Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi (H. U. Journal of Education) 40: 140-151 [2011]

ÜNİVERSİTEDE MATEMATİK ÖĞRETİMİNDE BİLGİSAYAR CEBİRİ SİSTEMLERİNİN KULLANIMI: BİR ÖĞRETİM DENEYİ

USE OF COMPUTER ALGEBRA SYSTEMS IN MATHEMATICS TEACHING AT UNIVERSITY: A TEACHING EXPERIMENT

Şenol DOST[*], Yasemin SAĞLAM[**], Ayşegül Altay UĞUR[***]

ÖZET: Bilgisayar ve beraberinde getirdiği teknolojilerin her geçen gün hayatımızda daha çok yer alması, matematik eğitimini de etkilemiş ve bu alana yönelik yazılımların geliştirilmesine neden olmuştur. Bilgisayar Cebiri Sistemleri (BCS) de bu yazılımlar arasında önemli bir yer tutmaktadır. BCS'nin eğitim ortamı ile dikkatli şekilde bütünleştirilmesi, öğrenme ortamlarına olumlu katkılar sağlayacaktır. Ancak bu bütünleştirme sırasında dikkat edilmesi gereken en önemli nokta, öğrencilerden beklenen matematiksel becerilerin gelişmesine katkıda bulunmaktır. Bu beceriler, farklı araştırmacılar tarafından değişik sınıflandırma sistemleri ile ifade edilmiştir. İki aşama halinde gerçekleştirilen bu çalışmanın amacı, analiz dersi kapsamındaki Taylor polinomları konusunda bir çalışma yaprağı hazırlayarak, bir matematik öğretmeni yetiştirme programında öğrenim görmekte olan öğrencilerin, bir öğretim deneyi içerisinde BCS destekli ve -desteksiz sınıf ortamlarındaki öğrenci aktivitelerinde meydana gelen değişiklikleri belirlemektir. Bir BCS yazılımı olan Maple ile bütünleştirilen çalışma yaprağının hazırlanma sürecinde MATH sınıflandırma dikkate alınmıştır. Çalışmanın sonucunda BCS destekli grupta yer alan öğrencilerin farklı gösterimleri daha çok kullandıkları, elde ettikleri sonuçlara daha eleştirel baktıkları, yorumlama ve genelleme becerilerinin ön plana çıktığı gözlenmiştir.

Anahtar sözcükler: üniversite öğrencileri, bilgisayar cebiri sistemleri, MATH sınıflandırma, çalışma yaprağı, öğretim deneyi.

ABSTRACT: The ever-increasing presence of computers and other technologies that come along with them has affected mathematics education, and it resulted in the development of software in this field. Computer Algebra Systems (CAS) occupies a very important place among such softwares. A careful integration of CAS with the education environment would contribute to any learning environment of any level. However, the most important point to focus during this integration is to contribute to students' development of expected mathematical skills. These skills have been expressed by different researches under different classification systems. The aim of this study, which has been realized in two stages, is to determine the changes in the activities of students, who have enrolled in a mathematics teacher training program, in a teacher experiment design, in CAS-supported and without CAS-support class environments. To this end, a worksheet on Taylor polynomials was prepared. In the preparation process of this worksheet, which was integrated with Maple, a CAS software, MATH taxonomy was taken into consideration. As a result of the study it was observed that the participants in CAS-supported environment frequently used different representations, had a critical point of view for gathered results and the interpretation and generalization abilites came into prominence.

Keywords: university students, computer algebra systems, MATH taxonomy, worksheet, teaching experiment.

1. GİRİŞ

Birçok alanda olduğu gibi matematik eğitiminde de meydana gelen gelişmelerin en önemli nedenlerinden biri, bilgisayar ve beraberinde getirdiği teknolojilerin her geçen gün hayatımızda daha çok yer almasıdır. Özellikle matematik eğitimi için tasarlanmış olan bilgisayar yazılımlarının öğrenme ortamına getirdiği pozitif etkiler, bu alanda çalışan birçok araştırmacının kabul ettiği bir gerçektir (Kabaca, 2006; Aktümen, 2007; Bulut, 2009).

Bilgisayar Cebiri Sistemleri (BCS), bu yazılımlar arasında önemli bir yer tutmaktadır. Sayısal ve sembolik işlemler yanında, birkaç değişkenli fonksiyonların çizimini de yapabilen BCS; Derive, Mathematica, Mathplus, Maple gibi bilgisayar yazılımlarının ortak adıdır. Başlangıçta matematiksel hesaplamalar ve uygulamalar için geliştirilmiş olan BCS, zamanla matematik öğretimi sürecinin de bir parçası haline gelmiştir. Araştırcımalar, BCS'nin öğrenme-öğretme sürecinde önemli bir araç olduğunu ve uygun kullanımının öğrencilerin kavramsal anlama ve problem çözme gibi matematiksel

[*] Yrd. Doç. Dr., Hacettepe Üniversitesi, e-posta: dost@hacettepe.edu.tr
[**] Arş. Gör., Hacettepe Üniversitesi, e-posta: ysaglam@hacettepe.edu.tr
[***] Öğr. Gör. Dr., Hacettepe Üniversitesi, e-posta: altayay@hacettepe.edu.tr

becerilerini arttıracağını belirtmektedirler (Leinbach, Pountney ve Etchells, 2002). İlköğretim ve lise düzeyinde sıklıkla motivasyon aracı olan BCS (Hennessy ve diğ., 2005; Ruthven & Hennessy, 2002, akt. Lavicza, 2008) üniversite düzeyinde daha çok kavramsal bilgi aktarımında kullanılmaktadır (Lavicza, 2008).

Her ne kadar BCS kullanımı öğretme ortamına, matematik eğitimcileri için yeni olanaklar sunsa da bu tür yazılımların kullanımının ortaya çıkaracağı güçlükler konusunda eğitimciler dikkatli olmalıdır (Klincsik, Sárvári, Perjési-Hámori, 2008). BCS'nin eğitim ortamı ile dikkatli şekilde bütünleştirilmesi, ortaya çıkabilecek olası güçlüklerin önüne geçilmesini sağlayacaktır. Bu bağlamda BCS; karmaşık işlemlere harcanan zamanı kısaltacak, kavramsal anlama süreçleri için sınıfa daha çok zamanın kalmasını sağlayacaktır. Böylece öğretmenler kavramları yorumlamak için daha çok zaman ayıracak ve öğrencilerin bilgi gösterimleri arasındaki ağ giderek yoğunlaşacaktır (Klincsik, Sárvári, Perjési-Hámori, 2008).

Teknoloji kullanımı, üniversite eğitimi içinde de geniş bir yere sahiptir. Lavicza (2007) akademisyenlerin, okul öğretmenlerine göre daha az müfredat baskısı altında olduklarını, dolayısıyla öğretimlerine teknoloji entegrasyonu konusunda, okul öğretmenlerine göre daha çok seçenekleri olabileceğini belirtmektedir. Ancak bu entegrasyon sırasında dikkat edilecek en önemli nokta, öğrencilerden beklenen zihinsel becerilerin gelişmesine yardımcı olmaktır. Bu beceriler, farklı araştırmacılar tarafından değişik sınıflandırma sistemleri (Bloom, 1956; Biggs, 1995; Smith ve diğerleri, 1996; Porter 2002) ile ifade edilmiştir.

Bilindiği gibi ilk sınıflandırma sistemi Bloom tarafından 1956'da ortaya konmuştur. Bloom'un (1956) sınıflandırması yapısal olarak iyi bir değerlendirme kaynağı olmakla birlikte matematiksel beceriler açısından bazı sınırlılıkları bulunmaktadır (Smith ve diğerleri, 1996). Smith ve diğerleri (1996) tarafından ortaya konan MATH (Mathematical Asessment Task Hierarchy) sınıflandırma, Bloom Taksonomisi'nin geliştirilmesi ile oluşturulmuştur. Öğrencilerden beklenen matematiksel becerileri de içeren MATH sınıflandırma bu özelliği ile Bloom Taksononomisi'nin sınırlılıklarını da ortadan kaldırmaktadır. Tablo 1'de görüldüğü gibi MATH sınıflandırma becerileri, üç grup altındaki sekiz basamak içinde değerlendirilmektedir.

Tablo 1. MATH sınıflandırma (Smith ve diğerleri, 1996)

A Grubu	B Grubu	C Grubu
Gerçek bilgi	Bilgi transferi	Doğrulama ve yorumlama
Kavrama	Yeni durumlara uygulama	Sonuç çıkarma, varsayım ve karşılaştırma
Süreçlerin rutin kullanımı		Değerlendirme

A grubunda kullanılan beceriler; öğrenilmiş bir bilgiyi hatırlama, basit bir tanımın koşullarının sağlanıp sağlanmadığını anlama, formülde yerine koyma işlemini yapma, örnek ve örnek olmayan durumları tanıma becerilerdir. B grubunda kullanılan beceriler; bilgiyi bir formdan başka bir forma dönüştürme, kavramsal bir tanımın koşullarının sağlanıp sağlanmadığına karar verme, bir formülün ya da yöntemin farklı durumlara uygulanabilirliğini fark etmedir. C grubu, matematiksel anlamda daha üst düzey düşünme becerilerini içermektedir. Burada öğrenciye verilen ya da öğrencinin kendisi tarafından ortaya konan bir sonucu doğrulama, muhakeme sürecindeki hataları bulma becerileri yer alır (Smith ve diğerleri, 1996).

Bu çalışmanın amacı, matematik öğretiminde BCS'nin kullanımına yönelik, MATH sınıflandırmanın dikkate alındığı bir çalışma yaprağı hazırlamak ve bu çalışma yaprağının uygulama sürecinde, BCS destekli ve -desteksiz sınıf ortamlarındaki öğrenci aktivitelerinde meydana gelen değişiklikleri belirlemektir.

2. BCS VE MATEMATİKSEL BECERİLER

Bu bölümde, MATH sınıflandırma dikkate alınarak, türev kavramının bir uygulaması olan Taylor polinomlarının elde edilişine yönelik BCS'nin kullanıldığı bir çalışma yaprağı sunulmuştur. Çalışma yaprağında her bir soru MATH sınıflandırmaya göre tek tek incelenerek her düzeyden soru bulunmasına dikkat edilmiştir. Böylece bu sınıflamada yer alan tüm zihinsel ve matematiksel becerilerin öğrenciler tarafından kullanılmasına olanak sağlanmıştır.

Tablo 2. Çalışma Yaprağı

Taylor Polinomları

AMAÇ: Matematikte, karmaşık ifadeli fonksiyonlara, istenen hassaslığı veren, çalışılması daha kolay olan fonksiyonlarla yaklaşımda bulunulur. Bu çalışma yaprağının amacı, bu tür fonksiyonlardan olan Taylor polinomlarını elde etmektir.

(1) FONKSİYON İLE ONUN GRAFİĞİNİN BİR NOKTASINDAKİ TEĞETİ ARASINDAKİ İLİŞKİ

(a) $y=f(x)=x^2+5$ fonksiyonu ile x=1 noktasındaki $y_T=g(x)=2x+4$ teğet doğrusunun grafiklerini aynı düzlemde çiziniz.

(b) Aşağıdaki tabloyu doldurunuz. x değerleri 1 noktasına yaklaştıkça |f(x)-g(x)| değerlerinin nasıl değiştiğini hem tabloda hem de (a)'da çizdiğiniz grafikte gözleyiniz.

x	0	0.5	0.7	0.9	0.999	1	1.001	1.01	1.1	1.3	1.5	2
f(x)												
g(x)												
|f(x)-g(x)|												

(c) [0.5, 1.5], [0.8, 1.2] ve [0.99, 1.01] aralıklarında f(x) ile g(x) fonksiyonlarının grafiklerini aynı düzlemde çiziniz. Grafiklerde meydana gelen değişimi değerlendiriniz.

(d) [1.8, 2.1], [1.9, 2.01], [1.99, 2.001], aralıklarında f(x) ile g(x) fonksiyonlarının grafiklerini aynı düzlemde yeniden çiziniz. (c) şıkkında çizdiğiniz grafikler ile olan farklılığı açıklayınız.

(e) Bir eğri ile bir noktasındaki teğet doğrusuna ilişkin, (c) ve (d)' de yapılan çalışmalara bağlı olarak, nasıl bir yargıda bulunursunuz?

(2) FONKSİYONUN BİR NOKTADA DOĞRUSALLAŞTIRILMASI

$a \in \mathbb{R}$ Noktasında türevlenebilen y=f(x) fonksiyonunun x=a noktasındaki $y-f(a) = f'(a)(x-a)$ teğet doğrusunun denklemini göz önüne alalım. Burada L(x)=f(a)+f '(a)(x-a) olarak tanımlanan L(x) fonksiyonuna, f 'nin a noktasında (standart --) doğrusallaştırılması denir ve $f(x) \approx L(x)$ sembolü ile gösterilir.

(a) $f(x)=\sqrt{x+2}$ fonksiyonunun a=7 noktasında L(x) doğrusallaştırılmasını kullanarak aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

X	5	6	6.5	7	7.5	9	10
f(x)							
L(x)							
|f(x)-L(x)|							

(b) $f(8)=\sqrt{10}$ değerini kolayca hesaplayamayız. $\sqrt{10}$ değerini önce Maple'de bulunuz. f(x)'e yaklaşık değerler veren L(x) doğrusallaştırmasını kullanarak bulacağınız $\sqrt{10}$ değerini ilk bulduğunuz sonuç ile karşılaştırınız.

(c) $\sqrt{5}$ değerini Maple kullanarak bulunuz ve L(x) doğrusallaştırmasının verdiği değer ile karşılaştırınız.

(d) Yukarıda yapılan karşılaştırmaları f(x) ile L(x) fonksiyonlarının aynı düzlemde çizilen grafikleriyle ilişkilendiriniz.

(e) Sizce, hangi durumlarda, f(x) yerine L(x) yaklaşım fonksiyonu ile çalışılabilir? L(x) yerine, başka doğrusal fonksiyonlar ile çalışıldığında durum ne olur?

HATA ANALİZİ

L(x) fonksiyonu, a noktası yakınlarında f(x)'e yaklaşık değerler verir. Üstteki tabloda, 7 noktasına yakın x değerleri için $f(x) \approx L(x)$ yaklaşımının, küçük sayılabilecek hata payı ile doğru olduğunu gözlemişsinizdir. Yapılan bir yaklaşımda hata, "*hata=gerçek değer-yaklaşık değer*" olarak tanımlanır. f fonksiyonunun x=a noktasındaki doğrusallaştırması L(x) ise bu yaklaşımda E(x) hatası "E(x)=f(x)-L(x) = f(x)-f '(a)(x-a)" biçiminde tanımlanır.

(f) Her $t \in [a, x]$ için $f''(t)$ değerleri var olsun. Buna göre, E(t)=f(t)-f(a)-f '(a)(t-a) ile $(t-a)^2$ fonksiyonlarına Genelleştirilmiş Ortalama Teoremini uygulayarak, E(x) hatasının $E(x)=\frac{f''(c)}{2}(x-a)^2$, $c \in (a, x)$, biçiminde olduğunu gösteriniz.

Tablo 2'nin devamı

(3) f(x) FONKSİYONUNA YAKLAŞIK DEĞERLER VEREN POLİNOMLAR

$a \in \mathbb{R}$ noktasında türevlenebilen y=f(x) fonksiyonunun x=a noktasındaki doğrusallaştırması için $L(x)=P_1(x)$ tanımlamasını yapalım. Dikkat edilirse, $P_1(a)=f(a)$ ve $P_1'(a)=f'(a)$'dır.

(a) $a=0$ noktasında 2. mertebeden türevlenebilen $f(x)=e^x$ fonksiyonu ile ikinci dereceden $P_2(x)=P_1(x)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$ polinomunu göz önüne alalım. Buna göre $P_2(a)$ ile f(a), P'_2 ile f '(a) ve $P''_2(a)$ ile f''(a) arasındaki ilişkiyi belirleyiniz.

(b) f(1) = e ≈2.718 olduğunu dikkate alarak, bu sayıyı $P_1(1)$ ve $P_2(1)$ değerleri ile karşılaştırınız.

(c) e^x fonksiyonu a=0 noktasında 3. mertebeden türevlenebilirdir. Şimdi, 3. dereceden $P_3(x)=P_2(x)+\frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3$ polinom fonksiyonu ile f(x) arasındaki ilişkiyi (a) şıkkında olduğu gibi yeniden belirleyiniz.

(d) $P_1(1)$ ve $P_2(1)$ ve $P_3(1)$ değerlerini f(1) ile karşılaştırınız.

(e) f(x)= e^x ile i=1, 2, 3 olmak üzere, $P_i(1)$ polinom fonksiyonlarının grafiklerini, Maple yardımıyla, [-1, 1] aralığında aynı düzlemde çiziniz. Buna göre, i=1, 2, 3 için $P_i(x)$ polinom fonksiyonlarından hangisi 0 noktası komşuluğunda f(x)'e daha iyi bir yaklaşımdır?

(f) Sizde, i=1, 2, 3 olmak üzere, $P_i(x)$ polinom fonksiyonları dışında, f(x)'e daha iyi bir yaklaşım veren bir fonksiyon bulunuz ve bunu doğrulayınız?

(4) TAYLOR POLİNOMLARI

(x-a) teriminin kuvvetlerine göre dizilmiş olan $P_n(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+...+c_n(x-a)^n=\sum_{k=0}^{n}c_k(x-a)^k$ polinomunu göz önüne alalım. Şimdi, $c_0, c_1,\ldots, c_n$ katsayılarının $P_n(x)$ polinomunun türevleri türünden nasıl ifade edildiğini görelim.

(a) i=1, 2, 3,…, n için $P_n^{(i)}(x)$ türev fonksiyonlarını bulunuz. Maple'de yazılan aşağıdaki döngü, n=4 olmak üzere, i=1, 2, 3, 4 için isteneni verir.

```
> P_n:=sum(c[k]*(x-a)^k,k=0..4);
> for i from 1 to do Diff("P_n",x$i)=(diff(P_n,x$i)); end do;
```

(b) $k \in \mathbb{N}$ için $c_k=\frac{P_n^{(k)}(a)}{k!}$ olduğunu dikkate alarak, $P_n(x)$ polinomunu yeniden yazınız.

(c) (3). Bölümde geçen polinom fonksiyonların, i=1, 2, 3 olmak üzere, $P_i(x)=\sum_{k=0}^{i}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ biçiminde olduğuna dikkat ediniz. Sizde, e^x fonksiyonu için, i=4, 5, 6 olmak üzere $P_i(x)$ polinomlarını bulduran bir Maple döngüsü yazarak, elde edilen fonksiyonların grafiklerini Maple'de çiziniz.

(d) Sizce, bir f(x) fonksiyonu, (c) alıştırmasında olduğu gibi, seçilen bir $a \in \mathbb{R}$ sayısı için x-a terimlerinin kuvvetlerine göre dizilen bir polinom fonksiyonu olarak ifade edilebilir mi? Bunun için gerekli şart(lar) ne olmalıdır?

Tanım: Bir $a \in \mathbb{R}$ noktasının komşuluğunda (n+1). dereceden türevi sürekli olan f(x) fonksiyonu verilmiş olsun. (x-a)'nın kuvvetlerine göre dizilmiş olan

$$P_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

polinomuna f(x)'in x=a noktasında n. dereceden **Taylor polinomu** adı verilir. Tanıma göre, f(x) fonksiyonu n .dereceden polinom ise $f(x)=P_n(x)$ olduğu açıktır. Genel durumda, $f(x)-P_n(x)\neq 0$ olup bu fark, $E_n(x)$ ile gösterilen hatayı verir.

(e) e^x fonksiyonu için, i=1, 2,…, 5, 6 olmak üzere, (c) alıştırmasında bulduğunuz $P_i(x)$ Taylor polinomlarına göre, $E_n(x)$ hata fonksiyonlarının grafiklerini Maple'de çiziniz. Sıfır noktası yakınlarında, grafiklerin davranışını değerlendiriniz?

(f) $E_n(x)$ hatasını, (2-f) de olduğu gibi, yeniden formüle ediniz ve bunu ispatlayınız.

2.1. Çalışma Yaprağında MATH Sınıflandırmaya Göre Kullanılan Beceriler

Taylor polinomlarının elde edilişine yönelik hazırlanan çalışma yaprağında, MATH sınıflandırmaya göre öğrenciler tarafından kullanılan zihinsel aktiviteler ve beceriler ile BCS aktiviteleri aşağıda verilmiştir. Çalışma yaprağı A grubu beceriler ile başlamış ve daha üst grup becerilere doğru gelişim göstermiştir. BCS'nin ise sayısal, sembolik ve grafik çizebilme özellikleri kullanılmıştır.

Tablo 3. A Grubu Beceriler

Soru No	Zihinsel aktivite ve beceriler	BCS aktivitesi
1a	II. dereceden bir fonksiyonun grafiğini çizme, Teğet bilgisi	Grafik çizme
2a, 3a, 3b, 3d	Verilen bir formülde yerine koyma işlemini yapma ve/veya sonuçları- belli bir kritere göre- karşılaştırma	Bir fonksiyonun değerini hesaplama, cebirsel işlem
4a	Türev alma kuralları bilgisi	Türev bulma, döngü içindeki değişkenleri yerine yazma
4b	Polinom katsayılarının yeni ifadesine göre polinomu yeniden yazma	Yerine koyma

Tablo 4. B Grubu Beceriler

Soru No	Zihinsel aktivite ve beceriler	BCS aktivitesi
1b, 2d	Cebirsel işlem sonuçlarını grafik üzerinde yorumlama	Bir fonksiyonun değerini hesaplama, grafik çizme
1c	Teğetin değme noktası yakınlarında eğri ile teğetinin grafikleri arasındaki ilişkiyi anlama	Grafik çizme
1d	Teğetin değme noktasını içermeyen aralıklarda eğri ile teğetinin grafikleri arasındaki ilişkiyi anlama	Grafik çizme
1e	Özel durumları, daha genel durumları açıklamak için kullanma	--
2b, 2c, 3c	Yerine koyma sürecini anlama	Bir fonksiyonun değerini hesaplama, cebirsel işlem
2f	Uygun algoritmik süreçleri kullanarak verilenlerden sonuç çıkarma	--
3e, 4e	Cebirsel bilgiyi, grafiksel bilgiye çevirme ve grafiksel bilgiyi yorumlama	Sembolik cebirsel işlem yapma, grafik çizme

Tablo 5. C Grubu Beceriler

Soru No	Zihinsel aktivite ve beceriler	BCS aktivitesi
2e, 3f	Önceki sonuçlardan yeni sonuçlar çıkarma ve bu sonucu doğrulama	Cebirsel sonuçları grafik çizme yoluyla belirleme
4c	Verilen bir sonucu doğrulama ve bir fonksiyona doğrusallaştırması dışında daha iyi yaklaşımlar olduğunu gözleme	Cebirsel işlem, döngü yazma, grafik çizme
4d	Elde edilen sonuçları kullanarak yeni sonuçlar elde etme ve bu sonuçlar için gerekli şartları fark etme	--
4f	Elde edilen sonuçları matematiksel olarak modelleme ve ispat etme	--

3. YÖNTEM

Çalışma yaprağı, araştırmacılar tarafından MATH sınıflandırmanın tüm basamakları dikkate alınarak hazırlandıktan sonra, BCS destekli (1. Grup) ve BCS desteksiz (2. Grup) ortamlarda, öğrenci aktivitelerinde meydana gelen değişimleri gözlemek amacıyla Taylor polinomlarının anlatıldığı bir öğretim deneyi düzenlenmiştir. Öğretim deneyi, araştırmacının aktivitelerini organize ettiği, temel olarak keşfedici özellik gösteren kavramsal bir araçtır ve öğrencilerin matematiksel bilgilerini çeşitli yollarla ve araçlarla etkileme amacındadır (Steffe&Thomson, 2000). Dolayısıyla öğretim deneyi, öncelikle öğrencilerin matematiksel aktivitelerini anlamak ve keşfetmek için ortaya konulmuş canlı bir yöntemdir.

Bu çalışmadaki öğretim deneyi, katılımcıların öğretim programları dışında gerçekleştirilmiştir. Öğretim bölümleri, çalışmanın araştırmacıları (araştırmacı-öğretmen) tarafından yürütülmüştür. Her bir öğretim bölümünde bulunan gözlemci notlar tutarak, sonraki öğretim bölümlerinde değişmesi gereken durumlar için veri sağlamıştır. Çalışma, 1. Grupta toplamda dört saatte ve üç haftada tamamlanırken 2. Grupta yaklaşık olarak iki buçuk saatte ve iki haftada tamamlanmıştır.

BCS destekli 1. Grupta çalışma yaprağı, öğretim bölümleri öncesinde öğrencilere dağıtılmıştır. Katılımcılar araştırmacı öğretmenin yönlendirmeleriyle aynı soru üzerinde çalışmışlar, anlamadıkları ve takıldıkları durumlarda öğretmen desteğini almışlardır. Her bir sorunun çözümü tüm katılımcılar tarafından tamamlandıktan sonra sonuçlar tartışmaya açılmıştır. Öğrencilerin farklı çözümlere yönelik oluşturdukları hipotezleri denemelerine izin verilmiştir. Öğretim bölümlerinden sonra öğrencilerin tuttuğu notlar toplanmış ve araştırmacılar tarafından incelenmiştir.

Çalışma yaprağı, çoğunlukla BCS kullanmayı gerektiren aktiviteler içerdiği için 2. Grupta doğrudan kullanılmamıştır. Bunun yerine, çalışma yaprağında yer alan aktivitelerden uygun olanlar kullanılmış ve uygun olmayanlar için paralel aktiviteler düzenlenmiştir. 2. Grupta konunun anlatım sırası ve MATH sınıflandırma kullanılarak hazırlanan bazı aktiviteler şöyledir.

- Bir fonksiyonun bir noktadaki teğeti ile olan ilişkisi ve doğrusallaştırma kavramı,
- $\sqrt{x}$ fonksiyonunun x=25 noktasındaki doğrusallaştırılması ve $\sqrt{26}$ ’nın yaklaşık bir değerinin bulunması,
- Doğrusallaştırma yoluyla eğriye yapılan yaklaşımda ortaya çıkan hata kavramı,
- $\sqrt{26}$ ’nın bir yaklaşık değeri bulunurken yapılan hata için bir üst sınır belirleme,
- Bir fonksiyona doğrusallaştırma dışında yapılan yaklaşımlar; Taylor polinomları,
- $f(x)=e^x$ fonksiyonunun a=0 noktasının bir komşuluğunda i=1, 2, 3 için $P_i(x)$ Taylor polinomlarının elde edilmesi ve f(1)=e sayısı ile $P_1(1)$, $P_2(1)$, $P_3(1)$, değerlerinin karşılaştırılması,
- f(x) fonksiyonuna n.dereceden $P_n(x)$ Taylor polinomu ile yapılan yaklaşımda yapılan $E_n(x)$ hatasının elde edilişi,
- e^x fonksiyonuna a=0 noktasında i=1, 2, 3 için $P_i(x)$ Taylor polinomları ile yapılan yaklaşımlara ilişkin $E_i(x)$, hata fonksiyonlarının grafiklerinin aynı düzlemde gösterimi.

Bu grupta da öğretmen tarafından yönlendirilen soruları çözmeleri için katılımcılara süre tanınmıştır. Katılımcıların verdiği ortak cevaplardan biri tahtada incelenmiş, farklı cevaplar ise tartışmaya açılmıştır. Bunun yanı sıra katılımcılar, elde edilen sonuçlara ilişkin genelleme yapmaları ve yorumda bulunmaları için öğretmenleri tarafından teşvik edilmişlerdir.

Çalışma yaprağı ve 2. Gruptaki aktiviteler incelendiğinde öğrencilerin, Taylor polinomları konusuna sezgisel olarak yaklaşmaları hedeflenmiştir. Her iki grupta, gerekli olduğu durumlarda öğrenciler grup çalışmasına yönlendirilmiştir.

3.1. Katılımcılar

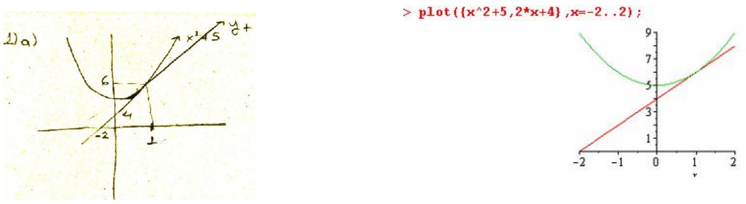
Çalışmada amaçlı örneklem kullanılmıştır. Çalışmanın katılımcıları, Ankara’daki bir üniversitenin matematik eğitimi programında öğrenim görmekte olan 14 (5 erkek, 9 kız) üçüncü sınıf öğrencisinden oluşmaktadır. Katılımcıların sınıf düzeyi belirlenirken, öğretim programlarında yer alan ve Maple yazılımının anlatıldığı Bilgisayar Programlama I-II dersini almış ve çalışma kağıdındaki matematiksel bilgiyi kullanabilecekleri matematik derslerini başarı ile tamamlamış olmaları göz önünde bulundurulmuştur.

3.2. Verilerin Analizi

Öğretim bölümleri sırasında kaydedilen görüntüler, öğrenciler tarafından tutulan ders notları, öğrencilerin Maple çalışma sayfaları ile gözlemci notları, Cobb ve Whitenack (1996) tarafından önerilen yöntem kullanılarak geriye dönük olarak analiz edilmiştir. Birinci aşamada her bir öğretim bölümü, sırayla izlenmiş, ses kayıtları yazılı metne çevrilmiş ve analiz edilmiştir. Daha sonra elde edilen veriler toplu olarak tekrar gözden geçirilmiştir. Verilerin analizi sırasında öğrencilerin BCS destekli ve desteksiz ortamdaki aktiviteleri arasında görülen farklara yoğunlaşılmıştır. Çalışma gruplarında ortak olarak veya yalnızca bir grupta ortaya çıkan aktivitelerin (soruları görselleştirme, grafik çizme, farklı gösterimler kullanma, elde edilen sonucun doğruluğunu kontrol etme, hipotezler oluşturma, denemeler yapma) kullanım şekli, öğrenci-öğrenci etkileşimi, öğrenci-öğretmen etkileşimi, öğrenci motivasyonu başlıkları altında temalar oluşturulmuştur.

4. BULGULAR

BCS destekli sınıflarda öğrenciler, bu yazılımın en çok grafik çizme özelliğini kullanmışlardır. Örneğin, kağıt ve kalem kullanarak çizdikleri grafiklerin doğruluğunu denetlemek için bilgisayar ortamında yeniden oluşturmuşlardır (Şekil 1).



Şekil 1: 1a sorusuna ilişkin öğrenci grafik çizimleri

Diğer yandan 1b, 2a problemlerinde olduğu gibi Maple'yi hesap makinesi olarak kullanmanın ötesine geçerek, yazdıkları döngülerle (Döngü 1), sayısal işlemleri yaparken zaman kazandıkları görülmüştür.

```
> L:=[0,0.5,.0.7,0.9,0.999,1,1.001,1.01,1.1,1.3,1.5]:
  f:=x->x^2+5:
  for i in L do subs(x=i,f(x)):end do
```

Döngü 1: 1b sorusuna ilişkin öğrenci tarafından oluşturulan döngü

Grup 1'de öğrenciler Taylor polinomunda geçen terimlerin katsayılarının elde edilmesi sürecinde, çeşitli hipotezler ortaya atmışlar ve bunları BCS desteği ile doğrulamaya çalışmışlardır (Transkript 1).

Transkript 1:

Z: Paydasında faktöriyel olmalı. Çünkü türevini aldığımızda geri dönebiliyoruz.

G: Amacımız yaklaşım. En fazla yaklaşabileceğimiz durumda orası birbirini götürmeli. Dolayısıyla faktöriyel olmalı.

H: Neden faktöriyel olduğunu ben anlamadım. Neden geri geri [integralden-türeve geçiş] türevini vermesi gerekiyor?

S: Mesela $x^4/24$ [4!] yerine [paydada] bir 18 bir de 30 aldım. Bu iki değer de grafiğin ya biraz üstü ya da biraz altı çıkıyor. $x^4/24$ kadar yaklaşmıyor.

H: Hocam $x^4/24$ yerine $x^4/23$ olsaydı bir sonrakinden daha mı büyük bir değer alacaktı. Tamam, türevleri alındığında sadeleşmesi gerekiyormuş da neden gerekiyormuş?

(Diğer öğrenciler nedenini açıklamaya çalışıyor).

Öğretmen: Peki o zaman hangisi daha iyi bir yaklaşım veriyorsa onu alabiliriz.

H: Ama yinede 23 ile 24 arasında çok büyük bir fark yoktur. Hatta ikisi arasında bir sayı bile olabilir.

3e sorusunda, e^x fonksiyonuna x=0 noktasının bir komşuluğunda P_1, P_2, P_3 polinom tipindeki fonksiyonlardan en iyi yaklaşımın P_3 olduğuna karar veren Grup 1 öğrencilerinden bazıları, P_3 polinomunun katsayılarını değiştirerek çizdikleri grafiklerle e^x fonksiyonuna üçüncü dereceden polinom fonksiyonları içinde en iyi yaklaşımın P_3 olduğu yargısında bulunmuşlardır.

Grup 2'de de hipotezler ortaya atılmasına rağmen, öğrencilerin bu hipotezlerini Grup 1'de olduğu gibi kolayca deneme fırsatı olmamıştır. Aynı zamanda tüm grup tarafından kabul edilen bir sonuca, transkript 1'de görüldüğü gibi ısrarcı bir itirazda bulunan da olmamıştır (Transkript 2). Bu grupta öğrenciler, sadece P_1 ve P_2 fonksiyonlarının grafiklerini çizmiş P_2'ye alternatif olabilecek hiçbir denemede bulunmamışlardır.

Transkript 2:

Öğretmen: e^x ile yaklaşım polinomlarının grafiklerini aynı düzlemde çizelim. Sizce e^x fonksiyonuna 0 noktasında, ikinci dereceden polinomlar içinde, en iyi yaklaşım $P_2(x)$ midir?

[Bir öğrenci tahtada grafikleri çizmeye çalışıyor fakat zorlanıyor. Öğretmen yardım ediyor.]

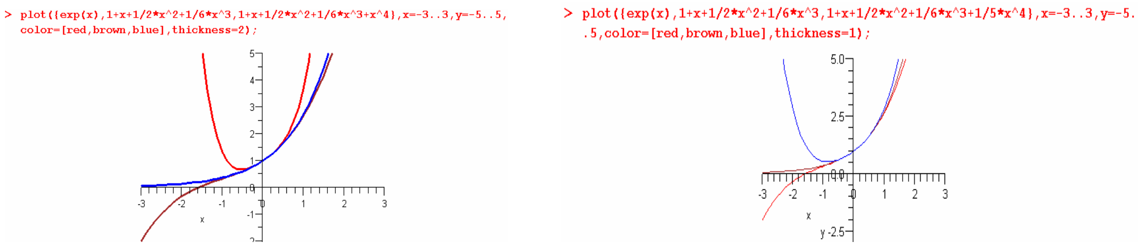
Öğretmen: Çizilen grafiklerden, en iyi yaklaşımın $P_2(x)$ olduğu görülüyor değil mi? Sizce, ikinci dereceden polinomlar içinde, en iyi yaklaşım $P_2(x)$ midir?

[Öğrenciler herhangi bir denemede veya yorumda bulunmuyorlar, sessizlik…]

A: $P_2(x)$'in elde edilişine bakıldığında bence öyledir. Şimdi başka ikinci dereceden fonksiyonların grafiklerini çizmek için bir sürü işlem gerekir.

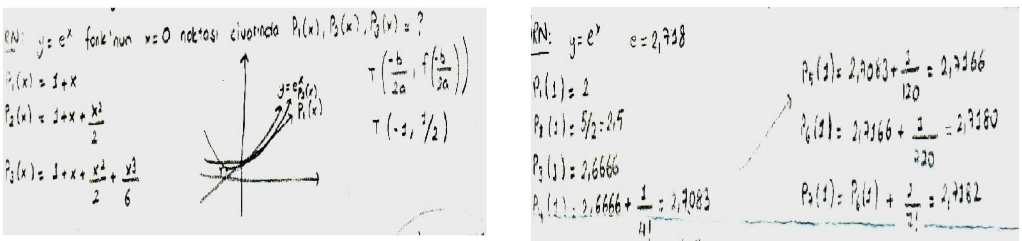
Öğretmen: Nasıl emin olabiliyorsun? [Sessizlik…] Peki, tamam, en iyisi P_2 polinomudur. Daha yüksek dereceden polinomların grafikleri çizildiğinde görülecektir ki, giderek e^x'e yaklaşmaktadır.

Grup 1'de öğrenciler çeşitli problemlerin çözümlerinde Maple komutlarını kullanarak farklı durumları gözleme etkinliklerinde bulunmuşlardır. Bu süreçte öğretmenden bağımsız olarak yaptıkları denemeleri sınıf ortamında paylaşmışlardır. Örneğin, C grubu sorular içerisinde yer alan 3f'de, öğrencilerden bazıları, e^x fonksiyonuna x=0 noktasındaki P_1, P_2, P_3 dışında daha iyi yaklaşımlar veren polinom tipinde fonksiyonlar bulabilmek için P_3 polinom fonksiyonuna x^4'lü terimi ekleyerek grafik üzerindeki değişimleri gözlemişlerdir.



Şekil 2: 3f sorusuna ilişkin öğrenci tarafından oluşturulan grafikler

Grup 2'de öğrencilerin bu soruya ilişkin yaptıkları uzun cebirsel işlemler ve buna bağlı olarak f(1)=e sayısının yaklaşık değerini bulmak için kullandıkları polinom fonksiyonlarında yerine koyma süreci sayısal işlemlerin çokluğu nedeniyle hem zaman almıştır hem de öğrenci motivasyonunu düşürdüğü gözlenmiştir.



Şekil 3: Grup 2, öğrenci aktivitesi

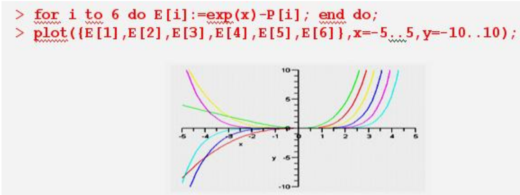
Öğrenciler, grup çalışması yoluyla, 4a'da verilen döngüyü düzenleyerek, 4d sorusunda geçen e^x fonksiyonunun n. basamaktan Taylor polinomlarını veren bir Maple komutu yazarak (Döngü 2), problemin çözümünü genelleştirmişlerdir.

```
> taylorpol:=proc(f,n)
   T(x):=sum(evalf(subs(x=0,diff(f,x$k)))/k!*(x)^k,k=0..n);
  end;
> taylorpol(exp(x),5);
```

$$1. + x + 0.5000000000\,x^2 + 0.1666666667\,x^3 + 0.04166666667\,x^4 + 0.008333333333\,x^5$$

Döngü 2: 4c sorusu için öğrenci tarafından oluşturulan Maple komutu

4e sorusunda olduğu gibi, Taylor polinomlarının derecesi arttıkça hata fonksiyonlarına ilişkin karşılaşılan cebirsel denklemlerin çözülememesi grafiklerin çizimini zorlaştırır. Grup 2'de öğrenciler yalnızca $E_1(x)= e^x – x+1$ fonksiyonunun grafiğini çizmeye çalışmışlardır ve diğer hata fonksiyonlarının grafiklerinin nasıl olabileceği konusunda, sayısal hesaplamalara bağlı, sezgisel varsayımlarda bulunmuşlardır. Grup 1' de ise, öğrenciler yazdıkları döngü yardımıyla hata fonksiyonlarının grafiğinin nasıl değiştiğini kolayca elde etmişlerdir (Şekil 4).



Şekil 4: 4e sorusuna ilişkin öğrenci tarafından oluşturulan döngü

5. TARTIŞMA VE ÖNERİLER

BCS, matematik öğretiminde öğrencilerin öğrenme sürecine aktif olarak katılmalarında önemli bir araç olmasına rağmen bu tür yazılımların, matematik eğitimi ile bütünleştirilmesinde doğru yöntemin ne olduğu, halen yanıt bekleyen bir sorudur. Bu çalışmanın amacı sözü geçen 'bütünleştirme' konusunda bir yaklaşımda bulunmaktır. Çalışmanın ilk aşamasında, Taylor polinomları konusunda, bu bütünleştirmeye örnek olabilecek BCS destekli bir çalışma yaprağı hazırlanmıştır. İkinci aşamada ise bu çalışma yaprağının BCS destekli sınıfta ve paralel aktivitelerin BCS desteksiz sınıfta uygulanması sırasında, öğrenci aktivitelerinde ortaya çıkan farklar gözlenmiştir.

Yukarıda belirtildiği gibi BCS destekli sınıfta, çalışma yaprağı kullanılarak Taylor polinomlarının anlatılması daha uzun sürmüştür. Bu durumun en büyük nedenlerinden biri öğrencilerin bilgisayar komutlarında yaşadıkları bazı zorluklardır (komutların kurallara uygun yazılımı vb). Her öğrencinin bilgisayarda çalışma hızının aynı olmadığı düşünüldüğünde aslında bu beklenen bir durumdur. Ayrıca teknoloji kullanmanın yarattığı çeşitli sıkıntılar (bilgisayarın kilitlenmesi vb) bu nedenler arasına eklenebilir.

BCS destekli sınıfta çalışmanın daha uzun sürmesinin bir diğer nedeni de öğrencilerin çalışma yaprağından bağımsız denemeler yapma fırsatı bulabilmeleridir. Araştırma sırasında, öğrencilerin çalışma yaprağındaki aktivitelerden yola çıkarak çeşitli hipotezler ortaya attıkları gözlenmiştir. Bu hipotezler, kimi zaman sınıfta tartışmaya açılmış ve öğrencilerin hipotezlerini doğrulayacak ya da çürütecek denemeler yapmalarına izin verilmiştir. Hatta bazı durumlarda çalışma grubunun çoğunluğu ve öğretmen tarafından kabul edilen bir sonuç, katılımcıların bazıları için yeterli olmamış ve kendi denemelerini yapmak istemişlerdir. Örneğin bu grupta yer alan öğrencilerden biri, Taylor polinomunu oluşturan kesrin paydasının faktöriyel olmayabileceğini iddia etmiştir ve bunu sayısal örneklerle doğrulamaya çalışmıştır. Ancak yaptığı denemeler sonucunda hipotezinin doğru olmadığını anlamıştır. Bu durumun, iki çalışma grubunu (BCS destekli ve –desteksiz) birbirinden ayıran en temel fark olduğu söylenebilir. BCS desteksiz sınıfta, çalışma yaprağına benzer aktiviteler kullanılmış ve sonuçlar tartışmaya açılmış olmasına rağmen öğrenciler, çoğunlukla öğretmenin söylediklerini kabul etme eğilimi göstermekte ve ulaşılan sonuçlara ilişkin herhangi bir itirazda bulunmamaktadır. 2. Grupta BCS'nin olmaması öğrencilerin dersten kopmadan, öğretmenin yönergeleri dışında, düşündüklerini hızlı bir şekilde gerçekleştirme olanağını ortadan kaldırmıştır. Bu anlamda BCS'nin öğrencilerin özgür düşünebilme ve olaylara eleştirel bakabilme becerilerini geliştirdiği söylenebilir. Matematik gibi eleştirel düşünmenin önemli olduğu bir bilim dalında, öğrencilere bu tür beceriler kazandıracak ortamlar sunan BCS gibi yazılımların uygun kullanımı önemli bir konu olarak ortaya çıkmaktadır.

Öğrencilerin BCS destekli ortamda çalışıyor olmaları daha çok grafik kullanmalarına, bu grafiklerdeki görüntüleri, gözlemek istedikleri duruma göre manipüle etmelerine ve farklı gösterimler arasında hareket etmelerine (cebirsel, sayısal ve grafiksel) olanak sağlamıştır. BCS desteksiz sınıfta ise bu tür gösterimler kullanmak ya çok basit düzeydeki fonksiyon ve grafikleriyle sınırlı kalmakta ya da bu grafikler hiç kullanılmadan öğrencilerin sezgisel olarak sonucu fark etmeleri beklenmektedir. Çünkü yüksek dereceli polinom fonksiyonların köklerinin bulunup grafiklerinin çizimi, sadece kağıt kalem kullanan öğrenciler için oldukça zor (bazı durumlarda imkansız) olmakta ve bu tür çalışmalar için sınıfta yeterince zaman ayrılamamaktadır.

BCS, her ne kadar bağımsız denemeler ve öğrencilerin bilgisayardaki çalışma hızı farklılıklarından sınıf ortamındaki çalışma süresini arttırsa da öğrencilerin, uzun matematiksel işlemler yaparken kaybettikleri zamanı kısaltarak genelleme ve yorum yapma gibi üst düzey düşünme becerilerinin gelişmesine katkıda bulunmaktadır. Son yıllarda öğrencilerin matematik dersleri içindeki kavramsal anlama becerilerinin sadece matematiksel işlem yapma olarak algılanmasının yanlışlığı, alan uzmanları tarafından sık sık ortaya konmaktadır. İlkokuldan üniversiteye hemen hemen her öğretim basamağında, öğretmenlerin öğrencilerine, (çoğu zaman farkında olmayarak) yalnızca bilgi, kavrama ya da en fazla süreçlerin rutin kullanımı basamağına yönelik sorular yöneltmeleri ve sonuç olarak öğrenmelerini bu tür sorularla sınamaları, öğrencilerin daha üst düzey düşünme becerileri kazanmalarını engellemektedir. Oysa çalışma yaprağının hazırlanma sürecinde dikkate alınan MATH sınıflandırma, öğrencilerden beklenen üst düzey düşünme becerilerinin geliştirilmesi için önemli bir referans kaynağı olmuştur. Çalışma yaprağının her bir bölümünde, aşamalı olarak MATH sınıflandırmadaki tüm düzeylerden sorulara yer verilmesi ve soruların BCS ile bütünleştirilmesi sonuç çıkarma, hipotezler ortaya atıp bunların doğruluğunu sınama, genelleme ve yorum yapma gibi üst düzey düşünme becerilerinin belirteçlerinin ortaya çıkmasını sağlamıştır.

BCS gibi yazılımların sağladığı zengin matematiksel deneyimler ve problem çözümlerinde yeni yaklaşımlar kullanmayı destekleyen ortamlar, üniversite öğrencilerine hem lisans eğitimlerinde hem de lisans sonrası meslek hayatlarında kullanabilecekleri önemli beceriler kazandırmaktadır. Sadece üniversite değil, her düzeydeki öğretim etkinlikleri için bu tür yazılımların sağladığı olanaklar öğrencilerin kullanımına sunulmalıdır. Ancak istenilen hedeflere ulaşılabilmesi için bu süreç, dikkatli bir şekilde planlanmalı ve uygulanmalı; teknolojinin bu anlamda bir amaç değil araç olduğu unutulmamalıdır.

KAYNAKLAR

Aksoy, Y. (2007). "Türev Kavramının Öğretilmesinde Bilgisayar Cebiri Sistemlerinin Etkisi." Yayımlanmamış doktora tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Aktümen, M. (2007). "Belirli İntegral Kavramının Öğretiminde Bilgisayar Cebiri Sistemlerinin Etkisi." Yayımlanmamış doktora tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Biggs, J. (1995). Assessing for learning: Some dimensions underlying new approaches to educational assessment. *The Alberta Journal of Educational Research, 41*(1), 1-17.

Bloom, B. S. (ed.) (1956). *Taxonomy of Educational Objectives, the classification of educational goals – Handbook I: Cognitive Domain.* New York: McKay

Bulut, M. (2009). "İşbirliğine Dayalı Yapılandırmacı Öğrenme Ortamlarında Kullanılan Bilgisayar Cebir Sistemlerinin Matematiksel Düşünme, Öğrenci Başarısına Ve Tutumuna Etkisi." Yayımlanmamış doktora tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Cobb, P. & Whitenack, J. W. (1996). A method for conducting longitudinal analyses of classroom videorecordings and transcripts. *Educational Studies in Mathematics, 30* (3*)*, 213-228.

Kabaca, T. (2006). "Limit Kavramının Öğretiminde Bilgisayar Cebiri Sistemlerinin Etkisi." Yayımlanmamış doktora tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Klincsik, M., Sarvari, C. & Rerjesi-Hamori, I., (2008). Computer algebra in teaching mathematics at University of Pecs. *Proceedings of the International Conference on Engineering Education*, J. Mecsi, ed., ICEE, Hungary.

Lavicza**,** Z. (2008). Examining the use of Computer Algebra Systems in university-level mathematics teaching. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching. 28*(2), 99-111.

Lavicza, Z. (2007). Factors influencing the integration of Computer Algebra Systems into university-level mathematics education. *International Journal of Technology in Mathematics Education. 14*(3), 35-43**.**

Leinbach, C; Pountney, D. C. & Etchells, T. (2002). Appropriate use of a CAS in the teaching and learning of mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology*, *33*, 1, 1–14.

Porter, A.C.(2002). Measuring the content of instruction:Uses in research and practice.*Educational Researcher, 31*(7), 3.

Smith, G., Wood, L., Coupland, M., Stephenson, B. Crawford, K. & Ball, G. (1996). Constructing Mathematical Examinations to Assess a Range of Knowledge and Skills, *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 27*(1), 1996, 65-77.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements, In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp.267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum

Extended Abstract

Computer Algebra Systems (CAS), which was initially developed for mathematical calculations and applications,is the common name of computer software such as Derive, Mathematica, Mathplus, and Maple. Such software is highly important in mathematics and mathematics education. A careful integration of CAS with the education environment would enhance the contribution of such software in the learning processes of students. One of the most important points in this process is the necessity of developing students' mathematical skills.

In the related literature, the intellectual skills of students are dealt with under various classification systems. The construction of these classification systems are usually based on Bloom Taxonomy. One of these is the MATH Taxonomy which was developed by Smith et al in 1996. Different from the previous ones, MATH Taxonomy includes mathematical skills expected from students as well. Structurally, MATH Taxonomy consists of 3 groups of skills, and 8 sub-levels that are placed under these groups.

The aim of this study, which has been realized in two stages, is to determine the changes in the learning environment and the activities of students, who are attending a teacher training program, in CAS-supported and without CAS-support class environments. To this end, the worksheet was integrated with Maple, which is a CAS software, and each question used here was examined according to MATH Taxonomy, and a special attention was paid to having questions about each 3 of the skills.

After the worksheet was developed, in order to observe the changes in the student activities in CAS- supported (Group 1) and without-CAS support (Group 2) environments, a teaching experiment, in which Taylor polynomials were taught, was prepared. Because the worksheet predominantly includes activities that require the use of CAS, it was not used directly in Group 2; instead, suitable ones in the worksheet were used, and parallel activities were prepared in lieu of the unsuitable ones. During the applications, students were encouraged for group study, and the answers of the students were opened to discussion. In Group 1, where CAS was used, the study was completed in four hours over a three-week time. And, in Group 2, it was completed approximately in two and a half hours over a three-week time. Both of the studies with groups were video and audio recorded, and in each application, there was an observer, and the recordings were the basis for the obtained data. Each study group consists of 7 students who have been enrolled in mathematics teacher training program at a university in Ankara, thus, a total of 14 students were in the study. Moreover, the participants have the necessary command and mathematical knowledge that is within the scope of the study. The class notes composed by the students during the study, the Maple worksheets of students, the notes of the observer and the recorded data were all analyzed retrospectively by using the method proposed by Cobb and Whitenack (1996). According to this, in the first stage, each teaching part was observed and analyzed. Then, the obtained data was collectively revised once more. During the analyses, the differences observed in the activities of students in CAS-supported and without CAS support environments were focused upon.

In the CAS-supported class, the teaching of Taylor polynomials by using the worksheet took longer. One of the main reason for this is the difficulties students faced in some of the computer commands. As not every student has the same pace when using the computer, this is, in fact, an anticipated situation. Another reason for the lengthiness of the study in the CAS-supported class is that students had the chance to make experiments independent of the worksheet. In this respect, it can be said that CAS develops students' ability to think independently and to be critical. In a field like mathematics in which critical thinking is crucial, the importance of appropriate use of software such as CAS is evident since they provide the environment with the acquisition of such skills.

The fact that students work in a CAS-supported environment enabled them to have more use of graphics and to manipulate the images in these graphics as well as to move between different illustrations (algebraic, numerical, and graphical). This result is consistent with the findings of Schneider (2000) and Weigand, Weller (2001), which contends that students who work with CAS frequently switches between various illustration types. On the other hand, in classes without CAS support, use of such illustrations is either limited to very basic functions or their graphics (function graphics of the first, second, and maybe of third degree), or the students are expected to realize the result intuitively because, finding the square roots of high level functions and drawing their graphics is rather difficult, if not impossible, for students who use pen and paper, and the teachers cannot spare enough time for such activities in class.

Although CAS increases the study time in class environment due to the differences in the paces of students with a computer, because it shortens the time students spend on long mathematical operations, it helps the development of advanced thinking abilities such as generalization and interpretation. At this stage, MATH Taxonomy which was taken into consideration when preparing the worksheet was a very important reference point for the development of advanced thinking abilities expected of students.

The rich mathematical experience which software such as CAS provides and the environments which support the use of new approaches in problem solving, bestow university students with very important skills which they can use both in their undergraduate studies and after graduation, in their professional lives. The opportunities provided by such software should be made available not only for universities but also for any type of educative activity in all levels. However, in order to achieve the intended objectives, this process should be planned and applied carefully; and one should not forget that technology, in this respect, is just a means not an end.