

## MATEMATİKSEL MUHAKEME YETENEĞİ

### MATHEMATICAL REASONING ABILITY

Aysun U MAY\*

#### ÖZET

İnsanları diğer canlılardan ayıran en temel özelliği düşünme yeteneğidir. Muhakeme, bütün etmenleri dikkate alarak düşünüp akılcı bir sonuca ulaşma sürecidir. Bir konuda muhakeme yapabilenler, o konuda yeterli düzeyde bilgi sahibidir ve yeni karşılaştığı durumu tüm boyutlarıyla inceler, keşfeder, mantıklı tahminlerde, varsayımlarda bulunur, düşüncelerini gerekçelendirir, bazı sonuçlara ulaşır, ulaştığı sonucu açıklayabilir...

Matematiksel muhakeme yaklaşımları nelerdir? Bireylerin matematiksel muhakeme yaklaşımları neye göre değişmektedir? Kültür farklılıkları muhakeme biçiminin değişmesinde etken midir? Kişilerin belli bir muhakeme “stili” var mıdır, yoksa hangi muhakeme yaklaşımını kullanacağına göre mi değişmektedir? Herkes kendine en uygun muhakeme tarzını nasıl bulabilir? Bu makalede bu soruların yanıtları tartışılmaktadır.

**Anahtar Sözcükler:** muhakeme, matematiksel muhakeme yeteneği, matematiksel düşünme

#### ABSTRACT

The most fundamental features of the human being is capable of thinking. Reasoning is a process to reach a conclusion by taking all related factors into account. Individuals who have reasoning ability on a subject are knowledgeable on the related discipline and can analyze new situation which are faced in all aspects, explore, make logical assumptions, explain his thoughts, reach conclusions and defend his conclusions.

In this paper the following questions will be discussed. What are the mathematical reasoning approaches? How individuals' mathematical reasoning approach does change? Is cultural differences effect change of reasoning styles? Whether individuals have certain reasoning styles or which reasoning approaches they will use according to the situation? How can people find the most suitable reasoning styles for themselves?

**Keywords:** reasoning, mathematical reasoning ability mathematical thinking

#### 1. GİRİŞ

Matematik, düşünmeyi geliştirdiği bilinen en önemli araçlardan biridir. Bilindiği gibi insanı diğer canlılardan ayıran temel özelliği düşünme, olaylardan anlam çıkartıp koşulları kendine uygun olarak yeniden düzenleyebilme yeteneğidir. Bu nedenledir ki matematik eğitimi temel eğitimin önemli yapı taşlarından birini, belki de en önemlisini oluşturur. Matematik eğitimi sayıları, işlemleri öğretmekten, günlük yaşamın vazgeçilmez bir parçası olan hesaplama becerilerini kazandırmaktan öte bir işlev üslenmekte, her geçen gün biraz daha karmaşıklaşan yaşam savaşında ayakta kalmamızı sağlayan düşünme, olaylar arasında bağ kurma, akıl yürütme, tahminlerde bulunma, problem çözme gibi önemli destekler sağlamaktadır.

Değişen yaşam koşulları gereksinim duyulan insan tipini de değiştirmektedir. Günümüzde, elinin en küçük hareketlerini bile kontrol edebildiği için büyük beğeni toplayan ünlü usta cerrahlar yerini, hiçbir insan elinin halledemeyeceği ayrıntılarda hareket edebilen elektronik aletleri nasıl kullanacağını iyi bilen genç meslektaşlarına bırakmaktadır. En sıradan karışık hesapları bile hatasız yapabilen usta muhasebecilere de gereksinim giderek azalmaktadır. Artık yeni yetişen cerrahlar dikkatlerini el becerilerini geliştirmeye, muhasebeciler işlemlere değil, ama daha önemli bir şeye, daha iyi düşünmeye yoğunlaşmaktadır. Zaman, aklını kullanan, hızla ama etraflıca düşünen, isabetli kararlar veren, yaratıcı, yeni fikirler üretebilen bireylerin zamanıdır.

#### 2. MUHAKEME<sup>1</sup> VE DÜŞÜNME

Muhakeme, bir başka deyişle usavurma ya da

\* Doç. Dr., Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Böl. Matematik Eğitimi ABD, Ankara

<sup>1</sup> İngilizce’de “reasoning” olarak geçen kavram dilimize muhakeme, usa vurma ya da akıl yürütme olarak çevrilmektedir. Arapça kökenli “muhakeme” sözcüğü, “mahkeme” ile aynı köktendir ve eldeki bilgilere dayanarak düşünüp yansız bir karar verme demektir. “Usa vurma” akla, mantığa yakın olup olmadığına bakma, “akıl yürütme” ise genellemeler yapma ve tahminlerde bulunma anlamına gelir. “Reasoning” kavramı bu anlamların hepsini kapsamaktadır. Bu makalede “reasoning” kavramı, yaygın kullanıma uyularak dilimize “muhakeme” olarak çevrilmiştir.

akıl yürütme, bütün etmenleri dikkate alarak düşünüp akılcı bir sonuca ulaşma sürecidir. Bir konuda muhakeme yapabilenler, o konuda yeterli düzeyde bilgi sahibidir ve yeni karşılaştığı durumu tüm boyutlarıyla inceler, keşfeder, mantıklı tahminlerde, varsayımlarda bulunur, düşüncelerini gerekçelendirir, bazı sonuçlara ulaşır, ulaştığı sonucu açıklayabilir ve savunabilir...

Düşünme ise “anımsama”, “basit düşünme”, “eleştirel düşünme” ve “yaratıcı düşünme” gibi basitten karmaşığa, çok daha geniş bir yelpazede karşımıza çıkar (Krulik ve Rudnick, 1999).

Anımsama, basit işlemleri, ölçü birimlerini, geometrik şekilleri anımsama gibi en alt düzeydeki düşünme türüdür. Basit düşünme, verilenleri formülde yerine koyma, alıştırma çözme gibi anımsamaya göre biraz daha kapsamlı, ama kritik ve yaratıcı düşünmelere göre çok daha düşük performanslar gerektirir. Her toplumun içinde, yaşamı boyunca daha fazlasını yapmadan yaşayan pek çok insan bulunur. Eleştirel düşünme bilgileri toplamayı, gerekenleri anımsamayı, organize etmeyi ve çözümleyebilmeyi içerir. Yaratıcı düşünme ise çok daha karmaşık bir süreçtir ve yaratıcı düşünme sırasında fikirlerin sentezlenmesi, yeni fikirler üretilmesi, bunların etkilerinin belirlenmesi, kararlar verilmesi ve bazı yeni ürünlerin ortaya konulması gerekir (Krulik ve Rudnick, 1993).

Muhakeme, çeşitli düşünme tarzlarını içeren bir etkinliktir (Peresini ve Webb, 1999). Yukarıdaki niteliklerine bakıldığında kolayca görülebileceği gibi, kritik düşünme ve yaratıcı düşünme olmadan muhakeme gerçekleştirilemez. Bir başka deyişle muhakeme, ancak düşünmenin ileri basamaklarında ortaya çıkan bir yetenek ve beceridir. Ancak gözden kaçırmamak gerekir ki her kritik düşünme ya da yaratıcı düşünme süreci “muhakeme” özelliği taşımaz. Eğer ileri düzeylerde de olsa bir düşünce bilgi temeline dayanmıyorsa, gerekçelendirilemiyorsa, mantıklı yaklaşımlar içermiyorsa muhakeme olarak kabul edilemez. Özellikle yaratıcı düşünmenin geliştirilmesi zemininde şekillenen güzel sanatlar eğitiminde mantığın sınırlamalarından kurtulmak için yollar arandığı düşünülürse söylenmek istenen daha iyi anlaşılacaktır.

Muhakeme yeteneği, acaba bazı insanların daha doğarken kazandığı bir armağan mıdır? Yoksa sonradan da edinilebilir mi? Herkesteki potansiyel aynı mıdır? Az da olsa herkeste var mıdır? Geliştirilebilir mi? Ne kadar geliştirilebilir?

Bu sorulara kesin yanıtlar vermek en azından günümüz için pek olası görünmüyor. Bugün için muhakeme yapabilmenin bir yetenek olduğu, ister doğuştan, ister çevresel olarak edinilsin eğitimle geliştirilebildiği kabul edilmekte bu nedenle de eğitimcilerin ve psikologların ilgi odağı olmayı sürdürmektedir (Steen, 1999; Resnick ve Ford, 1984).

### 3. MATEMATİKSEL MUHAKEME

Muhakemenin en yoğun olarak kullanıldığı alanlardan biri, belki de birincisi matematiktir. Matematiksel muhakeme, matematiğin temelini oluşturur. Matematik sayıları, işlemleri, cebiri, geometriyi, orantıyı, alan hesaplamayı ve daha birçok konuyu öğretirken doğası gereği örüntüleri keşfetmeyi, akıl yürütmeyi, tahminlerde bulunmayı, gerekçeli düşünmeyi, sonuca ulaşmayı da öğretir.

Bir problem iyice incelenip sorulan anlaşılmadan çözüme başlanamaz, dayanakları, gerekçeleri gösterilmeden matematiksel fikirler savunulamaz... Matematikte bir ispat yapılırken, sürecin başında bazı kabuller yapıp bunların doğru yada yanlış olduğunu göstermek en sık başvurulan yöntemlerden biridir. Her ne kadar eğitim sistemimizdeki bozukluklar nedeniyle örneklerini görmekte zorlansak da kavramlar arasında bağ kurup ilişkileri keşfetmek, duruma özel, yeni çözüm yolları üretmek “önemli matematiğin” olmazsa olmaz özelliklerindedir. Hatta bir insanın toplama ve çarpma işlemlerini yapabildiği halde nerede toplama, nerede çarpma yapacağını saptayamaması yada gerektiğinde kullanmayı düşünmemesi onun matematikte “iyi” olmadığının göstergesi sayılır.

Yukarıda sayılan özelliklerinden dolayıdır ki, matematik eğitimi (özellikle temel eğitimde) muhakeme yeteneğinin geliştirilmesinde önemli bir yer tutar. Ancak bu katkı daha çok, matematiğin özü itibarıyla muhakeme yeteneğini kullanmayı gerektirmesinden kaynaklanmaktadır.

Kendiliğinden ortaya çıkan bu katkıyı arttırabilme ve muhakeme eğitiminin nasıl olması gerektiğine karar verebilmek için matematiksel muhakemenin, nasıl bir yapı oluşturduğu iyi bilinmelidir.

Matematiksel muhakeme yaklaşımları nelerdir? Bireylerin matematiksel muhakeme yaklaşımları neye göre değişmektedir? Kültür farklılıkları muhakeme biçiminin değişmesinde etken midir? Kişilerin belli bir muhakeme “stili” var mıdır, yoksa hangi muhakeme yaklaşımını kullanacağı duruma göre mi değişmektedir? Herkes kendine en uygun muhakeme tarzını nasıl bulabilir?

Pek çok araştırmacı bu soruların yanıtlarını araştırmış yada halen araştırmaktadır. Bu nedenle de bu soruları yanıtlayabilme konusunda mu-

hakemenin yapısına ilişkin sorulara oranla biraz daha şanslı olduğumuz söylenebilir.

### 3.1. Çeşitli matematiksel muhakeme yaklaşımları

Matematiksel muhakeme bireysel bir etkinliktir ve pek çok şekilde yapılabilir. Herkesin kendine özgü düşünme stratejileri vardır ve birisi için kolay gelen düşünme biçimi bir başkası için karışık ve zor olabilir.

Bir örnek üzerinde inceleyelim. Yolles (2001) yaptığı çalışmada, verdiği basit problemin öğrencileri tarafından nasıl 6 farklı yoldan çözümlendiğini aktarıyor. Bu problem ve öğrencilerin kendi çözümlerini nasıl bulduğuna ilişkin açıklamaları Şekil 1’de gösterilmiştir.

**SORU : Joe 6 saat çalışıp 27 \$ kazanıyor . Aynı koşullar da 90 \$ kazanması kaç saatini alır ?**

**A) 40,5                      B) 20                      C) 15                      D) 3 \_**

1. ÖĞRENCİNİN ÇÖZÜMÜ  
 $27 : 6 = 4,5$                        $90 : 4,5 = 20$                       Önce saat başına düşen ücreti, sonra da 90 \$ için gereken zamanı hesapladım.

2. ÖĞRENCİNİN ÇÖZÜMÜ  

$\frac{6}{12}$	$\frac{27}{54}$	
$\frac{18}{24}$	$\frac{81}{18}$	

90’ın üzerine çıktığı için 18 ile 24 arasındaki seçeneği işaretledim.

3. ÖĞRENCİNİN ÇÖZÜMÜ  
 $27 : 6 = 4,5$                        $4,5 \times 20 = 90$                       Ben yanıtları tahminle buldum. Çünkü 4,5 \$ 5 \$’a yakındı ve  $5 \times 20 = 100$  idi. Denedim, uydu.

4. ÖĞRENCİNİN ÇÖZÜMÜ  
Ben orantı kurdum ve içler-dışlar çarpımı yaptım.                       $\frac{6}{27} = \frac{x}{90}$                        $90 \times 6 = 540$                        $540 : 27 = 20$

5. ÖĞRENCİNİN ÇÖZÜMÜ  
 $\frac{90}{27} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$                        $\frac{6}{1} \times \frac{10}{3} = \frac{60}{3} = 20$                       90’ı 27’ye bölüp 6 ile çarptım.

6. ÖĞRENCİNİN ÇÖZÜMÜ  
 $\frac{6s}{3} = \frac{27}{3} = 2s = 9$                        $2s \times 10 = 20s$                        $9 \times 10 = 90$                       Önce 3’e bölerek 6 saatten 2 saate ve 27 \$’dan 9 \$’a sadeleştirdim, sonra iki tarafı 10 ile çarptım.

**Şekil 1:** Bir problem ve altı yoldan çözülmesi

Yazar makalesinde 1. öğrencinin çözümünün en çok yinelenen, 4. öğrencinin çözümünün ise ikinci sık kullanılan yaklaşım olduğunu bildiriyor. 5. ve 6. öğrencilerin çözümlerinin ise yalnızca birer öğrenci tarafından daha kullanıldığını aktarıyor ve öğrencilerinin düşünme yaklaşımlarının çeşitliliği ve yaratıcılığı karşısında her defasında hayranlık duyduğunu belirtiyor (Yolles, 2001).

Hepsi de doğru ama farklı olan, kimisi daha yaygın, kimisi daha bireysel yukarıdaki çözümler, bu muhakemeyi yapanlar için kuşkusuz en makul düşünme tarzıdır. Bu nedendir ki hızla değişen dünyanın yeni eğitim anlayışı içinde bireyler kendilerini daha fazla tanımaya ve kendi düşünme biçimlerini keşfetmeye özendirilmektedir.

### 3.2. Bilinen matematiksel muhakeme yaklaşımları

Muhakeme yaklaşımları belli başlıklar altında toplanabilir, sınıflandırılabilir mi? Muhakeme bireysel, hatta kimi zaman kişisel olduğu gibi bu yaklaşımları adlandırmak, yapılan muhakemeye damgasını vuran özelliğin ne olduğuna karar vermek de değerlendiren kişinin bakış açısına göre değişecektir. Nitekim muhakemeyle ilgili makalelerde yazarlar muhakemeleri adlandırırken kimi zaman cebirsel, orantısal, geometrik, istatistiksel gibi konuyu temel almakta, kimi zaman da çözümsel (analitik), bütünsel (holistik) gibi bakış açısına, yada pratik, soyut gibi düşünme tarzına göre bir ayırım yapmaktadır. (Akkuş Çıkla ve Duatepe 2002; Bishop, Otto ve Lubinski, 2001).

Çözümsel yaklaşım, yapıları çözümlenmek ve parçaları ayrı ayrı incelemek, hesaplamak ve sonuca ulaşmak temelinde kurulan, daha çok "tümdengelimsel (dedüktif)" düşünmeye dayalı muhakeme tarzıdır. Çözümleneci düşünen ve muhakeme yapan insanlar gerçek yaşamda olay-

lardaki yada simgesel nesnelereki örüntülere, yapıya yada kurallara dikkat ederler; tüm bu örüntülerin kazara mı yoksa belli bir nedenden dolayı mı ortaya çıktığını sorarlar (NCTM, 2000). Bütünsel yaklaşımda ise yapılara biraz yukardan, bir bütün olarak bakar, deyim yerindeyse, teker teker ağaçlarla değil, ormanla ilgilenirler.

Çözüm yöntemi baz alındığında ise "pratik" ve "soyut" muhakeme yaklaşımlarından söz edilmektedir. Pratik muhakeme yaklaşımları günlük yaşamda ve matematiğin diğer alanlardaki uygulamalarında daha çok kullanılır (Sternberg, 1999). Özellikle hesaplama becerileri gerektiren mesleklerde çalışanların (esnaf, tüccar, mühendis, ekonomist, ev kadını, garson) kimi zaman kendi pratik matematiksel muhakemelerini kullanarak, matematikçilerin uzun hesaplamalar sonucunda ulaşabildikleri noktaya kolayca ulaştıklarına tanık olup şaşırانların sayısı hiç de az değildir.

Soyut yada teorik matematiksel muhakeme yaklaşımları ise matematik araştırmacılarının her gün, pek çok kez kullandıkları bir muhakeme tarzıdır ki toplumda zaman zaman matematikçilerle ilgili olarak yapılan şakaların da kaynağını oluşturur<sup>2</sup>.

Bazen bir birey tarafından birden çok muhakeme yaklaşımını, hem de aynı anda kullanılabılır (Malloy, 1999). Bir duruma bütünsel muhakeme kurarak yaklaşan biri, hesaplarında pratik yada çözümsel muhakeme yaklaşımlarını karıştırarak uygulayabilir. Örneğin yukarıda verilen 2. öğrenci, sorunun çoktan seçmeli test biçiminde verilmesinden yararlanarak "bütünsel" yaklaşmış, ayrıca cebirsel düşünerek sonuca ulaşmıştır. 3. öğrenci, hesaplama, tahmin, sınamayılma gibi stratejileri kullanırken hem pratik hem de analitik bir bakış açısı kullanmıştır.

<sup>2</sup> Prof. Dr. Nazif Tepedelenlioğlu'nun yıllar önce "Matematiğin sorunları sizin sorunuzdur; onlarla ilgilenin, onlara sahip çıkın" demek amacıyla yayınladığı ve matematiğin güzel yüzünün onu göremeyenlere gösterildiği ilk Türkçe kitaplardan biri olan "Kim Korkar Matematikten?" kitabında yer alan bir fıkra: Bir grup "Macar soylusu" Alp Dağlarında yürüyüş yaparken yollarını kaybetmişler. Bunlardan biri - söylendiğine göre - bir harita çıkarmış ve uzun bir süre inceledikten sonra muzafferane bir tavırla "Nerede olduğumuzu buldum arkadaşlar!" demiş. Ötekiler de heyecanla "Neredeyiz?" diye sormuşlar. "Şu ilerdeki büyük dağı görüyor musunuz? İşte tam onun tepesindeyiz!" (Tepedelenlioğlu, 1983). Sizce de Macar soylusu yerine "matematikçi" demek daha doğru olmaz mı?

### 3.3. Farklılıklarının matematiksel muhakeme yaklaşımları üzerindeki etkisi

İnsanlar ilgileri, zevkleri, yetenekleri, bellekleri, bilgi birikimleri kısaca bireysel özellikleri bakımından farklıdır. Aynı olayı izleyen kişiler bir başkasına anlatırken farklı noktalara dikkat çekerler, kendilerince önemli yada ilginç bulduklarını belleklerine kaydetmezler. Yeni edinilen bir bilgi herkesin zihninde, geçmişte edinilmiş olan farklı bilgilere dayanıp farklı biçimde yerleşir. Örneğin ömrü boyunca hiç deniz görmemiş birine deniz anlatıldığında hayalinde olmanın nasıl bir “deniz” olduğu bilinemez.

Hiçbir insanın özellikleri, geçmişi bir başkası ile birebir benzeşmediğinden zihinsel şemalarının da tamamen aynı olması beklenmez. Eğitimde yeni bir konuya geçmeden önceden edinilmiş bilgiler arasındaki farkı azaltmak amacıyla ön öğrenmelerin yoklanmasının nedeni de budur.

Bireyler, aynı durum karşısında farklı tepkiler verirler. Bu durum benzer öğrenme yeteneğine sahip, benzer hazır bulunuşluk düzeyindeki homojen gruplar için de aynıdır. Acaba bu farklılıklar durağan, bireysel özelliklere, eğilimlere mi bağlanmalıdır, yoksa bireylerin o konudaki bilgi ve deneyimlerinin o anki sonucu olarak mı kabul edilmelidir? Her iki konuda da yapılmış pek çok araştırma ve öğretim teorileri içinde ikisi lehine de bazı yanıtlar bulunabilir (Resnick ve Ford, 1984).

Farklılıklar günümüzde zenginlik olarak kabul edilmekte ortadan kaldırılmasına yada yok sayılmasına değil, su yüzüne çıkarılmasına çalışılmaktadır. Çünkü böylece herkes kendine daha uygun düşünme biçimlerini bulabilir, dünyayı daha iyi anlayabilir. Günümüz matematik eğitiminde de farklı düşünme ve öğrenme biçimlerinin, farklı muhakeme yaklaşımlarının araştırılmasına büyük önem verilmektedir (Malloy, 1999; NCTM, 1989). Bireylerin matematiksel muhakeme yaklaşımları neye göre belirlenmektedir? Kültürel altyapı çeşitliliği muhakeme yaklaşımlarının çoğalmasına neden olabilir mi? Kültür farklılıklar bireyin muhakeme biçimini seçmesinde etken midir?

Daha adını bilmiyor da olsalar insanlar okula başlarken öğrendikleri pek çok matematiksel kavramı da beraberlerinde getirirler. Örneğin sofraya otururken bir çatalın eksik olduğunu fark eden bir çocuk “bire-bir”, bisikletinin tekeri eğildiğinde düzeltebilen bir çocuk “çember” kavramlarını biliyor demektir. Bilgi geçmiş birikimler üzerine kurulduğuna göre insanların, içinde yaşadıkları kültürün unsurlarını altyapılarında okula taşımaları ise kaçınılmazdır. Kendi kültürleri içinde sofrada çatalla yemek yeme yoksa yada bisikletle daha önce karşılaşmamışsa çocuk aynı kavramları kazanmamış yada farklı örneklerden öğrenmiş olabilir. Bir başka deyişle çocuk, okula başlarken bazı matematik kavramlarıyla birlikte ailesiyle, arkadaşlarıyla ve çevreyle etkileşimi sonucu öğrendiği, “muhakeme becerilerine dayalı kültürel sezgilerini” de getirir. (Nieto, 1996; Atkinson, 1992; Malloy, 1999)

Muhakeme yeteneği geliştirilebilen bir özellik olduğundan içinde yaşanılan kültürün bireyin muhakeme yaklaşımlarını etkilemesi, zenginleştirilmesi ve bu etkinin kalıcı olması beklenir. Tersine olarak kapalı kültürlerde muhakeme yaklaşımlarının çeşitliliğinin azalması da doğal kabul edilmelidir.

### 3.4. Kişisel muhakeme stilleri

Çeşitli çalışmalar insanların farklı şekillerde öğrendiklerini ortaya koymaktadır. Öğrenme stilleri, bazı insanların somut yaşantılarla (hissederek), bazılarının soyut kavramsallaştırmayla (düşünerek) öğrenmeye; yine bazılarının aktif yaşantılarla (yaparak), bazılarının ise yansıtıcı gözlemlerle (izleyerek) öğrenmeye daha yatkın olduğunu göstermektedir (Aşkar ve Akkoyunlu 1993).

Acaba kişilerin öğrenme stili gibi, belli bir muhakeme stili de var mıdır? Öğrenme gibi düşünme ve muhakemenin de birikim, alışkanlıklar, genetik yapı, içinde yaşanılan kültür gibi kişilik ve çevresel özelliklerden etkilendiği bilinmektedir. Bu nedenle bireylerin kendi kişilik özelliklerini yansıtan matematiksel muhakeme yaklaşımlarını benimsemesi beklenir. Literatürde bu konuda yapılmış herhangi bir araştırma sonucuna rastlanmamış olmakla birlikte, somut

ve aktif yaşantılarla öğrenmeyi tercih eden bireylerin pratik, buna karşılık yine somut yaşantılarla ancak bu kez soyut kavramsallaştırma ile öğrenmeyi tercih edenlerin çözümsel muhakeme yaklaşımını daha çok kullanmalarının sürpriz olmayacağı söylenebilir. Ayrıca, farklı yaklaşımların ortaya çıkmasında konu ve problemin kendisi de önemlidir. Bazı problemler çeşitli düşünme yaklaşımlarına fırsat verirken bazılarının fazla düşünme seçeneği bırakmayacak şekilde sınırlı yollardan, tekdüze çözümler gerektirmektedir. (Bu konuya ilerde, “Uygulama : İki problem iki sonuç” başlığı altındaki bölümde yeniden değinilmektedir).

Henüz oldukça belirsiz olan bu konuların, yapılan araştırmalar sonuçlandıkça aydınlanacağı ve sorulara daha açık yanıtlar bulunacağı umulur.

### 3.5. Herkesin kendine uygun matematiksel muhakeme stilini bulması ve muhakeme yeteneğinin geliştirilmesi

Herkesin kendine en uygun muhakeme stilini bulması büyük ölçüde deneme-yanılma yöntemiyle gerçekleşir (NCTM, 2000). Düşüncelerin açıklandığı, açıkça, korkusuzca tartışıldığı, farklı fikirlerin önemsendiği, birlikte düşünme için çaba harcanan ortamlar değişik muhakeme yaklaşımlarının daha yakından tanınmalarını sağlar. İnsanlar böyle ortamlarda hem kendilerini hem de farklı muhakeme biçimlerini tanır, dener... Kendisine uygun olanları benimser, kendi stilini bulabilir.

Çağdaş eğitim anlayışında herkesin kendine daha yakın bulduğu muhakeme yöntemlerini kullanmasının özendirilmesi istenmektedir. Bunun için öncelikle insanların kendi muhakeme stilini bulması ve muhakeme yeteneğini geliştirilmesi gerekir. Bu noktada eğitimcilere önemli görevler düşer. Öğretmenler her şeyden önce sınıflarında, öğrencilerinin matematikle ilgili kendilerine karşı olan olumsuz düşüncelerini, kaygı ve korkularını ortadan kaldıracak, kendilerine olan inançlarını güçlendirecek esnek, rahat tartışma ortamları yaratmalıdır. Böylece matematiksel muhakemenin geliştirilmesini yavaşlatan yada engelleyen ilk engeli ortadan kaldırmış

olur. Daha sonra öğrencilerinden kendi çözüm yaklaşımlarında kullandıkları muhakemeyi açıklamalarını isteyerek farklı düşünme seçeneklerinin tanınmasına yardım eder. Ayrıca kendisi de tartışılmak üzere sınıfa, farklı muhakemelerin üretilmesine olanak veren problemler getirerek farklı sosyo-ekonomik ve kültürel altyapılardan gelen, farklı özellikler taşıyan öğrencilerinin ortamda aktif olarak yer almasını sağlar. Bütün öğrencilerin aktif olarak katılabildiği, kendi muhakeme stillerini bildiği öğrenci merkezli öğrenme ortamları, matematiksel muhakeme yeteneklerinin geliştirilmesi için uygun zeminlerdir.

Matematiksel muhakeme yeteneğinin geliştirilebilmesi için öğrencilerin farklı muhakeme yaklaşımlarıyla tanıştırılması yetmez. Öğretim sırasında, muhakeme becerilerini arttıracığı bilinen davranışlar üzerinde dikkatle durulması gerekir.

Geleneksel olarak matematik, doğrusal, düzenli, çözümsel yolla, sunuş yoluyla öğretilmekte ve öğrenciler öğretim sırasında, ayrıntılar üzerinde odaklaşma, planlı ve ardışık düşünmeyi kullanma, soyut fikirleri ve ilgili olmayan detayları anımsama gibi birçok konuda cesaretlendirilmektedir. Ancak, bütün bunlar öğrencilerin tümüne bir yarar sağlamaz. Çünkü yalnızca “çözümsel muhakeme” yaklaşımıyla öğrenenler için düzenlenmiştir. Farklı muhakeme stillerine sahip bireylerde matematiksel muhakeme yeteneğinin geliştirilebilmesi için matematik eğitimi bütünsel, alan bağımlı, birbirine bağlı öğrenenlere, yani tüm diğer muhakeme stillerine sahip öğrenciler göre değiştirilmelidir. (Malloy, 1999).

## 4. UYGULAMA: İKİ PROBLEM İKİ SONUÇ...

Bireysel ve deneyimsel farklılıkların matematiksel muhakeme yaklaşımlarının seçiminde farklılıklara neden olduğu bilindiğine göre, bu durumun bir uygulama üzerinde görülmesinin matematiksel muhakeme ile ilgili açıklamaları tamamlayacağı düşünülmüştür.

Bu amaçla bir problem oluşturulmuş ve İl-

köğretim Matematik Öğretmenliği programına devam eden 35 öğrenciden, verilen problemi sıra numarası vererek, düşünebildikleri tüm yollarla çözmeleri istenmiştir. Böylece öğrencilerin problemin çözümüne ulaşmada kaç farklı muhakeme biçimi kullanabildiklerinin ve hangi muhakeme yaklaşımlarını daha çok benimsediklerinin anlaşılabilceği umulmuştur.

Problem ve öğrencilerin bulabildikleri çözüm yolları Şekil 2’de gösterilmiştir.

düşünme becerilerini törpülemiş olmasıdır. Bu oldukça can sıkıcı ve umut kırıcı bir durumdur. İkinci olasılık ise problemin farklı muhakeme yaklaşımları üretmeye uygun nitelikler taşımasıdır. Nitekim bu iddia daha önce de dile getirilmiş ve kullanılan muhakeme yaklaşımlarının çeşitliliğinin probleme de bağlı olabileceği vurgulanmıştı (Bkz: 3.4. Kişisel Muhakeme Stilleri). Bunu sınamanın yolu, farklı muhakeme yaklaşımlarına açık olduğu daha önceden belirlen-

**SORU :**

**Yokuş çıkmakta olan bir adam, her 200 metrede, bir öncekinin yarısı hızla ilerliyor. Yokuşun uzunluğu 1 km olduğuna göre adamın ortalama hızı, başlangıçtaki hızının kaç katıdır?**

**1. ÇÖZÜM (29 öğrenci)**

$$v(\text{ort}) = \frac{v + \frac{v}{2} + \frac{v}{4} + \frac{v}{8} + \frac{v}{16}}{5} = \frac{16v + 8v + 4v + 2v + v}{16.5} = \frac{31}{80}v$$

**2. ÇÖZÜM (21 öğrenci)**

$$v(\text{ort}) = \frac{v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5}{5} \quad v_1=16 \text{ m/s} \quad v_2=8 \text{ m/s} \quad v_3=4 \text{ m/s} \quad v_4=2 \text{ m/s} \quad v_5=1 \text{ m/s}$$

$$v(\text{ort}) = (16 + 8 + 4 + 2 + 1) / 5 = 31/5 \text{ m/s}$$

O da ilk hız olan  $v_1=16 \text{ m/s}$  nin  $(31/5) \cdot (1/16) = 31/80$ ’i dir.

**3. ÇÖZÜM (1 öğrenci)**

$$v(\text{ort}) = \frac{v \cdot 200 + \frac{v}{2} \cdot 200 + \frac{v}{4} \cdot 200 + \frac{v}{8} \cdot 200 + \frac{v}{16} \cdot 200}{1000} = \frac{31}{80}v$$

**Şekil 2 :** Problem ve öğrencilerin bulabildikleri çözüm yolları

Uygulama sonucunda karşılaşılan durum gerçek bir düş kırıklığıdır. Çünkü doğru yanıtı ulaşan öğrencilerin tümü (29 kişi) problemi çözerken ilk sırada aynı yöntemi (1. çözüm) kullanmışlardır. Bu öğrencilerden 8 tanesi başka hiçbir yol bulamadığını belirtmiş, 21 tanesi ikinci, 1 tanesi de üçüncü yol için zorlama bir gayret içine girmişler farklı bir şeyler yapmaya çalışmışlardır (2. ve 3. çözümler). Ancak çözümler incelendiğinde bu öğrencilerin çabalarında başarılı oldukları ve gerçekten de farklı muhakeme tarzları üretebildikleri söylenemez.

Bu durumun iki nedeni olabilir. Bunlardan birincisi, öğrencilerin geçmiş öğrenim yaşantılarının onları tek tip düşünmeye alıştırmış, farklı

miş olan bir problemle uygulamanın yinelenmesidir.

İkinci uygulama, genişletilerek aynı grupta yapılmış, yukarıda sonuçlarından söz edilen Yolles’in (2001) problemi hiçbir noktası değiştirilmeden uygulanmıştır. Bir karışıklık yaratmamak için Türkiye’deki öğrencilerce kullanılan muhakeme yaklaşımları da kağıtlar değerlendirilirken Yolles’in öğrencilerinin kullandıkları numaralarla kodlanmıştır.

Uygulama sonuçları ikinci nedenin, yani kullanılan muhakeme yaklaşımının çeşitliliğinin probleme de bağlı olduğu gerçeğini kuşkuyla yer bırakmayacak biçimde ortaya çıkarmıştır.

İkinci uygulamaya 18 erkek ve 53 kız olmak üzere toplam 71 öğrenci katılmıştır. Öğrencilerin kaç farklı muhakeme yaklaşımı bulabilmiş olduğu cinsiyetler de dikkate alınarak Tablo 1’de gösterilmiştir.

tedir. Türkiye’de yapılan araştırmada ek olarak, azımsanamayacak kadar sık kullanılmakta olan 2 yeni muhakeme yaklaşımı daha ortaya çıkmış, buna karşılık Yolles’in araştırmasında 3. öğrencinin kullandığı yaklaşıma hiç rastlanmamıştır.

**Tablo 1.** Öğrencilerin bulabilmiş olduğu farklı muhakeme yaklaşımları

		MUHAKEME YAKLAŞIMI SAYISI					Toplam Öğrenci Sayısı	Ortalama Muhakeme Sayısı
		1	2	3	4	5		
CİNS	E	1	6	9	2	-	18	2,67
	K	5	22	23	2	1	53	2,47
	<b>Toplam</b>	6	28	32	4	1	71	2,52

Tablo 1’den görülebileceği gibi en az 1, en çok 5 farklı muhakeme yaklaşımı olmak üzere öğrenciler çoğunlukla 2-3 farklı muhakeme tarzı bulabilmişlerdir. Yapılan çalışmanın bir ara-

Türkiye’deki öğrencilerin ek olarak kullandıkları muhakeme yaklaşımları Şekil 3’de gösterilmiştir.

**SORU : Joe 6 saat çalışıp 27 \$ kazanıyor . Aynı koşullar da 90 \$ kazanması kaç saatini alır ?**

A) 40,5      B) 20      C) 15      D) 3 \_

7. ÇÖZÜM

$$\frac{6}{27} = \frac{2}{9} \quad (\text{sadeleştirdim})$$

Tablo yapalım.

Saat	2	4	6	8	...	...	...	...	x
dolar	9	18	27	36	...	...	...	...	90

90, 9’un 10 katı olduğuna göre, 2’nin 10 katı da 20 olur.

8. ÇÖZÜM

$$\frac{6}{27} = \frac{2}{9} \quad 1 \text{ dolar için } 2/9 \text{ saat çalışmalı. O halde } 90 \text{ dolar için } \frac{2}{9} \cdot 90 = 20 \text{ saat çalışacak.}$$

**Şekil 3 :** Türkiye’deki öğrencilerin ek olarak kullandıkları muhakeme yaklaşımları

tırma niteliği taşımadığı, bir örneklem üzerinde çalışılmadığı, bu nedenle de önemli sonuçlar çıkarmanın doğru olmayacağı unutulmadan bulunanlara bir göz atılırsa, erkeklerin farklı muhakeme yaklaşımları üretmek konusunda az farkla da olsa kızlardan biraz daha önde görüldüğü söylenebilir.

Öğrencilerin yanıtları başka ilginç konularda da önemli ipuçları vermektedir. Yolles (2001) ABD’de yaptığı çalışmada öğrencilerinin 6 farklı muhakeme yaklaşımı bulduğundan söz etmek-

Türkiye’deki öğrenciler Yolles’in öğrencilerinden farklı olarak onun 4. öğrencisinin muhakeme yaklaşımını en çok kullanmışlar, en favori çözüm olduğunu söylediği 1. öğrencisinin muhakeme yaklaşımını ikinci sıraya atmışlardır. Türkiye’de yapılan uygulamada öğrencilerin kullandıkları çözümlerin kullanım sıklıkları ve sıraları Tablo 2’de gösterilmiştir.



**Tablo 2.** Türkiye’de Yapılan Uygulamada Öğrencilerin Kullandıkları Çözümlerin Kullanım Sıklıkları Ve Sıraları

Muhakeme Yaklaşımı	Kullanım sıklığı	Sıra no
1. ÇÖZÜM	32	2.
2. ÇÖZÜM	11	7.
3. ÇÖZÜM	-	-
4. ÇÖZÜM	67	1.
5. ÇÖZÜM	12	6.
6. ÇÖZÜM	14	5.
7. ÇÖZÜM (yeni)	23	3.
8. ÇÖZÜM (yeni)	20	4.

Tablo 2’den de görüleceği gibi öğrenciler ezici bir çoğunlukla 4. çözüm yaklaşımını kullanmıştır. Tüm öğrenciler içinde bu yola yer vermeyen yalnızca 4 öğrenci bulunmaktadır. Bunun yanı sıra bu çözüm öğrencilerin % 86’sı tarafından ilk çözüm olarak kullanılmıştır. Bu gözlem “muhakeme yaklaşımlarının belirlenmesinde kültür farklarının etkili olabileceği” savını büyük ölçüde güçlendirmektedir. Bu iddia “farklı kültürlerin eğitim programlarının yaklaşım farklılıkları” olarak da nitelenebilir. Nitekim ABD’liler için de yaygın bir yaklaşım olmamakla birlikte, diğer tüm yaklaşımların kullanılmasına karşın 3. çözümün Türkiyeli öğrenciler tarafından hiç tercih edilmemiş olması dikkat çekicidir. Ancak unutmamak gerekir ki ABD’li öğrenciler gibi Türkiyeli öğrencilerin de en çok kullandığı muhakeme yaklaşımları 4. ve 1. çözümlerdir. Bu sonuç ise kültür farklılıklarına rağmen ortak bir alan bulunabileceğine işaret eder.

Öğrencilerin seçtikleri yöntemlerin kombinasyonları incelendiğinde göze çarpan bir ilişkiye rastlanmamıştır. Cinsiyet faktörünün de yarattığı dikkate değer bir farklılık yoktur. Gelişmiş batı ülkelerinde cinsiyetler arası farklılıklar üzerinde oldukça sık durulan bir konudur. Örneğin bu ülkelerde kadınların matematik ve fen ile ilgili alanlara fazla ilgi göstermediği iddiası, bu ülkelerden uluslararası kongrelere katılan katılımcıların çoğunun erkek olması ile de doğrulanmaktadır. Oysa Türkiye’de tüm alanlar göz önüne alındığında çarpıcı bir fark görülmemektedir. Matematik öğretmen adaylarından uygulamaya katılan öğrencilerin % 75’inin kız olması da bu duruma bir örnek oluşturabilir.

Bütün bu konuların net olarak açığa çıkarılabilmesi, farklı yaş ve cinsiyetlerden, farklı gelir gruplarından, farklı kültürlerden seçilen denekler ile derinlemesine, kapsamlı araştırmalar yapılmasıyla mümkündür.

## 5. TARTIŞMA

Pek çok insan bir matematik problemini çözmek için bir tek doğru yol olduğuna inanır (NCTM, 2000). Oysa pek çok problem için kişiler kendi özelliklerine uygun muhakeme biçimleri ve çözüm yolları bulunabilir. Aynı günlük yaşamda olduğu gibi...

Değişen dünyada kendini ve çevresini iyi tanıyan, nasıl ve ne şekilde düşündüğünü bilen insanlara gereksinim duyulmaktadır. Böyle bireyleri yetiştirmenin yolu, yapıları çözümleyebilme, içindeki ilişkileri görebilme, olaylar arasında neden-sonuç ilişkisi kurabilme, kısaca muhakeme becerileri kazandırmayı hedefleyen yeni eğitim anlayışlarından geçer.

Matematik hesaplama becerilerini öğretmekten ibaret değildir. Muhakeme matematiğin temelini oluşturur.

“Matematisel muhakeme öğrencilerin düşüncelerini rahatça ortaya koyabildikleri sınıflarda gelişebilir. Sınıftaki öğrencilerin ve öğretmenin sorulara, tepkilere, eleştirilere, açık olmaları gerekir. Öğrencilerin kendi fikirlerini açıklamaya ve doğruluğunu göstermek için savunmaya, düşüncelerindeki eksiklikleri fark edebilme ve başkalarının düşüncelerini eleştirmeyi öğrenmeye ihtiyaçları vardır. Ayrıca geçerli iddialar üretebilmek ve başkalarının iddialarını değerlendirebilmek için iyi bir kılavuza, zamana, çeşitli ve zengin deneyimlere gereksinim duyarlar.” (NCTM, 2000).

**KAYNAKLAR**

- Akkuş Çıkla, O. ve Duatepe, A. (2002). "İlköğretim matematik öğretmen adaylarının orantısal akıl yürütme becerileri üzerine niteliksel bir araştırma" **Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi**. Sayı 23, ss. 32-40.
- Aşkar, P. ve Akkoyunlu, B. (1993). "Kolb öğrenme stili envanteri" **Eğitim ve Bilim**. Sayı 87. ss. 37-47.
- Atkinson, S. (1992). **Mathematics with reason : The Emergent approach to primary maths**. London: Hodder and Stoughton.
- Bishop, J. W, Otto, A. D ve Lubinski C. A. (2001). Promoting algebraic reasoning: Using students' thinking. **Mathematics Teaching In The Middle School**. NCTM. v.6, n.9, May 2001.
- Howe, R. (2002). Hermione Granger's solution? **Mathematics Teacher**. NCTM. v.95, n.2, February 2002.
- Krulik, S. ve Rudnick, J. A. (1993). **Reasoning and problem solving. A handbook for elementary school teachers**. Needham Heights. Mass: Allyn And Bacon, Inc.
- Krulik, S. ve Rudnick, J. A. (1999). Innovative tasks to improve critical and creative thinking skills. Developing mathematical reasoning in grades K-12. (Lee V. Stiff, 1999 yearbook editor), **National Council of Teachers of Mathematics**, Reston: Virginia.
- Malloy, C.E. (1999). Developing mathematical reasoning in the middle grades recognizing diversity" Developing mathematical reasoning in grades K-12 (Lee V. Stiff, 1999 yearbook editor), **National Council of Teachers of Mathematics**, Reston: Virginia.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). **Curriculum and evaluation standards for school mathematics**. Reston, Virginia.
- National Council of Teachers of Mathematics, (2000). **Principles and standards for school mathematics**. Reston, VA 20191-9988.
- Nieto, S. (1996). **Affirming diversity**. New York: Longman.
- Peresini, D. ve Webb, N. (1999). Analyzing mathematical reasoning in students' responses across multiple performance assessment tasks. Developing mathematical reasoning in grades K-12. (Lee V. Stiff, 1999 yearbook editor), **National Council of Teachers of Mathematics**, Reston: Virginia.
- Resnick L.B. ve Ford, W.W. (1984). **The psychology of Mathematics for instruction**. New Jersey: Lawrence Erlbaum associates publishers.
- Rubenstein, N. R. (2001). Mental mathematics beyond the middle school: Why? What? How? **Mathematics Teacher**. NCTM. v. 94, n. 6, September.
- Russell, S. J. (1999). Mathematical Reasoning in the elementary grades. Developing mathematical reasoning in grades K-12. (Lee V. Stiff, 1999 yearbook editor), **National Council of Teachers of Mathematics**, Reston: Virginia.
- Steen, L.A. (1999) Twenty questions about mathematical reasoning. Developing mathematical reasoning in grades K-12. (Lee V. Stiff, 1999 yearbook editor), **National Council of Teachers of Mathematics**, Reston: Virginia.
- Sternberg, R. J. (1999). The nature of mathematical Reasoning. Developing mathematical reasoning in grades K-12. (Lee V. Stiff, 1999 yearbook editor), **National Council of Teachers of Mathematics**, Reston: Virginia.
- Tang E. P. (1999). Young children's mathematical reasoning a psychological view. Developing mathematical reasoning in grades K-12. (Lee V. Stiff, 1999 yearbook editor), **National Council of Teachers of Mathematics**, Reston: Virginia.
- Tepedelenlioğlu, N. (1983). **Kim korkar matematikten**. Bilim ve Sanat Yayınları. Ankara.
- Yolles, A. (2001). A simple solution... or is it? **Mathematics Teaching In The Middle School**. NCTM. v. 7, n. 4, December.