



THE CONTACT PROBLEM ANALYSIS OF TWO LAYERS RESTED ON AN ELASTIC SEMI-INFINITE PLANE USING ANALYTICAL AND FINITE ELEMENT METHODS

Pınar Bora¹, Talat Şükrü Özşahin²

¹Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Sivas Cumhuriyet University, Turkey

²Department of Civil Engineering, Faculty of Civil Engineering, Karadeniz Technical University, Turkey

Original Scientific Paper

In this study, the continuous contact problem of two layers which are rested on an elastic semi-infinite plane loaded by two rigid blocks is analyzed. In the problem, all surfaces are considered frictionless and the mass forces of the layers are included. The analytical solution of the problem is performed by using elasticity theory and integral transformation techniques, firstly. The initial separation loads λ_{cr} , initial separation distances x_{cr} , and normal stresses σ_y which occur the layers and between the substrate and the elastic semi-infinite plane are obtained. Then, the finite element model of the problem is constituted with the ANSYS program. The results obtained from the analytical solution are compared with those obtained from the finite element model. The results are shown in table and graphs.

Keywords Continuous Contact, Elastic Layer, Rigid Blok, Integral Equation, Finite Element Method

ELASTİK YARI SONSUZ DÜZLEM ÜZERİNE OTURAN İKİ TABAKANIN ANALİTİK YÖNTEM VE SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE SÜREKLİ TEMAS PROBLEMİ ANALİZİ

Orijinal Bilimsel Makale

Bu çalışmada, iki rijit dikdörtgen blok ile yüklenmiş elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan iki tabakanın sürekli temas probleminin analizi yapılmıştır. Problemden tüm yüzeyler sürtünmesiz kabul edilmiş ve tabakaların kütle kuvvetleri dahil edilmiştir. Öncelikle elastisite teorisi ve integral dönüşüm teknikleri kullanılarak problemin analitik çözümü yapılmıştır. Tabakalar arasında ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında meydana gelen ilk ayrılma yükleri λ_{cr} , ilk ayrılma uzaklıkları x_{cr} , ve σ_y normal gerilmeleri elde edilmiştir. Daha sonra ise problem sonlu elemanlar yönteminin kullanıldığı ANSYS paket programı yardımıyla modellenmiştir. Analitik çözümden elde edilen sonuçlar, sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçlarla kıyaslanmıştır. Sonuçlar tablo ve grafikler halinde gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sürekli Temas, Elastik Tabaka, Rijit Blok, İntegral denklemler, Sonlu Elemanlar Metodu

1 Giriş

Mühendislikte pek çok durumda yapı elemanları birbiri ile temas halindedir ve yükler yapıların farklı elemanları veya bölümleri arasındaki temas ile aktarılır. Bu nedenle temas problemleri pratik öneme sahip mühendislik yapılarında geniş uygulama alanları bulmuşlardır.

Temas mekaniği konusunun Hertz tarafından 1882 yılında yazılan “Elastik Cisimlerin Teması” adlı makale ile başladığı söylenilebilir. Hertz’in yapmış olduğu bu çalışma sürtünmesiz yüzey ve tam elastik cisimlerle sınırlandırılmıştır [1]. Ratwani ve Erdoğan, değişik profillerdeki blok ile bastırılan ve elastik yarım düzleme oturan sürtünmesiz düzlemsel temas problemini incelemişlerdir [2]. Geçit ve Gökpınar, rijit dairesel bir mesnete oturan elastik tabakanın temas problemini, tabaka ve mesnetler arasında sürtünme olmadığı temas yüzeyleri boyunca sadece basınç gerilmelerinin aktarıldığı varsayarak incelemişlerdir [3]. Giannakopoulos ve Pallot, elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan silindirik rijit bir blok aracılığı ile

yüklenmiş elastik tabakanın sürtünmesiz temas problemini incelemiştir [4]. Özşahin ve Taşkın, rijit üç blok ile yüklenmiş elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan tabakanın temas problemini incelemişlerdir [5]. Literatürde elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan farklı yükleme özelliklerine sahip elastik tabaka veya tabakaların sürtünmesiz sürekli ve sürekli temas problemlerine sıklıkla rastlamak mümkündür [6-14].

Bilgisayar teknolojisinin gelişmesi ile birlikte, analitik çözümlerde karmaşık matematiksel denklemlerin çözülmesi daha kolay ve daha kısa sürede gerçekleştiği için araştırmacılar, problemlerin çözümünde yaklaşık yöntemler kullanmaya başlamışlardır. Bununla birlikte çalışmaların sayısı önemli ölçüde artış göstermiştir. Sezer, ANSYS Sonlu Elemanlar paket programını kullanarak temas eden sistem yapı elemanlarını modellemiş ve ANSYS paket programı içerisinde bulunan değişik temas algoritmaları ve temas elemanı uygulama seçeneklerini irdelemiştir [16]. Kanber, iki boyutlu temas problemlerini geçiş elemanları kullanarak Sonlu Elemanlar Metodu ile incelemiştir [17]. Yaylacı, düzgün yayılı yük ile yüklü simetrik iki çeyrek düzleme oturan iki elastik tabakanın

* Corresponding author.

E-mail address: pyildirim@cumhuriyet.edu.tr (P. Bora) | ORCID Number : 0000-0001-8932-1828

Received 31 October 2019; Received in revised form 8 December 2019; Accepted 10 December 2019

2587-1943 | © 2019 IJIEA. All rights reserved.

sürtünmesiz temas problemini elastisite teorisine göre incelemiş ve aynı problemi sonlu elemanlar yöntemini kullanan ANSYS paket programı ile analiz etmiştir [18]. Polat vd. Elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan iki dikdörtgen blok ile yüklenmiş fonksiyonel derecelendirilmiş tabakadaki sürekli temas problemini sonlu elemanlar yöntemi ile incelemişlerdir [19]. Yine literatürde sonlu elemanlar yöntemi ve ANSYS gibi paket programlar yardımı ile çözümlenen pek çok çalışmaya rastlamak mümkündür [20-28]. Bu çalışmada amaç, iki rijit dikdörtgen blok ile yüklenmiş elastik iki tabakanın sürekli temas problemini her iki yüzey içinde analitik yöntem ve sonlu elemanlar yöntemi ile inceleyerek sonuçları kıyaslamaktır. Problemden hem tabakalar hem elastik yarı sonsuz düzlem homojen ve izotropdur.

2 Problemin Analitik Çözümü

Problemin çözümünde ilk olarak denge denklemleri, bünye denklemleri, yer değiştirme ve şekil değiştirme bağıntıları yardımıyla Navier denklemleri elde edilmiştir. Navier denklemlerine, Fourier integral dönüşüm tekniği uygulanarak bir grup adi diferansiyel denklem takımı elde edilmiştir.

Tekil integral denklemlerin çözümünde ise Gauss-Chebyshev integrasyon formüllerinden faydalanılmıştır. Dış yükler P ve Q tabakalara iki düz blok ile aktarılmaktadır. $(+\infty, -\infty)$ aralığında uzanan h_1 ve h_2 yüksekliğindeki sürtünmesiz iki tabakaya ait geometri ve eksen takımı şekil 1'de görülmektedir. Problemin çözümünde tabaka yükseklikleri eşit alınmıştır. Genel denklemler:

değiştirme bileşenlerini, μ_k ve κ_k ise kayma modüllerini ve elastik malzeme sabitlerini göstermektedir. κ_k elastik tabakalara ait malzeme sabitlerinin düzlem şekil değiştirme halinde $\kappa_k = (3-4\nu_k)$, düzlem gerilme halinde ise $\kappa_k = (3-\nu_k)/(1+\nu_k)$ olduğu bilinmektedir. ν_k poisson oranını göstermektedir ($k=1,2$). 1ve 2 indisi elastik tabakaları göstermektedir.

u_p ve v_p kütle kuvvetlerinin dahil edilmesi durumunda meydana gelen yer değiştirmeleri, u_h ve v_h ise kütle kuvvetinin ihmal edilmesi durumunda meydana gelen yer değiştirmeleri göstermektedir. Toplamda meydana gelen yer değiştirmeler ise aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

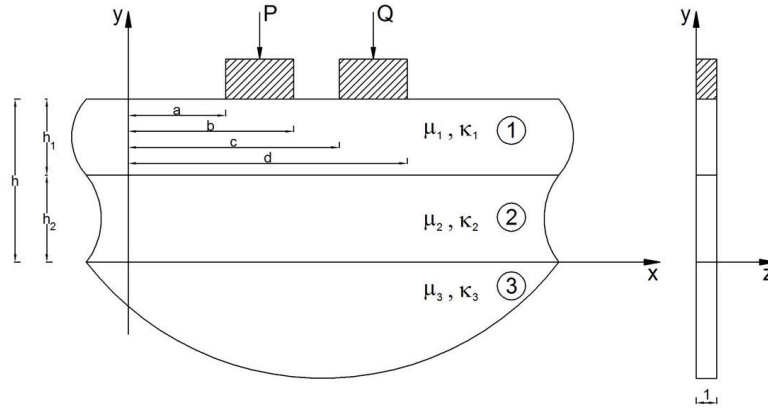
$$u = u_p + u_h \quad (3)$$

$$v = v_p + v_h \quad (4)$$

Navier denklemlerini adi diferansiyel denklem takımına dönüştürmek ve çözümü kolaylaştırmak için yer değiştirmeler $u(x,y)$ ve $v(x,y)$, bilinmeyen fonksiyonlar

$U = (x, y)$, $V = (x, y)$ 'nin Fourier dönüşümleri olarak tanımlanırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$u_h(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_1(\alpha, y) e^{i\alpha x} d\alpha \quad (5)$$



Şekil 1. Problemin geometrisi

$$\mu_k \nabla^2 u_k + \frac{2\mu_k}{(\kappa_k - 1)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial v_k}{\partial y} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\mu_k \nabla^2 v_k + \frac{2\mu_k}{(\kappa_k - 1)} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial v_k}{\partial y} \right) = \rho_k g \quad (2)$$

burada $\rho_k g$ y eksenini doğrultusundaki kütle kuvveti, ρ_k ve g ise sırasıyla tabakanın yoğunluğu ve yer çekimi ivmesidir. u_k ve v_k , x ve y eksenini doğrultularındaki yer

$$v_h(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V_1(\alpha, y) e^{i\alpha x} d\alpha \quad (6)$$

Burada $i = \sqrt{-1}$ 'dir. (5) ve (6) nolu denklemlerde verilen yer değiştirmelerin türevleri (1) ve (2) nolu denklemlerde yerine yazılıp elde edilen ikinci dereceden diferansiyel denklemlerin çözümüyle x ve y doğrultularındaki yer değiştirmeler aşağıdaki gibi bulunur.

$$u_{ih}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ie^{-|\alpha|y} [-A_1 \frac{|\alpha|}{\alpha} + B_1(\frac{\kappa_1}{\alpha} - \frac{|\alpha|}{\alpha} y)] + ie^{|\alpha|y} [C_1 \frac{|\alpha|}{\alpha} + D_1(\frac{\kappa_1}{\alpha} + \frac{|\alpha|}{\alpha} y)]\} e^{i\alpha x} d\alpha \quad (7)$$

$$v_{ih}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ie^{-|\alpha|y} [A_1 + B_1 y] + ie^{|\alpha|y} [C_1 + D_1 y]\} e^{i\alpha x} d\alpha \quad (8)$$

1 ve 2. tabakalar için gerilme denklemleri Hooke Kanunları ve (7) ve (8) nolu denklemler kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\sigma_{x_{i_h}}(x, y) = -\frac{\mu_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \{e^{-|\alpha|y} \{-2A_1|\alpha| + B_1[(\kappa_1 + 3) - 2|\alpha|y]\} + e^{|\alpha|y} \{2C_1|\alpha| + D_1[(\kappa_1 + 3) + 2|\alpha|y]\}\} d\alpha$$

$$\sigma_{y_{ih}}(x, y) = \frac{\mu_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \{e^{-|\alpha|y} \{-2A_1|\alpha| + B_1[(\kappa_1 - 1) - 2|\alpha|y]\} + e^{|\alpha|y} \{2C_1|\alpha| + D_1[(\kappa_1 - 1) + 2|\alpha|y]\}\} d\alpha \quad (10)$$

$$\tau_{xy_{ih}}(x, y) = \frac{i\mu_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \{e^{-|\alpha|y} \{2A_1\alpha + B_1[-\frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa_1 + 1) + 2\alpha y]\} + e^{|\alpha|y} \{2C_1\alpha + D_1[\frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa_1 + 1) + 2\alpha y]\}\} d\alpha \quad (11)$$

Şekil 1a' da verilen eksen takımına göre $y = -\infty$ durumunda yer değiştirmeler sıfırdır ve elastik yarı sonsuz düzlemin elastik sabitlerinin μ_3, ν_3 olması durumunda elastik yarı sonsuz düzlem için gerilme ve yer değiştirme bağıntıları aşağıda gösterildiği gibi elde edilebilir.

$$v_{3_h}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ie^{|\alpha|y} [A_3 + B_3 y]\} e^{i\alpha x} d\alpha \quad (12)$$

$$u_{3_h}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ie^{|\alpha|y} [A_3 \frac{|\alpha|}{\alpha} + B_3(\frac{\kappa_3}{\alpha} + \frac{|\alpha|}{\alpha} y)]\} e^{i\alpha x} d\alpha \quad (13)$$

$$\sigma_{x_{3_h}} = -\frac{\mu_3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \{e^{|\alpha|y} \{2A_3|\alpha| + B_3[(\kappa_3 + 3) + 2|\alpha|y]\}\} d\alpha \quad (14)$$

$$\sigma_{y_{3_h}} = \frac{\mu_3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \{e^{|\alpha|y} \{2A_3|\alpha| + B_3[(\kappa_3 - 1) + 2|\alpha|y]\}\} d\alpha \quad (15)$$

$$\tau_{xy_{3_h}}(x, y) = \frac{i\mu_3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \{e^{|\alpha|y} \{2A_3\alpha + B_3[\frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa_3 + 1) + 2\alpha y]\}\} d\alpha \quad (16)$$

1, 2, 3 numaralı indisler sırasıyla 1. tabaka, 2. tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemi temsil etmektedir. A_i, B_i, C_i ve D_i ($i=1,2,3$) bilinmeyen katsayılar ise problemin sınır koşulları kullanılarak belirlenmiştir. Kütle kuvvetinin dahil edilmesi durumunda 1. tabaka ve 2. tabaka için σ_y boyutsuz gerilmelerine dahil edilecek değerler aşağıdaki gibi elde edilebilir [13].

$$\sigma_{1y_p} = \rho_1 g(y - h) \quad (17)$$

$$\sigma_{2y_p} = -\rho_1 g h_1 + \rho_2 g(y - h_2) \quad (18)$$

Sonuç olarak toplam gerilme değeri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sigma_{iy} = \sigma_{iyh} + \sigma_{iyp} \quad (19)$$

Aşağıda verilen sınır şartları kullanılarak bilinmeyen katsayılar elde edilmiştir.

$$\sigma_{y_1}(x, h) = \begin{cases} -p(x) & a \langle x \langle b \\ -q(x) & c \langle x \langle d \\ 0 & -\infty \langle x \langle a, b \langle x \langle c, d \langle x \langle \infty \end{cases} \quad (20)$$

$$\tau_{xy_1}(x, h) = 0 \quad -\infty \langle x \langle \infty \quad (21)$$

$$\tau_{xy_1}(x, h_2) = 0 \quad -\infty \langle x \langle \infty \quad (22)$$

$$\tau_{xy_2}(x, 0) = 0 \quad -\infty \langle x \langle \infty \quad (23)$$

$$\tau_{xy_2}(x, h_2) = 0 \quad -\infty \langle x \langle \infty \quad (24)$$

$$\sigma_{y_2}(x, h_2) = \sigma_{y_1}(x, h_2) \quad -\infty \langle x \langle \infty \quad (25)$$

$$[v_2(x, h_2) - v_1(x, h_2)] = 0 \quad -\infty \langle x \langle \infty \quad (26)$$

$$\tau_{xy_3}(x, 0) = 0 \quad -\infty \langle x \langle \infty \quad (27)$$

$$[v_2(x, 0) - v_3(x, 0)] = 0 \quad -\infty \langle x \langle \infty \quad (28)$$

$$\sigma_{y_2}(x, 0) = \sigma_{y_3}(x, 0) \quad -\infty \langle x \langle \infty \quad (29)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, h)] = 0 \quad a \langle x \langle b \quad (a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, h)] = 0 \quad c \langle x \langle d \quad (b) \quad (30a-b)$$

$p(x)$ ve $q(x)$ sırasıyla 1.ve 2. blok altındaki bilinmeyen temas gerilmeleridir. Probleme ait denge şartları :

$$\int_a^b p(x)dx = P \quad (a)$$

$$\int_c^d q(x)dx = Q \quad (b) \quad (31a-b)$$

olarak tanımlanmaktadır. Bilinmeyen temas gerilmelerinin belirlenebilmesi için (30a-b) nolu sınır şartları kullanılmıştır. Elde edilen katsayıların bu sınır şartlarında yerlerine konulup gerekli düzenlemeler yapılarak;

$$-\frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_1} \int_a^b p(t_1) dt_1 \left[k_1(x_1, t_1) + \frac{1+\kappa_1}{4} \frac{1}{(t_1-x_1)} \right] - \frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_1} \int_c^d q(t_2) dt_2 \left[k_1(x_1, t_2) + \frac{1+\kappa_1}{4} \frac{1}{(t_2-x_1)} \right] = 0 \quad (32)$$

$a < x_1 < b$

$$-\frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_1} \int_a^b p(t_1) dt_1 \left[k_1(x_2, t_1) + \frac{1+\kappa_1}{4} \frac{1}{(t_1-x_2)} \right] - \frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_1} \int_c^d q(t_2) dt_2 \left[k_1(x_2, t_2) + \frac{1+\kappa_1}{4} \frac{1}{(t_2-x_2)} \right] = 0 \quad (33)$$

$c < x_2 < d$

(32) ve (33) nolu integral denklem takımları elde edilmiştir.

Denklemden geçen k_1 çekirdeği aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$k_1(x, t) = \int_0^\infty \{ \{ 16\alpha^3 (1 + (1 + \kappa_1)) (e^{-4\alpha h} - e^{-4\alpha h_2} - 4\alpha e^{-2\alpha h - 2\alpha h_2} (h - h_2)) (1 + \kappa_2) ma (-1 - \kappa_3 - (1 + \kappa_2) mb + e^{-4\alpha h_2} (1 + \kappa_3 - (1 + \kappa_2) mb) + 2e^{-2\alpha h_2} (-2\alpha h_2 (1 + \kappa_3) + (1 + \kappa_2) mb)) + (e^{-4\alpha h} + e^{-4\alpha h_2} - 2e^{-2\alpha h - 2\alpha h_2}) (1 + \kappa_1) (1 + \kappa_3 + (1 + \kappa_2) mb + e^{-4\alpha h_2} (1 + \kappa_3 - (1 + \kappa_2) mb) + 2e^{-2\alpha h_2} ((1 + 2\alpha^2 h_2^2) (-1 - \kappa_3) + 2\alpha h_2 + (1 + \kappa_2) mb)) \} / \Delta - (1 + \kappa_1) / 4 \} \{ \sin \alpha (t - x) \} d\alpha \quad (34)$$

$$\Delta = -64\alpha^3 \{ [-e^{-4\alpha h_2} - 2(2\alpha h - 2\alpha h_2) e^{-2\alpha h - 2\alpha h_2} + e^{-4\alpha h} (1 + \kappa_1) [e^{-4\alpha h_2} ((1 + \kappa_3) - (1 + \kappa_2) mb) - ((1 + \kappa_3) (1 + \kappa_2) mb) - 2e^{-2\alpha h_2} (-1 + 2\alpha^2 h_2^2) (1 + \kappa_3) + 2\alpha h_2 (1 + \kappa_2) mb] + [e^{-4\alpha h} - 2(1 + 2\alpha^2 (h - h_2)^2) e^{-2\alpha h - 2\alpha h_2} + e^{-4\alpha h} (1 + \kappa_2) ma [e^{-4\alpha h_2} ((1 + \kappa_3) - (1 + \kappa_2) mb) - ((1 + \kappa_3) + (1 + \kappa_2) mb) - 2e^{-2\alpha h_2} (-2h_2 (1 + \kappa_3) + (1 + \kappa_2) mb)]] \} \quad (35)$$

İntegral takımının sayısal çözümü için aşağıdaki boyutsuz büyüklükler tanımlanmıştır.

$$a < x_1 < b, c < x_2 < d$$

$$x_1 = \frac{b-a}{2} r_1 + \frac{b+a}{2} \quad t_1 = \frac{b-a}{2} s_1 + \frac{b+a}{2} \quad (36)$$

$$x_2 = \frac{d-c}{2} r_2 + \frac{d+c}{2} \quad t_2 = \frac{d-c}{2} s_2 + \frac{d+c}{2} \quad (37)$$

$$G_1 = P(s_1) / P/h \quad G_2 = q(s_2) / P/h \quad (38)$$

$$ma = \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad mb = \frac{\mu_3}{\mu_2} \quad (39)$$

Tanımlanan bu boyutsuz büyüklükler (32) ve (33) nolu integral denklemlerde yerlerine yazıldığında;

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_1(s_1) \frac{b-a}{2h} ds_1 + [m_1(r_1, s_1) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{\frac{b-a}{2}(s_1-r_1)}] - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_2(s_2) \frac{d-c}{2h} ds_2 [m_2(r_1, s_2) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{[\frac{d-c}{2}s_2 + \frac{d+c}{2}] - [\frac{b-a}{2}r_1 + \frac{b+a}{2}]}] = 0 \quad (40)$$

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_1(s_1) \frac{b-a}{2h} ds_1 [m_3(r_2, s_1) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{[\frac{b-a}{2}s_1 + \frac{b+a}{2}] - [\frac{d-c}{2}r_2 + \frac{d+c}{2}]}] - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_2(s_2) \frac{d-c}{2h} ds_2 [m_4(r_2, s_2) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{[\frac{d-c}{2}(s_2-r_2)}] = 0 \quad (41)$$

$$m_1(r_1, s_1) = k_1(x_1, t_1), m_2(r_1, s_2) = k_1(x_1, t_2) \quad (42)$$

$$m_3(r_2, s_1) = k_1(x_2, t_1), m_4(r_2, s_2) = k_1(x_2, t_2) \quad (43)$$

denklemleri elde edilir. Burada $g(s)$ rijit blok üzerinde ortaya çıkan boyutsuz temas gerilmesidir. $g(s)$ $s = \pm 1$ 'de tekilliğe sahip olduğundan integral denklemin indeksi +1'dir [15].

$$g_i(s_i) = G_i(s_i) / (1 - s_i^2)^{1/2} \quad (-1 < s_i < 1) \quad (i=1,2) \quad (44)$$

olarak alınabilir. Uygun Gauss-Chebyshev integrasyon formülleri kullanılacak olursa (40) ve (41) nolu denklemler;

$$\begin{aligned}
 & -\sum_{i=1}^n W_i G_1(s_{1i}) \frac{b-a}{2h} [m_1(r_1, s_1) \\
 & + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{\frac{b-a}{2}(s_{1i}-r_{1j})}] \\
 & -\sum_{i=1}^n W_i G_2(s_{2i}) \frac{d-c}{2h} [m_2(r_1, s_2) \\
 & + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{[\frac{d-c}{2}s_{2i} + \frac{d+c}{2}][\frac{b-a}{2}r_{1j} + \frac{b+a}{2}]}] = 0 \\
 & (j=1, \dots, n-1) \tag{45}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\sum_{i=1}^n W_i G_1(s_{1i}) \frac{b-a}{2h} [m_3(r_2, s_1) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \\
 & \frac{1}{[\frac{b-a}{2}s_{1i} + \frac{b+a}{2}][\frac{d-c}{2}r_{2j} + \frac{d+c}{2}]}] - \\
 & \sum_{i=1}^n W_i G_2(s_{2i}) \frac{d-c}{2h} [m_4(r_2, s_2) + \\
 & \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{[\frac{d-c}{2}(s_{2i}-r_{2j})]}] = 0 \\
 & (j=1, \dots, n-1) \tag{46}
 \end{aligned}$$

şeklini alır.

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \pi W_i G_1(s_{1i}) \frac{b-a}{2h} &= 1 \tag{a} \\
 \sum_{i=1}^n \pi W_i G_2(s_{2i}) \frac{d-c}{2h} &= Q/P \tag{b} \tag{47a-b}
 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Bu eşitliklerde;

$$\begin{aligned}
 W_{1i} = W_{2i} \quad W_1 = W_n &= \frac{1}{2n-2} \\
 W_i &= \frac{1}{n-1} \quad i = 2, \dots, n-1 \tag{48}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s_{1i} = s_{2i} &= \cos\left(\frac{i-1}{n-1} \pi\right) \quad i = 1, \dots, n \tag{a} \\
 r_{1j} = r_{2j} &= \cos\left(\frac{2j-1}{2n-2} \pi\right) \quad j = 1, \dots, n-1 \tag{b} \tag{49a-b}
 \end{aligned}$$

olarak tanımlanmıştır. Böylece (45) ve (46) nolu denklemlerden n bilinmeyenli n tane denklem elde edilmiş olur. İntegral denklemlerden p(x) ve q(x) bulunduktan sonra elastik tabakalar ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki $\sigma_{y_1}(x, h_2)$ ve $\sigma_{y_2}(x, 0)$ gerilme dağılışı

$$\begin{aligned}
 \sigma_{y_1}(x, h_2) &= -\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\pi} \int_a^b k_2(x, t_1) p(t_1) dt_1 - \\
 & \frac{1}{\pi} \int_c^d k_2(x, t_2) q(t_2) dt_2 \tag{50} \\
 & -\infty < x < \infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{y_2}(x, 0) &= -\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\pi} \frac{\mu_2}{\mu_1} \int_a^b k_3(x, t_1) p(t_1) dt_1 - \\
 & \frac{1}{\pi} \frac{\mu_2}{\mu_1} \int_c^d k_3(x, t_2) q(t_2) dt_2 \tag{51} \\
 & -\infty < x < \infty
 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada λ_1, λ_2 yük faktörleri olup

$$\lambda_1 = \frac{P}{\rho_1 g h_1} \tag{52}$$

$$\lambda_2 = \frac{P}{\rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2} \tag{53}$$

bağıntılarından elde edilmiştir. $k_2(x, t)$ ve $k_3(x, t)$ denklemlerin çekirdekleri olup aşağıdaki gibi belirlenmiştir.

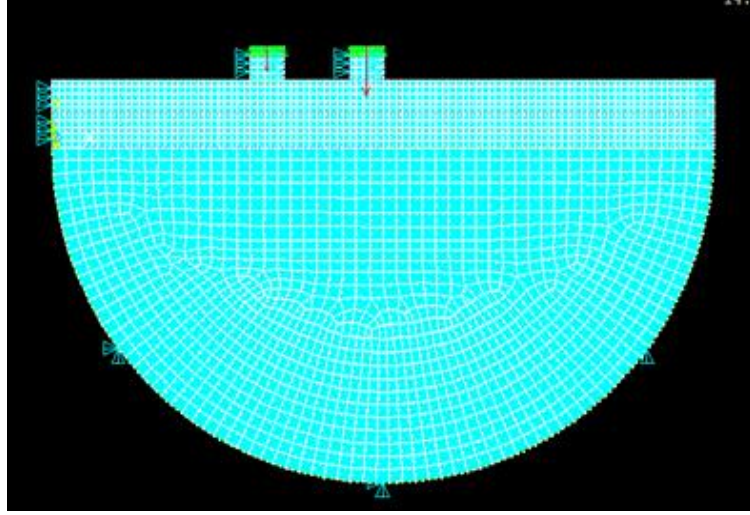
$$\begin{aligned}
 k_2(x, t) &= \int_0^\infty [128\alpha^3 (e^{-2ah}(-1 + \alpha(h-h_2)) + e^{-2ah_2} \\
 & (1 + \alpha(h-h_2)))(1 + \kappa_1) [e^{-ah-5ah_2}((1 + \kappa_3) \\
 & - (1 + \kappa_2)mb) + e^{-ah-ah_2}((1 + \kappa_3) + (1 + \kappa_2)mb) \\
 & - 2e^{-ah-3ah_2}((1 + 2\alpha^2 h_2^2)(1 + \kappa_3) - 2\alpha h_2 \\
 & (1 + \kappa_2)mb)] / (\cos \alpha(t-x)) d\alpha \tag{54}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_3(x, t) &= \int_0^\infty \{-256\alpha^3 [(1 + \alpha h_2) + e^{-2ah_2}(-1 + \alpha h_2)] \\
 & (1 + \kappa_1)(1 + \kappa_2)mb [e^{-ah-4ah_2} \\
 & (-1 + \alpha(-h + h_2)) + e^{-3ah-2ah_2} \\
 & (1 + \alpha(-h + h_2))] \} \tag{55}
 \end{aligned}$$

Tabakalara ait ara yüzeydeki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklığının belirlenebilmesi için (50) nolu ifadenin sıfıra eşitlenmesi, alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklığının belirlenebilmesi için ise (51) nolu ifadenin sıfıra eşitlenmesi gerekir. Bu eşitliği sağlayan x uzaklığı ilk ayrılma uzaklığı ve buna karşılık gelen yük faktörü de kritik yük faktörü olarak ifade edilmiştir.

$$\lambda_{cr1} = \frac{P_{cr}}{\rho_1 g h_1} \tag{56}$$

$$\lambda_{cr2} = \frac{P_{cr}}{\rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2} \tag{57}$$



Şekil 2. Problemin Q=2P durumuna ait ANSYS Modeli

3 Problemin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözümü

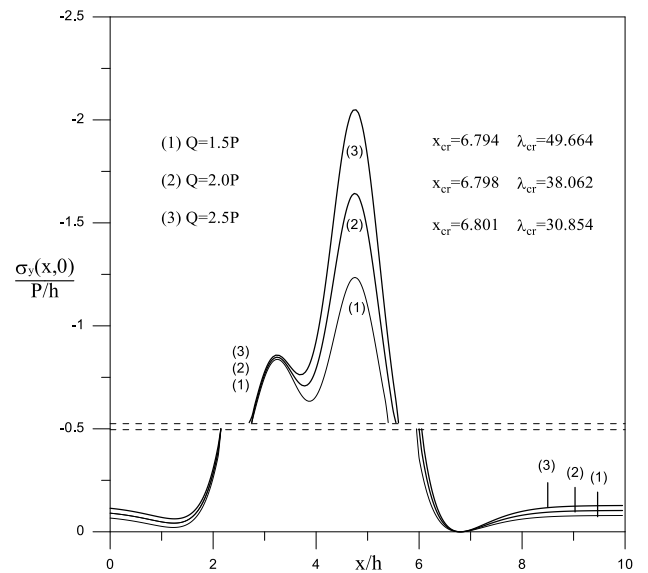
Temas problemlerinin çözümünde, bilgisayar teknolojilerinin gelişmesiyle birlikte özellikle sayısal analiz yöntemleri sıklıkla kullanılmaktadır. Sonlu elemanlar yöntemi bu yöntemler içerisinde en yaygın olarak kullanılan yöntemlerdendir. Sonlu elemanlar yönteminde, parçanın bütünü yerine bölünmüş çok sayıda eleman üzerinde çözümler yapılır ve sonuca ulaşılır. Sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal analiz işlemi yapılırken problemin çözümü için birçok işlem gerçekleştirilmektedir. İşlem aşamaları; problemin geometrisinin oluşturulması, eleman tipinin belirlenmesi, malzeme özelliklerinin atanması, modelin sonlu elemanlara ayrılması, blokların üst kısmındaki düğüm noktalarının düşey yer değiştirmelerinin birbirine bağlanması, temas yüzeylerinin tanımlanması, sınır koşullarının belirlenmesi ve yüklemenin yapılması şeklinde gerçekleştirilmektedir. Problemin sonlu eleman modeli 2 boyutlu düzlem şekil değiştirme problemi olarak tanımlanmış ve geometrik model ANSYS standart menü araçlarıyla oluşturulmuştur. Eleman tipi olarak 8-node PLANE 183 kullanılmıştır. Sonlu elemanlara bölme işleminde her çizgi 0.05 aralıklara bölünmüştür. Ayrıca blok-tabaka, tabaka-tabaka, tabaka-elastik düzlem arasında temas çiftleri tanımlanmıştır. Bu çiftler temas ve hedef elemanları olarak ikiye ayrılır. Temas CONTA 172, hedef ise TARGE 169 elemanları olarak seçilmiştir. Bu çalışmada ANSYS paket programının temas yüzeylerindeki davranışına yönelik farklı temas algoritmalarından Lagrange Metodu kullanılmıştır. ANSYS çözüm için kullanılan malzemelerin özellikleri Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1. Malzeme özellikleri

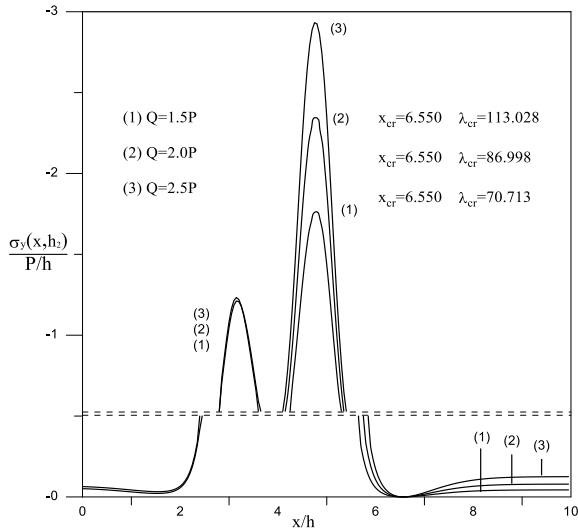
Eleman	Elastisite Modülü (MPa)	Poisson Oranı
Rijit Bloklar	e^{10}	0.25
Tabaka 1	25000	0.25
Tabaka 2	50000	0.25
Elastik Düzlem	25000	0.25

4 Sonuçlar

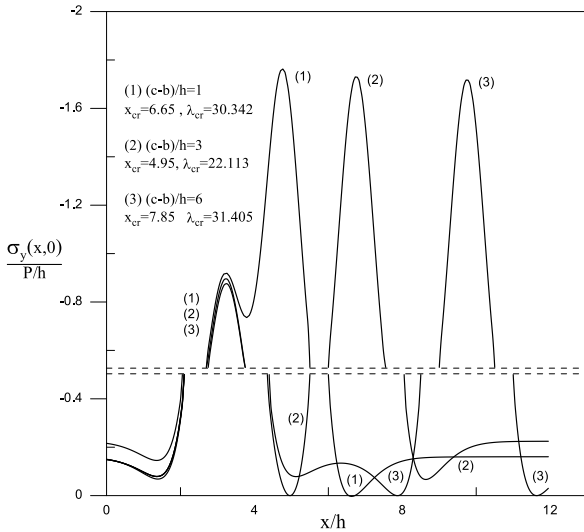
Bu çalışmada öncelikle iki rijit blok ile yüklenmiş elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan homojen iki tabakanın sürekli temas problemi analitik yöntem ile incelenmiştir. Problemin analitik çözümünde integral denklemler Gauss-Chebyshev integrasyon formülleri yardımıyla sayısal olarak ayrı ayrı çözülmüştür. Analitik çözümde bloklara etki eden yük oranları ve bloklar arası mesafe değişimine bağlı olarak ilk ayrılma uzaklıkları ve ilk ayrılma yük değerleri hesaplanmış ve grafikler çizilmiştir. Yine farklı yük oranlarında bloklar arasındaki etkileşimin sona erdiği mesafeler hesaplanmış ve tablo ile bu değerler verilmiştir. Daha sonra ise sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal analiz işlemi yapan ANSYS paket programı yardımı ile problem modellenmiş ve her iki çözümden de elde edilen sonuçlar grafiksel olarak karşılaştırılmıştır. Sonlu elemanlar yöntemi ile problemin çözümü, analitik çözüm yöntemine göre daha kolay ve zaman bakımından daha kısa sürede gerçekleşmiştir.



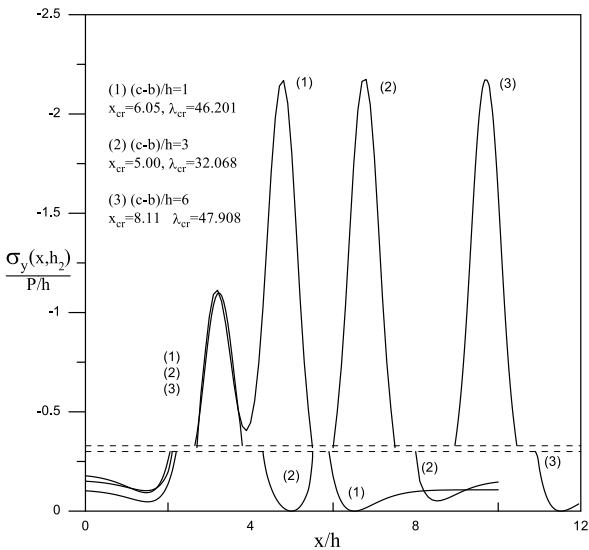
Şekil 3. $\sigma_y(x,0)$ boyutsuz gerilme dağılımının yük oranları ile değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 2$, $\mu_2/\mu_1 = 2$, $\mu_3/\mu_2 = 0.5$, $a/h = 3$, $(b-a)/h = 0.5$, $(d-c)/h = 0.5$, $(c-b)/h = 1$, $h_2/h_1 = 1$)



Şekil 4. $\sigma_y(x, h_2)$ boyutsuz gerilme dağılımının yük oranları ile değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 2$, $\mu_2/\mu_1 = 2$, $\mu_3/\mu_2 = 0.5$, $a/h = 3$, $(b-a)/h = 0.5$, $(d-c)/h = 0.5$, $(c-b)/h = 1$, $h_2/h_1 = 1$)



Şekil 5. $\sigma_y(x, 0)$ boyutsuz gerilme dağılımının bloklar arası mesafe ile değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 2$, $\mu_2/\mu_1 = 1$, $\mu_3/\mu_2 = 1$, $a/h = 3$, $(b-a)/h = 0.5$, $(d-c)/h = 0.5$, $Q = 2P$, $h_2/h_1 = 1$)



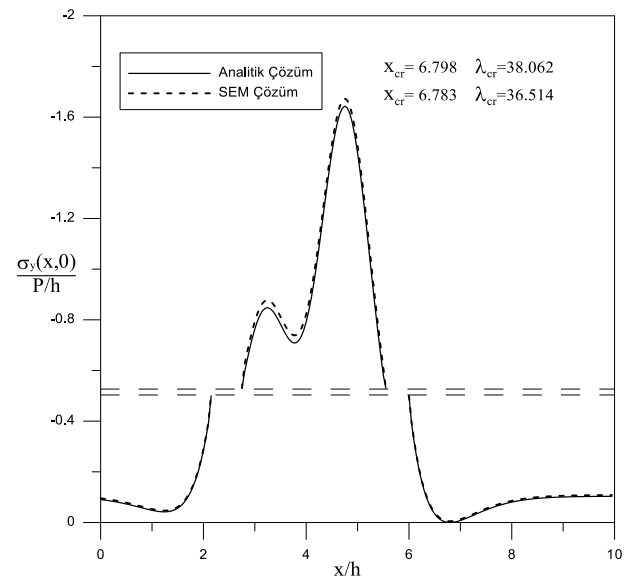
Şekil 6. $\sigma_y(x, h_2)$ boyutsuz gerilme dağılımının bloklar arası mesafe ile değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 2$, $\mu_2/\mu_1 = 1$, $\mu_3/\mu_2 = 1$, $a/h = 3$, $(b-a)/h = 0.5$, $(d-c)/h = 0.5$, $Q = 2P$, $h_2/h_1 = 1$)

Şekil 3-4'te alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem ve tabakalar arasındaki ilk ayrılma yükü ve uzaklığının yük oranı ile değişimi görülmektedir. Grafiklerden de görüldüğü gibi yük oranı arttıkça her iki temas yüzeyinde de ilk ayrılma yükleri azalmakta, ilk ayrılma uzaklıklarında ise tabakalar arasında farklılık gözlemlenmezken, alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlem arasında çok küçük oranlarda artış görülmektedir. Blok altlarında oluşan gerilmeler her iki temas yüzeyinde de artış göstermiştir ancak tabakalar arasında meydana gelen gerilme değerleri daha büyüktür. Şekil 5-6'da alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem ve tabakalar arasında meydana gelen temas gerilmeleri bloklar arasındaki mesafe değişimi göz önüne alınarak incelenmiştir.

Yine temas yüzeyleri arasında ayrılmalara sebep olacak ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıkları bulunmuştur. Bu durumda her iki yüzey arasındaki ilk ayrılma uzaklıkları birbirine çok yakın çıkmış ancak tabakalar arasında ilk ayrılmaya sebep olan kritik yük değerlerinin alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlem arasında ayrılmaya sebep olan kritik yük değerinden daha büyük olduğu görülmüştür.

Her iki temas yüzeyinde de $(c-b)/h = 1$ olması durumunda ilk ayrılmalar ikinci bloğun sağ tarafında gerçekleşmesi beklenirken, $(c-b)/h = 3$, $(c-b)/h = 6$ olması durumlarında ilk ayrılmaların bloklar arasında gerçekleşmesi beklenmektedir. Bloklar arasındaki mesafe belirlenen bir limit değerden büyük olduğunda blokların beraberce incelenmesine gerek kalmamaktadır. Bu durumda her blok ayrı bir problem olarak incelenebilir.

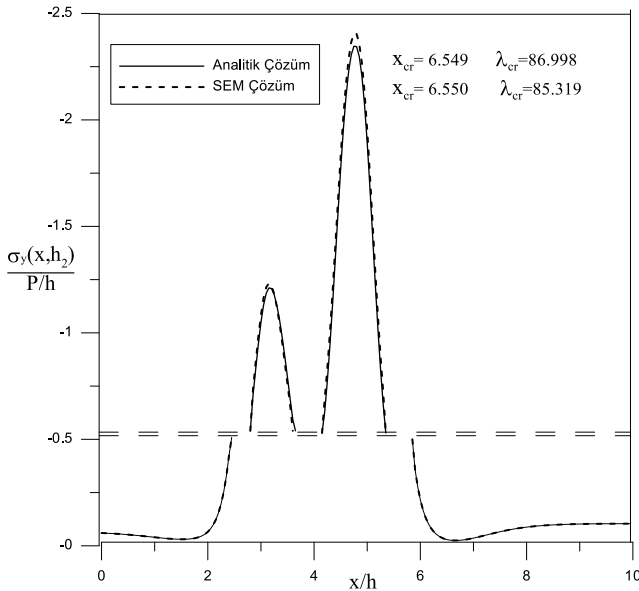
Şekil 7,8'de alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem ve tabakalar arasında meydana gelen temas gerilmeleri $Q = 2P$ olması durumunda analitik ve sonlu elemanlar çözümü grafiksel olarak incelenmiştir. Grafikler incelendiğinde iki farklı yöntemle elde edilen sonuçların birbiriyle oldukça uyumlu olduğu görülmüştür.



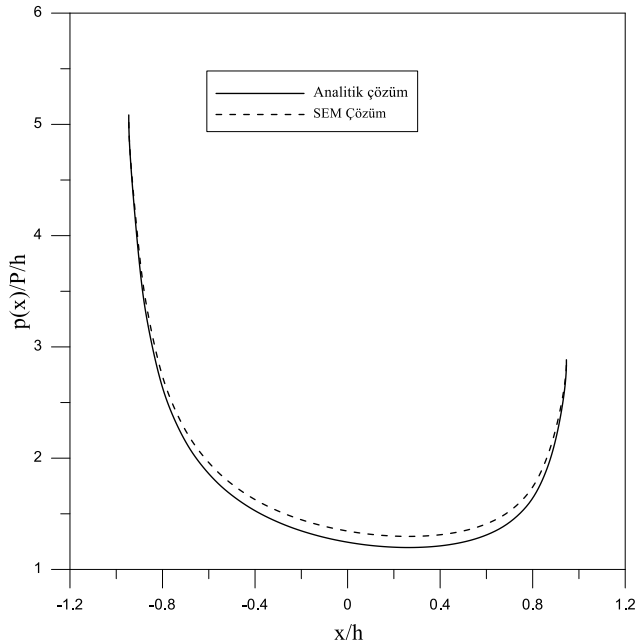
Şekil 7. $\sigma_y(x, 0)$ boyutsuz gerilme dağılımı ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 2$, $\mu_2/\mu_1 = 2$, $\mu_3/\mu_2 = 0.5$, $a/h = 3$, $(b-a)/h = 0.5$, $(d-c)/h = 0.5$, $(c-b)/h = 1$, $h_2/h_1 = 1$)

Tablo 2. Alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem ara yüzeyinde iki blok arasındaki etkileşimin son bulunduğu uzaklığın $((c-b)/h)$ yük oranı ile değişimi $\mu_2/\mu_1 = 1$, $\mu_3/\mu_2=1$, $a/h=3$, $(b-a)/h=0.5$, $(d-c)/h=0.5$, $h_2/h_1=1$

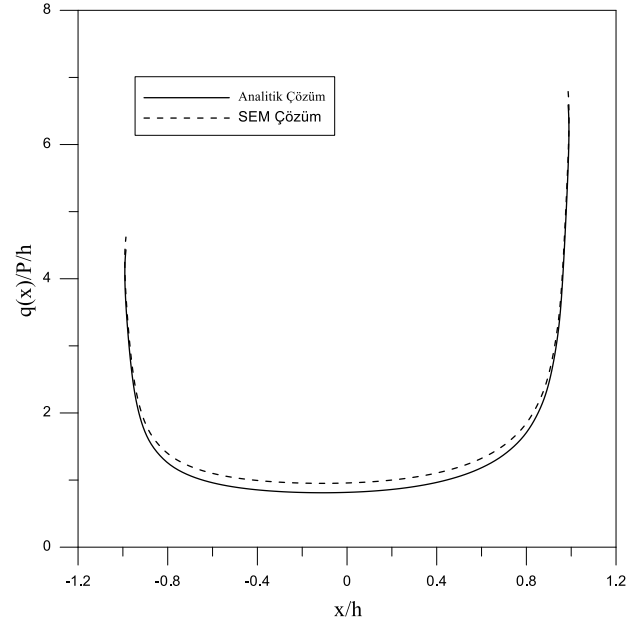
Q	$\frac{(c-b)}{h}$	BLOK 1		BLOK 2	
		$\lambda_{cr_{sol}}=\lambda_{cr_{sağ}}$	$(a-x_{cr_{sol}})/h=(x_{cr_{sağ}}-b)/h$	$\lambda_{cr_{sol}}=\lambda_{cr_{sağ}}$	$(c-x_{cr_{sol}})/h=(x_{cr_{sağ}}-d)/h$
P	6.8396	62.633	1.6320	62.331	1.6320
2P	6.8392	62.258	1.6321	31.410	1.6320
4P	6.8368	61.510	1.6323	15.728	1.6320
6P	6.8362	60.765	1.6324	10.490	1.6319
8P	6.8360	60.022	1.6327	7.8701	1.6319



Şekil 8. $\sigma_y(x, h_2)$ boyutsuz gerilme dağılımı ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 2$, $\mu_2/\mu_1 = 2$, $\mu_3/\mu_2 = 0.5$, $a/h=3$, $(b-a)/h=0.5$, $(d-c)/h=0.5$, $(c-b)/h=1$, $h_2/h_1=1$)



Şekil 9.1. Blok altındaki gerilme dağılımı ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 2$, $\mu_2/\mu_1 = 2$, $\mu_3/\mu_2 = 0.5$, $a/h=3$, $(b-a)/h=0.5$, $(d-c)/h=0.5$, $(c-b)/h=1$, $h_2/h_1=1$)



Şekil 10. 2. Blok altındaki gerilme dağılımı ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 2$, $\mu_2/\mu_1 = 2$, $\mu_3/\mu_2 = 0.5$, $a/h=3$, $(b-a)/h=0.5$, $(d-c)/h=0.5$, $(c-b)/h=1$, $h_2/h_1=1$)

Tablo 2'de alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki yüzeyde iki blok arasındaki etkileşimin son bulunduğu uzaklığın yük ile değişimi görülmektedir. Tabloda görüldüğü gibi Q/P oranındaki artış blokların etkileşimini sona erdiren sınır mesafesini etkilememiştir. İlk ayrılma mesafesinin başlangıçtan uzaklığı ise Q/P oranı ile çok fazla değişmemiştir. Buna ek olarak Q/P oranındaki artış kritik yük değerinin azalmasına sebep olmuştur.

Şekil 9, 10'da Q=2P olması durumunda bloklar altındaki temas gerilmeleri verilmiştir. Grafiklerde ikinci blok yükünün birinci blok yükünün iki katı olması durumunda ikinci blok altında temas gerilmelerinin arttığı görülmektedir. Bloklar arasındaki etkileşime bakıldığında en düşük gerilme değerinin birinci bloğun ikinci bloğa yakın olan köşesinde oluşmaktadır. Grafikler incelendiğinde iki yöntemle de elde edilen sonuçların uyumlu olduğu görülmüştür.

Bu çalışmada elastik yarı sonsuz düzleme oturan homojen iki tabakanın sürekli temas problemi elastisite teorisi kullanılarak incelenmiştir. Daha sonra problem sonlu elemanlar yönteminin kullanıldığı bir paket

program ile modellenerek elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Grafikler incelendiğinde yük oranındaki artışla her iki ayrılma yüzeyinde de ilk ayrılma yük değerlerinin azaldığı, temas gerilmelerinin ise arttığı görülmektedir. Bloklar arası mesafenin artırılması ve mesafenin belli bir değeri aşması durumunda ise blokların beraberce incelenmesine gerek kalmadığı ve her bloğun ayrı bir problem olarak incelenebileceği görülmüştür. Problemin her iki yöntemle elde edilen sonuçları karşılaştırıldığında ise birbiriyle uyumlu olduğu görülmektedir. Sonlu elemanlar ile çözüm, analitik yöntemle göre daha kısa sürede çözüm imkanı tanıdığı için tercih edilebilir.

Çalışmanın devamında malzeme özellikleri, tabaka yükseklikleri, blok genişlikleri gibi pek çok değişkene bağlı olarak çözümler elde edilebilir.

5 Kaynaklar

- [1] Hertz, H., On The Contact of Elastic Solids, *J. Reine Ang. Mathematic*, 92, 156-171, 1982.
- [2] Ratwani, M., Erdoğan, F., On the Plane Contact Problem for a Frictionless Elastic Layer, *International Journal of Solids and Structures*, 9, 921-936, 1973.
- [3] Geçit, MR., Gökpinar, S., Frictionless contact between an elastic layer and a rigid rounded support, *The Arabian Journal for Science and Engineering*, 10, 245-251, 1985.
- [4] Giannakopoulos, AE., Pallot, P., Two-Dimensional Contact Analysis of Elastic Graded Materials, *Journal of The Mechanics and Physics of Solids*, 48, 1597-1631, 2000.
- [5] Özşahin, TS., Taskiner, O., Contact Problem for an Elastic Layer on an Elastic Half Plane Loaded by Means of Three Rigid Flat Punches, *Mathematical Problems in Engineering*, 137427, 14, 2013.
- [6] Çakıroğlu, F. L., Çakıroğlu, M. ve Erdöl, R., Contact Problems for Two Elastic Layers Resting on Elastic Half-Plane, *Journal of Engineering Mechanics*, 127, 2, 113-118, 2001.
- [7] Adams, G. G., An Elastic Strip Pressed Against an Elastic Half Plane by a Steadily Moving Force, *Journal of Applied Mechanics*, Transactions of ASME, 45, 89-94, 1978.
- [8] Wriggers, P., *Computational Contact Mechanics*, John Wiley & Sons, Chichester, UK, 2002
- [9] Geçit, MR., A Tensionless Contact without Friction between an Elastic Layer and an Elastic Foundation, *International Journal of Solids and Structures*, 16, 387-396, 1980.
- [10] Özşahin, TŞ., Frictionless contact problem for a layer on an elastic half plane loaded by means of two dissimilar rigid punches, *Structural Engineering and Mechanics* 25:4 383403, 2007
- [11] Adıbelli, H., Çömez, İ., Erdöl, R., Rijit Panç İle Bastırılmış Elastik Yarım Düzleme Oturmuş Ağırksız Çift Şeritte Değme Problemi, XVI. Ulusal Mekanik Kongresi, Erciyes Üniversitesi, Bildiriler Kitabı, 1, 71-82, Kayseri, Türkiye, 2009.
- [12] Çömez İ., Frictional Contact Problem for A Rigid Cylindrical Stamp and An Elastic Layer Resting on A Half Plane, *International Journal of Solids and Structures*, 47(7-8), 1090-1097, 2010.
- [13] Bora, P., İki Rijit Dikdörtgen Blok ile Yüklenmiş Elastik Yarı Sonsuz Düzlem Üzerine Oturan İki Elastik Tabakanın Temas Problemi, Doktora tezi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon, 2016.
- [14] Polat, A., Kaya, Y., Özşahin, TŞ., Analytical Solution to Continuous Contact Problem for A Functionally Graded Layer Loaded Through Two Dissimilar Rigid Punches, *Meccanica*, 53(14), 3565-3577, 2018
- [15] Erdoğan, F. ve Gupta, GD., On the Numerical Solution of Singular Integral Equations, *Quarterly Journal of Applied Mathematics*, 29, 525-534, 1972.
- [16] Sezer, S., An evaluation of ANSYS contact elements, Master's Theses, Louisiana State University, 2005.
- [17] Kanber, B., Finite Element Analysis of Contact Problems Using Transition Elements, Yüksek Lisans Tezi, Gaziantep Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Gaziantep, 1997.
- [18] Yaylacı, M., İki Elastik Çeyrek Düzleme Oturan İki Elastik Tabakanın Temas Problemi, Doktora Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2013.
- [19] Polat, A., Bendine, K., Kaya, Y., Özşahin, TŞ., Frictionless Contact Problem for a Functionally Graded Layer Loaded Through Two Rigid Punches Using Finite Element Method, *Journal Of Mechanics*, DOI: [10.1017/jmech.2018.55](https://doi.org/10.1017/jmech.2018.55), 2019
- [20] Abhilash, MN., Murthy, H., Finite element analysis of 2-d elastic contacts involving FGMs. *International Journal of Computer Methods Engineering Science Mechanics*, 15:3, 253-7, 2014.
- [21] Jackson, RL., Green, I., A Finite Element Study of Elasto-Plastic Hemispherical Contact Against a Rigid Flat, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 127, 343-354, 2005.
- [22] Brezeanu, LC., Contact Stresses: Analysis by Finite Element Method (FEM), *Procedia Technology*, 12, 401-410, 2014.
- [23] ANSYS Software, Bilgisayar Programı, Houston PA, Swanson Analysis System, 2015.
- [24] Birinci, A., Adıyaman, G., Yaylacı, M., Öner, E., Analysis of Continuous and Discontinuous Cases of A Contact Problem Using Analytical Method and FEM, *Latin American Journal of Solids and Structures*, 12, 1771-1789, 2015.
- [25] Öner, E., Yaylacı, M., Birinci, A., Analytical Solution of A Contact Problem and Comparison With the Results From FEM, *Structural Engineering and Mechanics*, 54, 607-622, 2015.
- [26] Güler, MA., Kucuksucu, A., Yılmaz, KB., Yıldırım, B., On the analytical and finite element solution of plane contact problem of a rigid cylindrical punch sliding over a functionally graded orthotropic medium, *International Journal of Mechanical Sciences*, 120, 12-29, 2017.
- [27] Rashid, A., Finite element modeling of contact problems, Doctoral thesis, Linköping University, 2016.
- [28] Kaya, Y., Polat, A., ve Özşahin TŞ., Comparison of FEM Solution with Analytical Solution of Continuous and Discontinuous Contact Problem, *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 36(4), 977-992, 2018.