

İLKÖĞRETİM 6-8. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN CEBİR ÖĞRENME ALANINDAKİ KAVRAM YANILGILARI

MISCONCEPTIONS OF ELEMENTARY SCHOOL STUDENTS IN GRADES 6-8 ON LEARNING ALGEBRA

Recai AKKAYA**, Soner DURMUŞ**

ÖZET: Matematiksel düşünmenin gelişim sürecinde cebir, önemli bir yer tutmaktadır. Bir çok araştırma ilköğretim 6-8. sınıflardaki öğrencilerin cebirle ilgili farklı kavram yanlışlarına sahip olduklarını ortaya koymuştur. Bu çalışma ile bu kavram yanlışlarının neler oldukları belirleme amaçlanmıştır. Araştırmanın bulguları ilgili literatürdeki bulgular da göz önüne alınarak eleştirel bir yaklaşımla ele alınmıştır. Kavram yanlışlarını gidermeye yönelik öneriler sunulmuştur.

Anahtar Sözcükler: Cebir, harfli ifadeler, değişken, kavram yanılığı

ABSTRACT: Algebra has important place on the development of mathematical thinking. There are research findings indicating that students in grades 6-8 have many misconceptions in algebra. The goal of this study is to reveal these misconceptions. Findings in the study are discussed in the light of related research findings. Some recommendations are presented to overcome these misconceptions.

Keywords: Algebra, lettered expressions, variable, misconception

1. GİRİŞ

Matematik ve öğretiminde cebir önemli bir yere sahiptir. Cebir; genel olarak, sayı ve semboller kullanarak eldeki incelenen ilişki veya ilişkileri genelleştirilmiş denklemlere dönüştüren bir matematik dalıdır. Sfard (1995) cebiri hesaplama bilimi olarak tanımlamaktadır. Kieran' a (1992) göre ise cebir; sadece harflerle nicelikleri temsil etmemekte aynı zamanda bu sembollerle hesaplamaları yapmayı da mümkün kılmaktadır. En basit anlamıyla cebir, aritmetik işlemlerde sayılar yerine semboller kullanarak değişik ve basit çözüm yolları ortaya koymaktır.

Cebir üzerine birçok çalışma yapılmış ve cebir çeşitli kategorilere ayrılmıştır. Usiskin'e (1988) göre cebir 4 ana kategoriden oluşmaktadır. Bunlar i) genelleştirilmiş aritmetik, ii) problem çözme çalışmaları, iii) nicelikler arası ilişkiler ve iv) yapısal çalışmalarıdır. NCTM (1997) cebiri, i) işlev ve ilişki, ii) modelleme, iii) yapı ve iv) dil ve gösterim gibi dört temaya ayırmıştır. Kaput (1998) ise cebiri, i) genelleme ii) belli kuralları olan bir sistem, iii) yapısal çalışma alanı, iv) işlevsel olarak cebir ve v) modelleme dili olarak beş ana kategoriye ayırmıştır.

Ülkemizdeki matematik programı incelendiğinde cebir konuları aritmetik ve geometri konularından hemen sonra yer almaktadır. Cebir konularına girişle birlikte öğrencilerin matematik öğrenmede karşılaştıkları güçlükler de artmaktadır (Ersoy ve Erbaş, 2003). İlköğretimdeki cebir konuları ilerdeki matematik derslerinin temelini oluşturmasına rağmen, yapılan araştırmalar öğrencilerin cebiri anlamada zorlandıklarını göstermektedir (Hersovics ve Linchevski, 1994; Stacey ve Macgregor, 1997; Wagner, 1981; Dede, 2004). Öğrencilerin cebiri anlamadaki zorlukları matematikteki başarılarını düşürmekte ve

* Arş. Gör., Abant İzzet Baysal Üniversitesi, eposta: recaiakkaya@hotmail.com

** Doç. Dr., Abant İzzet Baysal Üniversitesi, eposta: sdurmus@ibu.edu.tr

matematiğe karşı olumsuz tutum geliştirmelerine yol açmaktadır. Ayrıca öğrencilerin aritmetikten getirdikleri işlem ve kavram yetersizlikleri cebir konularının anlaşılmasına neden olmaktadır. Bu yüzden cebire giriş konularındaki yer alan kavramların iyi öğrenilmesi, öğrencilerin cebir konuları ile ilgili kavram yanlışlarının bilinmesi ve bu kavram yanlışlarını gidermesine yönelik öğretim yapılması gerekmektedir (Ersoy ve Erbaş, 2003).

Cebir konularının temelinde iki kavram yer almaktadır. Bu kavramlar “değişken” ve “eşitlik” kavramlarıdır. Cebir, değişkenleri anlama ve onlarla işlem yapma ile ilgilenir. Aritmetiğin temelinde rakamlar, sayılar yer alırken; cebirin temelinde değişkenler yer almaktadır. Wheatley’e (1995) göre cebirde kullandığımız değişkenler bir cümlede kullandığımız zamirler gibidir. Nasıl bir cümlede kişilerin yerine zamirleri kullanabiliyorsak, cebirde de sayıların yerine değişkenleri kullanabiliriz.

Cebirde harflerin değişik anlamları ve işlevleri vardır. Usiskin’e göre (1989) harfler genelleme aracı, bilinmeyen, parametre ve nesnelerin keyfi gösterimi olarak kullanılmaktadır. Baykul’a göre (2000) ise cebirde harfler genel olarak i) bilinmeyen bir değer, ii) değerler kümesi ve iii) bir genelleme aracı olarak kullanılmaktadır.

Cebirsel işlemlerde öğrencilerin değişkenlerin işlevlerini doğru anlamaları önemlidir. Arcavi ve Schoenfeld (1988) e göre değişkenler aritmetikten cebire geçişte temel oluşturmaktadır. Değişken konusunu anlayamayan bir öğrenci cebirde zorlanmakta ve cebiri öğrenmek istememektedir. Yapılan birçok araştırma değişkenlerin cebirde önemli bir yerinin olmasına rağmen öğrencilerin değişkenleri anlamada zorlandıklarını ortaya koymuştur (Davidenko, 1997; English ve Warren, 1998; Küchemann,1978; Philipp, 1992; Macgregor ve Satcey,1997; Wagner,1983).

Eşitlik kavramı öğrencilerin cebirde yaşadıkları diğer bir problemdir. Çünkü eşittir işareti aritmetik ve cebirde farklı anlamlarda kullanılmaktadır. Yapılan birçok çalışmada çocukların eşit işaretini ilişkisel bir sembol değil de eylem belirten bir sembol olarak gördüklerini ortaya koymuştur (Kiearan, 1992; Falkner, Levi ve Carpenter, 1999; Yaman, Toluk ve Olkun, 2003). Bu çalışmalarda değişik yaş grubundan öğrencilerle yapılmış ve her yaş düzeyinde çocukların eşittir işareti ile benzer kavram yanlışlarına sahip olduğu belirlenmiştir.

1.1. Kavram yanlışları

Kavram yanlışları, öğrenme sürecinde öğrenmeyi etkileyici önemli etkenlerdir. Öğrencilerin incelenen kavramları genel kabulün aksine farklı biçimde anlamlandırmaları kavram yanlışları konusunu gündeme getirmektedir. Kavram yanlışları literatürde farklı biçimlerde adlandırılmışlardır. Bunlardan bazıları, hatalı fikirler (Fisher, 1983), olgunlaşmamış kavramlar (Hashweh, 1988), gerçeğin öznel modelleri (Champagne, Gunstone and Klopfer, 1985), anlık akıl yürütme (Viennot, 1979), yanlış uygulama (Elby, 2001) ve kavram yanlışlığıdır (Griffiths ve Preston, 1992). Kavram yanlışlığı ifadesi, öğrencilerin kendi öznel anlamaları olarak ta düşünülebilir. Bu çalışmada bu anlam kavram yanlışlığı için kullanılmıştır. Çünkü oluşturmacı öğrenme teorileri bilginin öznelliğini vurgulamaktadır (Brooks, Brooks, 1993). Temel kabul, her bireyin ele alınan kavramlara kendi öznel anlamlandırmalarını kattıklarıdır. Temel sorun, öğrencilerin öznel anlamlandırmalarının kabul edilmiş alan (burada matematiksel) bilgi ile uyumlu bir hale/forma nasıl getirileceğidir.

1.2.Cebir ve kavram yanlışları

Yapılan birçok araştırma, öğrencilerin cebir kavramlarını (eşitlik, denklem, cebirsel ifadeler, değişkenler gibi) anlama ile ilgili güçlükleri ve kavram yanlışları olduğunu göstermektedir (Wagner, 1983; English ve Halford, 1995; Kieran, 1992; Perso, 1992; MacGregor ve Stacey, 1993). Ülkemizde de cebir ve cebir kavramları ile değişik okul ve sınıf düzeylerinde araştırmalar yapılmıştır (Dede, 2004; Dede, Yalın ve Argün, 2002; Ersoy ve Erbaş, 2003; Baki ve Kartal, 1998).

Değişken kavramı ve eşittir kavramları cebirin temelini oluşturmalarına rağmen ders işlenirken kavramsal yön ihmal edilip sadece işlemsel yön vurgulanmaktadır. Öğrencilerden, ele alınan konunun bağlamını dikkate almadan değişkenlerle bir takım işlemleri yapmalarını beklemek bir takım sorunlara neden olmaktadır (Macgregor ve Satcey,1997; Wheatley, 1995).

Aritmetikte cebir arasındaki yapısal farklılıklar öğrencilerin cebirde zorlanmalarına da neden olmaktadır. Dede ve diğ. (2002) cebir öğretiminde öğrencilerin zorlanmalarının nedenlerini; değişkenlerin farklı kullanımlarını bilememe, değişkenlerin genelleme yapmadaki rolünü bilememe, değişkenleri yorumlayamama, değişkenlerle işlem yapamama olarak ortaya koymuşlardır. Öğrencilerin cebirde yaşadıkları zorlukların bir diğer nedeni ise aritmetikteki kuralları iyi anlamamalarından kaynaklanmaktadır. Onların aritmetik işlemleri ile ilgili uygulamalarındaki kavram yanlışları cebirde başarılı olmalarını engellemektedir.

Kieran'e göre (1992) öğrencilerin cebirde zorlanmalarının en önemli sebebi, kullanılan harfleri anlayamamalarıdır. Cebir öğretiminde öncelikle harflerin sayılar yerine konabileceği, farklı bağlamlarda farklı anlamlara sahip oldukları kazandırıldıktan sonra bunlarla bir takım matematiksel işlemler yapma becerileri üzerinde durulur. Harflerin kullanımı cebirde çok önemli bir yere sahiptir. Bu yüzden 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin harflerin farklı durumlardaki anlamlarına yönelik bir anlayışa sahip olmaları gerekmektedir. Küchemann'ın (1978) yaptığı araştırmalarda öğrencilerin harflerin farklı kullanımlarını anlayamadıkları için cebirde zorlandıklarını ortaya koymuştur. Küchemann, Concept in Secondary Mathematics and Science (CSMS) projesinin bir ayağı olarak yaptığı çalışmada 3000 İngiliz lise öğrencisine 51 maddelik bir test uygulamıştır. Araştırmanın sonucunda çocukların harfleri algılamaları ile ilgili 6 farklı düşüncelerinin olduğunu belirlemiştir. Bunlar; 1) Harflerin sayı değerleri vardır, 2) matematikte harflerin bir anlamı yoktur, 3) harfler somut nesnelere kısaltılmasıdır, 4) harfler bilinmeyen sayılardır ve bir tek değeri vardır, 5) harfler genelleştirilmiş sayılardır ve 6) harfler değişkenlerdir.

Thelma Perso (1992), öğrencilerin cebir ile ilgili kavram yanlışlarını incelemiş ve kavram yanlışlarını üç kategoride gruplandırmıştır: i) harflerin cebirdeki yerini anlama, ii) değişkenleri kullanma ve iii) denklem çözerken cebirsel kuralları kullanma. Perso'ya (1992) göre bu gruplandırma şunları içermektedir:

i) Harflerin cebirdeki yerini anlama:

- 1) Öğrenciler harflerin matematikte bir anlamının olmadığını düşünmektedirler. Bu yüzden de cebiri sevmemektedirler.
- 2) Öğrencilere göre harfler alfabede olduğu gibi sıralanır.
- 3) Harflerin alfabetik sıralamada olduğu gibi sayısal konum belirttiklerini düşünmektedirler
- 4) Öğrenciler katsayısı bir olan harflerin değerinin "1" e eşit olduğunu düşünmektedirler.
- 5) Her harfin sadece bir değerinin olduğuna inanmaktadırlar. Bir soruda $b = 4$ ise diğer bütün sorularda da $b = 4$ kabul edilmektedir. Wheatley öğrencilerle yaptığı görüşmelerde öğrenciler "biz x' in ne olduğunu bulduğumuzda onun değerini yazalım ki diğer insanlar aramak zorunda kalmayın" diye cevap vermişlerdir.
- 6) Öğrenciler, harflerin sadece rakam olabileceğini düşünmektedirler. Yani ab gibi bir ifadeyi iki basamaklı bir sayı gibi düşünmektedirler. Onlara göre a ve b birer rakam olmalıdır. Bu nedenle $ab=8$ eşitliğinin mümkün olmadığını düşünmektedirler.
- 7) Öğrencilere göre harfler nesnelere gösterir. $2m+3n$ gibi bir cebirsel ifadesi 2 muz ve 3 narı temsil etmektedir.
- 8) Harfler sayılar gibi davranmaz. Örneğin, $x + y + z = x + t + z$ eşitliğinde "y" nin hiçbir zaman "t" ye eşit olmaması gibi.

ii) Değişkenleri Kullanma

- 9) Öğrenciler "+" veya "-" ile "=" işaretlerinin daima sonuç ürettiklerine inanmaktadırlar. Örneğin, $2+a=2a$.
- 10) Öğrenciler işlemlerin sırasını dikkate almamaktadırlar. Yapabileceklerini düşündükleri işlemde başlamayı tercih etmektedirler.
- 11) Cebirsel olarak "=" işareti bir eylem belirtmesine rağmen öğrenciler $2s+5$ ya da $5-c$ işlemlerinde olduğu gibi cebirsel ifadeleri bir matematiksel işlem yapma şeklinde yorumlamamaktadırlar.
- 12) Matematikte her zaman soldan sağa doğru işlem yapıldığını düşünmektedirler.
- 13) Öğrenciler cebirde parantezlerin önemini dikkate almamaktadırlar. Örneğin, $2(a+b)$ ifadesini $2a+b$ olarak yorumlayabilmektedir.

iii) Denklem Çözerken Cebirsel Kuralları Kullanma

- 14) Öğrenciler bir denklemin diğer tarafında ters işlem yapma yerine, aynı işlemi yapmayı düşünmektedirler.
- 15) Sayıları, değişkenleri ve işaretleri birbirinden ayrı düşünmektedirler.
- 16) Çıkarma işleminin değişme özelliğine sahip olduğunu düşünmektedirler.
- 17) Ters işlemlerin gereksizliğine inanmaktadırlar.
- 18) Harflerin soldan sağa eşleştiklerine inanmaktadırlar.
- 19) Harflerin kelimeler için bir etiket olduklarını düşünmektedirler.

Bu kavram yanlışlarına ek olarak Cates (2000), çocukların değişkenleri Romen rakamları gibi düşündüğünü belirlemiştir. Örneğin, "10h" ifadesini h den 10 önce gelen sayı şeklinde düşünmektedirler. Romen rakamına göre "IV" ün anlamı, beşten bir önce gelen sayı olması böyle düşünmelerine neden olmuştur.

Stacey ve MacGregor (1997) cebirdeki kavram yanlışlarının sebeplerini şöyle açıklamaktadırlar:

- i) Öğrencilerin cebirsel sembolleri yorumlamaları diğer matematiksel deneyimleri üzerine inşa edilir. Eğer öğrenciler yeterince aritmetiksel deneyimlere sahip olmazlar ise cebirde zorlanacaklardır.
- ii) Cebirdeki harflerin kullanımı ile harflerin diğer kullanımları aynı değildir.
- iii) Cebirin kendine özgü bir yapısı ve dili vardır. Kendine özgü kuralları vardır. Cebirin dili günlük hayattaki dilden farklıdır. Çocuklar bunu anlayamadıkları için cebirde zorlanmaktadır.

Öğrencilerin cebirin temeli olan harfleri nasıl kullandıkları ve nasıl anlamlandırdıkları olası kavram yanlışlarını gidermede önem kazanmaktadır. Bu araştırmanın amacı i) ilköğretim 6-8. sınıf öğrencilerinin harfleri nasıl algıladıklarını ortaya koymak ve ii) böylece bu öğrencilerin ne türden kavram yanlışlarına sahip olduklarını belirlemektir.

2. YÖNTEM

2.1. Örneklem

Araştırmanın örneklemini, Bolu il merkezinde bulunan 15 ilköğretim okulundan rasgele seçilen üç ilköğretim okulunun 6, 7 ve 8. sınıflarından rasgele belirlenen 2'şer sınıftan toplam 280 öğrenci oluşturmaktadır. Öğrencilerin 85 i 6.sınıf, 75 i 7.sınıf, 120 si 8.sınıf öğrencisidir.

2.2. Araştırma Problemi

Bu çalışmanın genel amacı, ilköğretim 6-8. sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanındaki kavram yanlışlarının belirlenmesidir. Bu amaca bağlı olarak aşağıdaki araştırma soruları incelenmiştir:

- i) İlköğretim 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin cebirdeki harflerin anlamına yönelik sahip oldukları kavram yanlışları nelerdir?
- ii) İlköğretim 7 ve 8. sınıf öğrencilerini cebirdeki harfleri kullanmaya yönelik kavram yanlışları nelerdir? ve
- iii) İlköğretim 8.sınıf öğrencilerinin cebirsel denklemleri yorumlama ve çözümedeki kavram yanlışları nelerdir?

2.3. Veri Toplama Araçları

Öğrencilerin cebirdeki kavram yanlışlarını belirlemek amacıyla 30 soruluk “Cebir Testi” hazırlanmıştır. Cebir testi ve soruların cevapları Ek A’da verilmiştir. Testteki bütün sorular çoktan seçmeli olarak düzenlenmiştir. Test üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümdeki sorular, araştırmanın birinci sorusuna, ikinci bölümdeki sorular araştırmanın ikinci sorusuna ve üçüncü bölümdeki sorular ise araştırmanın üçüncü sorusuna yönelik kavram yanlışlarını ortaya çıkarıcı sorulardan oluşmuştur. Testteki sorular, Thelma Perso ‘nun (1992) hazırlamış olduğu “ Diagnostic Test- Conceptions in Algebra” testindeki sorular Türkçeye uyarlandıktan sonra alan ve dil uzmanlarıyla yapılan görüşmelerden elde edilen öneriler doğrultusunda yeniden düzenlenmiştir. Testin güvenilirliği bu örneklem üzerinde yapılan analizlerle belirlenmiştir. Testin alfa güvenirlik katsayısı 0,74 olarak hesaplanmıştır. Bu sorularla Thelma Perso’ nun ortaya koyduğu 19 kavram yanlışını belirlemek amaçlanmıştır. Her soru belli kavram yanlışlarını ortaya çıkarmak için yöneltilmiştir. Bazı sorular birden fazla kavram yanlışını ölçmektedir.

Cebir testindeki ilk on soru 6. sınıf öğrencilerine, ilk yirmi soru 7.sınıflara öğrencilerine, testin tüm soruları ise 8.sınıf öğrencilerine uygulanmıştır. Test matematik ders saatinde okul müdürü ve matematik öğretmenlerinden izin alınarak uygulanmıştır. Soruların içerikleri dikkate alınarak 6.sınıf öğrencilerine 20 dakika, 7.sınıf öğrencilerine 30 dakika, 8.sınıf öğrencilerine ise 45 dakika süre verilmiştir. Veriler SPSS 10.0 yazılımı yardımıyla analiz edilerek sonuçlar tablolara dönüştürülmüştür.

3. BULGULAR

Perso’ nun (1992) harflerin değişik problem durumlarındaki anlamlarına yönelik öğrencilerin sahip oldukları kavram yanlışlarını belirlemeye yönelik geliştirdiği kavram yanlış listesindeki 1–8. kavram yanlışları, bu kavram yanlışlarının cebir testindeki hangi sorularda geçtiği ve bunları seçen öğrencilerin yüzdeleri Tablo 1 de verilmiştir. Cebir Testindeki ilk on soru bütün sınıflardaki (6–7–8) öğrencilere yönelik olduğu için üç sınıftaki öğrencilerin kavram yanlışlarını seçme yüzdelere Tablo 1 de yer verilmiştir.

Tablo 1 incelendiğinde her üç sınıf seviyesindeki öğrencilerin yaklaşık %46’sı “harflerin alfabetik sıralamada olduğu gibi sayısal konum belirttiği” biçiminde düşünmektedirler. Örneğin, öğrenciler “c” harfi alfabede üçüncü harf olduğu için 3’e eşit olduğunu; “f” harfinin ise, yedinci harf olduğu için 7’ye eşit olduğunu düşünmektedirler.

Ayrıca öğrencilerin yaklaşık %27’si harflerin sadece rakamlardan oluşması gerektiğini düşünmektedirler. Yani ab gibi bir ifadeyi iki basamaklı bir sayı gibi görmektedirler. Onlara göre a ve b birer rakam olmalıdır. Örneğin, $xy = 8$ eşitliğinin doğru olmadığını düşünmektedirler. Bu kavram yanlışına sahip öğrencilerin oranı 6.sınıftan (%31,76) 8.sınıfa doğru (%23,33) azalma eğilimindedir. Harflerin sayılar gibi davrandığını düşünen öğrencilerin sayısı sınıf ilerledikçe azalmaktadır (%25,29’dan %6,66’ ya inmiştir). Bunun aksine harflerin alfabedeki gibi sıralandığını düşünen öğrencilerin sayısı yaklaşık %12’den (6.sınıf) %35’ çıkmıştır.

Tablo 1: Perso'un belirlediği 1.-8. kavram yanlışları, Cebir Testindeki ilgi sorular ve 6.,7. ve 8. sınıflardaki yüzde dağılımları

Kavram yanlışısı	Hangi soruda geçtiği	6. sınıf	7. sınıf	8. sınıf
		%	%	%
1. Öğrencilere göre harflerin cebirde hiçbir anlamı yoktur.	1-c, 2-a, 3-c, 7-c	19,41	17	16,04
2. Öğrencilere göre harfler alfabedeki gibi sıralanır.	6-b	11,76	10,66	35
3. Harfler alfabetik sıralamada olduğu gibi sayısal konum belirtir.	6-a,10-c	45,3	48	45
4. Tek kalan harfler 1'e eşittir.	4-d, 5 c-d, 8-c, 9-c	24,41	23,33	9,5
5. Her harfin sadece bir değeri vardır.	1-a, 3-a, 6-d	28,82	10	11,66
6. Harfler sadece rakam olabilir.	4-b	31,76	24,66	23,33
7. Harfler nesnelere gösterir.	1-d, 2-b, 5-d, 7-a, 9-d	11,52	14,4	8,55
8. Harfler sayılar gibi davranmaz.	2-d, 8-b	25,29	18	6,66

7 ve 8. sınıf öğrencileri harflerin farklı anlamlarını inceledikten sonra harflerin kullanımına yönelik yeni durumlarla karşı karşıya kalırlar. Bu deneyimler sırasında, Cebir Testindeki 11.-18. sorularla belirlenmeye çalışılan kavram yanlışlarına sahip olabilirler. Perso'nun harflerle matematiksel işlemler yaparken sahip oldukları kavram yanlışlarını belirlemeye yönelik geliştirdiği kavram yanlışlığı listesindeki 9.-13. kavram yanlışları, bu kavram yanlışlarının Cebir Testindeki hangi sorularda geçtiği ve bunları seçen öğrencilerin yüzdesi Tablo 2' de verilmiştir. Cebir testindeki ilk yirmi soru 7 ve 8. sınıf öğrencilerine yönelik olduğundan iki sınıftaki öğrencilerin kavram yanlışlarını seçme yüzdeleri Tablo 1 de yer verilmiştir.

Tablo 2 ye göre iki kavram yanlışısı öne çıkmaktadır. 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin yaklaşık %54 ü değişkenleri kullanırken işlemlerin sırasını dikkate almamaktadırlar. Öğrenciler yapabileceklerini düşündükleri, kendilerine kolay gelen işlemlerden başlamaktadırlar. İkinci belirgin kavram yanlışısı ise (öğrencilerin yaklaşık %38'i) parantezlerin işlemlerdeki önemini dikkate almamalarıdır. İşlem sırasında soldan sağa doğru gidilmeli biçimindeki görüşe sahip öğrencilerin oranı 7 sınıftan (%17,33) 8.sınıfa doğru azalmaktadır (%8,33).

Tablo 2: Perso'nun belirlediği 9.-13. kavram yanlışları, Cebir Testindeki ilgili sorular ve 7. ve 8. sınıflardaki yüzde dağılımları

Kavram yanlışısı	Hangi soruda geçtiği	7. sınıf	8. sınıf
		%	%
9. "+" ve "=" işaretleri daima sonuç üretir.	11-b, 12-a, 13-b, 14-b, 15-a	32,8	24,5
10. İşlemlerin sırası önemli değildir.	18-a	50,66	56,66
11. "=" işareti sadece eylem belirtir.	11-b, 12-b, 13-b, 14-b, 15-c	17,86	14,66
12. Matematikte her zaman soldan sağa doğru işlem yapılır.	14-a	17,33	8,33
13. Cebirde parantezler önemli değildir.	17, 18-a	37,33	38,75

Harflerin değişik anlamları, bunlarla aritmetikteki sayılar gibi matematiksel işlemleri yapma ve bunu problem durumlarına uygulayarak denklemleri kurma ve çözme cebirsel düşünmenin gelişiminin bir süreci olarak görülebilir (Perso, 1992; Macgregor & Stacey, 1997). 8 sınıftaki bir öğrencinin harfleri problem durumlarına göre kullanarak matematiksel ilişkiler kurma ve çözme becerilerine sahip olmaları beklenir. Bu düzeydeki öğrenciler Perso'un kavram yanlışları listesindeki 14.-19. kavram yanlışlarına sahip olabilmektedirler. 8.sınıf öğrencilerinin sahip oldukları kavram yanlışları, bu kavram yanlışlarının Cebir

Testinde hangi soruda geçtiği ve bu kavram yanlışlarını işaretleyen öğrencilerin yüzdesi Tablo 3 te verilmiştir. Bu bölümdeki sorular genellikle 8.sınıfa yönelik olduğu için sadece bu sınıfın verileri değerlendirilmiştir.

Tablo 3 e göre çıkan kavram yanlışları Perso'nun kavram yanlışlığı listesindeki 14.-19. kavram yanlışlarıdır. Öğrencilerin yaklaşık %20'si bir denklemin diğer tarafında da aynı işlemin yapılabileceğini, %34'ü harflerin kelimeler için bir etiket olduğunu düşünmektedirler.

Tablo 3: Perso'un belirlediği 14.-19. kavram yanlışları, Cebir Testindeki ilgili sorular ve 8.sınıftaki yüzde dağılımları

Kavram yanlışlığı	Hangi soruda geçtiği	8. sınıf
		%
14. Bir denklemin diğer tarafında da aynı işlem yapılır.	20-b, 21-a, 22-c, 23-a, 25-c, 26-c	20,14
15. Sayılar, değişkenler ve işaretler birbirinden farklıdır.	24-c, 25-d, 26-c	10,83
16. Çıkarma işleminin değişme özelliği vardır.	22-b, 24-d	10,46
17. Ters işlemler gereksizdir.	20-b, 24-c	15,41
18. Harfler soldan sağa doğru eşleşir.	27-a, 29- b, 30-a	18,61
19. Harfler kelimeler için birer etikettir.	27-b, 28-a, 29-d	33,61

4. TARTIŞMA ve YORUMLAR

Araştırma verileri analiz edildiğinde, öğrencilerin harfleri algılamada zorlandıkları ortaya çıkmıştır. Burada sınıflar arasında bir farklılık görülmemektedir. Bu bulgu diğer birçok çalışma sonuçları ile desteklenmektedir (Küchemann, 1981; Booth, 1984; Herscovics, 1989; Macgregor ve Stacey, 1997; Ersoy ve Erbaş, 2000). Öğrencilerin, harflerin alfabetik sıralamada olduğu gibi sayısal konum belirttiğini düşündüklerini görülmektedir (Perso, 1992; MacGregor ve Stacey, 1994). Öğrenciler, cebirde kullanılan harflerin basamak değerinin olduğuna inanmakta ve harflerin rakamdan başka bir değer alamayacağını düşünmektedirler. Yapılan diğer çalışmalar da çocukların harflerin sadece rakamlardan oluştuğunu düşündüklerini göstermektedir (Perso, 1992; Stacey ve MacGregor, 1997). Bunun bir nedeni, bölünebilme kuralları geliştirilirken $3a$ veya $2xy$ gibi ifadeler iki veya üç basamaklı sayılar olarak kullanılmasıdır. Bu da öğrencilerin, bu ifadelerin cebirde 3 a veya $2 \times y$ gibi çarpım şeklindeki kullanımını doğru olarak algılayamamalarına neden olmaktadır. Bunun bir diğer nedeni, sınıf uygulamalarında öğretmenlerin, harflerin değerlerinin rakam çıktığı örnekleri çoğunlukla incelemeleri olabilir Öğrencilerde görülen diğer bir kavram yanlışlığı ise bu öğrencilerin harfleri kullanırken işlemlerin sırasını dikkate almamalarıdır. Öğrenciler, yapabileceklerini düşündükleri, kendilerine kolay gelen işlemlerden başlamaktadırlar. Örneğin $2 + 3 \times 4$ işleminin sonucunun hangi işlemin önce yapıldığının etkilemediğini düşünmektedirler. Bu bulgular, yapılan diğer araştırmalarla da tutarlılık göstermektedir (Tall, 1979). Cebirde öğrencilerin çektiği bir diğer güçlük ise parantezli işlemlerdir. Öğrenciler işlem yaparken parantezi göz ardı ettiği için hata yapmaktadırlar. Bunun başlıca nedenleri arasında çocukların işlem sırasını bilmemeleri olabilir. Bu bulgular Kieran'ın (1979) yaptığı araştırma bulguları ile de tutarlılık göstermektedir.

Öğrenciler harflerin kelimeler için bir etiket olduğunu düşünmektedirler. $2a+5c$ ifadesini öğrenciler genellikle 2 armut 5 ceviz olarak algılamaktadır. Sonucu da 7 meyve olarak algılamakta ve sonucu $7ac$ (ac : armut ceviz) olarak ifade etmektedir. Hâlbuki $2a+5c$ ifadesinde, 2 armut diye okurken aslında bunun 2 çarpı armutların sayısı olduğu, 5 ceviz diye okurken de bunun 5 çarpı cevizlerin sayısı vurgusu yapılmalıdır. Bu da sonucun iki farklı değişkeni toplayarak bulanamayacağını görmelerine yardımcı olabilir. Bu bulgu, Macgregor ve Stacey'in (1997) araştırma bulguları ile tutarlılık göstermektedir.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Örnekleme oluşturan öğrencilerin cebirde harfleri anlamlandıramadıkları görülmektedir. Öğrenciler cebirde harflerin ne anlama geldiğini anlayamadıkları için harflerle ve değişkenlerle işlem yaparken zorlanmaktadırlar. Harflerin kullanıldığı ortama göre farklı anlamlar kazanabilecekleri somut/çevreden örneklerle desteklenmelidir. Öğrencilerin sahip oldukları zorlukları belirlemek, cebirde harfleri nasıl kullandıkları ve nasıl anlamlandırdıkları olası kavram yanlışlarını gidermede önem kazanmaktadır. Cebirdeki harflerin farklı kullanımları ve bulunduğu yapı içerisinde farklı anlamlar kazanmaları öğrencilerin harfleri anlamlandıramamasına neden olmaktadır. Bunun için öğretmenler matematiksel ilişkileri harflerle ifade etmeli ve bu harflerle işlemler yapmaya yönelik anlamlı problem durumları tasarlanmalıdır. Matematikte harflerin çoğu, öğrencilere anlamsız geldiği unutulmamalıdır. Öğretmenler, öğrencilerin öncelikle bu testte belirlemeye çalışılan kavram yanlışlarından hangilerine sahip olduklarını ortaya çıkararak kabul edilen matematiksel doğrulara ulaşmalarına yardımcı olacak biçimde etkinlikler düzenlenmelidir.

Cebir, genelleştirilmiş aritmetik olarak düşünüldüğünde, bilinmeyenlerle sayılar gibi işlem yapabilmeye becerisine sahip olmayı gerektirmektedir. Somut gösterimlerle desteklenebilecek problem durumları incelenerek genellemelere ulaşmalarına yardımcı olunmalıdır. Böylece aritmetik ile cebirin ilişkisi görmelerine yardımcı olunabilir. Aritmetikte sahip olunan işlem becerileri somut modeller yardımıyla cebire uyarlanacak şekilde ilişkilendirilmelidir. Örneğin, terazi modeli, terazinin her iki tarafından aynı miktarda somut materyal (misket, küp gibi) çıkarıldığında dengenin bozulmayacağını göstermede kullanılarak, eşitliğin her iki tarafından aynı sayının çıkarılmasının gerekçesinin ve sonuca etkisinin anlaşılmasında kullanılabilir. Bu modellere ek olarak somutlaştırma ve genellemede gerek bilgisayar yazılımları gerekse sembolik hesaplamalar yapabilen grafik-çizer hesap makinelerinden yararlanabilir. Örnekleme öğrencilerin cebirsel ifadelerdeki bilinmeyenleri belirlemeye yönelik işlemler yaparken işlem sırası parantez kullanımı vb. kavram yanlışlarına sahip olduğu görülmektedir. Mevcut teknolojiler cebirsel ifadeler üzerinde farklı işlemler yapmayı mümkün kılmaktadırlar. Bunun da öğrencilerin bu yöndeki yanlışlarını gidermeye yardımcı olacağı düşünülebilir (NRC, 2001).

Matematiksel düşünmenin gelişiminde, cebir öğrenme alanı ve bu alan içindeki harflerin anlamları, harflerle matematiksel işlemler yapma ve bunu problem durumlarına uyarlama önemli becerilerdir. Bu araştırmayla ortaya konulan cebirdeki kavram yanlışlarının farkında olarak uygun öğrenme ortamları tasarlamak, öğrencileri matematiksel düşünme becerilerini kazanmalarına/geliştirmelerine katkı sağlayabilir.

KAYNAKLAR


- Arcavi, A. ve Schoenfeld, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics Teacher*, 81 (6), 420-427.
- Baykul, Y. (2002). *İlköğretimde Matematik Öğretimi 6.- 8. Sınıflar İçin*. Ankara: Pegem A Yayıncılık.
- Baki, A. ve Kartal, T., (1998). Lise öğrencilerinin cebir bilgilerinin kavramsal ve işlemsel bilgi bağlamında değerlendirilmesi, *UFBMEK Bildiri Özetleri Kitabı*, s:211.
- Cates, M.C. (2000). Making algebra accessible to all students: an important issue for all. , *The Journal of the University of South Carolina Upstate School of Education*, 12 (2), 110-113
- Champagne, A., Gunstone, R., Klopler, L. (1985). Effective changes in cognitive structures among physics students. In L. H. T. West A. L. Pines (Eds.), *Cognitive structure and conceptual change* (pp. 163-187). New York Academic Press.
- Davidenko, S. (1997). Building the concept of function from students' everyday activities. *The Mathematics Teache*, 90 (2), 144-149.
- Dede, Y. (2004). Değişken kavramı ve öğrenimindeki zorlukların belirlenmesi. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri Dergisi*, 4 (1),24-56.

- English, L. Warren, E. (1998). Introducing the variable through pattern exploration, *The Mathematics Teacher*, 91 (2), 166-170
- Elby, A. (2001). Helping physics students learn how to learn. *American Journal of Physics, Physics Education Research Supplement*, 69, (S1), S54-S64.
- Erbaş, A. K, Ersoy, Y. (2003). Kassel projesi cebir testinde bir grup türk öğrencisinin başarısı ve öğrenme güçlükleri. *İlköğretim Online Dergisi*, 4 (1), 18-39.
- Falkner, K. P, Levi, L, Carpenter, T. P. (1999). Children's Understanding Of Equality: A Foundation For Algebra. *Teaching Children Mathematics*, 6 (4), 232-236.
- Fisher, K. (1983). Amino acids and translation: A misconceptions in biology. In H. Helm J. Novak (Eds.), *Proceedings of the International Seminar on Misconceptions in Science and Mathematics* (pp. 407-419). Ithaca, NY: Department of Education Cornell University.
- Griffiths, A. K., Preston, K. R. (1992). Grade 12 students misconceptions relating to fundamental characteristics of atoms and molecules. *Journal of Research in Science Teaching*, 29- 611-628.
- Hashweh, M. (1988). Descriptive studies of students' conceptions in science. *Journal of Research in Science Teaching*, 25, 121-134.
- Kaput, J. (1998). Transforming Algebra from an Engine of Inequity to an Engine of Mathematical Power by 'Algebrafying' the K-12 Curriculum. In *The Nature and Role of Algebra in the K-14 Curriculum: Proceedings of a National Symposium*, Washington D.C., May 27-28.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.
- Küchemann, D. (1978). *Children's Understanding of Numerical Variables*. *Mathematics in Scholl*, 7(4), 23-26
- Macgregor, M., Stacey, K. (1997). Ideas about symbolism that students bring to algebra. *The Mathematics Teacher*, 90(2), 110-113
- Macgregor, M., Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11-15, *Educational Studies in Mathematics*, 33, 1-19
- National Council of Teachers of Mathematics (1997). *A Framework for constructing a vision of algebra: A discussion document*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Perso, Thelma (1992). Using Diagnostic Teaching to Overcome Misconceptions in Algebra. *The Mathematical Association of Western Australia*.
- Philipp, R. (1992). The many uses of algebraic variable. *The Mathematics Teacher*, 85 (7), 557-561.
- Sfard, A. (1995). The development of Algebra : Historical and Psychological Perspectives. *Journal of Mathematical Behavior*, 14, 15-39
- Usiskin, Z. (1988). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. In A. Coxford (Ed.), *The Ideas of Algebra*, K-12 (pp. 8-19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Viennot, L. (1979). Spontaneous reasoning in elementary dynamics. *European Journal Science Education*, 1, 205-221.
- Yaman, H, Toluk, Z, Oklun, S. (2003). İlköğretim Öğrencileri Eşit İşaretini Nasıl Algılamaktadırlar? *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24, 142-151.
- Wagner, S. (1983). What are these called variables? *Mathematics Teacher*, 76, 474-478

EK A

CEBİR TESTİ

AÇIKLAMA : Sevgili arkadaşlar aşağıda soruları dikkatlice okuyup size doğru gelen seçeneği işaretleyiniz. Soruları boş bırakmayınız. Süreniz 30 dakikadır. Katılımınızdan dolayı teşekkür ederim.

- 1) $a + 5$ ifadesinde "a" için ne söyleyebilirsiniz?
a) 1 c) Hiçbir anlamı yok
b) Bilinmeyen d) Hiçbiri
- 2) $3c + 7c = ?$ işleminin sonucu nedir?
a) 10 ceviz c) **10c**
b) $3c + 7c$ d) 100
- 3) $6 + b = ?$ işleminin sonucu nedir?
a) 7 c) Hiçbir anlamı yok
b) $6 + b$ d) b
- 4) $a + b + c = a + z + c$ ifadesinin doğruluğu hakkında ne söyleyebilirsiniz?
a) Her zaman doğru c) **$b = z$**
b) Her zaman yanlış d) Hiçbiri
- 5) Eğer 3 ile p çarparsam sonuç ne olur?
a) $3 \times p$ yada $3p$ c) Sadece 3p
b) Sadece $3 \times p$ d) Hiçbiri
- 6) $a + b + c = ?$ ifadesinin sonucu nedir?
a) Üç sayı sırayla toplanmış
b) 6
c) Neye eşit olduğunu söyleyemez.
d) 3
- 7) Hangisi daha büyüktür $3 \times n$ mi yoksa $n + 3$ mü?
a) $3 \times n$ c) İkisi birbirine eşittir
b) $n + 3$ **d) " n " ye bağlı olarak değişir.**
- 8) Eğer $2xy = 240$ ve $x = 4$ ise $y = ?$
a) **$y = 30$** c) $y = 1$
b) $y = 0$ d) $y = 60$
- 9) $2m = 10$ ise $m = ?$
a) $m = 8$ c) " m " harfi metreyi gösterir.
b) $m = 5$ d) Hiçbiri
- 10) $a = 7, c = 9$ ise $b = ?$
a) $b = 6$ c) $b = 8$
b) $b = b$ d) $b = 11$
- 11) Eğer $a + c = 7$ ise $a + b + c = ?$
a) 8 c) $7 + c$
b) 12 **d) $7 + b$**
- 12) $6 + c = ?$
a) $6c$ c) **$6 + c$**
b) 7 d) Hiçbiri
- 13) $6x + 2y + x = ?$
a) **$7x + 2y$** c) $8xy$
b) $8x^2y$ d) $6x^2 + 2y$
- 14) $m + 4$ ifadesine 3 eklersem sonuç ne olur?
a) $3m + 4$ c) **$m + 7$**
b) $7m$ d) Hiçbiri
- 15) $6xy$ ifadesine 5 eklersem ne olur?
a) $11xy$ c) $30xy$
b) $6xy + 5$ d) Hiçbiri
- 16) $e + f = 29$ ise $e - 3 + f = ?$
a) 33 c) 32
b) 26 d) 24
- 17) $k = j + m$ ve $k + j + m = 12$ ise $k = ?$
a) $k = 3$ c) 221
b) $k = 6$ d) 273
- 18) $m = 5n + 1$, n değeri 2 artarsa m değeri ne olur?
a) $m = 7n + 1$ c) **$m = 5n + 11$**
b) $m = 53$ d) $m = 10n + 1$
- 19)  Yandaki şekil bir karedir. $\Ç = 4a$ ve $A = a^2$ ise $a = ?$
a) $a = 3$ c) **$a = a$**
b) $a = 4$ d) $a = 9$
- 20) $b + 5 = 4b$ ise $b = ?$
a) $b = 5/3$ c) $b = 3/5$
b) $b = 4b + 5$ d) $b = 0$
- 21) $x - 53 = 220$ ise $x - 54 = ?$
a) 274 c) 221
b) 219 d) 273
- 22) $m - 24 = 8$ ise $m = ?$
a) 3 c) 16
b) -16 **d) 32**
- 23) $k - m + 4 = 16$ ise $k - m = ?$
a) 20 c) **12**
b) 8 d) 16

- 24) $9 = 24 - 5z$ ise $z = ?$
 a) **3** c) 9/19
 b) -3 d) 10
- 25) $12 - 2x = 4x + 3$ ise $x = ?$
 a) $x = \frac{15}{12}$ c) $x = \frac{9}{6}$
 b) $x = \frac{15}{16}$ d) $x = \frac{10}{7}$
- 26) $z + 2(y - 3) = 9y - 8$ ise $z = ?$
 a) $z = 7y - 5$ c) $z = 11y + 14$
 b) $z = 11y - 2$ d) **$z = 7y - 2$**
- 27) Ceren kırtasiyeden tanesi 3 milyon olan kalemlerden ve tanesi 2 milyon olan defterlerden alıyor. k : aldığı kalemlerin sayısını; d : aldığı defterlerin sayısını göstermektedir. Ceren kasaya 15 milyon ödediğine göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
 a) $3d + 2k = 15$ milyon
 b) $k + d = 15$ milyon
 c) **$3k + 2d = 15$ milyon**
 d) $6k + d = 15$ milyon
- 28) Ebru pazardan tanesi 2 milyon olan limonlardan ve tanesi 3 milyon olan karpuzlardan alıyor. a : aldığı limonların sayısı ; b : aldığı karpuzların sayısı ise $2a + 3b$ ne anlama gelir?
 a) 2 tane limon ve 3 tane karpuz
 b) 32 milyon
 c) 23 milyon
 d) **Limon ve karpuz ödediği para**
- 29) Ahmetlerin çiftliğinde tavuk ve horozları vardır. Tavukların sayısı horozların sayısının 5 katıdır. T : tavukların sayısını ve H : horozları sayısını gösterdiğine göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
 a) $5 = T + H$ c) **$T = 5H$**
 b) $5T = H$ d) $5T \times H$
- 30) SORU : "Hangi sayının yarısının üç katından dört çıkartırsak on yedi eder?" Bu soruyu çözebilmek için yazılabilecek denklem aşağıdakilerden hangisidir?
 a) $\frac{3}{2}x + 4 = 17$ c) $\frac{2}{3}x + 4 = 17$
 b) **$\frac{3}{2}x - 4 = 17$** d) Hiçbiri

EXTENDED ABSTRACT (Uzun İngilizce Özet)

Mathematic is the most important subject for school mathematics. Students are expected to develop mathematical thinking with which they can bring their potential up and be productive members of the society they live in. Algebra as a branch of mathematics is fundamental on the development of mathematical thinking. The construction of basic algebraic concepts and the development of algebraic thinking are closely related to what kinds of experiences they had with algebra learning strand during primary grades. Also, the misconceptions they formed need to be taken into the consideration. Awareness of the students' mathematical knowledge (correct/incorrect) and basing the instructional practices to students' prior knowledge will help teachers improve their teaching in algebra. The main goal of the research is to determine misconceptions that students formed during primary grades, especially grades 6-8.

The sample of the study consists of 280 students from 15 primary schools in Bolu. The students are at grade 6-8. 85 of the students are in grade 6, 75 of them are in grade 7 and 120 of them are in grade 8. A multiple choice test called "Algebra Test" is prepared to determine misconceptions of students in algebra. The questions in this test are the same questions that Thelma Perso (1992) developed and called "Diagnostic Test- Conceptions in Algebra". The questions are adapted to Turkish and language specialists checked the translation and their advice is taken into consideration. The reliability of the test is calculated for this sample. Alpha reliability of the test is calculated as 0.74. These questions are aimed to reveal 19 misconceptions that Thelma Perso proposed. Each question in the test is aimed to reveal certain misconceptions related to algebraic concepts. Also, some questions are also developed to reveal more than one misconception.

Based on the analysis of the data, students had variety of misconceptions on the role of letters in algebra. First of these misconceptions is that the order of the letters in the alphabet is similar to the order of the numbers. For example, since the letter "b" is the second letter in the alphabet, most of the students think that "b" has the value of 2. Second, students believe that letters have only digit values and letters stand for. For example, "ab" can be interpreted as a two digit number. Since the term "ab" is formed of letters, students think that the values of letters "a" and "b" can take values among the numerals whereas the term "ab" can be interpreted as the product of "a" and "b". Third, students do not pay attention to the order of operations. Therefore, they have difficulties when they compare their calculations with their peers. Fourth, they are not aware of the importance of parentheses in algebra as in arithmetic. They disregard the parentheses while making calculations. The reason might be that students did not correctly construct the concept of the orders of the operations. Last misconception found in this study is that students think letters as labels for the words. For example, the term "5a" is interpreted only as five times the numbers of apples. So the letter "a" stands only for the word "apple" whereas "a" can be used for any unknown in algebra.

The findings of the study reveal that students did not conceptualize the role of the letters in algebra. Since they did not construct variable concept properly, they misinterpreted the meanings of the letters and did not get the correct answers for the given questions. Therefore, it is important to determine a) the difficulties that they have, b) the ways they interpret letters and c) the ways they use the letters in their calculations. The different usages and interpretations of letters in algebra might be the causes of the students' difficulties. Students need to design activities in which students can explore different meanings of letters in different contexts. In addition, teachers may provide concrete materials with which students can make generalizations. The skills that are special to arithmetic can be adapted to algebra using real life problem situations and concrete materials. This kind of approach might help student connect arithmetic and algebra.

Algebraic reasoning is fundamental to the development of mathematical thinking. Meanings of letters, operations with them and adaptation of the skills related to letters and operations to real life problem situations are key elements in the development of algebraic reasoning. Awareness of the misconceptions that this research has put forward might give clues to teachers and teacher education how to design activities that might help students overcome the difficulties on using letters in algebra.