Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi

Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering

AKÜ FEMÜBİD **19** (2019) 031305 (620-625) AKU J. Sci. Eng. **19** (2019) 031305 (620-625)

**DOI: 10.35414/ akufemubid.597100**

**Araştırma Makalesi / Research Article**

# Bishop Çatısına Göre AW(k)-Tipinden Eğriler

**İlim KİŞİ[1*], Günay ÖZTÜRK[2]**

[1] *Kocaeli Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Kocaeli.*

[2] *İzmir Demokrasi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, İzmir.*

[*]*Sorumlu yazar e-posta: ilim.ayvaz@kocaeli.edu.tr ORCID ID: http://orcid.org/ 0000-0002-4785-8165*

*gunay.ozturk@idu.edu.tr ORCID ID: http://orcid.org/ 0000-0002-1608-0354*

Geliş Tarihi: 26.07.2019; Kabul Tarihi: 25.11.2019

***Anahtar kelimeler***
AW(k)-Tipinde Eğriler; Bishop Çatısı; Frenet Çatısı; 3 Boyutlu Öklid Uzayı

## Öz

Paralel çatı ya da alternatif çatı olarak da adlandırılan Bishop çatısı paralel vektör alanları yardımıyla L.R. Bishop tarafından 1975 yılında tanımlanmıştır. Son zamanlarda, bu çatı ile ilgili birçok araştırma makalesi Öklid uzayında ele alınmıştır. AW(k)-tipinden alt manifoldlar kavramı Arslan ve West tarafından verilmiştir. Bundan itibaren, bu tipteki alt manifoldlar ile ilgili birçok çalışma çeşitli yazarlar tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada, $IE^3$ 3-boyutlu Öklid uzayında AW(k)-tipinden eğriler Bishop çatısına göre ele alınmıştır. $IE^3$ 3-boyutlu Öklid uzayında $k_1$, $k_2$ Bishop eğrilikleri arasındaki bağıntılar verilmiştir.

# AW(k)-Type Curves According to the Bishop Frame

***Keywords***
AW(k)-Type Curves; Bishop Frame; Frenet Frame; Euclidean 3-Space

## Abstract

Bishop frame, also called parallel frame of the curves or alternative frame, was given first by L.R. Bishop in 1975 via the parallel vector fields. Afterwards, some research articles related to this type of frame have been studied in the Euclidean space. AW(k)-type curves and submanifolds were given first by Arslan and West. Thereafter, so many studies have been handled related to these type of manifolds by several authors. In this manuscript, we deal with AW(k)-type curves with Bishop frame in Euclidean space $IE^3$. We set the relations between the Bishop curvatures $k_1$, $k_2$ of a curve in $IE^3$.



## 1. Giriş

Serret–Frenet çatısı eğrilerin analizi için kullanışlı olmasına rağmen, bu çatı eğrinin ikinci türevinin sıfıra eşit olduğu noktalarda tanımlanamamaktadır. Bu yüzden, yeni bir çatıya ihtiyaç duyulmaktadır. Bishop çatısı bu özellikteki noktalarda da tanımlanabilmekte, dolayısıyla herhangi bir uzay eğrisinin analiz edilmesine olanak sağlamaktadır (Bishop 1975). Bishop çatısı, onu faydalı kılan pek çok özelliğe sahiptir. Bishop çatısının bilgisayar grafikleri ve biyolojide birçok uygulaması vardır. Örneğin, Bishop çatısı ile DNA dizilimlerinin şekli hakkında tahminde bulunulabilir veya bilgisayar grafikleri içindeki sanal kameralar kontrol edilebilir. Bishop çatısı ile ilgili çalışmalar için Bükçü ve Karacan (2009), Karacan ve Bükçü (2010), Ünal vd. (2013) makalelerine bakılabilir.

AW(k)-tipinde eğriler ve alt manifoldlar Arslan ve West tarafından tanıtılmıştır (Arslan and West 1995). Daha sonra çeşitli yazarlar bu eğriler ve manifoldlarla ilgili birçok çalışma yapmışlardır. Örneğin, Arslan ve Özgür (1997), Özgür ve Gezgin (2005) çalışmalarında, $\mathrm{IE}^m$ Öklid uzayında bu tipteki eğrilerin eğrilik özelliklerini incelemişlerdir. Kılıç ve Arslan (2004) çalışmasında k=1,2, ve 3 için AW(k)-tipinde eğriler ve yüzeyleri ele almışlar ve bu tipteki eğriler ve yüzeylere örnekler vermişlerdir. Yoon (2012) çalışmasında ise, bu tipteki eğrileri G Lie gruplarında ele almıştır.

Bu çalışmanın 2. bölümünde, $IE^3$ Öklid uzayında bir eğrinin Frenet çatısı ve Bishop çatısı ile ilgili bazı temel kavramlara yer verilmiştir. 3. bölümünde, oskülatör mertebesi 3 olan bir Frenet eğrisinin eğrilik özellikleri verilmiş ve 4. bölümde, bu tipten eğriler $IE^3$ Öklid uzayında Bishop çatısı yardımıyla ele alınarak eğrilerin Bishop çatısına göre eğrilik fonksiyonları olan $k_1, k_2$ fonksiyonları arasındaki bağıntılar verilmiştir.

## 2. Temel Kavramlar

$\gamma = \gamma(s) : I \subseteq IR \rightarrow IE^3$, $IE^3$ 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğri olsun. Eğer $\|\gamma'(s)\| = 1$ eşitliği sağlanıyorsa $\gamma$ birim hızlı eğri olarak adlandırılır. Bu durumda $\gamma$ eğrisinin Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{1}$$

eşitliği ile verilir.

Burada, $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ kümesi $\gamma$ eğrisinin Frenet çatısı ve $\kappa$, $\tau$ ise $\gamma$ eğrisinin eğrilik fonksiyonu ve burulma fonksiyonu olarak adlandırılır (Do Carmo, M. P. 1976).

Bishop türev formülleri ise

$$\begin{bmatrix} T' \\ M_1' \\ M_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

eşitliği ile verilir. Burada, $\{T, M_1, M_2\}$ $\gamma$ eğrisinin Bishop çatısı ve $k_1, k_2$ ise $\gamma$ eğrisinin Bishop çatısına göre birinci ve ikinci eğrilik fonksiyonları olarak adlandırılırlar (Bishop 1975).

Frenet çatısı ve Bishop çatısı arasındaki bağıntı

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

eşitliği ile verilmektedir.

Bu eşitlikte, $\theta(s) = \arctan\left(\frac{k_2}{k_1}\right)$, $\tau(s) = \frac{d\theta(s)}{ds}$, ve $\kappa(s) = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ dir. Bishop eğrilik fonksiyonları ise $k_1 = \kappa\cos\theta$, $k_2 = \kappa\sin\theta$ şeklinde elde edilmektedir.

**Tanım 1** Bir $\gamma : I \rightarrow IE^3$ regüler eğrisi verildiğinde, eğer $\gamma$ eğrisinin $M_1(s)$ birim vektörü bir u sabit vektörü ile sabit bir $\varphi$ açısı yapıyorsa, yani her $s \in I$ için $\langle M_1(s), u\rangle = \cos\varphi$ eşitliği sağlanıyorsa, $\gamma$ eğrisi slant helis olarak adlandırılır.

**Teorem 2** $\gamma : I \rightarrow IE^3$ yay parametresi ile parametrelendirilmiş, eğrilik fonksiyonları sıfırdan farklı fonksiyonlar olan bir eğri olsun. $\gamma$ eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter koşul $\frac{k_1}{k_2}$ oranının sabit olmasıdır (Bükçü and Karacan 2009).

## 3. $IE^3$ Uzayında AW(k)-Tipinde Eğriler

Bu bölümde, $IE^3$ 3-boyutlu Öklid uzayında AW(k)-tipinde Frenet eğrileri tanıtılmış ve bu eğriler ile ilgili elde edilmiş sonuçlar verilmiştir.

**Önerme 3** (Arslan and Özgür 1997) $\gamma$, $IE^3$ uzayında oskülatör mertebesi 3 olan bir Frenet eğrisi olsun. O halde aşağıdaki eşitlikler sağlanır;

$$\begin{aligned}
&\gamma'(s) = T(s), \\
&\gamma''(s) = T'(s) = \kappa(s)N(s), \\
&\gamma'''(s) = -\kappa^2(s)T(s) + \kappa'(s)N(s) + \kappa(s)\tau(s)B(s), \\
&\gamma^{(IV)}(s) = -3\kappa(s)\kappa'(s)T(s) + \{\kappa''(s) - \kappa^3(s) - \kappa(s)\tau^2(s)\}N(s) \\
&\qquad\qquad + \{2\kappa'(s)\tau(s) + \kappa(s)\tau'(s)\}B(s).
\end{aligned}$$

(4)

**Notasyon 4** (Arslan and Özgür 1997)

$$\begin{aligned}
&N_1(s) = \kappa(s)N(s), \\
&N_2(s) = \kappa'(s)N(s) + \kappa(s)\tau(s)B(s), \\
&N_3(s) = \{\kappa''(s) - \kappa^3(s) - \kappa(s)\tau^2(s)\}N(s) + \{2\kappa'(s)\tau(s) + \kappa(s)\tau'(s)\}B(s).
\end{aligned}$$

(5)

**Tanım 5** (Arslan and Özgür 1997) Oskülatör mertebesi 3 olan Frenet eğrileri

i) $N_3(s) = \left\langle N_3(s), N_2^*(s) \right\rangle N_2^*(s)$ (6)

eşitliğini sağlıyorlarsa, zayıf AW(2)-tipinde

ii) $N_3(s) = \left\langle N_3(s), N_1^*(s) \right\rangle N_1^*(s)$ (7)

eşitliğini sağlıyorlarsa, zayıf AW(3)-tipinde eğriler olarak adlandırılırlar. Burada,

$$N_1^*(s) = \frac{N_1(s)}{\|N_1(s)\|},$$
$$N_2^*(s) = \frac{N_2(s) - \left\langle N_2(s), N_1^*(s) \right\rangle N_1^*(s)}{\left\| N_2(s) - \left\langle N_2(s), N_1^*(s) \right\rangle N_1^*(s) \right\|} \tag{8}$$

dir.

**Önerme 6** (Arslan and Özgür 1997) $\gamma$, oskülatör mertebesi 3 olan bir Frenet eğrisi olsun. $\gamma$ zayıf AW(2)-tipindedir ancak ve ancak

$$\kappa''(s) - \kappa^3(s) - \kappa(s) - \tau^2(s) = 0. \tag{9}$$

eşitliği sağlanır.

**Definition 7** (Arslan and Özgür 1997) Oskülatör mertebesi 3 olan Frenet eğrileri

i) $N_3(s) = 0$ (10)

eşitliğini sağlıyorlarsa, AW(1)-tipinde

ii) $\|N_2\|^2 N_3 = \left\langle N_3, N_2 \right\rangle N_2$ (11)

eşitliğini sağlıyorlarsa, AW(2)-tipinde

iii) $\|N_1\|^2 N_3 = \left\langle N_3, N_1 \right\rangle N_1$ (12)

eşitliğini sağlıyorlarsa AW(3)-tipinde eğriler olarak adlandırılırlar.

**Önerme 8** (Arslan and Özgür 1997) $\gamma$, oskülatör mertebesi 3 olan bir Frenet eğrisi olsun. $\gamma$ eğrisinin AW(1) tipinde olması için gerek ve yeter koşul

$$\kappa''(s) - \kappa^3(s) - \kappa(s)\tau^2(s) = 0 \tag{13}$$

ve

$$\tau(s) = \frac{c}{\kappa^2(s)}, \ c \in IR \tag{14}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

**Önerme 9** (Arslan and Özgür 1997) $\gamma$, oskülatör mertebesi 3 olan bir Frenet eğrisi olsun. $\gamma$ eğrisinin AW(2) tipinde olması için gerek ve yeter koşul

$$2(\kappa'(s))^2\tau(s) + \kappa(s)\kappa'(s)\tau'(s) = \kappa(s)\kappa''(s)\tau(s) - \kappa^4(s)\tau(s) - \kappa^2(s)\tau^3(s)$$

(15)

eşitliğinin sağlanmasıdır.

**Önerme 10** (Arslan and Özgür 1997) $\gamma$, oskülatör mertebesi 3 olan bir Frenet eğrisi olsun. $\gamma$ eğrisinin AW(3) tipinde olması için gerek ve yeter koşul

$$2\kappa'(s)\tau(s) + \kappa(s)\tau'(s) = 0 \tag{16}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu eşitliğin çözümü ise $\tau(s) = \dfrac{c}{\kappa^2(s)}, \ c \in IR$ şeklindedir.

## 4. Bishop Çatısına Göre AW(k)-Tipinde Eğriler

Bu bölümde, $IE^3$ 3-boyutlu Öklid uzayında AW(k)-tipinden eğriler Bishop çatısına göre ele alınmış ve $k_1$, $k_2$ Bishop eğrilikleri arasındaki bağıntılar verilmiştir.

**Önerme 11** $\gamma$, $IE^3$ uzayında yay parametresi ile verilen bir eğri olsun ve $\{T, M_1, M_2\}$ $\gamma$ eğrisinin Bishop çatısı olsun. Bu durumda, Önerme 3' e benzer olarak

$$\begin{aligned}
&\gamma'(s) = T(s),\\
&\gamma''(s) = k_1(s)M_1(s) + k_2(s)M_2(s),\\
&\gamma'''(s) = \{-k_1^2(s) - k_2^2(s)\}T(s) + k_1'(s)M_1(s) + k_2'(s)M_2(s),\\
&\gamma^{(iv)}(s) = \{(-k_1^2(s) - k_2^2(s))' + (-k_1(s)k_1'(s) - k_2(s)k_2'(s))\}T(s)\\
&\qquad + \{k_1''(s) - k_1^3(s) - k_1(s)k_2^2(s)\}M_1(s)\\
&\qquad + \{k_2''(s) - k_2^3(s) - k_1^2(s)k_2(s)\}M_2(s).
\end{aligned}$$

(17)

eşitlikleri geçerlidir.

**Notasyon 12**

$$\begin{aligned}
\overline{N}_1(s) &= k_1(s)M_1(s) + k_2(s)M_2(s),\\
\overline{N}_2(s) &= k_1'(s)M_1(s) + k_2'(s)M_2(s),\\
\overline{N}_3(s) &= +\{k_1''(s) - k_1^3(s) - k_1(s)k_2^2(s)\}M_1(s) + \{k_2''(s) - k_2^3(s) - k_1^2(s)k_2(s)\}M_2(s).
\end{aligned}$$

(18)

**Sonuç 13** $\overline{N}_1(s), \overline{N}_2(s)$, ve $\overline{N}_3(s)$ lineer bağımlıdır ancak ve ancak $\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s)$, ve $\gamma^{(iv)}(s)$ lineer bağımlıdır.

**Teorem 14** $\gamma$, Bishop çatısı ile verilen 3. mertebeden bir eğri olsun. Bu durumda

$$\overline{N}_3(s) = \left\langle \overline{N}_3(s), \overline{N}_1^*(s) \right\rangle \overline{N}_1^*(s) + \left\langle \overline{N}_3(s), \overline{N}_2^*(s) \right\rangle \overline{N}_2^*(s), \quad (19)$$

eşitliği sağlanır. Burada

$$\begin{aligned}
\overline{N}_1^*(s) &= \frac{\overline{N}_1(s)}{\left\| \overline{N}_1(s) \right\|},\\
\overline{N}_2^*(s) &= \frac{\overline{N}_2(s) - \left\langle \overline{N}_2(s), \overline{N}_1^*(s) \right\rangle \overline{N}_1^*(s)}{\left\| \overline{N}_2(s) - \left\langle \overline{N}_2(s), \overline{N}_1^*(s) \right\rangle \overline{N}_1^*(s) \right\|}
\end{aligned} \quad (20)$$

dir.

**Tanım 15** Bishop çatısı ile verilen 3. mertebeden birim hızlı eğriler

i) $\overline{N}_3(s) = \left\langle \overline{N}_3(s), \overline{N}_2^*(s) \right\rangle \overline{N}_2^*(s)$ (21)

eşitliğini sağlıyorlarsa zayıf Bishop AW(2)-tipinde,

ii) $\overline{N}_3(s) = \left\langle \overline{N}_3(s), \overline{N}_1^*(s) \right\rangle \overline{N}_1^*(s)$ (22)

eşitliğini sağlıyorlarsa zayıf Bishop AW(3)-tipinde eğriler olarak adlandırılırlar.

**Önerme 16** $\gamma$ Bishop çatısı ile verilen 3. mertebeden birim hızlı bir eğri olsun. Eğer $\gamma$ eğrisi zayıf Bishop AW(2)-tipinde ise

$$\begin{aligned}
&(k_1''(s) - k_1^3(s) - k_1(s)k_2^2(s))(k_1^2(s) + k_2^2(s))\\
&= k_2^2(s)(k_1''(s) - k_1^3(s) - k_1(s)k_2^2(s)) - k_1(s)k_2(s)(k_2''(s) - k_2^3(s) - k_1^2(s)k_2(s)),
\end{aligned}$$

(23)

$$\begin{aligned}
&(k_2''(s) - k_2^3(s) - k_1^2(s)k_2(s))(k_1^2(s) + k_2^2(s))\\
&= k_1^2(s)(k_2''(s) - k_2^3(s) - k_1^2(s)k_2(s)) - k_1(s)k_2(s)(k_1''(s) - k_1^3(s) - k_1(s)k_2^2(s))
\end{aligned}$$

(24)

eşitlikleri sağlanır ve bu eşitliklerin bir çözümü $k_1(s) = -k_2(s) = \pm \dfrac{1}{s+c}; \quad c \in IR$ şeklindedir.

**İspat.** (18) ve (20) eşitliklerinden

$$\overline{N}_1^*(s) = \frac{1}{\sqrt{k_1^2(s) + k_2^2(s)}}(k_1(s)M_1(s) + k_2(s)M_2(s)) \quad (25)$$

ve

$$\overline{N}_2^*(s) = \frac{1}{\sqrt{k_1^2(s) + k_2^2(s)}}(k_2(s)M_1(s) - k_1(s)M_2(s)). \quad (26)$$

elde edilir.

(26) eşitliği (21) de yerine yazılarak, (23) ve (24) eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerden $k_1(s) = -k_2(s)$ dir. $k_1(s) = -k_2(s)$ eşitliği (23) de yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

**Sonuç 17** $\gamma$ zayıf Bishop AW(2)-tipinde ise, $\gamma$ düzlemsel bir eğridir.

**İspat.** $\gamma$ zayıf Bishop AW(2)-tipinde olsun. Bu durumda $k_1(s) = -k_2(s)$ olduğundan $\theta(s)$ daima sabit bir açıdır ve dolayısıyla $\tau(s) = 0$ dır. Böylece, $\gamma$ düzlemsel bir eğridir.

**Sonuç 18** $\gamma$ zayıf Bishop AW(2)-tipinde ise, $\gamma$ bir slant helis eğrisidir.

**İspat.** $\gamma$ zayıf Bishop AW(2)-tipinde olsun. Bu durumda $k_1(s) = -k_2(s)$ olduğundan, $\dfrac{k_1(s)}{k_2(s)}$ oranı her $s \in I$ için sabittir. Böylece, $\gamma$ bir slant helis eğrisidir.

**Önerme 19** $\gamma$ Bishop çatısı ile verilen 3. mertebeden birim hızlı bir eğri olsun. Eğer $\gamma$ zayıf Bishop AW(3)-tipinde ise, Bishop çatısına göre eğrilik fonksiyonları aşağıdaki diferansiyel denklem sistemini sağlar

$$(k_1''(s) - k_1^3(s) - k_1(s)k_2^2(s))(k_1^2(s) + k_2^2(s)) = k_1^2(s)(k_1''(s) - k_1^3(s) - k_1(s)k_2^2(s)) + k_1(s)k_2(s)(k_2''(s) - k_2^3(s) - k_1^2(s)k_2(s)),$$

(27)

$$(k_2''(s) - k_2^3(s) - k_1^2(s)k_2(s))(k_1^2(s) + k_2^2(s)) = k_2^2(s)(k_2''(s) - k_2^3(s) - k_1^2(s)k_2(s)) + k_1(s)k_2(s)(k_1''(s) - k_1^3(s) - k_1(s)k_2^2(s)).$$

(28)

ve bu sistemin bir çözümü $k_1(s) = k_2(s)$ şeklindedir.

**İspat.** (25) eşitliği (22) de yerine yazılarak, sonuç elde edilir.

**Tanım 20** Bishop çatısı ile verilen 3. mertebeden birim hızlı bir eğriler

i) $\overline{N}_3(s) = 0,$ (29)

eşitliğini sağlıyorlarsa Bishop AW(1)-tipinde

ii) $\left\|\overline{N}_2\right\|^2 \overline{N}_3 = \left\langle \overline{N}_3, \overline{N}_2 \right\rangle \overline{N}_2,$ (30)

eşitliğini sağlıyorlarsa Bishop AW(2)-tipinde

iii) $\left\|\overline{N}_1\right\|^2 \overline{N}_3 = \left\langle \overline{N}_3, \overline{N}_1 \right\rangle \overline{N}_1.$ (31)

eşitliğini sağlıyorlarsa Bishop AW(3)-tipinde eğriler olarak adlandırılırlar.

**Önerme 21** $\gamma$ Bishop çatısı ile verilen 3. mertebeden birim hızlı bir eğri olsun. Eğer $\gamma$ Bishop AW(1)-tipinde ise Bishop çatısına göre eğrilik fonksiyonları

$$\begin{aligned} & k_1''(s) - k_1^3(s) - k_1(s)k_2^2(s) = 0, \\ & k_2''(s) - k_2^3(s) - k_1^2(s)k_2(s) = 0 \end{aligned} \qquad (32)$$

diferansiyel denklem sistemini sağlar ve bu sistemin çözümü $k_1(s) = k_2(s) = \pm\dfrac{1}{s+c}; c \in IR$ şeklindedir.

**İspat.** (18) ve (29) eşitliklerinden, (32) diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümü $k_1(s) = k_2(s)$ olup, bu çözüm (32) de yerine yazılarak sonuca ulaşılır.

**Sonuç 22** $\gamma$, Bishop AW(1)-tipinde olsun. Bu durumda $\gamma$ düzlemsel bir eğridir.

**İspat.** $\gamma$, Bishop AW(1)-tipinde olsun. Bu durumda $k_1(s) = k_2(s)$ olduğundan $\theta(s)$ daima sabit bir açıdır ve dolayısıyla $\tau(s) = 0$ dır. Böylece $\gamma$ düzlemsel bir eğridir.

**Sonuç 23** $\gamma$, Bishop AW(1)-tipinde ise, $\gamma$ bir slant helis eğrisidir.

**İspat.** $\gamma$ Bishop AW(1)-tipinde olsun. Bu durumda $k_1(s) = k_2(s)$ olduğundan $\dfrac{k_1(s)}{k_2(s)}$ oranı her $s \in I$ için sabittir. Böylece $\gamma$ bir slant helis eğrisidir.

**Önerme 24** $\gamma$ Bishop çatısı ile verilen 3. mertebeden birim hızlı bir eğri olsun. Eğer $\gamma$ Bishop AW(2)-tipinde, Bishop çatısına göre eğrilik fonksiyonları aşağıdaki diferansiyel denklemi sağlar

$$k_2'(s)(k_1''(s) - k_1^3(s) - k_1(s)k_2^2(s)) = k_1'(s)(k_2''(s) - k_2^3(s) - k_1^2(s)k_2(s)) .$$

(33)

**İspat.** (18) eşitliği (30) da yerine yazılarak, sonuç elde edilir.

**Önerme 25** $\gamma$ Bishop çatısı ile verilen 3. mertebeden birim hızlı bir eğri olsun. Eğer $\gamma$ Bishop AW(3)-tipinde, Bishop çatısına göre eğrilik fonksiyonları aşağıdaki diferansiyel denklemi sağlar

$$k_2(s)(k_1''(s) - k_1^3(s) - k_1(s)k_2^2(s)) = k_1(s)(k_2''(s) - k_2^3(s) - k_1^2(s)k_2(s))$$

(34)

## 5. Sonuç

AW(k)-tipinde eğriler ve alt manifoldlar Arslan ve West tarafından tanıtılmıştır. Bundan itibaren, bu tipteki alt manifoldlar ile ilgili birçok çalışma çeşitli yazarlar tarafından yapılmıştır.

Bu çalışmada, $IE^3$ 3-boyutlu Öklid uzayında AW(k)-tipinden eğriler Bishop çatısına göre ele alınmıştır. $IE^3$ 3-boyutlu Öklid uzayında $k_1$, $k_2$ Bishop eğrilikleri arasındaki bağıntılar verilmiştir.

## 6. Kaynaklar


Arslan, K. and West, A., 1995. Product submanifols with pointwise 3-planar normal sections. *Glasgow Mathematical Journal*, **37**, 73-81.

Arslan, K. and Özgür, C., 1997. Curves and surfaces of AW(k)-type. *Geometry an Topology of Submanifolds IX, World Scientific*, 21-26.

Bishop, L.R., 1975. There is more than one way to frame a curve. *American Mathematical Monthly,* **82(3)**, 246-251.

Bükçü, B. and Karacan, M. K., 2009. The slant helices according to Bishop frame. *World Academy of Science, Engineering and Technology,* **59**, 1039-1042.

Do Carmo, M. P., 1976, Differential geometry of curves and surfaces. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 2-27.

Karacan, M.K. and Bükçü, B., 2010. On natural curvatures of Bishop frame. *Journal of Vectorial Relativity,* **5(4)**, 34-41.

Kılıç, B. and Arslan, K., 2004. On curves and surfaces of AW(k)-type. *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri. Enstitüsü Dergisi*, **6(1)**, 52-61.

Özgür, C. and Gezgin, F., 2005. On some curves of AW(k)-type. *Differential Geometry-Dynamical Systems,* **7**, 74-80.

Ünal, D., Kişi, I. and Tosun, M., 2013. Spinor Bishop equations of curves in Euclidean 3-space. *Advances in Applied Clifford Algebras,* **23(3)**, 757-765.

Yoon, D. W., 2012. General helices of AW(k)-type in the Lie group. *Journal of Applied Mathematics,* **(2012)**, 1-10.