

PIEZOELEKTRİK SANDVIÇ DİKDÖRTGEN KALIN PLAĞIN DELAMİNASYON BURKULMA MODUNA ÇEŞİTLİ GEOMETRİK VE MALZEME PARAMETRELERİNİN ETKİSİ

Fatih AYLIKCI (ORCID: 0000-0003-1783-6368)^{1,*}
Nazmiye YAHNİOĞLU (ORCID: 0000-0002-3921-8643)¹

¹Yıldız Teknik Üniversitesi, Kimya-Metalurji Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü, Davutpaşa / Esenler-İSTANBUL

Geliş / Received: 11.10.2019
Kabul / Accepted: 07.12.2019

ÖZ

Bu çalışmada, tabakalar arasında birbirine paralel ve özdeş kenar çatlaklar veya iç çatlaklar içeren PZT/Metal/PZT sandviç dikdörtgen kalın plağın, çatlaklar doğrultusunda karşılıklı iki kenarından etki eden tek eksenli statik basınç kuvveti etkisinde, plağın delaminasyon burkulma problemleri, ele alınan sınır ve temas koşulları çerçevesinde incelenmiştir. Ele alınan problemler, üç boyutlu elektro-elastisite teorisinin kesin denklemleri ile parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde matematiksel olarak modellenmiş ve üç boyutlu sonlu elemanlar modellemesi yardımıyla sayısal olarak çözülmüştür. Bu PZT/Metal/PZT sandviç dikdörtgen kalın plağa ait kritik delaminasyon burkulma kuvvetinin belirlenmesinde “küçük başlangıç eğinti kriteri” [1] kullanılmıştır. İncelemelerde, plağın farklı delaminasyon burkulma modlarına sahip olduğu tespit edilmiştir. Bu çalışma kapsamında ele alınan sandviç dikdörtgen kalın plağın delaminasyon burkulma mod değişimlerine, plağa ait çeşitli geometrik ve malzeme parametreleri ile elektriksel ve mekanik alanların karşılıklı etkileri belirlenmeye çalışılacaktır.

Anahtar kelimeler: PZT sandviç kalın plak, 3B SEY, delaminasyon burkulma modu, kenar/iç çatlak, yüzey kırışıklıkları

THE EFFECT OF SOME GEOMETRICAL AND MATERIAL PARAMETERS ON THE BUCKLING DELAMINATION MODE OF PZT SANDWICH RECTANGULAR THICK PLATE

ABSTRACT

In this study, buckling delamination problems of PZT/Metal/PZT sandwich rectangular thick plate containing twin parallel edge cracks or twin embedded cracks between the layers are examined within the scope of boundary and contact conditions under the effect of uniaxial static pressure acting on two opposite sides along the direction of cracks. The considered problems are mathematically modelled by the exact equations of three-dimensional electro-elasticity theory in the framework of the piecewise homogeneous body model and solved numerically using three-dimensional finite elements modelling. The “initial imperfection criterion” [1] is used to determine the critical buckling delamination force of this PZT/Metal/PZT sandwich rectangular thick plate. In the investigations, it has been determined that this plate has different buckling modes due to the value of some problem parameters. It will be tried to explain the effects of various geometrical and material parameters and interaction between electrical and mechanical fields on the buckling mode of the plate.

Keywords: PZT sandwich thick plate, 3D FEM, buckling delamination mode, edge/embedded crack, surface wrinkles

* Corresponding author / Sorumlu yazar. Tel.:+902123834616 ; e-mail / e-posta: faylikci@yildiz.edu.tr

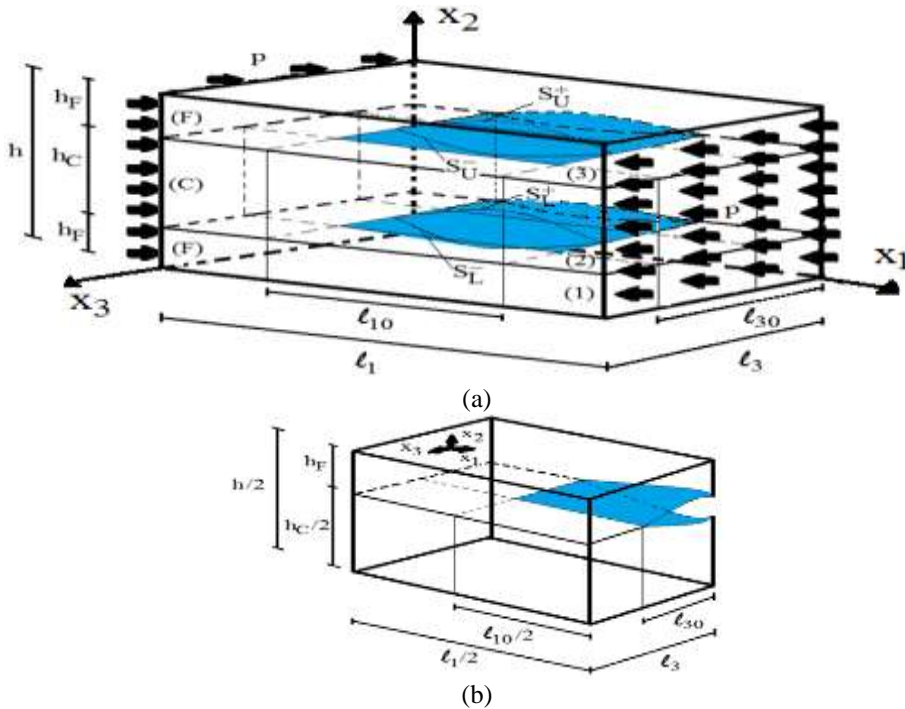
1. GİRİŞ

Çok katlı (tabakalı) kompozit malzemelerde veya bunlardan imal edilen yapı elemanlarında çeşitli dış etkiler altında, tabakaların birbirinden ayrılması problemleri (yani, delaminasyon/delaminasyon burkulma problemleri), bu yapı elemanlarının yük taşıma kapasitelerinin belirlenmesine ait teorik ve deneysel araştırmaların temel konularından biridir. Piezoelektrik (PZT) malzemeden yapılmış plak, kiriş gibi yapı elemanlarının delaminasyon burkulma problemleri ile ilgili literatürde az sayıda inceleme bulunmaktadır. Çatlak içeren çeşitli PZT şerit-plak veya ince plaklar için çeşitli mekaniksel ve/veya elektriksel yükler etkisinde oluşan delaminasyon burkulma problemlerinin ele alındığı bazı çalışmalar [2], [3], [4], [5] olarak verilebilir. Bu alanda elektro-elastisite teorisinin kesin denklemleri çerçevesinde matematiksel olarak modellenen delaminasyon burkulma problemleri PZT şerit-plaklar için [6]'da ve eksenel simetrik PZT kalın plaklar için [7]'de incelenmiştir. [8]'de ise ara yüzeylerinde iki adet birbirine paralel bant çatlak içeren PZT/Metal/PZT sandviç dikdörtgen kalın plağın üç boyutlu delaminasyon burkulma problemleri incelenmiştir.

Bu çalışmada, ele alınan piezoelektrik sandviç dikdörtgen kalın plağın, tabakaları arasında birbirine paralel ve özdeş kenar veya iç çatlakların olduğu kabul edilmiştir. Çatlaklar doğrultusunda tek eksenli dış basınç kuvveti etkisinde plağın delaminasyon burkulma problemleri, üç boyutlu elektro-elastisite teorisinin kesin denklemleri ve parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde modellenmiştir. Elde edilen bu matematiksel model yardımıyla oluşturulan sınır değer problemlerinin çözümü, üç boyutlu sonlu elemanlar modellemesi yardımıyla tarafımızdan yapılan algoritma ve programlar kullanılarak, sayısal olarak yapılmıştır. Ele alınan bazı sınır ve temas koşulları altında çatlak civarında oluşan delaminasyon burkulma modlarına, plağa ait çeşitli geometrik ve malzeme parametreleri ile elektriksel ve mekaniksel alanların karşılıklı etkileşimlerinin etkileri araştırılmış ve tartışılmıştır.

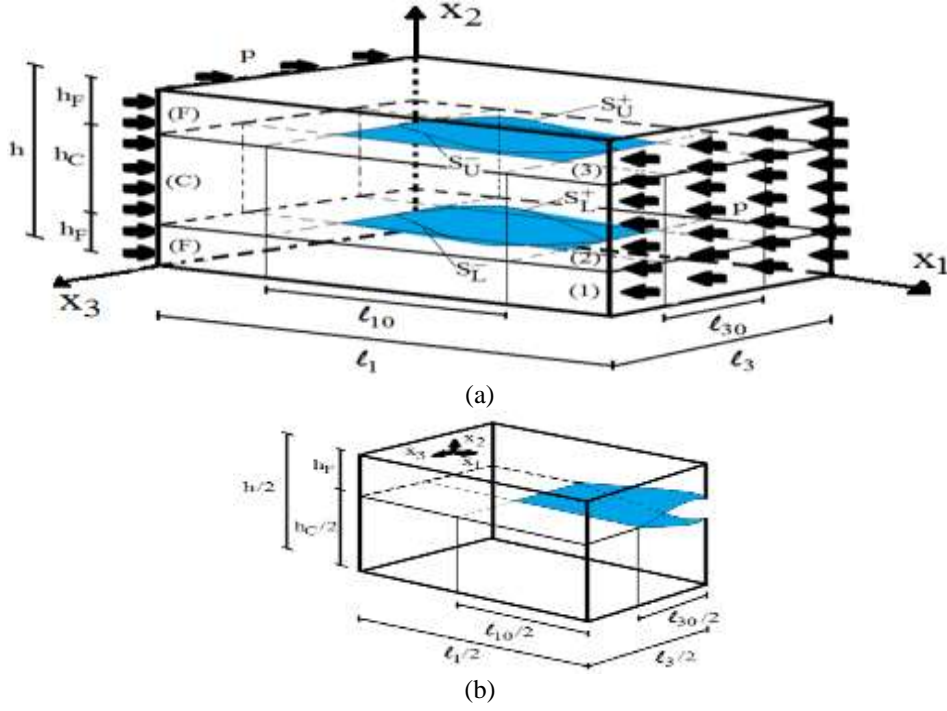
2. ALAN DENKLEMLERİ VE FORMÜLASYON

Ele alınan problemlerin matematiksel modeli, üç boyutlu Elektro-Elastisite teorisinin kesin alan denklemleri kullanılarak, parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde yapılmıştır. Sandviç dikdörtgen kalın plağın geometrisi ve yükleme durumu ile katmanlar arasında dikdörtgen kenar çatlaklar veya dikdörtgen iç çatlaklar içermesi durumları sırasıyla Şekil 1 ve Şekil 2 de verilmiştir.



Şekil 1. Kenar çatlaklar içeren kalın plakta yükleme durumu ve plak geometrisi (a) Çözüm bölgesinin tamamı (b) Çözüm bölgesinin 1/4'lük kısmı

PİEZOELEKTRİK SANDVIÇ DİKDÖRTGEN KALIN PLAĞIN DELAMİNASYON BURKULMA MODUNA ÇEŞİTLİ GEOMETRİK VE MALZEME PARAMETRELERİNİN ETKİSİ



Şekil 2. İç çatlaklar içeren kalın plakta yükleme durumu ve plak geometrisi (a) Çözüm bölgesinin tamamı (b) Çözüm bölgesinin 1/8'lik kısmı

Ele alınan sınır değer probleminin çözüm bölgesi,

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 - S_L^{\mp} - S_U^{\mp} \quad (1)$$

burada,

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{0 \leq x_1 \leq l_1; 0 \leq x_2 \leq h_F; 0 \leq x_3 \leq l_3\}, \\ \Omega_2 &= \{0 \leq x_1 \leq l_1; h_F \leq x_2 \leq h_F + h_C; 0 \leq x_3 \leq l_3\}, \\ \Omega_3 &= \{0 \leq x_1 \leq l_1; h_F + h_C \leq x_2 \leq h; 0 \leq x_3 \leq l_3\}, \end{aligned} \quad (2)$$

plağın kenar çatlak içermesi durumunda,

$$\begin{aligned} S_L^{\mp} &= \{(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2; x_2 = h_F \mp 0; 0 \leq x_3 \leq \ell_{30}\}, \\ S_U^{\mp} &= \{(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2; x_2 = h_F + h_C \mp 0; 0 \leq x_3 \leq \ell_{30}\}, \end{aligned} \quad (3)$$

plağın iç çatlak içermesi durumunda ise,

$$\begin{aligned} S_L^{\mp} &= \{(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2; x_2 = h_F \mp 0; (\ell_3 - \ell_{30})/2 \leq x_3 \leq (\ell_3 + \ell_{30})/2\}, \\ S_U^{\mp} &= \{(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2; x_2 = h_F + h_C \mp 0; (\ell_3 - \ell_{30})/2 \leq x_3 \leq (\ell_3 + \ell_{30})/2\} \end{aligned} \quad (4)$$

dir. (1)'de Ω_1 , Ω_2 ve Ω_3 'ler sırasıyla alt, orta ve üst katmanları (tabakaları); $S_L^{\mp}(S_U^{\mp})$ alt ve orta (orta ve üst) tabakalar arasında yer alan çatlakların alt (üst indis “-“ yani, $S_L^-(S_U^-)$) ve üst (üst indis “+“ yani, $S_L^+(S_U^+)$) yüzeylerini temsil etmektedir (Şekil 1 ve Şekil 2).

Dış tabaka ile orta tabakası arasında paralel özdeş dikdörtgen çatlaklar içeren PZT dikdörtgen sandviç kalın plak için (1) çözüm bölgesinde sağlanan yönetici denklemler, her r_n ($n = 1, 2, 3$) katman için,

F. AYLIKCI, N. YAHNIOĞLU

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{ji}^{(r_n)}}{\partial x_j} &= 0, \frac{\partial D_j^{(r_n)}}{\partial x_j} = 0, \\ K_{ji}^{(r_n)} &= T_{jk}^{(r_n)} \left(\delta_i^k + \frac{\partial u_i^{(r_n)}}{\partial x_k} \right) + M_{ji}^{(r_n)}, D_i^{(r_n)} = e_{ikl}^{(r_n)} s_{kl}^{(r_n)} + \varepsilon_{ik}^{(r_n)} E_k^{(r_n)} \\ T_{ij}^{(r_n)} &= c_{ijkl}^{(r_n)} s_{kl}^{(r_n)} - e_{kij}^{(r_n)} E_k^{(r_n)}, s_{kl}^{(r_n)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k^{(r_n)}}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l^{(r_n)}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i^{(r_n)}}{\partial x_l} \frac{\partial u_i^{(r_n)}}{\partial x_k} \right) \\ M_{ji}^{(r_n)} &= \varepsilon_0 \left(E_i^{(r_n)} E_j^{(r_n)} - \frac{1}{2} E_k^{(r_n)} E_k^{(r_n)} \delta_i^j \right), E_k^{(r_n)} = -\frac{\partial \phi^{(r_n)}}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (5)$$

olarak verilebilir. (5)'de $i; j; k; l = 1, 2, 3$ için T_{jk} , gerilme tansörü bileşenini; M_{ji} , Maxwell gerilme tansörü bileşenini; u_i , mekanik yer değiştirme vektörü bileşenini; D_i , elektriksel yer değiştirme vektörü bileşenini; s_{kl} , Green şekil değiştirme tansörü bileşenini; e_{ikl} , piezoelektrik sabitini; c_{ijkl} , elastik sabitini; ε_{ik} , dielektrik sabitini; E_{kl} , elektrik alan bileşenini ve ϕ , elektriksel potansiyeli temsil etmektedir. Ayrıca ε_0 boşluğun elektriksel geçirgenliğini ve δ_{ij} Kronecker sembolünü göstermektedir.

Ele alınan plağın mekaniksel büyüklüklere göre sınır koşulları; plağın kenar çatlak içermesi durumunda üç yanal yüzeyinden basit mesnetli, iç çatlak içermesi durumunda ise tüm yanal yüzeylerinden basit mesnetli ve plağın $x_1 = 0; \ell_1$ yüzeylerinden statik dış basınç kuvvetine maruz olduğu kabul edilmektedir. Ayrıca, plağın alt/üst ve çatlak yüzeylerinden herhangi bir dış kuvvetin etki etmediği kabul edilmektedir. Buna göre mekaniksel büyüklüklere göre sınır koşulları;

Plağın kenar çatlak içermesi durumunda,

$$\begin{aligned} u_2^{(r_n)}|_{x_1=0;\ell_1} &= 0, u_2^{(r_n)}|_{x_3=\ell_3} = 0, K_{11}^{(r_n)}|_{x_1=0} = K_{11}^{(r_n)}|_{x_1=\ell_1} = -p, K_{13}^{(r_n)}|_{x_1=0;\ell_1} = 0 \\ K_{31}^{(r_n)}|_{x_3=0;\ell_3} &= K_{33}^{(r_n)}|_{x_3=0;\ell_3} = K_{32}^{(r_n)}|_{x_3=0} = 0, K_{2i}^{(r_3)}|_{x_2=h} = K_{2i}^{(\eta)}|_{x_2=0} = 0, \\ K_{ji}^{(r_3)}|_{S_U^+} n_{jU}^+ &= K_{ji}^{(r_2)}|_{S_U^-} n_{jU}^- = 0, K_{ji}^{(r_2)}|_{S_L^+} n_{jL}^+ = K_{ji}^{(\eta)}|_{S_L^-} n_{jL}^- = 0, i; j = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (6)$$

ve plağın iç çatlak içermesi durumunda,

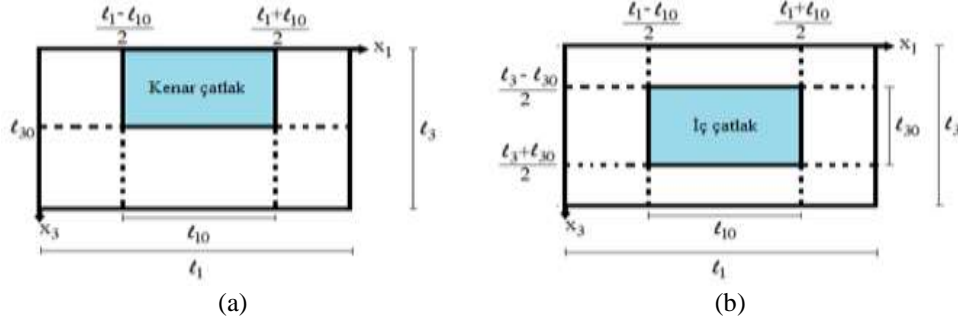
$$\begin{aligned} u_2^{(r_n)}|_{x_1=0;\ell_1} &= 0, u_2^{(r_n)}|_{x_3=0;\ell_3} = 0, K_{11}^{(r_n)}|_{x_1=0} = K_{11}^{(r_n)}|_{x_1=\ell_1} = -p, K_{13}^{(r_n)}|_{x_1=0;\ell_1} = 0 \\ K_{31}^{(r_n)}|_{x_3=0;\ell_3} &= K_{33}^{(r_n)}|_{x_3=0;\ell_3} = 0, K_{2i}^{(r_3)}|_{x_2=h} = K_{2i}^{(\eta)}|_{x_2=0} = 0, \\ K_{ji}^{(r_3)}|_{S_U^+} n_{jU}^+ &= K_{ji}^{(r_2)}|_{S_U^-} n_{jU}^- = 0, K_{ji}^{(r_2)}|_{S_L^+} n_{jL}^+ = K_{ji}^{(\eta)}|_{S_L^-} n_{jL}^- = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

olarak verilebilir. Ele alınan PZT dikdörtgen plağın (PZT levhaların) tüm yanal yüzeylerinde elektrik potansiyelinin sıfır olduğu yani, levhanın yanal yüzeylerinin yalıtkan olduğu kabul edilmektedir. Ancak PZT levhaların üst ve alt yüzeylerinden Ox_2 doğrultusundaki elektriksel yer değiştirmenin sıfır olduğu ayrıca, çatlakların içinin boş yani vakumlu olduğu kabul edilmiştir. Bu kabullere ait elektriksel büyüklüklere göre sınır koşulları;

$$\begin{aligned} \phi^{(r_n)}|_{x_1=0;\ell_1} &= 0, \phi^{(r_n)}|_{x_3=0;\ell_3} = 0, D_2^{(\eta)}|_{x_2=0} = D_2^{(r_3)}|_{x_2=h} = 0, \\ D_j^{(r_3)}|_{S_U^+} n_{jU}^+ &= D_j^{(r_2)}|_{S_U^-} n_{jU}^- = 0, D_j^{(r_2)}|_{S_L^+} n_{jL}^+ = D_j^{(\eta)}|_{S_L^-} n_{jL}^- = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

dır.

PİEZOELEKTRİK SANDVIÇ DİKDÖRTGEN KALIN PLAĞIN DELAMİNASYON BURKULMA MODUNA ÇEŞİTLİ GEOMETRİK VE MALZEME PARAMETRELERİNİN ETKİSİ



Şekil 3. Tabakaları arasında (a) kenar çatlak içeren (b) iç çatlak içeren piezoelektrik sandviç kalın plak için çatlakın, plağın $x_2 = h$ yüzeyinden görünüşleri

Mekaniksel ve elektriksel büyüklüklere göre sandviç kalın plağın tabakaları arasında Şekil 3'te gösterildiği gibi çatlak bölgesinin dışındaki kısımlarda ideal temas koşullarının sağlandığı yani,

$$\begin{aligned}
 K_{2i}^{(\eta)}|_{x_2=h_F} &= K_{2i}^{(r_2)}|_{x_2=h_F}, u_i^{(\eta)}|_{x_2=h_F} = u_i^{(r_2)}|_{x_2=h_F}, \\
 K_{2i}^{(r_2)}|_{x_2=h_F+h_C} &= K_{2i}^{(r_3)}|_{x_2=h_F+h_C}, u_i^{(r_2)}|_{x_2=h_F+h_C} = u_i^{(r_3)}|_{x_2=h_F+h_C}, \\
 \phi^{(\eta)}|_{x_2=h_F} &= \phi^{(r_2)}|_{x_2=h_F}, D_2^{(\eta)}|_{x_2=h_F} = D_2^{(r_2)}|_{x_2=h_F}, \\
 \phi^{(r_2)}|_{x_2=h_F+h_C} &= \phi^{(r_3)}|_{x_2=h_F+h_C}, D_2^{(r_2)}|_{x_2=h_F+h_C} = D_2^{(r_3)}|_{x_2=h_F+h_C}
 \end{aligned} \tag{9}$$

olduğu kabul edilmektedir.

Delayısıyla, ele alınan sınır değer problemleri, dış katmanları piezoelektrik, orta katmanı metal malzemeden yapılmış ve katmanlar arasında; i) paralel iki adet kenar çatlak (Problem 1: (1)-(3), (5) (6), (8), (9)) veya ii) paralel iki adet iç çatlak (Problem 2: (1), (2), (4), (5), (7)-(9)) içeren piezoelektrik sandviç dikdörtgen kalın plağın, karşılıklı iki kenarından düzgün yayılı statik dış basınç kuvveti etkisinde, çatlaklar civarında oluşan delaminasyon burkulma problemlerini temsil etmektedir. Ele alınan problemler nonlinear problemlerdir. Bu nonlinear problemlerin çözümü lineerleştirme işlemleri sonucunda, lineer seri-sınır değer problemlerinin çözümüne indirgenir [9]. Akbarov'un 2013'te yaptığı çalışmaya [9] dayanarak, aranan büyüklükler boyutsuz küçük parametre olan ε 'a göre seri formda, aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\left\{ \sigma_{ij}^{(r_n)}; \varepsilon_{ij}^{(r_n)}; u_i^{(r_n)}; D_i^{(r_n)}; E_i^{(r_n)}; \phi^{(r_n)} \right\} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \left\{ \sigma_{ij}^{(r_n),q}; \varepsilon_{ij}^{(r_n),q}; u_i^{(r_n),q}; D_i^{(r_n),q}; E_i^{(r_n),q}; \phi^{(r_n),q} \right\}, \varepsilon \ll 1. \tag{10}$$

(10) ifadeleri (5)-(9)'da yerine yazılır ε 'un kuvvetlerine göre düzenlenerek gruplaştırılırsa, bu parametrenin kuvvetlerine göre düzenlenmiş alan denklemleri, sınır ve temas koşullarından oluşan seri-sınır değer problemleri elde edilir. Kolaylık olsun diye ε 'un kuvvetlerine göre düzenlenmiş her bir sınır değer problemi, ε 'un kuvvetine göre isimlendirilmiştir. Örneğin sıfıncı, birinci vb. sınır değer problemi veya yaklaşım olarak isimlendirilmişlerdir. Ele alınan delaminasyon burkulma probleminin çözümü, (10) yardımıyla elde edilen seri-sınır değer problemlerinin çözümlerinin süperpozisyonu olarak elde edilecektir.

Ele alınan üç katlı piezoelektrik sandviç kalın plakta delaminasyona sebep olan kritik dış basınç kuvvetinin belirlenmesinde, (10) yardımıyla elde edilen seri-sınırdeğer problemlerinden sadece sıfıncı ve birinci yaklaşımın çözülmesi yeterlidir [9]. O nedenle her iki problem için (10) yardımıyla elde edilen seri sınır değer problemlerinden sadece, ilk iki yaklaşımın çözümü yapılacaktır.

Belirtelim ki, (10) yardımıyla elde edilen seri sınır değer problemlerinin (yaklaşımlarının) her biri, kendisinden önceki tüm yaklaşımlara ait büyüklükleri içermektedir. Bu nedenle birbirlerinden bağımsız çözülemezler. Yaklaşımlar, sıfıncı yaklaşımdan başlayarak ardışık olarak çözülmelidirler. Sıfıncı yaklaşıma ait sınır değer problemi, bilinen mekaniksel ve fiziksel görüşler kullanılarak yapılan kabuller altında analitik olarak çözülebilmektedir [8], [9]. Bu nedenle sıfıncı yaklaşım analitik olarak çözülmüştür.

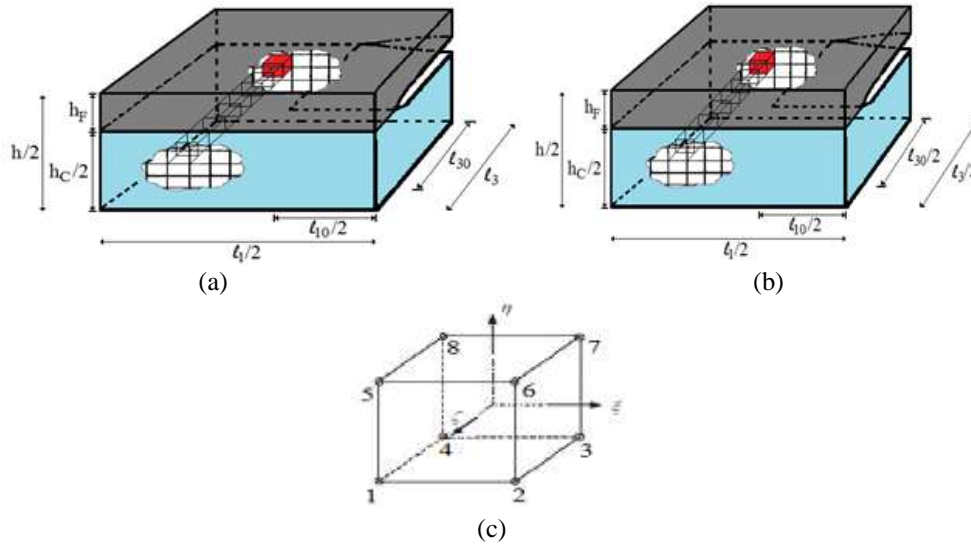
Birinci yaklaşıma ait sınır değer probleminin çözümü, üç boyutlu sonlu elemanlar modellemesi yardımıyla sayısal olarak elde edilecektir. Çözüm bölgesi 8 nodlu dikdörtgen prizmatik sonlu elemanlara ayrıştırılarak

F. AYLIKCI, N. YAHNIOĞLU

(Şekil 4c); nodlarda, üç eksen doğrultusundaki yer değiştirmeler ile elektriksel potansiyel ϕ aranan büyüklükler olarak alınacaktır. Sonlu eleman modellemesi için, cisimde biriken toplam elektro-mekanik enerjiyi ifade eden

$$\begin{aligned} \Pi(u_1^{(r_n),1}, u_2^{(r_n),1}, u_3^{(r_n),1}, \phi^{(r_n),1}) = & \sum_{n=1}^3 \iiint_{\Omega_n} \left[\frac{1}{2} G_{ijkl}^{(r_n),1} \frac{\partial u_i^{(r_n),1}}{\partial x_j} \frac{\partial u_k^{(r_n),1}}{\partial x_l} + R_{ijk}^{(r_n)} \frac{\partial \phi^{(r_n),1}}{\partial x_i} \frac{\partial u_j^{(r_n),1}}{\partial x_k} - \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^{(r_n)} \frac{\partial \phi^{(r_n),1}}{\partial x_k} \frac{\partial \phi^{(r_n),1}}{\partial x_l} \right] d\Omega_n - \iint_{S_L^-} T_{11}^{(1),0} \frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_1} u_1^{(1),1} \Big|_{x_2=h_F-0} dx_1 dx_3 - \\ & \iint_{S_L^+} T_{11}^{(2),0} \frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_1} u_1^{(2),1} \Big|_{x_2=h_F+0} dx_1 dx_3 - \iint_{S_U^-} T_{11}^{(2),0} \frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_1} u_1^{(2),1} \Big|_{x_2=h_F+h_C-0} dx_1 dx_3 - \\ & \iint_{S_U^+} T_{11}^{(3),0} \frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_1} u_1^{(3),1} \Big|_{x_2=h_F+h_C+0} dx_1 dx_3 - \iint_{S_L^-} D_1^{(1),0} \frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_1} \phi^{(1),1} \Big|_{x_2=h_F-0} dx_1 dx_3 - \\ & \iint_{S_L^+} D_1^{(2),0} \frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_1} \phi^{(2),1} \Big|_{x_2=h_F+0} dx_1 dx_3 - \iint_{S_U^-} D_1^{(2),0} \frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_1} \phi^{(2),1} \Big|_{x_2=h_F+h_C-0} dx_1 dx_3 - \\ & \iint_{S_U^+} D_1^{(3),0} \frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_1} \phi^{(3),1} \Big|_{x_2=h_F+h_C+0} dx_1 dx_3 \end{aligned} \quad (11)$$

fonksiyoneli kullanılacaktır [6], [10].



Şekil 4. Tabakaları arasında (a) kenar çatlak içeren (b) iç çatlak içeren piezoelektrik sandviç kalın plak için sonlu eleman ayrıklaştırması ve (c) bu ayrıklaştırmada kullanılan 8 nodlu standart dikdörtgen prizmatik sonlu eleman modeli

Sonlu elemanlar yöntemi gereği çözüm, her bir sonlu elemanda polinom olarak seçilir. (11)'de verilen fonksiyonelde yerine yazılarak Ritz tekniği yardımıyla, her bir sonlu eleman için ele alınan sınır değer probleminin çözümü, lineer cebirsel denklemler takımının çözümüne indirgenir. Bu cebirsel denklem takımının çözümü nodlarda aranan büyüklükleri verecektir [8].

Amacımız çatlaklar civarında oluşan delaminasyon burkulma modlarının belirlenmesidir ancak, öncelikle plakta delaminasyon burkulmaya neden olan kritik delaminasyon kuvveti belirlenmelidir. Ele alınan PZT dikdörtgen kalın plağın içerdiği çatlaklar civarında delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik dış basınç kuvvetinin değerleri [1],

PİEZOELEKTRİK SANDVIÇ DİKDÖRTGEN KALIN PLAĞIN DELAMİNASYON BURKULMA MODUNA ÇEŞİTLİ GEOMETRİK VE MALZEME PARAMETRELERİNİN ETKİSİ

$$p \rightarrow p_{cr} \text{ için } \left| u_2^{(3),1} \Big|_{\substack{x_2=h_F+h_C+0 \\ x_1=\ell_1/2}} \right| \rightarrow +\infty \tag{12}$$

biçiminde iterasyonlar yardımıyla, (11) den elde edilen cebirsel denklem takımından yararlanılarak belirlenecektir. Daha sonra verilen dış kuvvet $p < p_{cr}$ için çatlak yüzeyi burkulma mod grafikleri, çatlak yüzeyinin düşey yer değiştirmeleri yardımıyla belirlenecektir.

[1] küçük başlangıç eğinti kriterine dayanarak, esas yüklemeye yapılmadan önce çatlak yüzeylerine verilen ön eğinti formunu temsil eden $f(x_1, x_3)$ fonksiyonunun analitik ifadesi, plağın katmanları arasında kenar çatlaklar olması durumu için,

$$f(x_1, x_3) = Al_{10} \sin^2 \left(\frac{\pi}{\ell_{10}} \left(x_1 - \frac{\ell_1 - \ell_{10}}{2} \right) \right) \sin^2 \left(\frac{\pi}{2\ell_{30}} (x_3 - \ell_{30}) \right), \tag{13}$$

ve iç çatlaklar olması durumu için

$$f(x_1, x_3) = Al_{10} \sin^2 \left(\frac{\pi}{\ell_{10}} \left(x_1 - \frac{\ell_1 - \ell_{10}}{2} \right) \right) \sin^2 \left(\frac{\pi}{\ell_{30}} \left(x_3 - \frac{\ell_3 - \ell_{30}}{2} \right) \right) \tag{14}$$

olarak seçilmiştir [8],[9]. Bu fonksiyonlar aynı zamanda dış kuvvet etkisinde çatlak yüzeylerinin açılma formunu da göstermektedir. Bu fonksiyonlara göre, çatlakların alt ve üst yüzeylerinin birbirine göre zıt yönde açıldığı (anti-faz) görülmektedir.

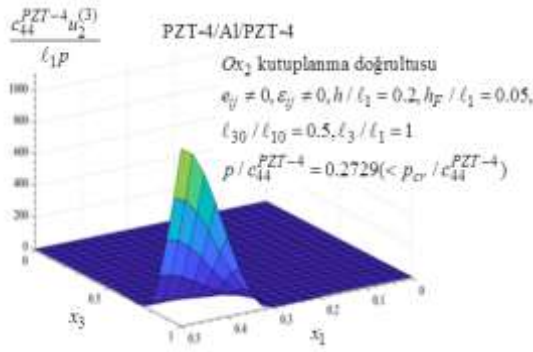
3. SAYISAL SONUÇLAR

Bu çalışma kapsamındaki sayısal hesaplamalarda kullanılan piezoelektrik malzemelere ait malzeme sabitleri Tablo 1’de verilmiştir. Ayrıca orta katman için Alüminyum (Al) ve Çelik (St) malzemeleri seçilmiştir. Al için malzeme sabitleri $E = 70 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ve $\nu = 0.3$ alınmıştır. Lamé sabitleri ($\lambda = E\nu / ((1+\nu)(1-2\nu))$) ve $\mu = E / (2(1+\nu))$ yardımıyla St için malzeme sabitleri $\lambda = 92.6 \times 10^9$ ve $\mu = 77.5 \times 10^9$ alınmıştır.

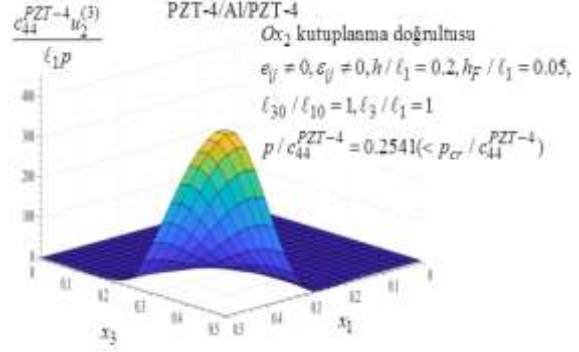
(5) de verilen bünye denklemlerinde yer alan c_{ijkl} ler için ij alt indisi p ; kl alt indisi q ile yer değiştirilerek basitleştirilirse (yani, $ii;kk = 11,22,33$ için $p; q = 1,2,3$ ve $ij;kl = 13,23,12$ için $p; q = 4,5,6$ ($ij = jl$; $kl = lk$)) c_{pq} elastisite sabitleri, Lamé sabitleri yardımıyla orta katman malzemeleri Al ve St için $c_{11} = \lambda + 2\mu$, $c_{22} = c_{33} = c_{11}$, $c_{12} = c_{21} = \lambda$, $c_{13} = c_{31} = \lambda$, $c_{23} = c_{32} = \lambda$, $c_{66} = \mu$ ve $c_{44} = c_{55} = c_{66}$ olarak bulunur.

Tablo 1. Seçilen PZT malzemelerin mekanik, piezoelektrik ve dielektrik sabitleri

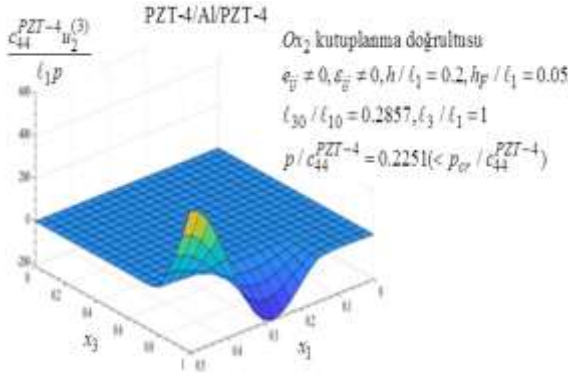
Malzemeler [10]	$c_{11}^{(r1)}$	$c_{12}^{(r1)}$	$c_{13}^{(r1)}$	$c_{33}^{(r1)}$	$c_{44}^{(r1)}$	$c_{66}^{(r1)}$	$e_{31}^{(r1)}$	$e_{33}^{(r1)}$	$e_{15}^{(r1)}$	$\epsilon_{11}^{(r1)}$	$\epsilon_{33}^{(r1)}$
PZT-4	13.9	7.78	7.40	11.5	2.56	3.06	-5.2	15.1	12.7	0.646	0.562
PZT-5H	12.6	7.91	8.39	11.7	2.30	2.35	-6.5	23.3	17.0	1.505	1.302
BaTiO ₃	15.0	6.53	6.62	14.6	4.39	4.24	-4.3	17.5	11.4	0.987	1.116
	$\times 10^{10} \text{ N / m}^2$						C / m^2		$\times 10^{-8} \text{ C / Vm}$		



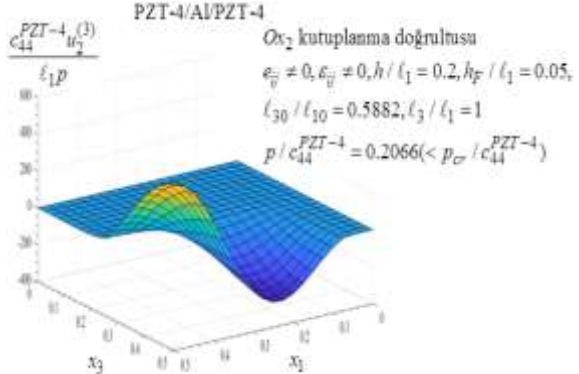
Şekil 5. Çatlak yüzeyi burkulma modu (Problem 1)
($\ell_{10}/\ell_1 = 0.4, e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0, x_2 = h_F + h_C + 0$)



Şekil 6. Çatlak yüzeyi burkulma modu (Problem 2)
($\ell_{10}/\ell_1 = 0.5, e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0, x_2 = h_F + h_C + 0$)



Şekil 7. Çatlak yüzeyi burkulma modu (Problem 1)
($\ell_{10}/\ell_1 = 0.7, e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0, x_2 = h_F + h_C + 0$)



Şekil 8. Çatlak yüzeyi burkulma modu (Problem 2)
($\ell_{10}/\ell_1 = 0.85, e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0, x_2 = h_F + h_C + 0$)

PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plak için $x_2 = h_F + h_C$ 'deki çatlakın üst yüzeyine ait noktaların, düşey doğrultudaki yer değiştirmelerinin grafiği (yani, çatlak yüzeyi burkulma modu) plağın kenar çatlak içermesi (Problem 1) durumunda Şekil 5 ve Şekil 7 ile plağın iç çatlak içermesi (Problem 2) durumunda ise Şekil 6 ve Şekil 8 'de verilmiştir. Şekil 5 ve Şekil 6'da verilen ve çatlak yüzeyinin burkulma modunu gösteren yüzey grafikleri, sırasıyla (13) ve (14) ile verilen ön eğintinin formuna uygun düşmektedir. Bununla beraber, Şekil 7 ve Şekil 8'de sadece farklı çatlak boyutları için bu yüzeyde çizilen yüzey grafikleri, sırasıyla (13) ve (14) ile verilen ön eğintinin formuna uygun düşmemektedir.

Çatlakın geometrik boyutlarının (veya çatlak kenar uzunlukları oranının) değişimi neticesinde oluşan bu durumu açıklayabilmek için Ox_3 doğrultusundaki çatlak uzunluğunun, Ox_1 doğrultusundaki çatlak uzunluğuna oranının (ℓ_{30}/ℓ_{10}) değişiminin, burkulma modları (yani, çatlak yüzeyindeki düşey yer değiştirmelerin yayılımı) üzerindeki etkileri araştırılmıştır. Şekil 9-Şekil 12'de verilen grafiklerde düşey eksendeki v 'nin değeri

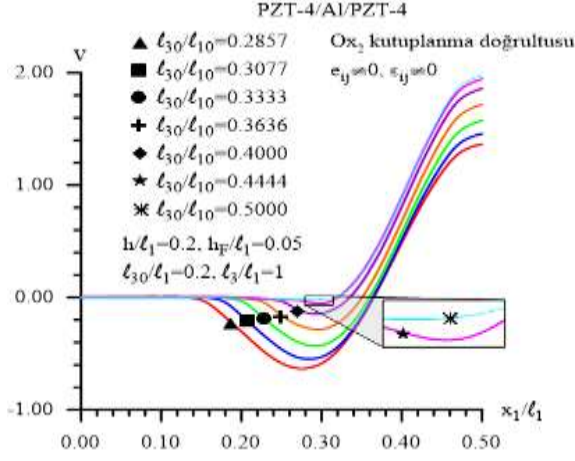
$$v = 2u_2^{(r_3)} \left(\left(\max_{0 \leq x_1/\ell_1 \leq 0.5} u_2^{(r_3)} - \min_{0 \leq x_1/\ell_1 \leq 0.5} u_2^{(r_3)} \right) \right)^{-1} \quad (15)$$

şeklinde belirlenmiştir. Belirtelim ki, bu grafikler $e_{ij} = \varepsilon_{ij} = 0$ (Durum 1) ve $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ (Durum 2) durumları için ayrı ayrı verilmiştir. Bu durumlar (Durum 1 ve Durum 2) elektriksel alan ile mekaniksel alanın karşılıklı etkisinin alınması (Durum 2) ve alınmaması (Durum 1) durumlarına karşı gelmektedir.

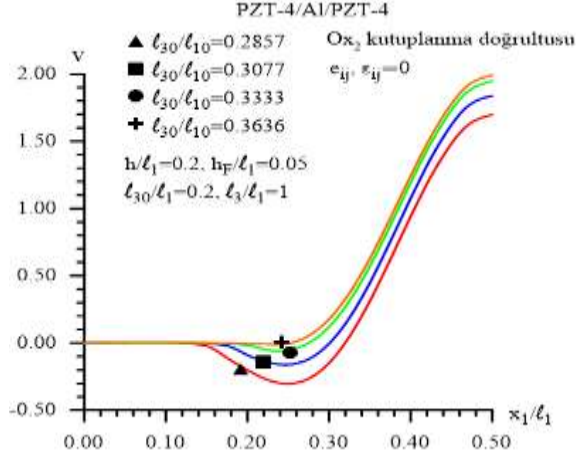
Şekil 9 ve Şekil 10 (Şekil 11 ve Şekil 12)'de $x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$ ($x_3 = \ell_3/2, x_2 = h_F + h_C + 0$) için çatlakın üst yüzeyini içeren kesitte düşey yer değiştirmenin farklı çatlak kenar uzunlukları oranı (ℓ_{30}/ℓ_{10}) için grafikleri verilmiştir. Bu grafiklerde, burkulma modlarının ℓ_{30}/ℓ_{10} oranına önemli ölçüde bağlı olduğu

PİEZOELEKTRİK SANDVIÇ DİKDÖRTGEN KALIN PLAĞIN DELAMİNASYON BURKULMA MODUNA ÇEŞİTLİ GEOMETRİK VE MALZEME PARAMETRELERİNİN ETKİSİ

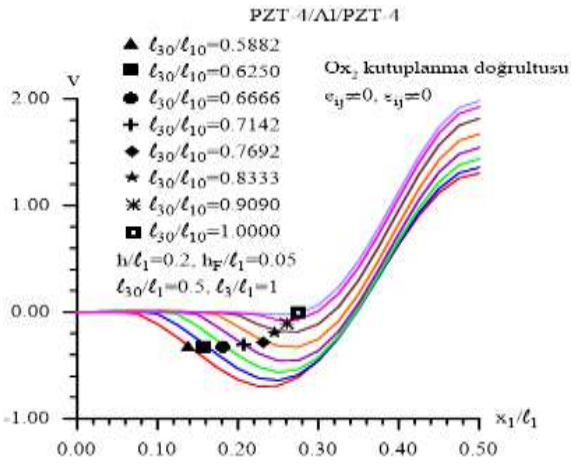
görülmektedir. Bu oran küçüldükçe çatlak yüzeyindeki düşey yer değiştirmelerin yayılımının (çatlak yüzeyi burkulma modunun), başlangıçta çatlak yüzeylerine verilen ve (13) ile (14) fonksiyonlarıyla gösterilen ön eğinti formundan farklı bir formda gerçekleştiği tespit edilmiştir. Bu farklılığın oluşumu ve gelişimi Şekil 9-Şekil 12’de detaylı şekilde verilmiştir.



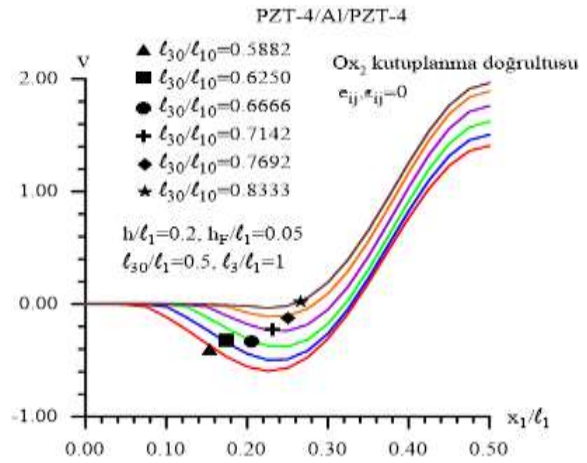
Şekil 9. Kenar çatlak içeren sandviç kalın plak için $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yer değiştirmelerin, bazı l_{30}/l_{10} değerlerinde x_1/l_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$)



Şekil 10. Kenar çatlak içeren sandviç kalın plak için $e_{ij}, \varepsilon_{ij} = 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yer değiştirmelerin, bazı l_{30}/l_{10} değerlerinde x_1/l_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$)



Şekil 11. İç çatlak içeren sandviç kalın plak için $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yer değiştirmelerin, bazı l_{30}/l_{10} değerlerinde x_1/l_1 'e göre değişimi ($x_3 = l_3/2, x_2 = h_F + h_C + 0$)



Şekil 12. İç çatlak içeren sandviç kalın plak için $e_{ij}, \varepsilon_{ij} = 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yer değiştirmelerin, bazı l_{30}/l_{10} değerlerinde x_1/l_1 'e göre değişimi ($x_3 = l_3/2, x_2 = h_F + h_C + 0$)

Burkulma modunun, başlangıç ön eğinti formu ile aynı olduğu en küçük l_{30}/l_{10} değeri $(l_{30}/l_{10})^* = \tau$ ile gösterilirse Şekil 9-Şekil 12 grafiklerinden ve benzer şekilde farklı malzeme çiftleri için oluşturulan grafiklerden yararlanılarak, τ değerleri için Tablo 2 ve Tablo 3 oluşturulabilir. Her $l_{30}/l_{10} < \tau$ için çatlak yüzeyi burkulma modunun, başlangıçta verilen ön eğinti formundan farklı bir formda olduğu Şekil 9-Şekil 12’de açıkça görülmektedir. Çatlak kenar uzunlukları oranının burkulma modu üzerindeki etkisi, farklı mühendislik uygulamalarında karşılaşılan yüzey kırışıklıklarının açıklanması yönünden önemli görülmektedir. Bu alanda araştırmalar yapan Hutchinson ve öğrencilerinin [2] çalışmasında da deneysel olarak yüzey burkulma modları araştırılmıştır. Bu araştırmacıların deneysel olarak belirledikleri yüzey burkulma modlarının, tarafımızdan ele

F. AYLIKCI, N. YAHNIOĞLU

alınan burkulma problemlerinde sayısal olarak elde edilmesi dikkate değer önemli bir sonuçtur. Ayrıca, Tablo 2 ve Tablo 3'te verilen sayısal sonuçlardan, yüzeyin burkulma modlarının değişiminin sadece çatlak kenar uzunlukları oranı ℓ_{30} / ℓ_{10} 'ye bağlı olmadığı, aynı zamanda çatlak çevreleyen malzeme özellikleri (dış katman ve orta katman malzeme özellikleri) ile dış katman malzemesi (PZT) için elektriksel alan ile mekaniksel alanların karşılıklı etkisine de bağımlı olduğu görülmektedir.

Tablo 2. Farklı çatlak geometrilerine sahip PZT/Al/PZT sandviç dikdörtgen kalın plaklar için burkulma mod değişimine neden olan kritik çatlak boyutları oranı $(\ell_{30} / \ell_{10})^*$ ($= \tau$) değerleri

Çatlak geometrisi	PZT-4/Al/PZT-4		PZT-5H/Al/PZT-5H		BaTiO ₃ /Al/ BaTiO ₃	
	$e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$	$e_{ij}; \varepsilon_{ij} = 0$	$e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$	$e_{ij}; \varepsilon_{ij} = 0$	$e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$	$e_{ij}; \varepsilon_{ij} = 0$
Kenar çatlak	0.5000	0.3636	0.5000	0.4000	0.4000	0.3636
İç çatlak	1.0000	0.8333	1.0000	0.9090	0.9090	0.8333

Tablo 3. Farklı çatlak geometrilerine sahip PZT/St/PZT sandviç dikdörtgen kalın plaklar için burkulma mod değişimine neden olan kritik çatlak boyutları oranı $(\ell_{30} / \ell_{10})^*$ ($= \tau$) değerleri

Çatlak geometrisi	PZT-4/St/PZT-4		PZT-5H/St/PZT-5H		BaTiO ₃ /St/ BaTiO ₃	
	$e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$	$e_{ij}; \varepsilon_{ij} = 0$	$e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$	$e_{ij}; \varepsilon_{ij} = 0$	$e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$	$e_{ij}; \varepsilon_{ij} = 0$
Kenar çatlak	0.5714	0.4000	0.5714	0.4444	0.4444	0.4000
İç çatlak	1.1111	0.9090	1.1111	1.0000	1.0000	0.9090

Piezoelektrik sandviç dikdörtgen plağın çatlak yüzeyi burkulma mod değişimleri ile ilgili olarak τ değerleri (Tablo 2 ve Tablo 3) için

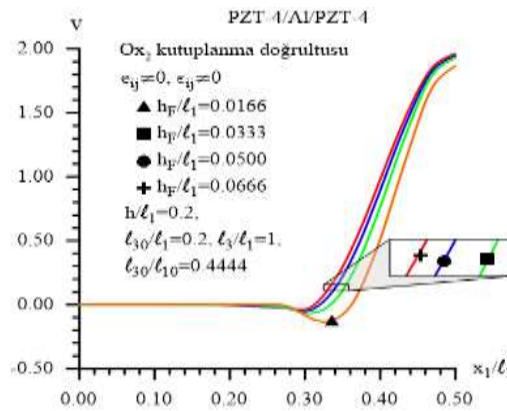
$$\tau_{PZT-5H} > \tau_{PZT-4} > \tau_{BaTiO_3}, \quad (16)$$

$$\tau_{St} > \tau_{Al}, \quad (17)$$

$$\tau_{e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0} > \tau_{e_{ij}; \varepsilon_{ij} = 0}, \quad (18)$$

$$\tau_{İç çatlak} > \tau_{Kenar çatlak} \quad (19)$$

eşitsizliklerinin yazılabildiği görülmektedir.



Şekil 13. PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plak için farklı dış katman kalınlıklarına göre kenar çatlak yüzeyindeki yer değiştirmelerin x_1 / ℓ_1 'e göre grafiği

Şekil 13'te verilen grafikte kenar çatlak içeren PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plağın farklı dış katman kalınlıklarının, delaminasyon burkulma moduna etkisi verilmiştir. Bu grafik incelendiğinde ve benzer şekilde

PİEZOELEKTRİK SANDVIÇ DİKDÖRTGEN KALIN PLAĞIN DELAMİNASYON BURKULMA MODUNA ÇEŞİTLİ GEOMETRİK VE MALZEME PARAMETRELERİNİN ETKİSİ

farklı malzeme çiftleri ve farklı çatlak geometrisi için elde edilen grafikler göz önüne alındığında, dış katman kalınlığının da delaminasyon burkulma moduna etki gösterdiği ve kritik oran τ değerini değiştirdiği yani, h_F değeri arttıkça kritik oran τ değerinin azaldığı tespit edilmiştir.

4. SONUÇLAR

Çatlaklar doğrultusunda etki eden dış basınç kuvveti etkisinde dikdörtgen kenar veya dikdörtgen iç çatlak içeren PZT sandviç dikdörtgen kalın plağın burkulma modunun, bazı problem parametre değerleri için bu yüzeylere başlangıçta verilen ön eğinti formundan farklı formda gerçekleştiği tespit edilmiştir. Yapılan detaylı incelemelerde çatlak yüzeyi burkulma mod değişimine etki eden bu parametrelerin; çatlak boyutları (ℓ_{10}, ℓ_{30}) , dış katmanların malzemesi (PZT ($e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$) veya elastik ($e_{ij}; \varepsilon_{ij} = 0$) malzeme olması), orta katman malzemesi (Al veya St), çatlak konumu ve katman kalınlıkları olduğu tespit edilmiştir.

İncelemelerde, çatlak boyutları oranı (ℓ_{30} / ℓ_{10}) küçüldükçe çatlak yüzeyi burkulma modunun, başlangıçta çatlak yüzeylerine verilen ön eğinti formundan (denklem (13) veya (14)) farklı bir formda gerçekleştiği tespit edilmiştir. Delaminasyon burkulma modunun ön eğinti formu ile aynı olduğu (ℓ_{30} / ℓ_{10}) oranının en küçük değeri $(\ell_{30} / \ell_{10})^* = \tau$ ile gösterilirse, çatlak kenar uzunlukları oranına bağlı olarak $(\ell_{30} / \ell_{10}) < \tau$ sağlanıyorsa, plağın delaminasyon burkulma mod değişimi elde edilmektedir. Dolayısıyla τ parametresi değerine problem parametrelerinin etkisini belirlemek, problem parametrelerinin plağın delaminasyon burkulma moduna etkilerini belirlemek ile eşdeğerdir. Yapılan incelemeler neticesinde katman kalınlıklarının, dış katman ve/veya orta katman malzeme özelliklerinin (PZT veya elastik) ve yapıdaki çatlakın konumunun (iç veya kenar çatlak) τ değerini değiştirdiği tespit edilmiştir. Bu problem parametrelerinin τ değerine etkileri, formül (16)-(19) eşitsizlikleri ile verilmiş olup, bu eşitsizliklerin elde edilmesinde kullanılan sayısal sonuçlar (τ değerleri) Tablo 2 ve Tablo 3 'de verilmiştir.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma, Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü'nün 2016-07-03-DOP03 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] HOFF, N.J., "Buckling and Stability", Journal of the Royal Aeron, Society, 58, 3-52, 1954.
- [2] EVANS, A.G., HUTCHINSON, J.W., "The Thermomechanical Integrity of Thin Films and Multilayers", Acta Metallurgical et Materialia, 43 (7) , 2507-2530, 1995.
- [3] HU, Y.T., YANG, J.S., JIANG, Q., "A Model for Electroelastic Plates Under Biasing Fields with Applications in Buckling Analysis", International Journal of Solids and Structures, 39, 2629-2642, 2002.
- [4] YAN, Y., SHANG, F., "Cohesive Zone Modeling of Interfacial Delamination in PZT Thin Films", International Journal of Solids and Structures, 46 (13), 2739-2749, 2009.
- [5] YANG, J.S., "Buckling of a Piezoelectric Plate", International Journal of Solids and Structures, 44, 399-408, 1998.
- [6] AKBAROV, S.D., YAHNIOGLU, N., "Buckling Delamination of a Sandwich Plate-Strip with Piezoelectric Face and Elastic Core Layers", Applied Mathematical Modelling, 37 (16-17), 8029-8038, 2013.
- [7] CAFAROVA, F.I., AKBAROV, S.D., YAHNIOGLU, N., "Buckling Delamination of the PZT/Metal/PZT Sandwich Circular Plate-Disc with Penny-Shaped Interface Cracks", Smart Structures and Systems, 19 (2), 163-79, 2017.
- [8] AYLIKCI, F., AKBAROV, S.D., YAHNIOGLU, N., "Buckling Delamination of a PZT/Metal/PZT Sandwich Rectangular Thick Plate Containing Interface Inner Band Cracks", Composite Structures, 202, 9-16, 2018.

F. AYLIKCI, N. YAHNIOĞLU

- [9] AKBAROV, S.D., Stability Loss and Buckling Delamination: Three-Dimensional Linearized Approach for Elastic and Viscoelastic Composites, Springer. Heidelberg, New York, 2013.
- [10] YANG, J., An Introduction to the Theory of Piezoelectricity, Vol. 9, Springer, 2004.