H.Ü. Eğitim Fakültesi Dergisi • Yıl : 1993 • Sayı : 9 Sayfa : 125 - 130

TÜBİK GEOMETRİK ŞEKİLLER İÇİN HACIM TEOREMİ

Doç. Dr. Aydın ALTIN(*)

$$V_P^{\mathbb{R}^3}(r) = 2\ \text{volume}\ (P) + \frac{2r^3}{3} \int_P K\, dP$$

$\mathbb{R}^3$ de bir hacim formülü vermektedir. Gauss-Bonnet Teoremi uyarınca,

$$\int_P K\, dP = 2\pi\, \chi(P)$$

yazılabilir. Burada χ (P) yazımı P nin Euler Karakteristiğini göstermektedir.

Bu sonuçlarda $\mathbb{R}^3$ yerine daha genel uzaylar alarak WEYL TEOREMİ, GAUSS-BONNET TEOREMİ, EULER KARAKTERİSTİĞİ ve bunlarla ilgili olarak Eigen değerler, Eğrilikler, Şekil operatörü ve hacim formülleri daha genel anlamda incelenebilir. Eğri, Yüzey, İntegral, Form, Alan ve Hacim kavramlarına daha genel anlam verilebilir.

1. GİRİŞ

Tübler için yukarıda verilen hacim formülü $\mathbb{R}^n$ uzayında,

$$V_P^{\mathbb{R}^n}(r) = \frac{\left(\pi r^2\right)^{\frac{1}{2}n-1}}{\left(\frac{1}{2}n - 1\right)!} \left\{ \text{Volume}\ (P) + \frac{2\pi\, \chi(P)\, r^2}{n} \right\},$$

olmaktadır. Daha düzgün geometrik şekiller olan ball'lar için

$$V_{m}^{\mathbb{R}^{2n}}(r) = \frac{\pi^n r^{2n}}{n!} \quad \text{ve} \quad V_m^{\mathbb{R}^{2n+1}}(r) = \frac{2^{n+1} \pi^n r^{2n+1}}{1 . 3 \ldots (2n+1)}$$

olarak yazılabilir.

(*) Hacettepe Üniversitesi Ev Ekonomisi Yüksekokul Öğretim Üyesi

$n = 1$ için çok iyi tanıdığımız,

$$V_m^{\mathbb{R}^3}(r) = \frac{4\pi r^3}{3}$$

değerini buluruz. [1], [2], [3] ve [4] kaynaklarında bu çalışmada geçen ön bilgiler daha detaylı olarak bulunabilir.

2. BULGULAR

Şekil operatörü, yüzey karakteristiği, Eigen değerler, Eigen vektörler, Gauss eğriliği, yüzey ve yarı yüzey kavramlarını içeren örneklerimiz hacim teoremlerinin daha iyi anlaşılmasına katkıda bulunacaktır.

2.1. ÖNERME. M, $\mathbb{R}^{n+1}$ de bir yarıyüzey ve $X \mid_O \in T_{\mathbb{R}^n}(0)$ başlangıç noktasında M nin bir teğet vektörü olsun. M yarıyüzeyini

$$\psi : (x_1, x_2, \dots x_n) \rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n, x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$$

biçiminde tanımlıyalım. Bu durumda, [3] den, k Eigen değerleri için

$$k \mid \psi x_1 \mid_0 = k \mid \psi x_2 \mid_0 = \dots = k \mid \psi x_n \mid_0 = 2$$

değeri bulunur. Bu sonuca göre Gauss eğriliğinin $K(M)=2^n$ ve ortalama eğriliğin $H(M)=n$ olduğu bulunur. Yüzeyimiz için bu sonuçlar boyuttan bağımsız olduğundan Tübik geometrik şekiller için yazılı hacim teoremlerinde geçen Gauss eğrilikleri yerine yazılabilirler. Özellikle de $\mathbb{R}^3$ de bu sonuçlar ilgili teoremlerin kolay ve anlaşılır olmasına neden olurlar. Uygulamaları kolaylaştırırlar.

2.2. ÖNERME. Yine M, $\mathbb{R}^{n+1}$ de bir yarıyüzey ve $x \mid_O \in T_M(O)$ başlangıç noktasında M nin bir teğet vektörü olsun. M nin tanımını

$$\varphi : (x_1, x_2, \dots x_n) \rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n, x_1 . x_2 + x_2 . x_3 + \dots + x_{n-1} . x_n + x_n x_1)$$

biçiminde yapalım. K Gauss eğriliği, χ Euler karakteristiği (yüzey karakteristiği), S şekil operatörü, k normal eğrilik ve $X_1, X_2, \dots, X_n$ ler Eiegen vektörler olsunlar. Bu durumda,

$$SX_i = X_{i-1} + X_{i+1}$$

$$k \mid x_1 = k \mid x_2 = \dots k \mid x_n = 0$$

$$K(M) = 0,\ H(M) = 0 \text{ ve}$$

$$\chi(M) = 0$$

sonuçları bulunur.

KANIT. $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $1 \le i \le n+1$, normal çatı alanı olsun. M nin birim normal vektör alanını,

$$\zeta = \frac{-\tilde{\varphi}_{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} - \tilde{\varphi}_{x_2}\frac{\partial}{\partial x_2} - \dots - \tilde{\varphi}_{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n} + \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}}{\sqrt{1 + \tilde{\varphi}_{x_1}^2 + \tilde{\varphi}_{x_2}^2 + \dots + \tilde{\varphi}_{x_n}^2}}$$

olarak verebiliriz. Buradan, türev alarak ve türev sonucunu 0 noktasına uygulayarak,

$$\zeta = \frac{\left(-x_2 - x_n, \dots, -x_{i-1} - x_{i+1}, \dots, -x_{n-1} - x_1, 1\right)}{\sqrt{1 + (x_2 + x_n)^2 + \dots + (x_{i-1} + x_{i+1})^2 + \dots + (x_{n-1} + x_1)^2 + 1}}$$

$$\xi|_0 = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

sonucuna varılır. Şimdi Eigen vektörleri bulalım.

$$X_1 = \varphi_{x_1}|_0 = (1, 0, \dots, 0, +x_2 + x_n)|_0$$

$$X_1 = (1, 0, \dots, 0)$$

$$X_2 = \varphi_{x_2}|_0 = (0, 1, \dots, 0, +x_1 + x_3)|_0$$

$$X_2 = (0, 1, \dots, 0)$$

Aynı yolla devam ederek,

$$X_n = \varphi_{x_n}|_0 = (0, 0, \dots, 0, 0, 1, +x_{n-1} + x_1)|_0$$

$$X_n = (0, 0, \dots, 1, 0)$$

elde ederiz.

Bulduğumuz Eigen vektörlere S şekil operatörünü uygulayalım.

$$SX_1 = -\nabla_{x_1}\zeta = -\frac{d}{dt}\zeta(0 + tX_1)|_{t=0}$$

$$SX_1 = -\frac{d}{dt}\zeta(t, 0, \dots, 0)|_{t=0}$$

$$SX_1 = -\left\{\frac{(0, -t, 0, \dots, 0, -t, 1)}{\sqrt{1 + 2t^2}}\right\}'|_{t=0}$$

$$SX_1 = \frac{(0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0)}{\sqrt{1 + 2t^2}}|_{t=0} + \frac{1}{2}(0, -t, 0, \dots, 0, -t, 1)\frac{4t}{\sqrt{(1 + 2t^2)^3}}|_{t=0}$$

$$SX_1 = X_n + X_2$$

Aynı yolu izleyerek SX_i yi bulalım.

$$SX_i = -\nabla_{x_i}\zeta = -\frac{d}{dt}\zeta(0+tx_i)\,|_{t=0}$$

$$SX_i = -\frac{d}{dt}\zeta(0, 0, \ldots, 0, t, 0, \ldots, 0)$$

i'yinci yer

$$SX_i = -\left\{\frac{(0, 0, \ldots, 0, -t, 0, -t, 0, \ldots, 1)}{\sqrt{1+2t^2}}\right\}'\,|_{t=0}$$

$$SX_i = \frac{(0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots, 0)}{\sqrt{1+2t^2}}\,|_{t=0} + \frac{1}{2}(0,0, \ldots, -t,0,-t,0, \ldots,1)\frac{4t}{\sqrt{(1+2t^2)^3}}\,|_{t=0}$$

$$SX_i = X_{i-1} + X_{i+1}.$$

SX_n yi de aynı yolla bulalım.

$$SX_n = -\nabla_{x_n}\zeta = -\frac{d}{dt}\zeta(0+tx_n)\,|_{t=0}$$

$$SX_n = -\frac{d}{dt}\zeta(0, 0, \ldots, 0, -t, 0)\,|_{t=0}$$

$$SX_n = -\left\{\frac{(-t, 0, \ldots, -t, 0, 1)}{\sqrt{1+2t^2}}\right\}'\,|_{t=0}$$

$$SX_n = \frac{(1, 0, \ldots, 1, 0, 0)}{\sqrt{1+2t^2}}\,|_{t=0} + \frac{1}{2}(-t, 0, \ldots, -t, 0, 1)\frac{4t}{\sqrt{(1+2t^2)^3}}\,|_{t=0}$$

$$SX_n = X_{n-1} + X_1$$

Burada bulduğumuz sonuçlar, [3] de görülebileceği gibi, 3 boyutlu yarıyüzeyler için,

$$SX_1 = X_2 + X_3$$

$$SX_2 = X_3 + X_1$$

$$SX_3 = X_1 + X_2$$

olarak elde edilmektedir. İyi bilinen yüzeyler, 2 boyutlu yarıyüzeyler, için $SX_1 = X_2$ ve $SX_2 = X_1$ olduğu her geometri kaynağında bulunabilmektedir. Normal eğrilikleri için,

$$kl_{X_1} = <SX_1, X_1> = <X_n + X_2, X_1> = 0$$

$$kl_{X_2} = <SX_2, X_2> = <X_1 + X_3, X_2> = 0$$

....

$$kl_{X_i} = <SX_i, X_i> = <X_{i-1} + X_{i+1}, X_i> = 0$$

....

$$kl_{X_n} = <SX_n, X_n> = <X_{n-1} + X_1, X_n> = 0$$

sonuçlarını yazabiliriz. Burada < , > simgesi sayısal çarpımı göstermektedir. K(M) Gauss eğriliğinin,

$$K(M) = k_1 k_2 \dots k_n$$

$$K(M) = 0$$

olduğu yukarıdaki sonuçlardan hemen yazılabilir. Yine H(M) ortalama eğriliğini

$$H(M) = \frac{k_1 + k_2 + \dots + k_n}{n}$$

$$H(M) = 0$$

buluruz. $\mathbb{R}^3$ de iyi bilinen,

$$\int_P K(P)\, dP = 2\pi\chi(P)$$

sonucundan, K=0 olduğuna göre, $2\pi \neq 0$ olması $\chi(P)=0$ olmasını gerektirir. Bu tür yüzeylere Tor türü yüzeyler diyoruz. χ yüzey karekteristiği aynı tür yüzeyler için değişmezdir. Örneğin bilinen küp yüzeyi için χ=köşe-ayıt+yüz = 8-12+6=2 bulunur. Ongen piramit için χ=11-20+11=2 ve yine yüzgen piramit için x=101-200+101=2 olarak hesap edilebiliyor. $\mathbb{R}^3$ de bir tor yüzeyi için x=9-18+9=0 olur. Kaynaklarda torun 0 karekteristiğinin bir kulplu kahve fincanı türü yüzeyler için de aynen korunduğu yazılmaktadır. Buradan, örnek n boyutlu yarıyüzeyimizde gerçekten χ Euler karekteristiğinin (yüzey karekteristiğinin) sıfır olduğunu anlarız. Bu sonuçlardan önermemizin kanıtlanmış olduğu sonucuna varılır.

2.3. ÖNERME. $\mathbb{R}^3$ de M bir kulplu kahve fincanı türü yüzey ve A, M üzerinde kapalı bir bölge olsun. α, A nın sonlu sayıda ayrık, basit kapalı α_i eğrilerinin bileşimi olsun. α üzerindeki dış köşe açılarını $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ ile gösterelim. kg jeodezik eğrilik olsun. Bu durumda,

$$\int_{\alpha} kg = \sum_{i=1}^{r} \theta_i$$

olur.

KANIT. $$\int_{\alpha} kg = 2\pi \chi (A) - \sum_{i=1}^{r} \theta_i \int_A K$$

olduğu iyi bilinen bir sonuçtur.

$\chi (A) = 0$ ve $\int_A K = 0$ olduğundan,

$$\int_{\alpha} kg = \sum_{i=1}^{r} \theta_i$$

sonucuna varırız. Bu da kanıtı tamamlar.

Son olarak, konunun anlaşılması yönünden, [5], [6] ve [7] kaynaklarının okunmasını içtenlikle önerebilirim.

KAYNAKLAR

1. Gray, A. Tubes, Addison - Wesley Publishing Company, 79, 157, 255, 1990.
2. Munkres, J., R. Analysis on Manifolds, Addison - Wesley Publishing Company, 179, 323, 345, 1991.
3. Altın, A. Principal Vectors, Principal Curvatures, Shape Operators and Some Examples of Hypersurfaces, Uludağ University Journal, Faculties of Education, 10, 43-53, to appear.
4. Altın, A. The Characterizations of Spherical Curves and The Edge of Regression of Hyperrectifying Developable Surfaces, Uludağ University Journal, Faculties of Education, 10, 54-61, to appear.
5. Altın, A., Özdemir, H. B.: The Vectors Which Form Constant Angles with The Frenet Vectors in En, Uludağ University Journal, Faculties of Education, 4, 45-52, 1989.
6. Altın, A., Özdemir, H. B.: The Vectors Which Form Constant Angles with The Frenet Vectors, Uludağ University Journal, Faculties of Education, 3, 97-102, 1988.
7. Altın A., Özdemir, H.B.: Spherical Images and Higher Curvatures, Uludağ University Journal, Faculties of Education, 3, 103-110, 1988.