Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi 30 [2006] 1-10

FONKSİYON KAVRAMININ ÇOKLU TEMSİLLERİNİN ÇAĞRIŞTIRDIĞI KAVRAM GÖRÜNTÜLERİ*

CONCEPT IMAGES EVOKED BY MULTIPLE REPRESENTATIONS OF FUNCTIONS

Hatice AKKOÇ**

ÖZET: Bu çalışma matematiğin önemli kavramlarından fonksiyon kavramının çoklu temsillerinin (küme eşlemesi diyagramı, sıralı ikililer kümesi, grafik ve cebirsel formül) öğrencilerin zihninde çağrıştırdığı kavram görüntülerini inceler. Çoklu temsillerin oluşturduğu kavram görüntüleri oynadıkları prototip ve örneklem rolleri açısından irdelenmiştir. Çalışmanın örneklemini 9 lise 3 öğrencisi oluşturmaktadır. Bu 9 öğrenci, 114 lise 3 öğrencisine dağıtılan anketlerin sonuçlarına göre teorik örnekleme yöntemi ile seçilmiştir. Temel olarak nitel olan bu çalışmanın verileri bu 9 lise 3 öğrencisi ile yapılan yarı-yapılandırılmış görüşmelerden elde edilmiştir. Görüşmelerde öğrencilerden çeşitli temsillerin fonksiyon olup olmadığı hakkında yüksek sesle düşünmeleri istenmiştir. Görüşmelerin çözümlemeleri göstermiştir ki küme eşlemesi diyagramı prototip rolü oynayarak tanımsal özelliklere daha yakın kavram görüntüleri çağrıştırmıştır. Grafik ve cebirsel temsiller ise tanımdan ziyade özel örnekleri (örneklem demetlerini) çağrıştırmıştır.

Anahtar Sözcükler: Fonksiyon kavramı, kavram görüntüsü, çoklu temsiller, prototip, örneklem.

ABSTRACT: This study investigates students' concept images evoked from multiple representations of functions such as set correspondence diagrams, sets of ordered pairs, graphs and algebraic expressions. The concept images evoked from multiple representations are examined in terms of the roles representations play; as prototypes and exemplars. The sample of the study is 9 students in grade 11. These 9 students were selected among 114 grade 11 students on the basis of the results from the questionnaires using theoretical sampling. This study is mainly qualitative and the main data is obtained from the semi-structured interviews with the 9 students. In these interviews, students were asked to decide whether the given representations are functions or not. The analysis of the interview protocols indicated that the set correspondence diagram played the role of a prototype and evoked concept images which included the defining properties of function. On the other hand, graphical and algebraic representations evoked exemplar-based concept images rather than the definition.

Key words: Function concept, concept image, multiple representations, prototype, exemplar.

1. GİRİŞ

Fonksiyon kavramı matematiğin en temel kavramlarından biridir. Birçok ülkedeki matematik müfredatı fonksiyon kavramı üzerine inşa edilmiştir. 1960'lı yıllarda "yeni matematik" akımının etkisiyle fonksiyonlar, küme teorisi temel alınarak Bourbaki'nin sıralı ikili tanımı ile müfredatlarda yer almıştır. Günümüzde Amerika Birleşik Devletlerinde, NCTM standartları fonksiyon kavramını müfredattaki diğer birçok kavramın üst kavramı olarak ifade eder:

> Fonksiyon kavramı matematikte önemli bir birleştirici kavramdır. İki küme arasında özel bir eşleme olan fonksiyon tüm müfredata yayılmıştır. Aritmetikte, fonksiyonlar sayı ikililerini tek bir sayıya eşleyen işlemlerdir (sayı ikililerindeki sayıların toplamı gibi); cebirde, fonksiyonlar sayıları temsil eden değişkenler arasındaki bağıntılardır; geometride, fonksiyonlar öteleme ve döndürme gibi hareketlerle nokta kümelerini görüntülerine eşlerler; olasılıkta, fonksiyonlar olayları olayların olma olasılıklarına eşlerler. Fonksiyon kavramı, teknolojik gelişmelerin sonucu olarak da ortaya çıkan ve gerçek dünyadaki birçok girdi-çıktı durumlarını temsil eden matematiksel ilişkiler olması açısından da önemlidir. Bunun bir örneği olarak hesap makinesi üzerindeki $\sqrt{2}$ tuşu verilebilir. (NCTM, 1989)

*Bu çalışma Akkoç, H. (2003) doktora tezinin bir parçasıdır.

**Marmara Üniversitesi, haticeakkoc@yahoo.com

Yeni matematik akımının etkisiyle, ülkemizde fonksiyon konusuna küme teorisi temel alınarak giriş yapılır. Kartezyen çarpım, sıralı ikili, bağıntı konularından sonra, fonksiyon kavramı özel bir bağıntı olarak verilir.

Tanım: A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere; A'nın her elemanını, B'nin yalnız bir elemanına eşleyen; A'dan B'ye bir f bağıntısına, A'dan B'ye fonksiyon denir.

A'dan B'ye tanımlı bir f fonksiyonu:

1. A'nın tüm elemanlarını, B'nin elemanlarına eşler.
2. A'nın her elemanını, B'nin yalnız bir elemanına eşler.

x A ve y B olmak üzere; A'dan B'ye bir f fonksiyonu, x'i y'ye eşliyorsa;

$f: A \rightarrow B$, $x \rightarrow y=f(x)$ biçiminde gösterilir.

Tanım sözel olarak verildikten sonra, küme eşlemesi diyagramı ile görsel olarak açıklanır ve fonksiyon kavramının dört değişik temsili ile (küme eşlemesi diyagramı, sıralı ikililer kümesi, denklemler ve grafikler ile) örnekler sunulur. 2005 yılında yayınlanan yeni matematik öğretim programında eskisinden farklı olarak, girdi-çıktı durumlarını ifade eden fonksiyon makinesi örnekleri de vurgulanır. Fonksiyon makinesi fonksiyonların bileşkesini açıklamak için de kullanılmaktadır.

1.1. İlgili Literatür

Fonksiyon kavramı 1980'lerden bu yana matematik eğitiminde odak noktası olmuş önemli konulardan birisidir. Değişik araştırmacılar fonksiyon kavramına değişik kuramsal çatılar açısından yaklaşmışlardır. Bu kuramsal çatılardan ilki, Tall ve Vinner (1981) ve Vinner (1983) tarafından ortaya atılan kavram tanımı ve kavram görüntüsü ayrımıdır. Vinner (1983) kavram tanımını, o kavramı kesin bir şekilde belirleyen kelimeler ve semboller bütünü olan ve matematikçiler tarafından kabül gören ifadeler olarak açıklar. Öğrenciler her zaman tanımdan yola çıkarak muhakeme yapmazlar. Bu durumu açıklamak için Tall ve Vinner (1981) kavram görüntüsü terimini kullanırlar. Kavram görüntüsü, o kavramla ilgili zihnimizdeki bütün zihinsel görüntüler, kavramla ilgili özellikler ve oluşumlardır. Vinner (1983) öğrencilerin fonksiyonlarla ilgili kavram görüntülerini incelemiştir ve aşağıda belirtilen kavram görüntülerini gözlemlemiştir:

- Bir fonksiyon bir tek kuralla verilmelidir. İki kural varsa, iki ayrı fonksiyon vardır.
- Bir fonksiyonun "makul (düzgün)" bir grafiği olmalıdır.
- Fonksiyon tanımını bire-bir olma ile karıştırma.
- Her fonksiyon birebirdir.
- İşaret ve tam değer fonksiyonları için, fonksiyon olma koşullarını dikkate almama.
- Cebirsel olarak ifade edilmeyen fonksiyonları, özel olarak adlandırılmadıkları takdirde, fonksiyon olarak kabul etmemek.

Vinner (1983), ayrıca öğrencilerin çoğunun, fonksiyon kavramına çok özel ve kişisel anlamlar yükleyerek, kişisel kavram tanımlarını kullandıklarını bulmuştur. Akkoç (2002, 2005) ise, çeşitli fonksiyon temsilleri için lise 3 öğrencilerinin tanımsal özellikleri nasıl kullandıklarını incelemiş ve öğrencilerin bazı temsillerde diğerlerine göre daha başarılı olduklarını gözlemlemiştir.

Kavram tanımı ve kavram görüntüsü ayrımını ortaya koyan bu kuramsal çatıdan sonra literatür iki yönde gelişmiştir. Bir taraftan, fonksiyon kavramının bir süreç ve bilişsel nesne olarak kavramsallaştırılması (Dubinsky, 1991; Breidenbach ve Diğerleri, 1992; Sfard, 1992); diğer taraftan fonksiyonların çoklu temsilleri araştırılmıştır (Brenner ve diğerleri, 1997; Confrey, 1994; Kaput, 1992;

Keller ve Hirsch, 1998; Leinhardt ve diğerleri, 1990; Özgün-Koca, 2004). Çoklu temsillerle ilgili çalışmalar, özellikle bilgisayar ortamının aynı anda birçok temsile hızlı ve etkin şekilde ulaşma imkanı verdiğinden, temsiller arasındaki geçişlerle temsiller arası bağların kuvvetlendiğini ve dolayısıyla fonksiyonların kavramsal olarak öğrenilmesine katkıda bulunduğunu vurgular.

Bazı araştırmacılar ise (Sierpinska, 1992; Thompson 1994) matematik eğitimi araştırmalarında "temsil" olgusuna yüklenen anlamı sorgularlar. Sierpinska (1992) her temsilin sınırlılıklarının farkında olmanın fonksiyon kavramını anlamak açısından önemini vurgular. Thompson (1994) dikkatle düşünülmesi gereken konunun "temsil" olgusu olduğunu söyler ve fonksiyon kavramının anlaşılmasını açıklamaya çalışan araştırmaların aslında fonksiyon kavramının özel bir durumunu incelediklerini belirtir (örneğin sembolik temsili ve doğrusal fonksiyon grafikleri arasındaki bağların incelenmesi gibi). Thompson'a (1994) göre hiçbir temsil fonksiyon kavramını birebir temsil edemez ve çekirdek fonksiyon kavramı, bütün temsillerden öte, kavramın en genel soyut halidir. Thompson (1994) öğrencilerin bir temsilden diğerine geçerken sabit kalan bir şeyin farkına varmadıklarını, aksine her temsili öğrenilecek bağımsız bir konu olarak gördüklerini iddia eder. DeMarois, McGowen ve Tall (2000a) ise "fonksiyon artı (function plus)" terimini ortaya atarak, öğrencilerin belli fonksiyon çeşitlerini çalışırken aslında fonksiyon olma özelliklerine ek olarak başka özelliklere de yoğunlaştıklarını belirtir (Örneğin doğrusal fonksiyonlar için, iki noktanın bilinmesi durumunda diğer bütün noktaların belirlenebilmesi gibi).

1.2. Çalışmanın Amacı

Yukarda belirtilen ve temsil olgusunu sorgulayan literatür ışığında, bu çalışmanın amacı, fonksiyon kavramının her bir temsilinin öğrencinin zihninde ne gibi kavram görüntüleri oluşturduğunu ortaya çıkarmaktır. Bu yazıda aşağıdaki araştırma sorularına cevap aranacaktır:

1. Öğrenciler her bir temsil için ne gibi kavram görüntülerine sahiptirler? (Kavram görüntüleri fonksiyon kavramının tanımsal özelliklerini içermekte midir?)
2. Öğrencilerin farklı temsillere ilişkin sahip oldukları kavram görüntülerinin kaynakları nelerdir?

1.3. Kuramsal Çerçeve

Türk matematik öğretimi programında fonksiyon kavramına ait aşağıdaki temsiller vurgulanmaktadır:

- Küme eşlemesi diyagramı (iki küme ve bunlar arasında oklarla yapılan eşleme)
- Sıralı ikililer kümesi
- Grafik
- Cebirsel ifade

Bu temsillerin her biri fonksiyon kavramının ayrı bir yönünü vurgulamaktadır ve bu açıdan öğrencilerin kavram görüntüsünü zenginleştirmektedir. Fakat şu da unutulmamalıdır ki Thompson'ın (1994) da belirttiği gibi bütün bu temsiller öğrenciler için birbirinden bağımsız olarak da algılanabilmektedir. Her bir temsile ait öğrencilerin sahip oldukları kavram görüntüleri birbiri ile çelişebilmektedir. Bu karmaşık kavram görüntüleri ile insan zihninin nasıl başa çıktığını açıklamak üzere bilişsel psikoloji literatüründe prototip ve örneklem ayrımı yapılmıştır. Prototip, bir kavramı temsil eden en tipik örnek veya en iyi örnek olarak adlandırılabilir (Rosch, 1975; 1978). Rosch bir örneğin bir kavrama ait olup olmadığına karar verirken o örneği zihnimizdeki prototip ile karşılaştırdığımızı ve prototipe benzerliğine göre karar verdiğimizi iddia eder. Örneklem ise bir kavramın daha özel durumlarını ifade etmek için kullanılır. Ross ve Makin (1999), farklı bağlamlarda karşılaştığımız örneklemlerden elde ettiğimiz tecrübelerin o kavramı zihnimizde oluşturduğunu iddia eder. Fonksiyon kavramının öğretim programında işleniş şekli düşünüldüğünde, fonksiyon çeşitlerinin örneklem demetleri (exemplar clusters) şeklinde yer aldığı görülür. Örneğin, doğrusal, üstel, logaritmik, trigonometrik fonksiyonlar (cebirsel ve grafiksel temsilleri ile) örneklem demetleri halinde farklı zamanlarda ve farklı konu başlıkları altında müfredatta verilmektedir. Diğer yandan küme eşlemesi diyagramı matematiksel tanımı açıklamak için en iyi örnek (diğer bir deyişle prototip) olarak öğrencilere sunulmaktadır. Yukarda belirtilen araştırma soruları, prototip ve örneklem farkı çerçevesinde cevaplanacaktır.

2. YÖNTEM

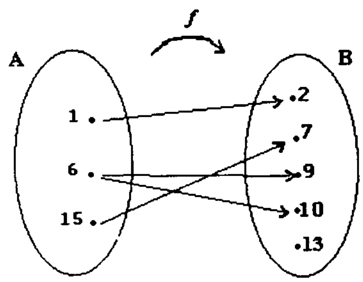
Araştırma temel olarak niteldir. Araştırmanın evreni, Adana'daki bir özel ve bir devlet okulundaki Matematik (40), Türkçe – Matematik (32) ve Sosyal (42) grubundaki 114 lise 3 öğrencisi oluşturmaktadır. Bu öğrencilere dağıtılan anketlerden elde edilen verilerin çözümlenmesi sonucu teorik örnekleme (Mason, 1996) yoluyla 9 öğrenci görüşme için seçilmiştir. Teorik örnekleme, Mason'ın da ifade ettiği gibi, araştırma sorularını temel alarak, bir teoriyi test edip açıklamaya yardım edecek özellik ve ölçüleri geliştirmeye yönelik örneklem seçmektir. Anketlerde öğrencilerin farklı temsillere verdikleri cevaplar karşılaştırıldığında, öğrencilerin küme eşlemesi ve sıralı ikililer için tanımsal özelliklere göre karar vermede grafik ve denklemlere kıyasla daha başarılı oldukları görülmüştür. Bu nedenle, görüşme için öğrenci seçilirken bu sonucu destekleyen öğrencilerin yanında bu sonucu desteklemeyen üç aykırı durum da seçilerek, sonuçların tekrar edip etmediği test edilmiştir.

2.1. Veri Toplama

Temel veriler yarı yapılandırılmış görüşmelerden elde edilmiştir. Nitel yöntemlerin yanısıra nicel veri toplama yöntemlerinden de yararlanılmıştır. Bunun birinci sebebi, görüşmeler için öğrenci şeçmektir. Bunu yapmak için kapalı ve açık uçlu sorular içeren bir anket kullanılmıştır. Nicel veri toplama tekniği kullanmanın ikinci sebebi ise, üçgenleme yapmak için ikinci bir veri kaynağı elde etmektir. Anketlerde öğrencilere dört değişik temsilde örnekler (küme eşlemesi diyagramları, sıralı ikili kümeleri, grafikler ve denklemler) verilip bunların fonksiyon olup olmadığı ve nedenleri sorulmuştur. Bununla birlikte, bu makalede sadece görüşmelerden elde edilen verilerin analizine yoğunlaşılacaktır. Bu nedenle bulgularda üçgenlemenin nasıl yapıldığına değinilmeyecektir. Görüşmeler yarı-yapılandırılmış olup öğrencilere küme eşlemesi diyagramları, sıralı ikili kümeleri, grafik ve denklem şeklinde örnekler gösterilip bunların fonksiyon olup olmadığı sorulmuştur (Akkoç, 2003). Burada amaç, öğrencilerin bu sorulara cevap verirken, tanımsal özelliklerden mi yoksa daha farklı kavram görüntülerinden yola çıkarak mı düşündüklerini ortaya çıkarmaktır. Bu yazıda, görüşmelerde öğrencilere sunulan temsillerden bir kaçına yoğunlaşılacaktır. Bu örnekler Şekil 1'de verilmiştir:

Şekil 1. Görüşme Soruları

Küme eşlemesi diyagramı:



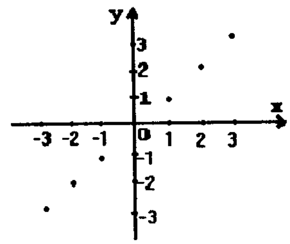
Sıralı ikili kümesi:

$A=\{1,2,3,4\}$ $f: A \rightarrow R$,

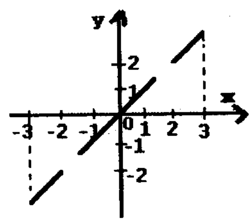
$f=\{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3),(4,3)\}$

Grafikler:

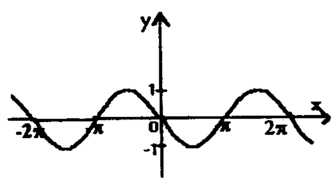
G1: f:{-3, -2, -1,1,2,3,}$\rightarrow R$



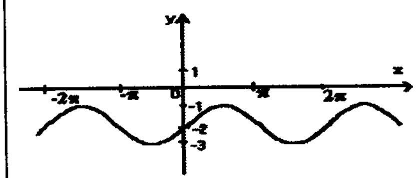
G2: f:[-3,3]$\rightarrow R$



G3:



G4:



Denklemler:

D1:

f:$R\rightarrow R$

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x^2-2x+1>0 \text{ ise} \\ 0, & x^2-2x+1=0 \text{ ise} \\ -1, & x^2-2x+1<0 \text{ ise} \end{cases}$$

D2:

f:$R\rightarrow R$ $f(x) = \sin x - 2$

D3:

$y = 5$ $(x\leq 2)$

Bu sorular bütün öğrencilere sorulmuş olup, bunları takiben öğrencilerin düşünme süreçlerini anlamaya yönelik çeşitli sorular sorulmuştur. Görüşmelerde, klinik görüşme tekniğinin bazı özellikleri kullanılmıştır (Ginsburg, 2000). Klinik görüşmelerde amaç, öğrencilerin düşünme sürecini anlamaya çalışmaktır. Bu yüzden "Bunu nasıl yaptın?", "Nasıl düşündün?" ve "Neden?" gibi sorular sorulmuştur. İkinci olarak, sorular öğrenci merkezli bir açıdan sorulmuştur. Örneğin, "Bir grafiğin fonksiyon olup olmadığına sen nasıl karar verirsin?" gibi. Bu sebeble öğrencilerden, soruları cevaplarken yüksek sesle düşünmeleri ve cevaplarının nedenlerini açıklamaları istenmiştir.

Görüşmelerden elde edilecek sonuçların geçerliliğini artırmak için, görüşme sorularının kuramsal çerçeve ışığında araştırma sorularını ne ölçüde cevaplayacağı hususunda ikinci bir araştırmacının fikri alınmıştır. Bu doğrultuda, Şekil 1'de görülen ve tanım kümesi reel sayılar kümesinin alt kümesi olan G1 ve G2 grafikleri görüşme sorularına eklenmiştir. Bunun nedeni grafiklerin bir fonksiyonu temsil edip etmediğine karar verirken öğrencilerin tanım kümesini dikkate alıp almadığını daha iyi anlamaktır. Görüşmelerden elde edilecek sonuçların güvenilirliğini sağlamak için ise, görüşme çözümlemeleri ikinci bir araştırmacı tarafından da analiz edilmiş ve her iki analiz birbiri ile tutarlı bulunmuştur.

2.2. Veri Analizi

Veri analizinin amacı, araştırma sorularını cevaplamaya yönelik olarak herbir öğrencinin herbir temsil için nasıl karar verdiğini ortaya çıkarmaktır. Bunun için görüşme çözümlemeleri tanımlayıcı özetler haline getirilmiştir. Bu özetler kullanılarak öğrencilerin herbir temsil için muhakeme biçimleri Tablo 1'deki gibi kodlanmıştır.

Tablo 1. Öğrencilerin görüşmelerdeki cevaplarının kodlanması

Sözel tanım (ST): Sözel tanımın kullanılması.	**Sözel tanımın yanlış kullanımı (STY):** Sözel tanımın yanlış olarak hatırlanması ya da tanımın yanlış uygulanması.
Örneklem-temelli cevaplar (ÖTC): Daha önce deneyim edilmiş belirli örneklere dayanarak verilen cevaplar (Grafiğin sinüs grafiğine benzetilmesi gibi).	**Dikey çizgi testi (DÇT):** Dikey çizgi testinin uygulanması (Grafiğin üzerine dikey çizgiler çizerek ve çizgilerin grafiği bir kere kestiğine bakılarak fonksiyon olduğuna karar verilmesi gibi).
Küme eşlemesi diyagramı (KED): Verilen fonksiyonun küme eşlemesi diyagramının çizilmesi.	**Grafik (GR):** Verilen fonksiyonun grafiğinin çizilmesi.
Yanlış grafik (YGR): Verilen fonksiyonun grafiğinin yanlış olarak çizilmesi.	**Tanım kümesi-değer kümesi karmaşası (TDK):** Tanım ve değer kümelerinin birbirine karıştırılması.
Sabit fonksiyon (SF): Verlen fonksiyonun sabit fonksiyon olarak algılanması.	**Diğer (DĞ):** Diğer cevaplar.
Yanıt yok (---).	

Öğrencilerin cevapları bu kodlar yardımıyla Tablo 2'deki şekilde ifade edilmiştir. Öğrencilerin başarısını karşılaştırmak için kodlamalarda renklendirmeler yapılmıştır. Geçerli bir cevap şekli olan sözel tanımın kullanımı (ST) koyu gri, sözel tanımın kullanımı ile birlikte faydalanılan diğer yöntemler bir ton açık gri (örneğin ST-DÇT) ve sözel tanımın yanlış kullanılması en açık gri tonda (STY) renklendirilmiştir. Koyu hücreler daha başarılı cevapları göstermektedir.

Tablo 2. Öğrenci cevaplarının ızgarası.

Kısaltmalar: **ST**: Sözel Tanım; **STY**: Sözel Tanımın Yanlış Kullanılması; **ÖTC**: Örneklem Temelli Cevaplar; **KED**: Küme Eşlemesi Diyagramı; **DÇT**: Dikey Çizgi Testi; **GR**: Grafik; **YGR**: Yanlış Grafik; **SF**: Sabit Fonksiyon; **DĞ**: Diğer; ---: Cevap Yok

		Ali	Ahmet	Aysel[3]	Arif[3]	Belma[3]	Belgin	Cem	Deniz	Demet
KÜME EŞLEMESİ DİYAGRAMI		ST	ST	ST	ST	ST	ST	STY	ÖTC	ÖTC
SIRALI İKİLİ KÜMESİ		STY ST	ST KED	ST	ST KED	ST	---	STY	ÖTC	DĞ
GRAFİK	G1:Doğrusal noktalar	ST	ST	ST DÇT	ST	ÖTC	STY	DĞ	ÖTC	ÖTC
GRAFİK	G2: Üç parçalı doğrusal grafik	ST	ST KED	ST	ST	ÖTC	---	ÖTC	ÖTC	ÖTC
GRAFİK	G3: $f(x) = -\sin x$	ÖTC	DÇT ST KED	ÖTC	ÖTC	ÖTC	ÖTC	ÖTC	ÖTC	ÖTC
GRAFİK	G4: $f(x) = \sin x - 2$	ST	ST DÇT KED	ST	DĞ	ÖTC	ÖTC	ÖTC	ÖTC	ÖTC
DENKLEM	D1: İşaret fonksiyonu	ÖTC GR KED	ÖTC GR DÇT	ÖTC YGR	ÖTC	ÖTC	TDK	ÖTC	DĞ	DĞ
DENKLEM	D2: $f(x) = \sin x - 2$	ST	ÖTC ST	ST	DĞ	---	ÖTC	---	ÖTC	YGR
DENKLEM	D3: $y = 5 \quad (x \leq 2)$	SF GR	GR KED	GR	ST	YGR	ÖTC	DĞ	---	DĞ

[3] Aysel, Arif ve Belma anket sonuçlarına dayanılarak aykırı durum olarak seçilen öğrencilerdir.

3. BULGULAR

Tablo 2'de görüldüğü gibi öğrenciler tanımsal özellikler ile fonksiyonları tanıma açısından dört kategoriye ayrılmaktadırlar. Bu kategoriler A, B, C ve D harfleriyle belirtilmiş olup her kategorideki öğrenci için kategorinin harfiyle başlayan takma isimler kullanılmıştır.

A kategorisindeki öğrenciler tüm temsiller için sözel tanımı kullanmışlardır. Diğer bir deyişle kavram görüntülerinde kavramın tanımsal özellikleri baskındır. B kategorisindeki öğrenciler ise sözel tanımı küme eşlemesi diyagramı ve sıralı ikililer kümesi için kullanırken, diğer temsillere ilişkin kavram görüntüleri örneklem temellidir. C kategorisindeki bir öğrenci sözel tanımı yanlış olarak küme eşlemesi diyagramı ve sıralı ikililer kümesi için kullanmıştır. D kategorisindeki öğrencilerin kavram görüntülerinde ise tanımsal özelliklerin yeri olmadığı görülür. Kısacası, küme eşlemesi diyagramı ve sıralı ikililer kümesi temsilleri daha çok kavramın tanımsal özelliklerini çağrıştırmıştır. Bu sonuç, anketlerde bu durumun tersini sergileyen aykırı durumlar (Aysel, Arif ve Belma) için de geçerli olmuştur. Bulgular aşağıda araştırma soruları bazında daha ayrıntılı olarak verilmiştir.

3.1. Araştırma Sorusu 1

Öğrenciler her bir temsil için ne gibi kavram görüntülerine sahiptirler? (Kavram görüntüleri fonksiyon kavramının tanımsal özelliklerini içermekte midir?)

Veri analizi göstermiştir ki öğrencilerin küme eşlemesi diyagramı ve sıralı ikili kümeleri temsillerine ait kavram görüntülerinde fonksiyon kavramının tanımsal özellikleri baskındır. Tablodan da görüldüğü gibi beş öğrenci başarılı bir şekilde sözel tanımı kullanmıştır. Bir öğrenci sözel tanımı yanlış kullanmış ve tanım kümesindeki bir elemanın değer kümesinde iki elemana eşlenebileceğini fakat üç elemana eşlenemeyeceğini belirtmiştir. Benzer şekilde sıralı ikili kümesi temsili de tanımı çağrıştırmıştır. Beş öğrenci başarılı bir şekilde tanımı kullanırken, bunlardan ikisi (Ahmet ve Arif) verilen sıralı ikisi kümesi için küme eşlemesi diyagramını da çizmiştir.

Grafikler ve cebirsel ifadeler ise tanımdan ziyade özel örnekleri çağrıştırmıştır. Örneğin, Ali $f(x)=\sin x$ fonksiyonunun grafiğini sinüs fonksiyonun grafiği olarak kabul etmiştir. Fakat, neden fonksiyon olduğu sorulduğunda tanımı kullanamamıştır. Belma, $f(x)=\sin x - 2$ fonksiyonunun grafiğini, grafiğin sadece y-keseninin olmasından (x-keseninin olmamasından) dolayı fonksiyon olarak kabul etmemiştir. Doğrusal noktalardan oluşan grafiği (G1) dört öğrenci tanımı kullanarak fonksiyon olarak kabul etmiştir. Üç öğrenci ise (Belma, Deniz ve Demet) grafiği oluşturan noktalardan geçen doğruyu çizerek fonksiyon olarak kabul etmişlerdir. Başka bir deyişle, kavram görüntülerinde mevcut olan örneklem demetine benzetmeye çalışmışlardır. Aynı durum, üç parça doğrudan oluşan grafik için (G2) Belma, Cem, Deniz ve Demet'in verdiği cevaplarda da mevcuttur. Bu öğrenciler, kesintiye uğradığı için grafiği fonksiyon olarak kabul etmemişlerdir. Nedeni sorulduğunda bu öğrencilerden hiç birisi tanımsal özelliklerden yola çıkmamıştır. Diğer bir deyişle, kavram görüntülerinde mevcut olan örneklem demetine (doğrusal fonksiyon grafiklerine) göre düşünmüşlerdir.

Benzer şekilde, cebirsel temsiller de örneklemleri çağrıştırmıştır. Örneğin, Arif ve Belma işaret fonksiyonunu özel bir fonksiyon olarak tanımışlardır. Neden fonksiyon olarak kabul ettikleri sorulduğunda, tanımsal özellikleri kullanamamışlardır. A kategorisindeki üç öğrenci (Ali, Ahmet ve Aysel) de işaret fonksiyonunu özel bir fonksiyon olarak kabul etmiştir ve fonksiyonun grafiğini çizmişlerdir. Ali ayrıca fonksiyonu küme eşlemesi diyagramı olarak da temsil etmiş ve tanımı bu temsil üzerinde kullanmıştır. Ahmet ise dikey çizgi testini çizdiği grafiğe uygulamıştır. $f(x)=\sin x - 2$ cebirsel ifadesini sadece üç öğrenci tanımı kullanarak fonksiyon olarak kabul etmiştir. İki öğrenci

(Belgin ve Deniz) bu ifadeyi sadece sinüs fonksiyonu olarak kabul etmiş fakat nedenini açıklayamamışlardır. Benzer şekilde, $y=5$ ($x\leq 2$) ifadesi de tanımdan ziyade örneklemleri çağrıştırmıştır. Örneğin, Ali bu ifadeyi önce sabit fonksiyon olarak algılamış, daha sonra da grafiğini çizmiştir. Belgin ise, "$f(x)=$" notasyonu olmadığı için ifadeyi fonksiyon olarak kabul etmemiştir.

3.2. Araştırma sorusu 2

Öğrencilerin farklı temsillere ilişkin sahip oldukları kavram görüntülerinin kaynakları nelerdir?

İkinci araştırma sorusuna cevap ararken kuramsal çerçevede bahsedilen prototip-örneklem farkı dikkate alınmıştır. Tablo 2'de de görüldüğü gibi öğrenciler grafik ve cebirsel ifadeler için örneklem-temelli cevaplar vermişlerdir. Küme eşlemesi diyagramı ve sıralı ikililer kümesi için daha çok tanımsal özelliklere yoğunlaşmışlardır. Örneklem-temelli cevaplar incelendiğinde, öğrencilerin verilen grafik ve cebirsel ifadeleri sinüs fonksiyonu, doğrusal fonksiyon ve işaret fonksiyon gibi örneklem demetlerine benzettikleri fakat cevaplarının nedenini açıklayamadıkları görülmektedir.

Diğer yandan, küme eşlemesi diyagramı prototip bir rol oynamaktadır. Bu sonuca götüren iki bulgu vardır. Birincisi, öğrenciler küme eşlemesi diyagramı için tanımsal özellikleri diğer temsillere göre daha başarılı kullanmışlardır. Bu sonuçta, fonksiyon kavramı öğretilirken tanımın açıklamasında küme eşlemesi diyagramının kullanılmasının etkisi olabilir. Küme eşlemesi diyagramının prototip rolü oynadığına dair ikinci bulgu ise, bazı öğrencilerin grafik ve cebirsel ifadeleri küme eşlemesi temsiline dönüştürüp bu temsil üzerinde tanımsal özellikleri incelemeleridir (Tablo 2'deki ST-KED VE GR-KED türü cevaplarda görüldüğü gibi).

Özet olarak, öğrencilerin farklı temsiller için sahip oldukları kavram görüntülerinin kaynağı temsillerin prototip veya örneklem demeti olarak verilmesi ile ilişkilidir.

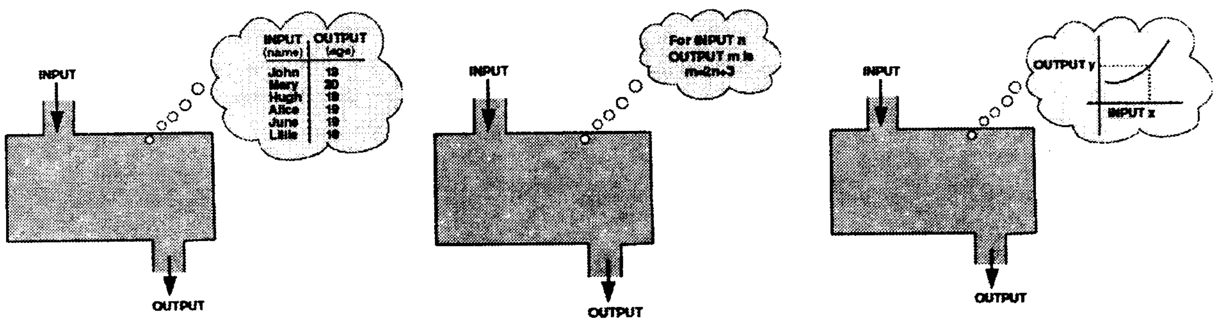
4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Programda küme eşlemesi diyagramı tanımı açıklamak için prototip bir şekilde (en açıklayıcı ve en iyi örnek olarak) kullanılmaktadır. Grafik ve cebirsel ifadeler ise örneklem demetleri (doğrusal, üstel, logaritmik, trigonometrik vb. fonksiyonlar) olarak verilmektedir. Çalışmanın bulguları göstermiştir ki programda farklı veriliş şekillerine paralel olarak farklı temsiller farklı kavram görüntüleri çağrıştırmaktadırlar. Küme eşlemesi diyagramı ve sıralı ikililer kümesi tanımsal özellikleri, grafik ve cebirsel ifadeler ise örneklem demetlerini çağrıştırmıştır.

Öğrenciler için en uygun prototipleri bulmak öğrencilerin kavramın en soyut ve en genel haline yoğunlaşmaları açısından önemlidir. Küme eşlemesi diyagramı her ne kadar öğrencilere tanımsal özellikler açısından yardımcı olsa da kısıtlı bir temsildir. Öncelikle bu temsil fonksiyonun değişim yönünü vurgulamamaktadır. Ayrıca kümelerin içine sadece sonlu sayıda eleman yazılabilmektedir. Bu kısıtlamalar öğrencilerin kavram görüntülerini fakirleştirebilir.

Öğrencilerin fonksiyonla ilgili kavram görüntülerini zenginleştirmek için çeşitli yollar önerilebilir. Birincisi, Sierpinska'nın (1992) da tavsiye ettiği gibi temsilin kısıtlamalarını vurgulamaktır. Diğer bir deyişle, öğrenciler prototipin kısıtlamalarının farkına vararak prototipi kullanmalıdırlar. İkinci bir seçenek ise, daha uygun bir prototip bulmaktır. DeMarois, McGowen ve Tall (2000a, 2000b) tarafından da önerildiği gibi, fonksiyon kutusu (fonksiyon makinesi) fonksiyon kavramı için uygun bir başlangıç olabilir. Bu araştırmacılar ayrıca, farklı temsilleri birleştirici ve organize edici bir rol oynaması için Şekil 2'de görüldüğü gibi temsillerin fonksiyon kutusunun içine yerleştirilmesini tavsiye ederler.

Şekil 2. Fonksiyon kutusu ve temsiller (DeMarois, McGowen & Tall, 2000a, s. 4).



Böylece, hangi temsil ile verilirse verilsin fonksiyonun gerçekleştirdiği işlev vurgulanmış olur: Her bir girdiye karşılık tek bir çıktı elde edilir. Üçüncü olarak, öğrencilerin cebirsel ifadeler ve grafikler için örneklem demetleri (doğrusal, üstel, logaritmik, trigonometrik vb. fonksiyonlar) geliştirmekten öteye geçip daha zengin kavram görüntüleri oluşturmaları için teknolojinin sunduğu imkanlardan faydalanılabilir. Grafik çizen bilgisayar yazılımları ve grafik hesap makineleri fonksiyonların çoklu temsillerine hızlı ve etkin şekilde ulaşma imkanı tanımaktadır. Çok sayıda cebirsel ifade ve grafik örneklerini hızlı şekilde üretmesi, öğrencilere denemeler yapıp sonuçlara varma imkanı tanıması ve temsiller arası bağları vurgulaması açısından bu tür teknolojik imkanlar öğrencilerin kavram görüntülerini zenginleştirecektir.

KAYNAKLAR

Akkoç, H. & Tall, D.O. (2002). The simplicity, complexity and complication of the function concept. In Anne D. Cockburn & Elena Nardi (Eds), Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2, 25–32. Norwich: UK.

Akkoç, H. (2003). Students' Understanding of the Core Concept of Function. Unpublished EdD Thesis, University of Warwick, UK.

Akkoç, H. (2005). Fonksiyon kavramının anlaşılması: Çoğul temsiller ve tanımsal özellikler. Eğitim Araştırmaları Dergisi, 20,.14 - 24.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the Process Conception of Function, Educational Studies in Mathematics, 23 (3), 247-285.

Brenner, M. E., Mayer, R. E., Moseley, B., Brar, T., Durán, R., Reed, B. S. & Webb, D. (1997). Learning by Understanding: The Role of Multiple Representations in Learning Algebra, American Educational Research Journal, 34 (4), 663-689.

Bruckheimer, M., Eylon, B., & Markovits, Z. (1986). Functions Today and Yesterday, For the Learning of Mathematics, 6 (2), 18-24.

Confrey, J. (1994). Six Approaches to Transformation of Function Using Multi-Representational Software. Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, University of Lisbon, Portugal, 2, 217-224.

DeMarois, P. McGowen, M.A., ve Tall, D.O. (2000b). 'Using the Function Machine as a Cognitive Root', in Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education NA.

DeMarois, P., McGowen, M.A., ve Tall, D.O. (2000a). 'The Function Machine as a Cognitive Root for the Function Concept', in Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education , NA.

Dubinsky, E. (1991). Reflexive Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. O. Tall (Ed), Advanced Mathematical Thinking, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 95-123.

Ginsburg, P. H. (1997). Entering the Child's Mind: The Clinical Interview in Psychological Research and Practice, Cambridge University Press.

Kaput, J.J. (1992). Technology and Mathematics Education. In D. A. Grouws (Ed) NCTM Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, 515-556.

Keller, B.A. ve Hirsch, C. R. (1998). Student Preferences for Representations of Functions. International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 29 (1), 1-17.

Kieran, C. (1994). A Functional Approach to the Introduction of Algebra – Some Pros and Cons. In Proceedings of the 18th International Conference on the Psychology of Mathematics Education, 1. (1), 157-175.

Leinhardt, G., Stein, M.K., ve Zaslavsky, O. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning and Teaching. Review of Educational Research, 60 (1), 1-64.

Mason, J. (1996). Qualitative Researching. London: Sage.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston: NCTM.

Ögün-Koca, S. A. (2004). Bilgisayar Ortamindaki Çoğul Bağlantili Gösterimlerin Ögrencilerin Doğrusal İlişkileri Öğrenmeleri Üzerindeki Etkileri, Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, sayı 26.

Rosch, E. (1975). 'Cognitive Representations of Semantic Categories', Journal of Experimental Psychology: General, Vol. 104, No. 3, pp. 192-233.

Rosch, E. (1978). 'Principles of Categorization' in E. Rosch & B. B. Lloyd (Eds.) Cognition and Categorization, Hillsdale: Lawrrence Erlbaum Associates.

Ross, H.B ve Makin, V.S. (1999). 'Prototype versus Exemplar Models in Cognition' in R.J. Sternberg (Ed) The Nature of Cognition, Massachusetts Institute of Technology, pp. 205-241.

Sfard, A. (1992). Operational Origins of Mathematical Objects and the Quandary of Reification – The Case of Function. In G. Harel, & E. Dubinsky, (Eds) The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy, MAA, pp. 59-84.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In Harel, G. And Dubinsky, E. (eds.), MAA Notes and Reports Series (pp. 25 – 58).

T.C. Milli Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı (2005). Orta Öğretim Matematik (9, 10, 11 ve 12) Sınıflar Dersi Öğretim Programı, Ankara.

Tall, D.O. ve Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limit and Continuity. Educational Studies in Mathematics, Vol. 12, pp. 151-169.

Thompson, P. W. (1994). Students, Functions, and the Undergraduate Curriculum. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), Research in Collegiate Mathematics Education, I, CBMS Issues in Mathematics Education, 4, pp. 21–44.

Vinner, S. (1983). Concept Definition Concept Image and the Notion of Function, International Journal for Mathematics Education in Science and Technology, 14 (3), 293–305.