BELİRTİSİZ TOPOLOJİK UZAYLARDA S-KAPALILIK ve I-TIKIZLIK

Prof. Dr. Doğan ÇOKER(*)
Yard. Doç. Dr. Haydar EŞ(**)

ÖZET

Bu çalışmada belirtisiz topolojik uzaylarda S-kapalılık incelendi. Bir yarı S-kapalı belirtisiz topolojik uzayın yarı-kararsız görüntüsünün S-kapalı olduğu gösterildi. Belirtisiz hemen hemen açık fonksiyonun yarıaçık kümelerle karakterizasyonu verildi. Üstelik, I-tıkız belirtisiz topolojik uzay tanımlandı ve I-tıkızlığın karakterizasyonu verildi. Belirtisiz I-tıkız olup S-kapalı olmayan bir belirtisiz topolojik uzay örneği verildi.

ABSTRACT

This paper discusses fuzzy S-closedness and fuzzy I-compactness in fuzzy topological spaces. We show that the quasi-irresolute image of a quasi S-closed fuzzy topological space is S-closed. We gave a characterization of fuzzy almost open mapping in terms of semiopen sets. Moreover, I-compact fuzzy topological spaces are defined and I-compactness is characterized. Also we give an example of a I-compact but not S-closed fuzzy topological space.

1. GİRİŞ

Belirtisiz küme kavramı ilk kez Zadeh tarafından tanıtıldı [1]. Belirtisiz topolojik uzay tanımı ve bununla ilgili temel kavramlar Chang tarafından verildi [2]. Belirtisiz topolojik uzaylarda bazı fonksiyon türleri ve bunlarla ilgili bazı özellikler Azad ve Yalvaç tarafından verildi [3, 4].

İkinci kesimde çalışmada kullanılan bazı özellikler hatırlatıldı. Üçüncü kesimde ise [5] de tanımlanan S-kapalılık ve S-tıkızlıkla ilgili bazı sonuçlar verildi.

2. ÖNBİLGİLER

2.1. Tanım. $X \neq \phi$ ve $\mathcal{F}(X) = \{ f / f: X \rightarrow [0,1] \}$ olsun. $\mathcal{F}(X)$ in öğelerine X in belirtisiz alt kümeleri denir [1].

(*) Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Öğretim Üyesi.
(**) Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Öğretim Üyesi.

2.2. Tanım. $X \neq \phi$ ve $\tau_X \subseteq \mathcal{F}(X)$ altailesi için,

(i) $0_X \varepsilon \tau_X$ ve $1_X \varepsilon \tau_X$,

(ii) $\forall f, g \varepsilon \tau_X$ için $f \wedge g \varepsilon \tau_X$,

(iii) $\forall f_i \varepsilon \tau_X$, $\forall i \varepsilon I$ ise, $\bigvee_{i \varepsilon I} f_i \varepsilon \tau_X$

koşulları sağlanıyorsa, τ_X ailesine X üzerinde belirtisiz topoloji denir [2]. Bu durumda (X, τ_X) ikilisi belirtisiz topolojik uzay (kısaca b.t.u.) adını alır.

Belirtisiz topolojik uzaylarda taban ve alttaban tanımları [3] de bulunabilir.

2.3. Tanım. $f \varepsilon \mathcal{F}(X)$ için f nin kapanışı olan $\bar{f}$ ve f nin içi olan f^o,

$$\bar{f} = \inf \{g \varepsilon \mathcal{F}(X) : g \geq f,\ g \text{ kapalı}\},$$

$$f^o = \sup \{g \varepsilon \tau_X : g \leq f\}$$

ile tanımlanır [3].

2.4. Tanım. λ, X in bir belirtisiz kümesi olsun.

(i) $\vartheta \leq \lambda \leq \bar{\vartheta}$ olacak şekilde bir $\vartheta \varepsilon \tau_X$ varsa, λ ya yarıaçık küme denir [3].

(ii) $\lambda = (\bar{\lambda})^o$ ise, λ ya düzenli açık küme denir [3].

(iii) $\lambda = (\lambda^o)^-$ ise, λ ya düzenli kapalı küme denir [3].

iv) $\mu^o \leq \lambda \leq \mu$ olacak şekilde bir μ kapalı kümesi varsa, λ ya yarıkapalı küme denir [3].

[v] λ hem yarıaçık ve hem de yarıkapalı ise, λ ya yarıdüzenli küme denir [5].

2.5. Tanım. (X, τ_X), (Y, τ_Y) belirtisiz topolojik uzayları ve $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilmiş olsun.

(i) Her $\lambda \varepsilon \tau X$ için $f(\lambda) \varepsilon \tau_Y$ ise, f ye belirtisiz açık fonksiyon denir [3].

(ii) Her $\mu \varepsilon \tau X$ için $f(\mu)$ yarıaçık ise, f ye belirtisiz yarıaçık fonksiyon denir [3].

(iii) X'de her ϑ yarıaçık kümesi için $f(\vartheta)$ kümesi Y'de yarıaçık ise, f belirtisiz önyarıaçık fonksiyondur denir [4].

(iv) Her $g \varepsilon \tau_Y$ için $f^{-1}(g)$, X'de yarıaçık ise, f ye belirtisiz yarısürekli fonksiyon denir [3].

(v) Y'de her λ yarıdüzenli kümesi için $f^{-1}(\lambda)$ kümesi X'de yarıdüzenli ise, f ye belirtisiz yarı-kararsız fonksiyon denir [5].

2.6. Tanım. $f_i \varepsilon \mathcal{F}(X)$, $\forall i \varepsilon I$ için $\{f_i\}_{i\varepsilon I}$ ailesi X in bir örtüsüdür $\Leftrightarrow \bigvee_{i\varepsilon I} f_i = 1_X$ dir [2].

2.7. Tanım. (i) Bir (X, τ_X) b.t.u tıkızdır $\Leftrightarrow$ X in her açık örtüsü sonlu bir altörtü bulundurur [2].

(ii) Bir (X, τ_X) b.t.u hemen hemen tıkızdır $\Leftrightarrow$ X in her belirtisiz açık örtüsü, kapanışları X'i örten sonlu bir altörtü bulundurur [6].

Bir (X, τ_X) b.t.u'da alınan λ belirtisiz kümesinin yarıkapanışının

$\underline{\lambda} = \wedge \{\mu: \lambda \leq \mu, \mu$ belirtisiz yarıkapalı kümedir$\}$

diye tanımlandığını anımsarsak şu önermenin geçerli olduğunu bilmekteyiz:

2.8. Önerme. λ, X'in bir belirtisiz yarıaçık kümesi ise, λ nın yarıkapanışı $\underline{\lambda}$, yarıdüzenlidir [5].

2.9. Teorem. f: X $\rightarrow$ Y fonksiyonu belirtisiz yarısüreklidir $\Leftrightarrow$ X'in her λ belirtisiz kümesi için $f(\underline{\lambda}) \leq \overline{f(\lambda)}$ dir [4].

3. BELİRTİSİZ S-KAPALI UZAYLAR

Bu kesimde belirtisiz yarıaçık küme tanımından hareketle belirtisiz topolojik uzaylarda tanımlanan S-tıkızlık ve S-kapalılıkla ilgili bazı sonuçlar vereceğiz. Kısaca bu tanımları hatırlatalım:

Bir (X, τ_X) b.t.u verilsin. X'in her yarıaçık örtüsünden (kapanışları, yarıkapanışları) X'i örten sonlu bir altörtü seçilebiliyorsa X uzayına S-tıkız (S-kapalı, yarı S-kapalı) denir [5].

Açıktır ki her belirtisiz S-tıkız uzay S-kapalıdır. Bunun tersi genelde doğru değildir [5].

3.1. Teorem. Belirtisiz yarı S-kapalı bir uzayın belirtisiz yarı-kararsız görüntüsü S-kapalıdır.

Kanıt.f : X $\rightarrow$ Y fonksiyonu belirtisiz yarı-kararsız ve örten olsun. X uzayı yarı S-kapalı ve $\{f_i\}_{i\varepsilon I}$,Y nin bir yarıaçık örtüsü ise, yarıaçık kümenin yarıkapanışı yarıdüzenli olduğundan $\{\underline{f}_i\}_{i\varepsilon I}$,Y nin yarıdüzenli kümelerden oluşan örtüsüdür. f yarı-kararsız olduğundan $\{f^{-1}(\underline{f}_i)\}_{i\varepsilon I}$,X'in yarıdüzenli örtüsüdür. X uzayı yarı S-kapalı olduğndan, sonlu bir $F \subseteq I$ alt kümesi vardır ki $V_{i\varepsilon F} f^{-1}(\underline{f}_i) = 1_X$'dir. f örten olduğundan, $1_Y = f(1_X) = f(\bigvee_{i\varepsilon F} f^{-1}(\underline{f}_i)) = \bigvee_{i\varepsilon F} f(f^{-1}(\underline{f}_i)) \leq \bigvee_{i\varepsilon F} \underline{f}_i \leq \bigvee_{i\varepsilon F} \bar{f}_i$ elde edilir.

Böylece Y uzayı S-kapalıdır.

3.2. Sonuç. Belirtisiz S-tıkız uzayın belirtisiz yarı-kararsız örten görüntüsü S-kapalıdır.

Kanıt. Belirtisiz S-tıkız uzay yarı S-kapalı olduğundan 3.1. Teorem'den kolayca çıkar.

3.3. Teorem. Bir belirtisiz S-tıkız uzayın belirtisiz yarısürekli görüntüsü tıkızdır.

Kanıt. $f : X \rightarrow Y$ belirtisiz yarısürekli ve örten bir fonksiyon olsun. $\{f_i\}_{i\in I}$, Y'nin belirtisiz açık örtüsü ise, $\{f^{-1}(f_i)\}_{i\in I}$, X'in bir yarıaçık örtüsüdür. Hipotezden sonlu bir $F \subseteq I$ altkümesi vardır ki $\bigvee_{i\varepsilon I} f^{-1}(f_i) = 1_X$ dir. f nin örtenliğinden $1_Y = \bigvee_{i\varepsilon I} f_i$ elde edilir. Böylece Y uzayı tıkızdır.

Belirtisiz hemen hemen açık fonksiyon tanımı Ganguly ve Saha tarafından verildi. Bir $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu hemen hemen açıktır. $\Leftrightarrow$ Y'de her λ belirtisiz açık kümesi için $f^{-1}(\overline{\lambda}) \leq \overline{f^{-1}(\lambda)}$ dir [7]. Belirtisiz hemen hemen açık fonksiyonu belirtisiz yarıaçık kümelerle karakterize edebiliriz:

3.4. Önerme. Bir $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu belirtisiz hemen hemen açıktır $\Leftrightarrow$ Y'de her λ yarıaçık kümesi için $f^{-1}(\overline{\lambda}) \leq \overline{f^{-1}(\lambda)}$ dir.

Kanıt. $\Rightarrow$: f hemen hemen açık ve λ, Y'de yarıaçık olsun. O zaman bir μ açık kümesi vardır ki $\mu \leq \lambda \leq \mu$ ve $f^{-1}(\mu) \leq f^{-1}(\lambda) \leq f^{-1}(\overline{\mu}) \leq \overline{f^{-1}(\mu)} \leq \overline{f^{-1}(\lambda)}$ dir. $\overline{\lambda}=\overline{\mu}$ olduğundan $f^{-1}(\overline{\lambda}) \leq \overline{f^{-1}(\lambda)}$ elde edilir.

$\Leftarrow$: Belirtisiz açık küme yarıaçık olduğundan açıktır.

3.5. Teorem. f, X'den Y üzerine belirtisiz hemen hemen açık, yarıaçık bir fonksiyon ve Y uzayı S-kapalı olsun. X'deki her λ yarıaçık kümesi için $\overline{f^{-1}(f(\lambda))} = \overline{\lambda}$ ise, X uzayı hemen hemen tıkızdır.

Kanıt. $\{f_i\}_{i\in I}$, X'in belirtisiz açık örtüsü olsun. O zaman $\{f(f_i)\}_{i\in I}$ ailesi Y'nin yarıaçık örtüsüdür. Y uzayı S-kapalı olduğundan sonlu bir $F \subseteq I$ altkümesi vardır ki $\bigvee_{i\varepsilon F} \overline{f(f_i)} = 1$ y'dir.Böylece $1_X = f^{-1}(\bigvee_{i\varepsilon F} \overline{f(f_i)}) = (\bigvee_{i\varepsilon F} \overline{f(f_i)})) \leq \bigvee_{i\varepsilon F} \overline{f^{-1}(f(f_i))} \leq \bigvee_{i\varepsilon F} \bar{f}_i$ çıkar. X uzayı hemen hemen tıkızdır.

Belirtisiz ön-yarıaçık fonksiyon yarıaçık olduğundan aşağıdaki sonucu verebiliriz:

3.6. Sonuç. f, X'den Y üzerine belirtisiz hemen hemen açık, ön-yarıaçık ve Y uzayı S-kapalı olsun. X'deki her λ yarıaçık kümesi için $\overline{f^{-1}(f(\lambda))} \leq \overline{\lambda}$ ise, X uzayı S-kapalıdır.

4. BELİRTİSİZ I-TIKIZ UZAYLAR

Bu kesimde belirtisiz düzenli kapalı kümeler kullanılarak I-tıkızlık tanımlanacaktır:

4.1. Tanım. Bir (X, τ_X) b.t.u I-tıkızdır $\Leftrightarrow$ X'in her belirtisiz düzenli kapalı örtüsü, içleri X'i örten sonlu bir altörtü bulundurur.

Belirtisiz S-kapalı uzaylar için aşağıdaki karakterizasyon [5]'de verilmiştir:

(X, τ_X) b.t.u S-kapalıdır $\Leftrightarrow$ X'in her belirtisiz düzenli kapalı örtüsü sonlu bir altörtü bulundurur. Buradan her belirtisiz I-tıkız uzayın S-kapalı olduğu açıktır. Bunun tersi genelde doğru değildir:

4.2. Örnek. $X = \{a, b, c, d\}$ olsun. X üzerinde $\{f_n, g_n, h_n, k_n : n = 1, 2, ...\}$ ailesinin alttaban olduğu belirtisiz topoloji τ_X ile gösterelim.

Burada

$f_n(a) = 1 - 1/n$, $f_n(b)=1-1/n$, $f_n(c) = 1/2$, $f_n(d) = 1-1/n$,

$g_n(a) = 1-1/n$, $g_n(b) = 1/2$, $g_n(c) = 1-1/n$, $g_n(d) = 1-1/n$,

$h_n(a) = 0$, $h_n(b) = 0$, $h_n(c) = 1/2$, $h_n(d) = 1/n$,

$k_n(a) = 1/n$, $k_n(b) = 1/2$, $k_n(c) = 0$, $k_n(d) = 0$

dir [9]. Bu durumda $\bar{f}_n(a) = \bar{f}_n(b) = \bar{g}_n(c) = \bar{g}_n(d) = 1$ olduğundan $\{\bar{f}_n, \bar{g}_n : n = 1, 2, ...\}$ belirtisiz düzenli kapalı örtüdür. S-kapalılık için verilen karakterizasyon gereğince, bu düzenli kapalı örtüden sonlu altörtü seçilebilir. Böylece (X, τ_X) b.t.u S-kapalıdır. Diğer taraftan $(\bar{f}_n)^o$ ve $(\bar{g}_n)^o$ belirtisiz kümeleri düzenli açıktır. Yani $(\bar{f}_n)^o = f_n$ ve $(\bar{g}_n)^o = g_n$ dir. Fakat $\{ (\bar{f}_n)^o , (\bar{g}_n)^o : n = 1, 2, ...\}$ örtüsünden sonlu altörtü seçilemez. O halde (X, τ_X) uzayı I-tıkız değildir.

Belirtisiz yarıaçık kümelerle I-tıkızlığı karakterize etmek olanaklıdır.

4.3. Teorem. Bir (X, τ_X) b.t.u I-tıkızdır $\Leftrightarrow$ X'in her belirtisiz yarıaçık örtüsü, kapanışlarının içi X'i örten sonlu altörtü bulundurur.

Kanıt. $\Rightarrow$ $\{f_i\}_{i \in I}$, X'in yarıaçık örtüsü ise, $\{\bar{f}_i\}_{i \in J}$ X'in düzenli kapalı örtüsüdür.

X uzayı I-tıkız olduğundan sonlu bir $F \subseteq J$ altkümesi vardır ki $\bigvee_{i \in F} (\bar{f}_i)^o = 1_X$ dir.

$\Leftarrow$: Belirtisiz düzenli kapalı küme yarıaçık olduğundan istenen hemen elde edilir.

4.4. Teorem. Bir $f : X \to Y$ fonksiyonu belirtisiz sürekli, örten ve X uzayı I-tıkız ise Y uzayı hemen hemen tıkızdır.

Kanıt. $\{f_i\}_{i\in J}$, Y nin belirtisiz açık kümelerden oluşan örtüsü olsun. f belirtisiz sürekli olduğundan $\{f^{-1}(\{f_i\})\}_{i\in J}$, X'in belirtisiz açık örtüsüdür. Buradan $\{\overline{f^{-1}(f_i)}\}_{i\varepsilon J}$, X'in düzenli kapalı örtüsü olup X'in I-tıkızlığından sonlu bir $F \subseteq J$ altkümesi vardır ki $1_X = \bigvee_{i\varepsilon F} (\overline{f^{-1}(f_i)})^o$ dir. f nin sürekliliği ve örtenliği gereğince

$$1_Y = f(1_X) = f\left(\bigvee_{i\varepsilon F} (\overline{f^{-1}(f_i)})^o\right) = \bigvee_{i\varepsilon F} f(\overline{f^{-1}(f_i)}) \leq \bigvee_{i\varepsilon F} f(\overline{f^{-1}(f_i)}) \leq \bigvee_{i\varepsilon F} \overline{f(f^{-1}(f_i))} =$$

$\bigvee_{i\varepsilon F} \bar{f_i}$ elde edilir. O halde Y uzayı hemen hemen tıkızdır.

KAYNAKLAR

1. L.A. Zadeh, Fuzzy Sets, Inform. Control. 8 (1965) 338-353.
2. C.L. Chang, Fuzzy topological spaces, J. Math. Anal. Appl. 24 (1968) 182-190.
3. K.K. Azad, On fuzzy semi continuity, fuzzy almost continuity and fuzzy weakly continuity, J. Math. Anal. Appl. 82 (1981), 14-32.
4. H.T. Yalvaç, Belirtisiz topolojik uzaylar arasındaki zayıf süreklilikler, Doktora tezi (1982).
5. D. Çoker and H. Eş, On fuzzy S-closed spaces, DOĞA TU J. Math. 11 (1987), 145-152.
6. A. Di Concilio and G. Gerla, Almost compactness in fuzzy topological spaces, Fuzzy Sets and Systems 13 (1984), 1987-192.
7. S. Ganguly and S. Saha, A note on semi-open sets in fuzzy topological spaces, Fuzzy Sets and Systems 18 (1986) 83-96.
8. D. Sıvaraj, A note on S-closed spaces, Acta Math. Hung. 44 (1984) 207-213.
9. H. Eş, A note on nearly compact fuzzy topological spaces, Hacettepe Bulletin of Natural Sciences and Engineering 15 (1986) 53-59.