türeve sonra integrale geçiş yapması ona bilişsel bir yük getirmektedir.

E: Ama hani şimdi düşünüyoruz ya gerçi türevde eğimi sıfır oluyor, mesela ben hep integrali türevden düşünüyorum ya, o yüzden integrali alınca önce türeve gitmem gerekiyor, sonra türevden integrale geri dönmem gerekiyor, o yüzden grafiklerde çok zorlanıyorum.
A: Bu aslında bir strateji, arasındaki ters bağlantıyı görmeye çalışıyoruz. Ama nasıl ki fonksiyonun kendisiyle türevi arasında bir ilişki oluşturmuşsan daha önceden, aynı ilişkiyi integralle fonksiyon arasında da oluşturabilirsin.
E: Ama o bağlantıyı kuramıyorum bir türlü!

Katılımcıların tümü, öncelikle fonksiyon ve türevi arasındaki ilişkiyi öğrenmişler ve integral ile ilgili olarak zihinsel şemalarını türevin tersi olarak şekillendirmişlerdir. Bu yüzden onlar için fonksiyondan integrale doğru kurulan ilişki, fonksiyondan türeve, türevden tekrar fonksiyona doğru oluşmaktadır (Şekil 4). Yani fonksiyon ve türevi arasında kurulan ilişki, fonksiyon ve integrali arasında kurulamamıştır. Bu durum öğrencilere bilişsel bir yük getirmekte, hem görsel hem analitik muhakemede bu ilişkiyi kurmakta zorlanmaktadırlar.



Şekil 4. Öğrencilerin Bir Fonksiyon, Türevi ve integrali Arasındaki İlişkiyi Yapılandırma Süreci

4. TARTIŞMA ve SONUÇ

Araştırma sonuçlarına göre başlangıçtaki tercihleri görsel yönde olmayan katılımcıların öğretim deneyi sonunda görsel tercihlerinde meydana gelen değişimler farklı düzeylerdedir. Bazı katılımcılarda (Hale, Gülay ve Funda) görsel strateji kullanmaya ilişkin pozitif ve yüksek düzeyde görülen değişim, bazı katılımcılarda (Şeyda) pozitif ama diğer katılımcılara oranla daha düşük düzeyde gerçekleşmiştir. Diğer katılımcılarda ise (Elif ve Zehra) değişim gözlenmemiştir. Buradan, değişimin düşük ya da daha az düzeyde gerçekleştiği öğrencilerde, görsel stratejilere olan bakış açılarının değişmesi için öğretim deneylerinin daha uzun süreli yapılması gerekeceği fikri ortaya çıkmaktadır. İntegral kapsamında düşünüldüğünde öğrencilerin farklı bakış açılarıyla düşünmelerini sağlamak, farklı stratejilere olan isteksizliklerini de ortadan kaldıracaktır (Oberg, 2000). Dolayısıyla sadece üniversite düzeyinde değil matematik öğretiminin her aşamasında görsel stratejilerin, analitik stratejilerle etkileşimli olarak kullanılması daha doğru olacaktır. Ülkemizde, 2005 yılında yeniden düzenlenen öğretim programında da görselleştirmenin önemine değinilmektedir. Sadece matematik öğretiminde değil matematik öğretmen adaylarının eğitiminde de bu konuya önem verilmesi gerekmektedir.

Çalışmadan elde edilen bir diğer sonuç da öğrencilerin görsel muhakeme sürecine ilişkin kavramsal eksiklikleri giderildikçe, görsel strateji kullanımlarının artmasıdır. Katılımcılar başlangıçta, yeterli deneyim sahibi olmadıkları bu süreci kullanma konusunda isteksizlik duymuşlardır. Örneğin katılımcılardan Gülay, çalışmada kullanılan problemlerden birinin çözüm sürecinin başlangıcında, bir fonksiyonun grafiğini, daha önce karşılaşmadığı için çizmekten vazgeçmiştir. Daha önce Eisenberg ve Dreyfus (1991) tarafından belirtilen görselleştirmeye karşı direncin altında yatan nedenlere (öğrenilmiş bir fenomen olduğu, bu bilişsel süreci desteklemeyen bir öğretimin sonucunda ortaya çıkmış olabileceği), öğrencilerin bu süreç konusundaki deneyimsizlikleri de eklenebilir. Katılımcılar, integral konusu kapsamında, görsel olarak daha az deneyim sahibi oldukları durumlarda görsel strateji kullanmaktan vazgeçmekte, analitik stratejileri tercih etmektedirler. Ancak öğrencilerin sürece ilişkin kavramsal eksiklikleri azaldıkça görsel stratejilere başvurma sıklığı da artmaktadır. Sadece görsel süreçte değil, analitik süreçte de var olan birtakım kavramsal eksikliklerin giderilmesi konusunda da görsel stratejiler yararlı olmaktadır. Öğrencilerin analitik sürecinde var olan bir takım kavramsal eksiklikler bazen görsel süreçte ortaya çıkmakta ve ortaya çıkan güçlüğün nedeni görsel süreçten kaynaklanıyor gibi görünebilmektedir. Aslında bu iki süreci birbirini destekleyerek kullanmak hem öğrenmenin etkililiği artıracak hem de bu iki süreçten herhangi birinde meydana gelecek zorlukların üstesinden gelinmesini sağlayacaktır. Böylece her iki strateji öğrencilerin kullanımına açılacaktır. Ayrıca bu sonuç, daha önce alanyazında görselleştirmeden kaynaklı olarak gösterilen zorlukların temelinde yatan nedenlerin, analitik süreçten mi kaynaklandığı sorusunu da akla getirmektedir. Çalışmamızın katılımcıları da görsel olmayan tercihlerine ek olarak, görsel stratejiler konusunda deneyimlerinin artmasıyla bu iki stratejiyi daha etkileşimli kullanabilmişler ve iki strateji arasındaki geçişleri daha kolay yapabilmişlerdir.

Fonksiyon ve integrali arasındaki grafiksel ilişki yine çalışmada katılımcıların zorlandığı bir konu olarak ortaya çıkmıştır. Katılımcılar fonksiyon ve integrali arasındaki ilişkiyi, integralin anti-türev olması özelliğini kullanarak oluşturmaktadırlar. Bu durum daha önce alanyazında belirtilen, görselleştirmenin öğrencilerin zihinlerinde oluşturduğu bilişsel yüke örnek olarak gösterilebilir. Ancak fonksiyon ve integrali arasındaki grafiksel ilişkiye, fonksiyon ve türevi arasındaki ilişkide olduğu gibi sınıf ortamında doğrudan değinilmesi halinde bu bilişsel yük ortadan kalkacaktır. Bu ilişkiyi, öğretim deneyi sırasında inceleme fırsatı bulan katılımcılarından Hale, Gülay ve Funda çalışma sonunda fonksiyon ve integrali arasındaki ilişkiyi doğrudan ve daha rahat kullanabilir duruma gelmişlerdir. Görüldüğü gibi yaşanılan zorluklar konusunda önceden yaratılacak farkındalıklar, öğrencilerin her iki süreçte de daha başarılı olmasını sağlamaktadır.

Öğrencilerin integral konusu kapsamındaki görselleştirme sürecinde zorluk yaşamalarının en önemli nedenlerinden biri de bazı ilişkileri görsel anlamda yeterice sorgulamamış olmalarıdır. Bunun en belirgin örneği belirsiz integralde kullanılan "*c*" sabitinin öğrenciler tarafından yeterince iyi anlaşılmadığıdır. Bu sabitin öğrencilerin integralle ilgili olarak ilk öğrendikleri kavramlar arasında olmasına rağmen, önceki öğrenim hayatlarından getirdikleri bir takım alışkanlıklar bu tür kavramları daha basit düzeyde öğrenmelerine yol açmaktadır. Özellikle integral ile ilgili uygulamalarda çoğu zaman soruya ilişkin formül ezberleme yoluna gitmeleri, elde edilen formüle ilişkin herhangi bir zihinsel yapılandırma kullanmamaları bu duruma neden olmaktadır. Aslında öğrencilerin integral uygulamalarında formül ezberlemeye yönelik olan tutumları, görsel ifadelerin zihinsel kodlama aşamasında sağladığı avantajları da göz ardı etmelerine neden olmaktadır. Bu nedenle integral öğretiminde öğrencileri, en temel ve basit olarak görünen kavramlar için bile farklı bakış açılarına yönlendirmek daha yararlı olacaktır.

KAYNAKLAR

Alexopoulos, J., & Barb, C. (2001). Discovering Integrals With Geometry. *Primus, 11*(1), 79-88.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 215–241.

Aspinwall, L., Shaw, K. L., & Presmeg, N. C. (1997). Uncontrollable mental imagery: Graphical connections between a function and its derivative. *Educational Studies in Mathematics, 33*, 301-317.

Barwise, J. & Etchemendy, J. (1991). Visual information and valid reasoning. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 9–24). Washington DC: Mathematical Association of America.

Borba, M.C., & Villarreal, M.E. (2005). Visualization, mathematics education and computer enviroments. In A.J. Bishop (Ed.), *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking*. America: Springer Science+Business Media.

Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmerman & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 25-37). USA: Mathematical Association of America.

George, E. A. (1997). *Reasoning with visual representations: Students' use of diagrams, figures, and graphs in solving problems on the advanced placement calculus examination*. Unpublished PhD Dissertation, The University of Pittsburgh, USA.

Harel, R., & Dreyfus, T. (2009). Visual proofs: high school students' point of view, in Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, H. (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 386)*,* 1.

Lesh, R., & Lehrer, R. (2000). Iterative Refinement Cycles for Videotape Analyses of Conceptual Change in Anthony E. Kelly and Richard A. Lesh (Eds), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 665-708). USA: Lawrence Erlbaum Associates.

Oberg, T. D. (2000). *An investigation of undergraduate calculus students' conceptual understanding of the definite integral*. Unpublished PhD Dissertation, University of Montana.

Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research and evaluation methods*. USA: Sage Publication.

Presmeg, N. C. (1985). *The role of visually mediated processes in highschool mathematics: A classroom investigation*. Unpublished Ph.D. dissertation, Cambridge University, England.

Presmeg, N. C. (1986). Visualisation and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics, 17*(3), 297-311.

Presmeg, N. (1999). Variations in Preference for Visualization Among Mathematics Students and Teachers. In F. Hitt, & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp 23-26), Mexico.

Presmeg, N., & Balderas-Cañas, P.E. (2001). Visualization and Affect in Nonroutine Problem Solving. *Mathematical Thinking and Learning, 3*(4), 289–313.

Rösken, B., & Rolka, K. (2006). A Picture is worth a 1000 world-The role visualization in mathematics learning. In Novotná, H., Krátká, M. & Stehliková, N. (Eds.), *Proceedings of 30 th Conferens of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.457-464), 4.

Sealey, V. (2006). Definite Integrals, Riemann Sums, and Area Under A Curve: What is Necessary and Sufficient?. Alatorre, S., Cortina, J.L., Sáiz, M., and Méndez, A.(Eds), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol.2-46.

Stylianou, D. A., & Silver, E. A. (2004). The role of visual representations in advanced mathematical problem solving: An examination of expert-novice similarities and differences. *Journal of Mathematical Thinking and Learning, 6* (4), 353-387.

Zaskis, R., Dubinsky, E., & Dautermann. J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: A study of students' understanding of the group D4. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*, 435–457.

Extended Abstract

Visualization can be defined as the act of one's making a strong connection between an internal structure and the thing the connection to which is enabled by senses (Zaskis, Dubinsky & Dautermann, 1996). Analysis, on the other hand, is one of the cornerstones of mathematics, and is a gateway for improving advanced mathematical thought skills. According to Zimmerman (1991, as cited in George, 1997), the first premise of visual thinking in analysis is to be able to deduce certain features of the diagrams, and to know that algebra and geometry are alternative languages in understanding mathematical ideas, and that comprehending the rules is related to mathematical graphics. The aim of this study is to examine the factors that affect university students' success in their use of visual strategies when solving problems of integral.

This study was designed as a teaching experiment, conducted with six second grade university students who were attending a mathematics teacher training program in Ankara and lasted for four weeks. Before and after the teaching experiment, clinical interviews were conducted to determine the effects of the teaching experiment on visual preferences of the participants. The visual preferences of participants were determined by the means of Mathematical Processing Instrument. All participants had non-visual preferences. Gathered data was analyzed through open coding and content analysis.

The students used analytical reasoning the most during the pre-clinic interviews. Apart from the analytical methods, in some cases students also used visual aid which facilitated their thought process. Another result of this study, as well as of previous studies is that one of the most frequently adopted

meanings by students related to the integral is the relationship between the definite integral and the area. However, it was observed that students had some conceptual deficiencies on this meaning of the definite integral. Although the integral-area relationship is the most frequently adopted meaning by students, it is interesting to see that students have conceptual deficiencies about this topic. On the other hand, several conceptual deficiencies existing during the analytical process of students manifest during the visual process, and the reason for the difficulty seems to be resulting from the visual process. Thus, using these two processes in a way to support each other would both increase the efficiency of learning and enable students to overcome the difficulties that may arise in either one. As such, both strategies would be open to the use of students.

In the teaching experiment, which was realized with the participants during a four-week period, four work sheets (WS) were used. In the selection of the questions in the WS, the questions were designed in such a way that some of them could be solved only by using visual strategies whole some could be solved by using both visual and analytical strategies. During the first week of the teaching experiment, the focus was mostly the area under the curve; during the second week, the qualities of a function's graphic were given through examples which elicit the use of the calculation of definite integral; during the third week the participants were first of all asked to provide the geometrical proof of an inequality, and the graphic meaning of the "*c*" constant was emphasized; and on the fourth week, the focus was on the graphical meaning of the derivative-function-integral relationship which is a frequently used quality by students. Beginning with the third week, it was observed that students used visual strategies more frequently.

In the final clinic interviews, it was observed that the students' inclination to use visual strategies increased compared to that of the pre-clinic interviews. During the teaching experiment, the graphic qualities of even and odd functions were taught by drawing connections with their analytical qualities, and the questions were solved by using both methods. However, during the final clinic interviews, it was observed that the students had not given meaning to the qualities of the single and double functions in the same way. Some students made use of the graphic qualities of the functions while some preferred using the analytical qualities (although it was more difficult).

Another common case observed in some of the participants is the similarity in the process students conceptualize integral. For the students, the relationship established from the function to the internal is constructed from the function to the derivative and from the derivative to the function again. In other words, the relation established between the function and its derivative had not been established between the function and its integral. This put a cognitive burden on the students, and in return, they had difficulty in building this relation during visual reasoning.

As a result of the study, different reasons were identified for the preference of analytical strategies over visual ones by the participants. One of these reasons for this preference is that analytical methods are more commonly used in problem solving than visual methods and lecturers place emphasis mostly on analytical strategies. Consequently, analytical features of some mathematical concepts are better known than visual features of these concepts by the participants. The teaching experiment was observed to result in different preference changes in the participants. This difference among the participants can be partially explained by the difference of their mathematical beliefs gained through previous learning experiences and combination of visual and analytic processes as in the teaching experiment will increase the effectiveness of learning and enable to overcome the difficulties which may arise from any one of these processes.