Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi 12: 135-143 [1996]

MATEMATİK ÖĞRETİMİNDE BİLGİSAYAR HERŞEY MİDİR?

Adnan Baki*

ÖZET:

Ülkemizde, orta dereceli okullarda, bilgisayar destekli matematik öğretimi resmi olarak konuşulmasına rağmen, görevdeki öğretmenlere ve öğretmen adaylarına bu teknolojiden nasıl yararlanılabileceğini öğretecek yeterli eğitim programlarını henüz geliştiremedik. Makale başlığı olarak sorduğumuz soruya tatmin edici cevaplar veremezsek büyük bir olasılıkla bilgisayara ya olduğundan fazla hayranlık duyulacak ve bunun sonucunda öğretmenler acaba bilgisayar yerimizi mi alacak diye ona karşı bir korku geliştirecek, ya da çoğu öğretmenimiz derslerinde bilgisayardan nasıl yararlanacağını bilmedikleri için onu okullarında veya sınıflarında gereksiz bir lüks olarak algılayacaktır. Öğretmenlerimizde bilgisayara karşı gelişmesi olası bu iki farklı tavır aynı zamanda bilgisayarı matematik eğitimimize sağlıklı bir şekilde entegre etmemizi de engelleyecektir. İşte bu nedenle makalede bilgisayar teknolojisinin matematik eğitiminde kullanılmasının amacı tartışılırken, bu teknolojinin matematik eğitimi için sahip olduğu potansiyel ele alındı ve matematik eğitimi için geliştirilen farklı yazılımların bir matematik öğretmeni tarafından nasıl kullanılabileceği örnekler ile açıklandı.

ANAHTAR SÖZCÜKLER: Öğretmen eğitimi, bilgisayar destekli Matematik öğretimi.

ABSTRACT:

Although computer-based mathematics teaching is officially spoken in Turkey, there is no any program developed to prepare inservice teachers or preservice teachers to use the computer in school mathematics. If we are not able to give an adequate answer to the question which is the title of this paper (is th computer everything in mathematics teaching?), more likely teachers will develop negative attitudes towards the idea of computer-based mathematics teaching: some will continue to see the computer as luxory in mathematics classroom or some will see it as a machine to replace the teaher. These unfavorable attitudes towards the computer technology will naturally lead teachers to reject the integration of this technology into mathematics education. This paper describes a step-by-step procedure that enables teachers to develop computer-based lessons that effectively use software in the classroom. In order to acheive this goal, the technology is first analyzed to determine its potencial power for mathematics education. As a final step, examples and suggestions are given by using different educational software.

KEY WORDS : Teacher education, computer-based Mathematics teaching.

1. BİLGİSAYAR TEKNOLOJİSİNİN MATEMATİK EĞİTİMİ İÇİN SAHİP OLDUĞU POTANSİYEL NEDİR?

Bilgisayarın etkili hesaplama aleti olarak kullanılabilmesinden daha önemli özelliği onun soyut matematik kavramları ekrana taşıyıp somutlaştırabilmesidir. Dolayısıyla, bu yeni teknoloji yalnızca hesaplama ve grafik çizmeyi kolaylaştırmamış, aynı zamanda matematikdeki önemli problemlerin doğasını ve matematikçilerin araştırma yöntemlerini de değiştirmiştir. Matematik formüllerin, ilişkilerin ve prosedürlerin ekrana taşınabilmesi analitik anlamayı kolaylaştıran sembolik ve grafiksel geçişleri olanaklı hale getirmiştir. Bu durum, matematikçilerde matematiksel çözümleri ve analizleri görsel yollarla kolaylaştırma eğilimi de yaratmıştır. En karmaşık cebirsel denklemlerin çözümleri ve onların grafikleri, çok değişkenli fonksiyonların üç veya daha çok boyutlu uzaydaki grafikleri bilgisayar yazılımları ile kolayca elde edilebilmektedir. Bu özellik matematikçiye evrenin matematik modellerle ifade edilebileceği ümitini vermektedir. İşlemlerin ve algoritmaların yazılımlar sayesinde ekranda matematiksel objelere dönüştürülebilmesi matematikçilere doğru ve net analizler yapma olanağı sağladığı gibi aynı zamanda yeni çözüm yolları ve algoritmalar da geliştirdiler. Yazılımların sağladığı bu tür olanaklara en güzel örnekleri kaos teori ve fractal geometri alanında yapılan çalışmalarda bulabiliriz.

Artık günümüzde öğrenci bilgisayarı matematik hesaplamalarda kolayca kullanabilmeli; öğretmen ondan derslerinde demonstrasyon aracı olarak faydalanabilmeli ve öğrencileri için zengin öğrenme ortamları yaratabilmeli; öğrenci bireysel olarak bilgisayarı kullanabildiği gibi grup çalışmalarında da kullanabilmeli ve hepsinden önemlisi öğrenci bilgisayarı problem çözen ve bilgi üreten araç olarak kullanabilmeli.

Bilgisayarın bilgi aktarıcısı olarak değil de öğrencinin araştırma yapabileceği ve kendi bilgisini kurabileceği bir makine olarak sınıflara girmesi matematik eğitiminde önemli değişiklikleri de beraberinde getireceği tahmin edilmektedir [1], [2] ve [3]. Beklenen bu değişikliğin gerçekleşmesi, doğrudan doğruya öğretmenin bu teknolojiden ne

* Doç. Dr. Adnan Baki, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Öğretim Üyesi.

zaman, nerede ve nasıl yararlanabileceğini bilmesine ve hazırlayacağı bilgisayar destekli derslerin araştırma yapma ve bilgi kurma ortamı sağlayabilmesine bağlıdır.

"Bilgisayar destekli matematik öğretimi yapmak isteyen öğretmen derslerini nasıl hazırlayacak, bilgisayarı ne zaman ve nasıl kullanacak" sorularını açıklığa kavuşturmak görevi de elbette öğretmeni yetiştiren kurumlara ve eğiticilere düşmektedir. Bilgisayar destekli matematik dersi hazırlamada öğretmenin adım adım izleyebileceği yolların örnekler ile verilmesi bu soruların açıklığa kavuşturulmasında bize yardımcı olacaktır.

2. ÖĞRETMEN BU TEKNOLOJİDEN NASIL YARARLANMALI Kİ BİLGİSAYAR ÖĞRENCİNİN KENDİ MATEMATİKSEL BİLGİSİNİ KURABİLDİĞİ BİR ARAÇ OLABİLSİN?

Yabancı literatüre baktığımızda bilgisayar destekli matematik eğitimine iki farklı yaklaşımın olduğunu görürüz. Birincisi ve en eskisi, standart matematik derslerini kuvvetlendirmek amacıyla bu teknolojiyi sınıf içi problem çözme sırasında hesaplama yapmak için veya grafik ve şemalar yoluyla işlenen konu ile ilgili demonstrasyon yapmak için kullanmaktır. İkincisi ve en zoru, ama en etkilisi, matematik öğretiminde dramatik değişime sebep olacak yaklaşımdır ki, bilgisayardan bir simulasyon aracı, araştırma ve deney aracı olarak faydalanmaktır. Bilgisayarın böyle kullanılması halinde öğrenci kendi öz bilgisini kurma fırsatı bulabilecektir [2] ve [4].

Kabul edelim ki, bir öğretmen, okulunda çalışmaya hazır bilgisayarlar ile donatılmış bir sınıfa sahip ve bu bilgisayarlardan yararlanarak matematik öğretmek istiyor. Bu durumda nasıl bir ders geliştirmeli ki öğrencilerine işlediği matematik konularını bilgisayar yardımı ile öğretebilsin. Belki, bu öğretmenin yapabileceği ilk iş, yardımcı kaynaklar bulup kendisinden önce yapılan örneklere bakmaktır. Gerçekten, yeni bir işe başlarken ilk adım olarak insan kendinden önce yapılan benzer işlere bakar, onlardan örnek olarak yararlanmaya çalışır. Ama, ülkemiz şartlarında öğretmenin çevresinde böyle kaynakları bulması oldukça zordur. Çünkü, çevresinde kolayca ulaşabileceği bilgisayar uygulamaları içeren müfredat programları olmadığı gibi bu konuda yardımını isteyeceği yetişmiş meslektaşı da yoktur**.

Öğretmenimiz için ikinci çıkar yol bu alandaki yabancı kaynaklara bakmak olacaktır. Belki en zengin örnekleri yabancı kaynaklarda bulabilecektir, ancak, bu da öğretmenin yabancı dilde yazılanları takip edebilmesine bağlıdır. Dil problemi olmasa bile bazı durumlarda öğretmen zorluklarla karşılaşabilir. Örneğin, yabancı dergilerde yayınlanan öğretmenin örnek alabileceği makalelerin çoğunda programın syntax ve primitifleri yeterince anlatılmaz. Dergilerin makaleler için doğal olarak getirdiği kısıtlamalar yüzünden çoğu zaman makale programın teknik ayrıntılarını gözardı eder. Eğer okuyucu programın yazıldığı dil hakkında yeterli bilgiye sahip değilse, bu programı yeniden yazma sırasında bir çok zorluklarla karşılaşabilir. Belki de çok küçük bir ayrıntı yüzünden programı yazamaz veya çalıştıramaz. Bir başka zorluk da, yabancı makalenin bahsettiği yazılımın Türkiyede mevcut olmayışı veya öğretmenin kullandığı bilgisayara uygun olmayışından kaynaklanan zorluktur. Dolayısıyla, bu ikinci yol da öğretmenimiz için kolay bir çözüm değildir.

Kendilerine öğretmen yetiştirme görevi verilen eğitim fakülteleri, derslerini bilgisayara dayalı olarak vermek isteyen öğretmenlerimizi bu alanda eğitmek durumundadır. Eğitim fakülteleri bunu iki şekilde yapabilir. Lisans programlarını yeniden gözden geçirerek öğrencilerine bilgisayar destekli matematik öğretimi altında kapsamlı dersler açabilirler. Böylece, öğretmen kendisi bilgisayar destekli matematik öğretimi yapmadan önce örnek alacağı bir modeli fakülte sıralarında tanımış olur. İkinci olarak, lisans programlarındaki benzer yaklaşımla hizmet içi kurslar düzenlenebilir ve öğretmenlerimiz örnek olarak alabilecekleri model dersler ile tanıştırılabilir. Bunlara ek olarak eğitim fakülteleri öğretmenlerin günlük gelişmeleri kolayca takip edebilecekleri Türkçe dergilerin çıkartılmasına öncülük etmelidir.

İyi bir bilgisayar destekli matematik dersi nasıl olmalıdır? Bunun için neler gereklidir, hangi tür yazılımlar kullanılmalıdır? Bütün bunlar için öğretmenin referans olarak kullanabileceği bazı kriterlere ve tecrübelere ihtiyacı vardır. Öğretmen böyle bir tecrübeyi dergilerden veya kitaplardan çok fakülte sıralarında veya hizmet içi kurslarda aldığı derslerden elde edebilir. Böylece, bu teknolojiyi sınıfında kullanmak durumunda olan öğretmen, örnek olarak yararlandığı model dersleri, kolayca kendi amacına uyacak şekilde değiştirebilir ve kendi donanımına (hardware), müfredatına ve öğrencisine uygun duruma getirebilir.

Böyle bir dersin en önemli ilkeleri şunlar olmalıdır: Bu derste öğrenci, bir matematiksel sonuca veya çıkarıma ulaşmak için deney kurma uğraşı içerisine girebilmeli, varsayımın doğruluğunu irdeleyebilmeli ve deneyebilmeli. Bu teknolojiyi problem çözümünde kullanabilmeli ve yeni matematiksel problemler tanımlayabilmeli. Dersin uygulamaları

** Örnek olarak MEB Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığının hazırlamış olduğu matematik dersi programlarına bakılabilir.

hem bireysel hem de grup çalışmasına elverişli ödevler içermeli. Ders ilk başta tanıtıcı uygulamaları içermeli. Aynı zamanda bu tanıtıcı uygulamalar, öğrencinin kendi deneyimleri ile ders sırasında yapılacak yeni uygulamalar arasında bir bağlantı sağlamalı. Matematiksel araştırmaya ve keşfe yönelik uygulamaların düzenlendiği bir yazılımı kullanmadan önce öğretmen konunun teorik kısmını klasik yöntemler ile verebilir. Öğretmen, bu esnada ortaya çıkacak kavramları, varsayımları, kullanılan aksiyomları bilgisayar uygulamaları ile yeniden ele alacak bir seansı aynı dersin içinde veya bir başka derste düşünebilir.

Matematiksel kavramların doğrudan öğretmen tarafından aktarılmasından ziyade öğretmen, öğrencinin kendi bilgisini kurmasını sağlayacak sorular hazırlamalı. Kurulacak bu ortamda öğrenci karşı soru sormaya, tartışmaya özendirilmeli, matematiksel varsayımları, çıkarımları sorgulamayı davranış haline getirmeli. Soru sorma iki şekilde gerçekleşebilir. Öğretmen, ya öğrenciye bilgisayar uygulamaları üzerinde çalıştığı sırada uygulama ile ilgili soruları doğrudan sorarak kavramlar, varsayımlar ve teoremler üzerine tartışmalar başlatabilir. Ya da yazdığı program içine sorular yerleştirir ve öğrenciden problem çözme stratejilerini*** kullanarak bu soruların cevaplarının bulunmasını isteyebilir.

Öğretmen böyle bir dersi geliştirirken ilk adım olarak uygun öğretim stratejileri yanında hangi konuların bu teknoloji yardımı ile daha iyi verilebileceğini belirlemelidir. Ancak bu aşamadan sonra kullanacağı yazılımı ve materyalleri seçerek bilgisayar projesini planlamalı ve bilgisayar destekli derslerini geliştirmeye başlamalı. Kısaca özetlemek gerekirse böyle bir misyonu üstlenen öğretmen şu ön bilgileri elde etmeli:

- Okuldaki bilgisayar donanımının (hardware) kapasitesi;
- Okulun sahip olduğu yazılımlar (software);
- Hangi yazılım işlenecek konulara daha elverişli;
- Seçilen yazılım ile ilgili materyaller ve sınıf içi uygulama örnekleri;
- Yazılımın kullanımı;
- Öğretilecek konular ve öğretim stratejileri.

Eğer öğretmen kullanacağı donanım (hardware) ve yazılım (software) hakkında yeterli bilgiye sahip değilse ve ilgili programlama dilini bilmiyorsa, çalıştığı okulda bilgisayar destekli matematik dersleri geliştirmesi öğretmen için sonu meçhul bir macera gibi görünür.

Şunu belirtmeliyiz ki amaç ayrı bir bilim dalı (computer science) olarak bu teknolojiyi öğrenmek ve öğretmek değil, bu teknolojiden yararlanarak en iyi öğrenme ve öğretme ortamlarını kurabilmektir. Yani esas amaç, bu teknolojiyi öğretmen için işler hale sokmak ve en son aşamada da öğrenciye sunarak onun matematiksel kavramlarla tanışmasını ve kendi öz bilgisini kurmasını sağlamaktır.

Öğretmenin başarılı bir şekilde bilgisayar destekli dersleri verebilmesi, kendisinin kullandığı teknoloji hakkında rahat olması, onun ile ilgili sıkıntılarını ve zorluklarını çözmüş olmasına bağlıdır. Öğretmenin yazılımı tanıma ve öğrenme aşaması uzun sürebilir. Öğretmenin bu safhada zamana ihtiyacı vardır. Eğer yazılım ile ilgili zorlukları varsa bunlar sınıf içi uygulamalar sırasında açığa çıkar ki bu da öğrenme ortamını çoğu zaman olumsuz yönde etkiler. Çünkü, sınıfın dikkati matematiksel kavramların öğrenilmesi üzerine odaklanması gerekirken makinenin ve yazılımın nasıl işlediği konusu üzerine yoğunlaşacaktır.

Diğer önemli bir husus öğretmenin tanımaya ve öğrenmeye çalıştığı yazılımın matematiğin hangi konuları için daha elverişli olduğunu araştırmasıdır. Örneğin, LOGO ile geometrik kavramlar çok güzel verilebildiği gibi Excel ile yinelemeli aritmetik işlemler, istatistik tablo ve grafikler daha rahat ve kolay verilebilir. Kabul edelim ki, öğretmenimiz, Excel yazılımını öğreniyor. Bu yazılımın kullanımını öğrenme sırasında öğretmen aynı zamanda bu yazılımın matematiksel uygulamalarını (fonksiyonlarını, fomülleri ard arda tekrar edebilme özelliğini, matrisler halinde verileri işleyebilme, veri tabanı oluşturabilme özelliğini) öğrenmek durumundadır.

3. ÖĞRETMENİN BİLGİSAYARI KULLANARAK ÖĞRETEBİLECEĞİ KONULARA BAZI ÖRNEKLER

3.1. Hesaplamalar

Bilgisayarın matematikteki kullanımından söz ederken ilk akla gelen onun iyi bir hesaplama aracı olarak kullanabilmesidir. Kalem hesaplamasıyla çok yorucu hesaplar kısa zamanda ve doğru şekilde bu teknoloji sayesinde yapılabilir. Bu tür aktiviteler için en elverişli yazılımlardan biri olan Excel 'den bir örnek verelim:

$\sum_{x=1}^{10}(4x^2+2x-1)^{(1/3)}$ toplamını Excel'de öğrenci kolayca hesaplayabilir.

(4*A1*A1+2*A1-1)^(1/3) formülü B1 hücresinde x=1 için $4x^2$ +2x-1 in değerini hesaplayacaktır. x'in diğer değerlerinin hesaplanması benzer formülün A2, A3,.........A10 için değiştirilip ilgili hücreler için tanımlanması ile elde edilir. Son olarak B11 hücresinin

*** Bakınız Polya, G (1962) *How to Solve It*. Basic Books, N.Y.

toplamı vermesini istiyoruz, bu durumda SUM (B1:B10) formülünü yazmamız yeterli olacaktır.

A	B
1	1,709976
2	2,668402
3	3,448217
4	5,253588
5	4,776856
6	5,371685
7	5,934472
8	6,471274
9	6,986368
10	7,482924
	50,10376

Tablo 1: İstenilen toplamın Excel ekranındaki görüntüsü

3.2. Maksimum-minimum problemleri

BASIC ile maksimum minimum problemleri basit programlama aktiviteleri ile çalışılabilir. Küçük bir örnek verelim. İlgili konu işlendikten sonra öğretmenin öğrencilerine bilgisayar aktivitesi olarak şöyle bir problem verdiğini düşünelim:

> Bir turistik tesise yüzme havuzu yapılmak isteniyor. Ancak tesis bu iş için 300[lik bir dörtgensel alan kullanabilecek ve plana göre bu alan içine yerleştirilecek havuzun kuzey, güney ve batısında 3m ve doğusunda 6m genişliğinde başka amaçlar için kullanılmak üzere boşluklar bırakılmalıdır. Bu koşullar altında 300[lik bir dörtgensel alanın boyutları nasıl seçilmeli ki maksimum boyutta bir havuz yapılabilsin.

Bu öğrenciler için güzel bir programlama aktivitesi olabilir:

```
10 PR "BOY"; TAB(10); "EN";TAB(30); "ALAN"
20 FOR B = 9 TO 100 STEP 2
30 E = 300/B
40 A = (E - 6)*(B - 9)
50 PR B; TAB(10); E; TAB (30); A
60 NEXT B
99 END
```

Basit geometri ve analiz bilgilerini kullanarak gerekli formülü bulduktan sonra yukarıdaki gibi problemin çözümünü içeren listeyi verecek olan kısa BASIC programını yazabilirler ve havuzun hangi değerlerde maksimum alana sahip olabileceğini gözlemleyebilirler.

Her türlü aritmetik işlemleri yapabilme özelliğine sahip olan Excel ile de bu tür problemler çalışılabilir. Örneğin bir fonksiyonun belli aralıkta aldığı değerler tablosu Excel'de kolayca oluşturularak fonksiyonun kritik değerleri irdelenebilir.

$f(x) = ax^3-bx^2+4x$ fonksiyonu verilsin, a ve b, 1 ile 2 arasında değişirken x de 1 ile 4 arasında değişiyor f(x) fonksiyonunun bu durumlarda aldığı değerleri Excelde tablo halinde şu şekilde elde edilir:

a	b	x	f(x)
1	1	1	4
1	2	1	3
2	1	1	5
2	2	1	4
1	1	2	12
1	2	2	8
2	1	2	20
2	2	2	16
1	1	3	30
1	2	3	21
2	1	3	57
2	2	3	48
1	1	4	128
1	2	4	48
2	1	4	128
2	2	4	112

Tablo 2: $f(x) = ax^3 - bx^2 + 4x$ fonksiyonunun 1 ile 2 arasındaki değişim tablosu

3.3. Seriler ve diziler

Bu konular farklı bir yaklaşımla bilgisayar aktiviteleri yardımı ile verilebilir. BASIC ve LOGO yazılımları kullanılarak yapılan şu örneklere bakalım:

π için Leibniz'in verdiği seriyi irdelemek amacıyla öğretmen bir programlama aktivitesi verebilir. Kabul edelim ki, öğrenci, Leibniz'in $\pi= 4(1-1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - .....)$ açılımını biliyor.

Öğrenci bireysel veya grup çalışması yaparak bu seri için kısa bir BASIC programı yapabilir ve 100, 1000, 10000 değerleri için serinin fark edilir bir şekilde değişmediğini gözleyebilir. Ancak, programın oluşturduğu listede sonlu bir adımda Leibniz serisinin limitinin π ye yaklaştığını gözleyecektir.

```
10 PR
20 PR "π İÇİN LEİBNİZ SERİSİ"
30 PR
40 INPUT "TERİM SAYISI" ;N
50 LET A = 1
60 LET B = 1
70 LET PI = 0
```

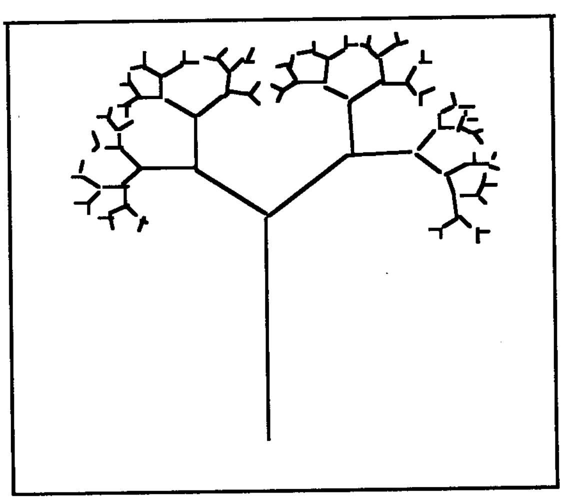
```
80 FOR C = 1 TO N
90 LET PI = PI + A/B
100 LET A = A*(- 1)
110 LET B = B + 2
120 NEXT C
130 LET PI = 4*PI
140 PR
150 PR "PI EşıT"; PI
999 END
```

Öğretmen serilerin limitleri ile ilgili bir aktiviteyi LOGO yu kullanma durumunda olan öğrencilerine şu şekilde bir problem sorarak yapmalarını sağlayabilir:

İlginç bir özelliğe sahip olan bir elma fidanı birinci yıl 1m büyüyor, ikinci yıl gövdesinden aralarında 90° lik açı yapan 50 cm boyunda iki dal büyüyor. Bunu takip eden yılda bu iki dalın uclarında aralarında 90° açı olan 25cm lik yeni dallar oluşuyor. Elma fidanı takip eden yıllarda da aynı şekilde büyümesine devam ediyor.

Yazacağınız programla özelliği verilen ağacı çizebilir misiniz? Öğrenci bunun için aşağıdaki programa benzer bir program yazabilir:

```
TO AĞAÇ :D
HT
REPEAT 2 [RT 180 FD 2 * :D]
ıF :D < 1 [STOP] RT 45 FD :D
AĞAÇ :D/2
BK :D LT 90 FD :D
AĞAÇ :D/2
BK :D RT 45
END
```



Şekil 1: Elma fidanının yıllara göre büyümesi

Burada önemli olan öğrencinin, bu ağacın büyümesinin sonsuz olabileceği, ancak boyunun ve dallarının meydana getireceği genişliğin limitlerinin olabileceğini gözleyebilmesidir. Ağacın büyümesini grafiksel olarak gördükten sonra ikinci bir aktivite olarak öğretmen cebirsel olarak ağacın boyunun ve genişliğinin limitlerinin bulunmasını öğrencilerinden isteyebilir. Bunun için öğrencinin ağacın geometrik bir seri olarak büyüdüğünü fark etmesi gerekiyor.

Bundan sonraki adımda $\frac{a(1-r^n)}{1-r}$ formülünü kullanarak öğrenci ağacın boyunun $\frac{4+\sqrt{2}}{3}$ metre ve genişliğinin $\frac{2(\sqrt{2}+1)}{3}$ metre olduğunu hesaplayabilir.

Kuvvet serileri ile ilgili çalışmalarda öğretmen MATHEMATICA yı kullanabilir ve ilgili hesaplamaları sınıfta kolay ve çabuk olarak yapabilir. Örneğin exp in ilk dört mertebeden terimleri şu şekilde bulunur:

In[1]:=Series [Exp[x], {x, 0, 4}]

Out[1]= $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+0[x]^5$

Benzer şekilde $(a + x)^n$ in ikinci mertebeden terimleri

In[1]:=Series[(a+x)^n, {x,0,2}]

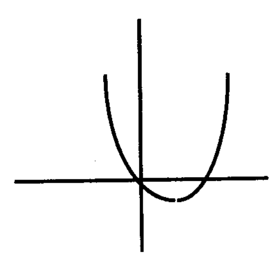
Out [1] = $a^n + a^{-1+n}nx + \frac{a^{-2+n}(-1+n)nx^2}{2} + O[x]^3$

olarak bulunur.

3.4. Fonksiyonların dönüşümleri

Bu konu grafik çizmede basit prosedürler ile dönüşümleri tanımlamada kolaylık sağlayan LOGO yardımı ile çalışılabilir.

Bir fonksiyonun grafiğini belli dönüşümler altında kağıt kalem ile yapmak öğrenci için zor ve yorucu bir çalışmadır. Oysa öğrenci, LOGO'da yazacağı basit programlarla aynı x ekseni üzerinde fonksiyonun grafiğini öteleyebilir, yansıtabilir veya döndürebilir.



Örneğin, y = x(x - 2) nin grafiğini ele alalım:

Grafik 1: y = x (x - 2) fonksiyonunun grafiği

y=x(x-2) fonksiyonunun 30°lik dönme dönüşümü altında yeni denklemini cebirsel olarak elde edebiliriz. Bu durumda (x,y) -----> (xcos30 + ysin30, -xsin30 + ycos30),

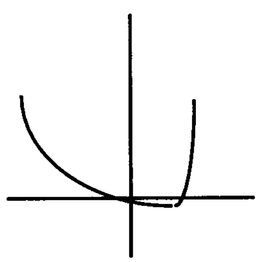
(x,y) -----> $(x\frac{\sqrt{3}}{2}+y\frac{1}{2},-x\frac{1}{2}+y\frac{\sqrt{3}}{2})$ böylece

$x=\frac{x\sqrt{3}+y}{2}$ ve $y=\frac{y\sqrt{3}-x}{2}$ bulunur.

Bu değerleri y=x(x-2) fonksiyonunda yerine koyalım:

$\frac{y\sqrt{3}-x}{2}=(\frac{x\sqrt{3}+y}{2})(\frac{x\sqrt{3}+y}{2}-2)$ ve denklemi

$3x^2+2xy\sqrt{3}+y^2+2x-4x\sqrt{3}-4y-2y\sqrt{3}=0$ şeklinde elde edilir. Bu yeni denklemin grafiğini kağıt-kalem yardımı ile çizmek öğrenci için bir hayli zordur. Halbuki tanımlayacağımız yeni bir LOGO prosedürü ile y = x(x-2) fonksiyonunun grafiğini 30° saat yönünün ters yönünde döndürmemiz mümkündür. Bu transformasyondan sonra elde edeceğimiz yeni grafik aşağıdaki gibi olacaktır:



Grafik 2: 30° dönme dönüşümü altında y = x(x - 2) fonksiyonunun grafiği

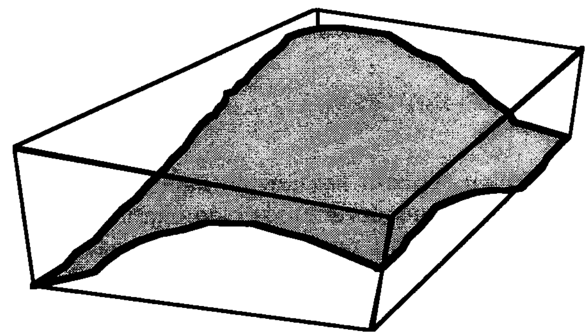
Yine f(x) gibi bir fonksiyon çeşitli dönüşümler altında grafikleri ile karşılaştırmalı olarak irdelenebilir. Örneğin, tanımlayacağımız f(x) fonksiyonu a.f(x)-f(x), f(x+b), f(x) + c dönüşümleri sonunda nasıl oluyor? Bu tür araştırmalar LOGO ile yapılabildiği gibi MATHEMATICA ile de yapılabilir. Öğretmen bu tür bir araştırmayı şu şekilde düzenleyebilir.

Öğrencilerinden f(x) = 1 - 2sin2(x) ile g(x) = 2cos2(x) - 1 fonksiyonlarını irdelemelerini isteyebilir. Böyle bir senaryoda öğrenci önce bu fonksiyonların grafiklerini ayrı ayrı çizebilir. Daha sonra bu iki fonksiyonun grafiklerini üst üste de çizebilir. Bu yolla cebirsel karşılaştırmanın yanında görsel olarak grafiklerin aynı grafikler olduğu ve iki fonksiyonun eşit olduğu sonucuna varabilir.

3.5. Üç boyutlu uzayda fonksiyonların grafikleri

MATHEMATICA bu konuların çalışılmasında en elverişli yazılımlardan biridir. Üç boyutlu bir uzayda herhangi bir fonksiyonun grafiği MATHEMATICA yardımı ile kolayca çizilebilir. Bunun için şu kısa programı yazmak yeterli olacaktır.

Plot3D[Cos[x+Sin[y]],{x,-2,2},{y,-2,2}], Plot3D komutu parantez içindeki fonksiyonun grafiğini x için (-2, 2) ve y için (-2,2) aralıklarında çizer:



Grafik 3: y = cos[x + sin (y)] fonksiyonunun 3 boyutlu uzaydaki grafiği

3.6. Denklem çözümleri

Kalemle çözümü öğrenci için zor olan x^4- $5x^2$ - 3 = 0 gibi bir cebirsel denklemin kökleri MATHEMATICA'da "solve" komutu ile kolayca elde edilir:

```
In[2]: = Solve[x^4-5x^2-3 == 0,x]

                 Sqrt[5 + Sqrt[37]]           Sqrt[5 + Sqrt[37]]
Out[2]: = {{x -> ------------------}, {x -> -(------------------)},
                    Sqrt[2]                     Sqrt[2]

      Sqrt[5 - Sqrt[37]]          Sqrt[5 - Sqrt[37]]
{x -> ------------------}, {x -> -(------------------)}}
          Sqrt[2]                     Sqrt[2]
```

Aşağıda verilen denklemlerin çözümüne bakalım:

$2x^2 + 3y^2 = 1$

$3x + 3y = 0$

MATHEMATICA 'da bunu girdi olarak şöyle tanımlayabiliriz:

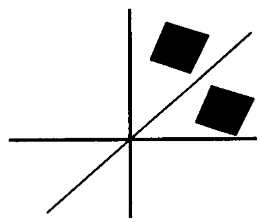
```
In[4]: =Solve[{2x^2+3y^2 == 1, 3x+3y == 0},{x,y}] ve çıktısı

                      1            1
Out[4]: = {{x -> -(-------), y -> -------},
                   Sqrt[5]      Sqrt[5]

       1             1
{x -> -------, y -> -(-------)}} olarak elde edilir.
      Sqrt[5]        Sqrt[5]
```

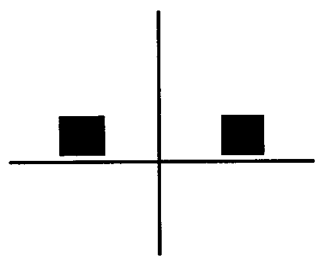
3.7. Dönüşüm geometrisi

Öğrenci, LOGO ile yazılmış basit dönüşüm programları yardımı ile dönüşüm geometrisi ile ilgili dinamik gözlemler yapabilir. Örneğin gireceği YANSIMA kare 40 60 45 komutu ile (40,60) koordinatlarında bulunan kareyi y = x doğrusuna göre yansıtabilir.



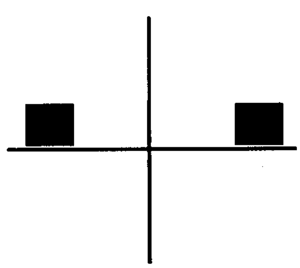
Şekil 2: YANSIMA kare 40 60 45

Öğrenci, iki farklı dönüşümün şekil üzerindeki etkisini aynı anda gözleyebilir. Örneğin (-50, 0) koordinatındaki kareyi y eksenine göre yansıttığını düşünelim.



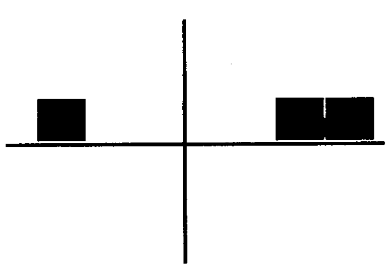
Şekil 3: YANSIMA kare -50 0 90

Aynı şekli aynı noktadan pozitif yöne doğru 50 birim ötelediği zaman ötelenen kare acaba daha önce yansıyan kare ile aynı durumda mı olacak?



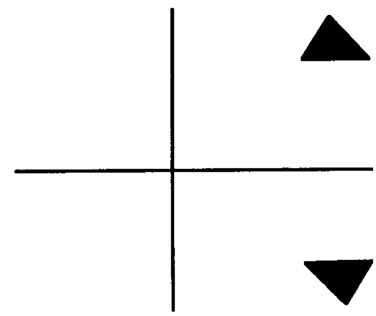
Şekil 4: ÖTELEME kare -50 0 100

Öğrenci, ayrı ayrı izlediği bu dönüşümleri bu kez ekranı silmeden aynı anda aşağıdaki gibi gerçekleştirebilir ve YANSIMA kare -50 0 90 ile ÖTELEME kare -50 0 100 dönüşümlerinin özdeş olmayan dönüşümler olduğunu gözleyebilir.



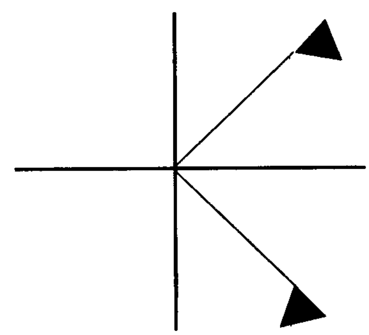
Şekil 5: YANSIMA kare -50 0 90 + ÖTELEME kare -50 0 100

Benzer yolla öğrenci, yansıma ile dönmeyi de karşılaştırabilir. Örneğin, (50,50) deki üçgenin x-eksenine göre yansıması şöyle olur:



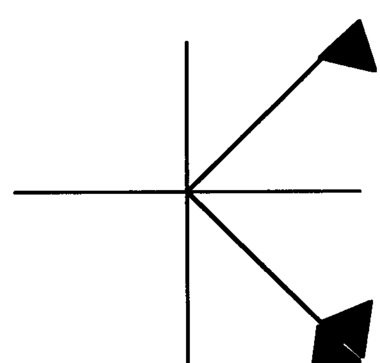
Şekil 6: YANSIMA üçgen 50 50 0

Aynı üçgen -90° ile döndürülürse üçgen yine yansımadan sonraki üçgenin başlangıç koordinatları üzerine düşer ancak bu kez üçgenin yönü terstir.



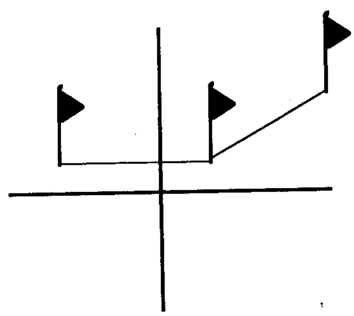
Şekil 7: DÖNME üçgen 50 50 -90

Bahsedilen yansıma ve dönme dönüşümlerini öğrenci ekranı silmeden ard arda yapacak olursa karşılaştırmalı olarak iki dönüşümün şekil üzerinde yaptığı değişimi dinamik bir şekilde gözlemiş olur.



Şekil 8: YANSIMA üçgen 50 50 0 + DÖNME üçgen 50 50 -90

Öğrenci, (-50, 10) noktasındaki şekli önce 0 derecelik açı altında 60 birim öteliyor, arkasından 45 derecelik açı altında 60 birimlik bir öteleme uygulandıktan sonra şeklin son durumunu gözleyebilir. Dönüşümün bitiş koordinatlarını LOGO nun SHOW SETPOSE komutu ile bulduktan sonra bu gözlem öğrenciyi ilgili dönüşümün matrislerini cebirsel olarak yazmaya yöneltebilir.



Şekil 9: ÖTELEME bayrak -50 10 0 60 + ÖTELEME bayrak 10 10 45 60

3.8. Geometri

Geometriye en güzel örnekleri CABRI-GEOMETRY ve LOGO'dan verebiliriz. Yazılımların matematiğe sağlamış olduğu bu tür imkanlara en güzel örnekler geometriden verilebilir. Geometrik bir kavramı açıklamak için kağıt üzerine çizilen diyagramlar veya şekiller genelde son şekli ile tamamlanmış ve statik haldedirler. Üzerinde durulan kavram veya ilişki orada çizildiği gibi kalır, statiktir, çoğu zaman genellemelere ve yeni varsayım kurmalara elverişli değildir. Oysa aynı geometrik ilişki bilgisayarın canlandırması (animation) ile dinamik bir halde ele alınabilir. Bu canlandırmalar sayesinde değişik varyasyonların denenmesi ile bahsi geçen ilişki veya özellliğin genelleştirilmesi şartları irdelenebilir. Yazılımlar bu çeşit canlandırmalarla birlikte kullanıcılara içinde yeni matematiksel keşifler yapabileceği dünyalar sunar.

Bu yazılımda, ekrana mouse yardımı ile Öklid geometrisinin bütün geometrik yapıları yine Öklid geometrisinin esas elemanları olan nokta, doğru, üçgen ve çember ile inşa edilebilir. Ekrana çizilen bir geometrik şekli mouse yardımı ile istenilen konuma getirilebilir ve aynı şekil üzerinde yeni geometrik yapılar kurulabilir. şekil üzerinde tesbit edilen bir noktasından mouse ile tutulup bir başka yere veya pozisyona taşınabilir. Bu da esasta birbiri ile matematiksel olarak ilişkili olan şekil üzerindeki objelerin bu oynama sonunda yeni geometrik yerler meydana getirmesine neden olur. Üzerinde çalışılan geometrik şekildeki objeler birbirine matematiksel olarak ilişkili olduğu için her değişik durumda bu objelerin birbirlerine karşı yeni durumları ve karşılıklı ilişkileri gözlenebilir.

Örneğin, temel geometri bilgilerimizden biliyoruz ki herhangi bir ikiz kenar üçgeni veya eşkenar üçgeni iki ikiz kenar üçgene bölebiliriz. Bu genellemeyi başka üçgenlerde yapabilir miyiz sorusu CABRI-GEOMETRY'de yazılan bir program yardımı ile araştırılabilir. Yine benzer bir metotla öğrenci, iki paralel doğru arasında oluşturacağı üçgen üzerinde kenar uzunlukları ve iç açıları değiştikçe üçgenin alanının ve çevre uzunluğunun da değiştiğini dinamik olarak gözleyerek üçgensel bir geometrik şeklin kenar, açı, alan ve çevre uzunluğu arasında ki karşılıklı matematiksel ilişkileri keşfetme imkanı bulabilir.

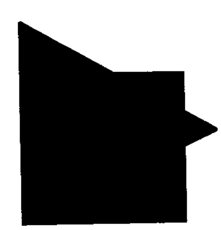
Geometri ile ilgili son örneği LOGO'dan verelim. Kabul edelim ki, öğrenci, LOGO'da basit programlar yazacak bilgiye sahiptir ve öğretmeni ondan çevre uzunlukları eşit çokgenlerin alanlarının da eşit olup olmadığını araştırmasını istiyor. Öğrenci bu durumda herhangi bir çokgeni çizebilen genel bir programı LOGO'da şu şekilde yazabilir:

```
To Çokgen :n
tekrar :n [ıleri 50 sağadön 360 / :n[
SON
```

Öğrenci bu programla bir kenarı 50 birim olan n kenarlı bir çokgen çizebilir. Çevre uzunluğu 300 birim olan çokgenler için araştırmasını sürdürmek istediğini kabul edersek, öğrenci programını bu yazılımın "debugging" özelliğini kullanarak şu şekilde değiştirebilir:

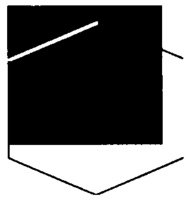
```
To Çokgen :n
tekrar :n [ıleri 300 / :n sağadön 360 / :n[
SON
```

Bu yeni program n değişkenine bağlı olarak çevre uzunluğu 300 birim olan çokgenler çizebilir. Şimdi sıra çizilen çokgenlerin alanlarının karşılaştırılmasına gelir. Belki öğrenci çevre uzunlukları 300 birim olan üçgen ile beşgenin alanlarını cebirsel olarak karşılaştırmada ve hangisinin daha büyük olduğuna karar vermede zorluk çekebilir. Ama bu karşılaştırmayı doğru bir biçimde LOGO yazılımını kullanarak yapabilir. Çevre uzunluğu eşit olan çokgenleri LOGO'da yazdığı program yardımı ile iç içe çizmesi halinde bu karşılaştırmayı kolayca yapabilir ve bir genellemeye ulaşabilir.



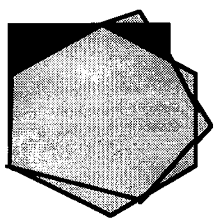
Şekil 10: Çevre uzunlukları aynı olan eşkenar üçgen ile karenin alanlarının karşılaştırılması

Üçgen ile dörtgen karşılaştırıldığında dörtgenin taşan parçalarının toplam alanı üçgenin taşan parçalarının toplam alanından daha büyük olduğunu öğrenci gözleyebilir.



Şekil 11: Çevre uzunlukları aynı olan eşkenar beşgen ile karenin alanlarının karşılaştırılması

Benzer gözlemleri diğer çokgenler ile yaptığında kenar sayısı çok olan çokgenin daha büyük alana sahip olacağı genellemesine varabilir.



Şekil 12: Çevre uzunlukları aynı olan düzgün çokgenlerin alanlarının karşılaştırılması

Burada anlatılmak istenen kısaca şudur: LOGO yazılımının sağladığı bu küçük pencereden öğrenci bilgisayar ile entegre edilmiş bir matematiksel ortama açılma imkanı buluyor, o ortamda matematiksel oyunlar ve aktiviteler yapıyor, bunu yaparken de matematik öğreniyor.

4. SONUÇ

Normal olarak öğretmenden müfredatın bütün konularını içine alan bilgisayar destekli dersler geliştirmesi beklenemez. Öğretmen bir yıl içinde ancak bir kaç konuyu içine alabilecek bilgisayar aktiviteleri geliştirme ve derslerinde uygulayabilme zamanı bulabilir. Derslerinde daha çok bilgisayar aktivitelerinden yararlanmak isteyen öğretmenler kendi yaptıkları projeleri okul içindeki veya yakınlarındaki meslektaşları ile değiş-dokuş yaparak bu alandaki repertuarlarını zenginleştirmiş olurlar. Bunun yanında bu alanda düzenlenen konferansları ve yazılan kitap ve makaleleri takip etmek de yararlı olacaktır.

Bilgisayarın kendisi hiçbir şey yapamaz, onun matematik öğrenme ve matematik öğretme ile ilgili gücü ve potansiyeli tamamı ile bize bağlıdır. Yani onun matematik eğitimindeki gücü ve potansiyeli bilgi teknolojisini kullanarak ürettiğimiz yazılımlara ve bu yazılımları kullananlara bağlıdır. Burada, kraldan çok kralcı olmadan bilgisayara bakarken onun ne yapabileceğini araştırmak yerine onunla matematik veya matematik eğitimi için ne yapabilirizi örneklemeye çalıştık. Sonuç olarak, bu yazılımlar gerçekten matematik öğrenmenin ve matematik bilmenin ne anlama geldiği hakkında düşünmenin yeni yollarını sunmaktadır. Ama biz hala matematiği ilişkiler ve kurallar yığınının listesi olarak görüyorsak bu yazılımların böyle bir matematik dünyasında fazla bir yeri olmayacaktır. Yok eğer matematiği birbirine bağlı bir ilişkiler ağı olarak görüyorsak bu yazılımların bu ağın dokunmasında çok büyük bir işlevi olacağı açıktır.

KAYNAKLAR

[1] Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, Computers and Powerful Ideas.* Basic Books, N.Y.

[2] DiSessa, A. (1990). *Knowledge in Pieces. Constructivism in the Computer Age.* Lawrence Erlbaum Associates Publishing, London.

[3] Hoyles, C. (1992). *Learning Mathematics and LOGO.* The MIT Press, Cambridge.

[4] Hoyles, C. ve Noss, R. (1991) *Micrworlds Project.* Dept. of Mathematics, Statistics and Computing, Institute of Education, University of London.