Elementary Education Online, 11(1), 173-194, 2012.
İlköğretim Online, 11(1), 173-194, 2012. [Online]: http://ilkogretim-online.org.tr

# Teaching of Translations through use of Vectors in Wingeom-tr Environment[1]

Seda Sünker[2] İsmail Özgür Zembat[3]

**ABSTRACT:** This study investigated the kinds of understandings required to conceptually develop the meaning of translations at the elementary school level. For this purpose, a curriculum piece supported by the use of a geometry software, called Wingeom-tr, was developed and applied to four sixth graders via teaching experiment methodology. As a result, how participants made sense of translations and the constructs necessary to understand translations, the kinds of difficulties participants experienced, the (dis)advantages of using Wingeom-tr in teaching translations, and the kind of experience gained from the curriculum development were analyzed. Such analyses were guided by the use of drawing-figure theoretical framework offered by Parsyzz and Laborde. Results indicate that understanding vectors is necessary in abstracting the meaning of translations. Additionally, use of a dynamic environment such as Wingeom-tr followed by static environment (paper-pencil environment) fosters the learning process.

**Keywords:** Translations, vectors, curriculum development, understanding, dynamic geometry environment, Wingeom-tr

## SUMMARY

**Purpose and Significance:** The purpose of this study was to understand the nature of the understandings required to meaningfully construct the concept of translations via the use of technology at the elementary school level. There are two major driving forces for this study. One is that the current mathematics standards suggested by Turkish Ministry of Education suggest teaching of translations as physical moves as opposed to functions mapping points in plane to points in plane, learning of which is required to conceptualize translations. Second, the current literature in this area highlights student difficulties and misconceptions in learning translations, whereas it falls short in providing solutions to those and teaching translations conceptually, for which this study is designed to work. In this regard, the research questions pursued in this study are; (1) To what extend can the mathematical structure of translations in the elementary grades be focused on? How? (2) What needs to be taken into account in developing a curricular piece that is based on the use of vectors in helping to develop a conceptual understanding of translations at the elementary school level? (3) What are the problems to be expected with the implemented/applied curriculum?

**Method:** A curriculum piece supported by the use of a geometry software, called Wingeom-tr, was developed and implemented on four sixth graders via the use of teaching experiment methodology. As a result of the implementation, how participants made sense of translations and the constructs necessary to understand translations, the kinds of difficulties the participants experienced, the (dis)advantages of using Wingeom-tr, and the kind of experience gained from the curriculum development were analyzed through use of drawing-figure theoretical (qualitative) framework offered by Parsyzz and Laborde.

**Results:** The study indicates that understanding vectors is necessary in constructing the mathematical meaning of translations. It also directs our attention to the observation that the use of Wingeom-tr (because of its dynamic feature) followed by static environment (paper-pencil) in teaching translations fosters the learning process of students.

**Discussion and Conclusion:** The new math standards set by the Turkish Ministry of Education needs to be revised to include vectors as the core of teaching translations. The sole use of dynamic geometry programs limits students' work to reasoning with *drawing*, whereas work with dynamic environment followed by a static environment fosters reasoning with *figure*.

---

[1] The data presented in this article is from a study conducted for a master's thesis (Faydaci, 2008) of the first author and this thesis was supervised by Dursun Soylu from Gazi University and the second author, though the second author's supevisory role was terminated by the time the first author defended the thesis since the second author had to move abroad. However, the curriculum piece mentioned in the article was developed by the authors only and the given data analysis is substantially different from the one provided in the aforesaid thesis.

[2] M.S., Matematics Teacher, Altındağ TOKİ Malazgirt Elementary School, Ankara, Turkey; e-mail: sedafaydaci@gmail.com.
[3] Assoc. Prof., Matematics Educator, (currently working as an assistant professor), United Arab Emirates University, Faculty of Education, Dept. of Curriculum and Instruction, P.O. Box 17551, Al Ain, Abu Dhabi, UAE; e-mail: izembat@gmail.com.

# Öteleme Dönüşümünün Wingeom-tr Ortamında Vektörler Yardımıyla Öğretimi[4]

Seda Faydacı[5] İsmail Özgür Zembat[6]

**ÖZ.** Bu çalışma ilköğretim seviyesinde geometrik dönüşümlerden öteleme dönüşümünün kavramsal olarak yapılandırılmasında gerekli olan algı biçimlerini incelemektedir. Bu amaçla Wingeom-tr isimli dinamik geometri yazılımıyla desteklenen bir müfredat parçası geliştirilmiş ve öğretim deneyi metodu kullanılarak dört ilköğretim 6. Sınıf öğrencisi üzerinde uygulanmıştır. Uygulama sonunda öğrencilerin öteleme dönüşümünü ve dönüşümü anlamlandırmada gerekli olan bileşenleri nasıl anlamlandırdıkları, ne gibi zorluklar çektikleri, yazılımın öğretimde kullanımının (dez)avantajları ve müfredat geliştirme ile ilgili edinilen deneyimler Parsyzz ve Labord'un figür-çizim ayrımına dair ürettiği teorik çatı dikkate alınarak analiz edilmiştir. Sonuçta öteleme'nin öğretiminde vektör kavramının öğrenilmesinin gerekliliği ve Wingeom-tr (içerdiği dinamiklikten dolayı) ve ardından statik (kağıt) ortam kullanımının öğretim sürecini olumlu etkilediği görülmüştür.

**Anahtar Kelimeler:** Öteleme, vektör, müfredat geliştirme, anlayış, dinamik geometri yazılımı, Wingeom-tr

## GİRİŞ

Son yıllarda eğitim sistemimizde yapılandırmacı yaklaşımın etkisiyle birçok çalışmalar yapılmış ve bu doğrultuda diğer alanlar yanında matematikte de program değişiklikleri yapılarak okullarda uygulamaya geçirilmiştir. Yenilenen ilköğretim matematik programında, özellikle geometri alanında, bazı konular ilk kez daha çok öne çıkarılmıştır. Örneğin, örüntü ve süslemeler, fraktallar, dönüşüm geometrisi (öteleme, dönme, yansıma, ötelemeli yansıma) ve izdüşüm (perspektif) matematik programı içinde geometri alanında daha çok ön plana çıkan kavramlar arasındadır. Gerek yabancı (örneğin, Portnoy, Grundmeier, & Graham, 2006) gerekse yerli verilere dayalı literatürde (örneğin, Yanık, 2011) öğretmenlerin bu kavramların içeriğine ve özellikle bilgisayar destekli öğretimine dair yeterince bilgi ve donanıma sahip olmadıkları ortaya konulmuştur. Bu kavramların derinlemesine araştırılıp, öğrencilerce nasıl yapılandırılabileceğine dair çıkarımlarda bulunmanın, aynı zamanda öğretmenlerin gerekli bilgi ve donanımı edinmesinde etkili olacağı düşünülmektedir. Bu çalışma geometrik dönüşümlerden öteleme dönüşümü için bahsi geçen derinlemesine araştırmayı ve konunun kavramsal olarak nasıl öğrenilebileceğine dair çıkarımları sunmaktadır.

### Araştırmanın Önemi ve İçeriği

Matematik, sadece kurallar, formüller ve işlemlerden ibaret olmayıp içinde bir anlam bütünlüğü olan düzenler ve ilişkiler yumağıdır (van de Walle, 2000). Matematikteki kavramların bu şekilde birbirine bağlı ve ilişkili görülmesi, öğrencilerin daha sağlam bir matematik anlayışı geliştirmelerine olanak sağlayabilir (Hollebrands, 2003). Bu bağlamda geometrik dönüşümler (öteleme, dönme, yansıma) diğer matematiksel kavramlarla ilişkilendirildiği takdirde öğrencilerce etkin bir biçimde yapılandırılabildiğinden matematiksel ilişkileri anlamlandırmada önemli bir yere sahiptir. En son haliyle Milli Eğitim Bakanlığı'nca (MEB) onaylanan yeni matematik programı, dönüşümleri ele alırken bu öneme ne kadar odaklanmaktadır? Bu sorunun cevabı takip eden paragraflardaki kısa teorik analiz verilmekte ve bu yapılırken aynı zamanda bu araştırmanın neden önemli olduğu da açıklanmaktadır. Verilen bu teorik analizin bir anlamda ispatı araştırma bulgularına dayalı olarak "Tartışma ve Sonuç" kısmında ilk araştırma sorusu cevaplanırken verilmektedir.

MEB'nın en son uygulamaya koyduğu 6-8.sınıf matematik programında (MEB, 2009) öteleme dışındaki tüm dönüşümler tanımlanırken bazı parametrelerin (kısıtlamaların) varlığından bahsedilmektedir. Örneğin, yansıma dönüşümü için *simetri ekseni*, dönme dönüşümü için ise *açı* ve *merkez noktası* programda üzerinde durulan parametrelerdir. Fakat öteleme dönüşümü ele alınırken

[4] Makalede analizi verilen veri grubu birinci yazarın yüksek lisans tezi (Faydacı, 2008) için yapılan çalışmadan elde edilmiştir. Tezin iki danışmanından birisi ikinci yazar diğeri ise Gazi Üniversitesi'nden Yrd. Doç Dr. Dursun Soylu'dur. Ancak savunma gününün hemen öncesinde ikinci yazarın yurtdışındaki bir kurumda çalışmaya başlaması sebebiyle danışmanlığı düşürülmüştür. Bununla birlikte makalede bahsi geçen müfredat parçası sadece yazarlarca geliştirilip uygulanmış olup verilen veri analizi yüksek lisans tezindekinden farklıdır.

[5] M.S., Matematik Öğretmeni, Altındağ TOKİ Malazgirt İlköğretim Okulu, Ankara, Türkiye; e-posta: sedafaydaci@gmail.com.

[6] Doç. Dr., Matematik eğitimcisi (halihazırda adı geçen üniversitede "yrd. doç. dr." ünvanıyla çalışmaktadır), Birleşik Arap Emirlikleri Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Al Ain, Abu Dhabi, BAE; e-posta: izembat@gmail.com.

*vektör* kavramına yer verilmemesi dönüşümün öğretiminde öğrencilerin daha çok eylemsel işlemlere odaklatılmak istendiği imajını doğurmaktadır. Yeni matematik programında, neden diğer dönüşümler için parametrelerin en azından adı geçerken öteleme dönüşümünün parametresi olan *vektör* gözardı edilmektedir? Program üretilirken hangi kriterler göz önünde bulundurularak böyle bir karar verildiği bilinmediği için bu soruya bizim bulabildiğimiz en mantıklı cevap, vektör kavramının ilköğretim seviyesinde zor olabileceğinin düşünülerek yeni programda ele alınmak istenmemesi veya da bir öğretim programında her konuya yer vermenin gerekli olmadığının düşünülmesidir. Halbuki, vektörün öteleme dönüşümünde oynadığı rolün önemine odaklanmamak öteleme dönüşümünün matematiksel olarak öğrencilerce anlamlandırılmasını zora sokabilir. Bu aşamada bize göre ana sorun müfredat geliştirmeye sadece *matematiksel* açıdan mı yoksa sadece *pedagojik* olarak mı bakmamız gerektiği konusunda bir karar verilmesinde yatmaktadır. Yeni matematik programında pedagoji ön plana çıkarılırken matematik arka plana itilerek öteleme dönüşümünün öğretiminde vektör kavramına odaklanmaktan feragat edilmiştir (Zembat, 2010). Bu sebepledir ki dönüşümlerden öteleme, özellikle ilköğretim müfredatında, ayrı bir yere ve öneme sahip olup araştırmamıza da konu teşkil etmiştir. Bu çalışmada öteleme öğretiminde vektörü göz ardı etme kararı sorgulanmakta ve araştırma temelli bulgulara dayanarak öteleme öğretimi için yeni bir bakış açısı getirilmektedir.

Yeni matematik programında öteleme ile ilgili kazanımlar analiz edildiğinde, bu kavrama yüklenen anlam ve devamında kavramın öğretimine yönelik verilen öneriler, kavramın sınıflarda öğretilirken yapılandırmacılıktan çok davranışçı bir mercekle ele alınması gerektiği izlenimini vermektedir. Örneğin, 6. sınıf matematik programında (MEB, 2009, s.169-170) yer alan öteleme ile ilgili kazanımlar şu şekildedir: "(1) Öteleme hareketini açıklar; (2) Bir şeklin öteleme sonunda oluşan görüntüsünü inşa eder; (3) Öteleme ile süsleme yapar". Öte yandan bu kazanımlara 7. sınıfta (MEB, 2009, s.249) "... öteleme ... hareketleri ile süsleme yapar" ve 8. sınıfta (MEB, 2009, s.318) "Koordinat düzleminde bir çokgenin ... herhangi bir doğru boyunca öteleme ... altında görüntülerini belirleyerek çizer" kazanımları eklenmiştir. Programın 2004 baskısından bu yana değişmeyen bu kazanımlar dikkate alınarak görüntü belirleyip süsleme yapmak gibi herhangi bir ortak amaç gütmeyen eylemlere odaklanmak, ötelemenin içinde barındırdığı birçok matematiksel kavramı gözardı ederken, kâğıt üzerinde çizime dayalı bir beceri kazandırmayı ön plana çıkarmaktadır[7]. Dikkat edildiğinde 8. sınıf kazanımı *vektör* yerine *doğru boyunca* ötelemeye odaklanmaktadır ki pedagojik kaygılarla ele alınan bu kazanım matematiksel olarak da anlamsızdır. Ayrıca ders kitaplarında bu konu üzerine hazırlanan etkinliklerde ötelemeye açıkça şekillerin kaydırılması anlamı yüklendiği görülmektedir. Muhtemelen ötelemeyi somutlaştıracağı ve günlük hayatla ilişkilendireceği düşüncesi ile belirtilen bu ifade ötelemenin arka planında yatan matematiği anlamakta sorun yaratabilir. Verilen bu kısa analizden hareketle şu tür sorular akla gelmektedir.

1. Öteleme dönüşümünün matematiksel yapısına ilköğretimde ne şekilde odaklanılabilir?
2. Öğrencilerin öteleme dönüşümünün anlamını ve vektörün öteleme dönüşümündeki rolünü/anlamını yapılandırırken kavramsallaştırması gereken aşamalar nelerdir? Bu bağlamda öğrencilerin kavramsal gelişimini destekleyecek bir müfredat parçası ve ortam geliştirirken nelere dikkat edilmelidir?

Bu araştırma, teknoloji destekli bir matematik öğretimi ortamından faydalanarak, yukarıdaki sorulara cevap aramaktadır.

## Literatürde Öteleme ve Buna Bağlı Olarak Araştırma Deseni

Teknolojideki ilerlemeler matematiğin sınıflarda ele alınış tarzının değiştirilmesini zorunlu kılmıştır. Önceleri statik kağıt üzerinde yapılabilen işlem ve muhakemeler artık dinamik bilgisayar ortamlarında ele alınabilmektedir. Örneğin, bir geometri kavramını açıklamak için kağıt üzerine çizilen şekiller genelde son durumu ile tamamlanmış ve hareketsiz, yani statik, haldedirler. Üzerinde durulan kavram veya ilişki orada çizildiği gibi kalır, hareket ettirilemez (statiktir), ve çoğu zaman genellemelere ve yeni varsayım kurmaya elverişli değildir. Oysa aynı geometrik ilişki bilgisayar ortamında bazı animasyonlarla dinamik bir şekilde ele alınabilir. Bu sayede değişik durumların denenmesine ve bahsi geçen ilişki veya özelliğin

[7] Bu konuda ayrıntılı bir çalışma için bakınız Zembat (2010).

genelleştirilmesine imkan sağlanmış olur. Yazılımlar bu çeşit animasyonlarla birlikte kullanıcılara içinde yeni matematiksel keşifler yapabileceği dünyalar sunar (Baki, 1996).

Dinamik ortam sunan yazılımlar öğretmen ve öğrencilere çeşitli imkanlar da sunmaktadır. Dinamik geometri yazılımlarında, örneğin, çizili olan bir yapı hareket ettirildiğinde daha önce ölçülen nicelikler de (kenar uzunluğu, açı büyüklüğü, vs.) eş zamanlı değişir. Bu özellik yardımıyla yapının değişimi izlenirken yapı hakkında hipotezler kurulabilir, kurulan hipotezler test edilebilir, bunlardan genellemelere varılabilir. Geometrik dönüşümlerden dönme, öteleme ve yansıma özellik koruyan ve düzlemi içindeki düzeni koruyarak yine düzleme dönüştüren fonksiyonlar (Martin, 1982), izometriler, oldukları için yapıları gereği dinamik ortamlarda (Wingeom-tr, GSP, vs.) daha kolay ve etkin olarak ele alınabilen kavramlardır. Çünkü kağıt (ya da geometri tahtası) gibi sabit ortamlarda çizim yolu ile ifade edilmesi öğrencilerin bu kavramları algılamalarını zorlaştırmaktadır. Güven ve Karataş'ın (2003) dinamik bir geometri yazılımı olan Cabri üzerine öğrencilerle yaptıkları araştırmada, tüm dönüşüm çeşitlerinin öğretimi sırasında dinamik yazılım kullanmanın elverişli olduğu belirtilmiştir. Bu yazılımların hazır bilgi ve konu içermemesi öğretimi davranışçı yaklaşımın olumsuz etkilerinden kurtarmaktadır. Araştırmacılar bu yaklaşımla, öğrencilerin yazılım ortamında keşfetme, varsayımda bulunma, test etme, reddetme, formülleştirme, açıklama gibi yetilerinin geliştiğini teyit etmişlerdir.

Flanagan'ın (2001) yapmış olduğu bir çalışma, kullanılan ortam (Geometer's Sketchpad yazılımı) ve odaklanılan konular (geometrik dönüşümler) açısından, bu araştırmaya önemli ölçüde ışık tutmuştur. Flanagan (2001) 9. sınıf öğrencilerinin dönüşüm geometrisi kavramlarını teknolojik bir ortamda geliştirirken teknolojinin öğretim sürecindeki etkisini ve önemini incelemiştir. *Geometer's Sketchpad* isimli dinamik bir yazılımın kullanıldığı araştırmada öğrencilerin üzerinde çalışılan geometrik dönüşümün özelliklerini, esas şekil (girdi) ve görüntüsü (çıktı) arasındaki ilişkiyi, parametrelerin rolünü ve dönüşümlerde korunan özellikleri ne derece anlamlandırdıkları üzerine durulmuştur. Yansıma, dönme ve skaler büyüme (dilation) dönüşümlerinin de incelendiği araştırma öteleme dönüşümüne ve bu dönüşümün öğreniminde vektörün önemine büyük ölçüde yer vermiştir. Bu konuda yapılan analizlerde diğer dönüşümler içerisinde en çok ötelemede bir parametre olan vektörün öğrenciler tarafından anlaşılmakta zorlanıldığı ifade edilmiştir ve bu durumun nedenlerine odaklanılmıştır. Flanagan (2001) bu nedenleri şöyle sıralamaktadır: (1) Öncelikle vektörün gösterimi ışın ile benzerlik gösterdiği için bazı karışıklıklara yol açmıştır. İki kavramda da ok kullanılması bazı öğrencilerin bir büyüklüğe sahip olan vektör hakkında düşünmekte zorluk çekmesine ve yanılgıya düşmesine sebep olmuştur. Öte yandan vektörün sonlu bir doğru parçası olduğunu ifade edebilen öğrencilerin öteleme dönüşümünü vektör kavramı ile daha iyi anlamlandırdıkları görülmüştür. Çünkü vektörün büyüklüğü ötelemenin anlaşılmasında önemli bir role sahiptir. (2) Vektör kavramı ötelemede diğer parametrelerden (yansıma doğruları, dönme merkezi, dönme açısı, vs.) daha farklı algılanmaktadır. Vektörün parametre rolü dışında aynı zamanda kendisinin de ötelendiği öğrencilerce gözden kaçmış ve vektöre daha çok dönüşümü yapmaya yarayan bir araç gözü ile bakılmıştır. Flanagan'a (2001) göre bunun sebebi kullanılan programın öğrencileri vektörü araç olarak ele almaya itmesidir. Öğrenciler her ne kadar vektörün dönüşüme etkisini ifade etseler de *Geometer's Sketchpad* (GSP) ekranında vektörün öteleme altındaki görüntüsünü görmedikleri için vektörün aynı zamanda geometrik bir nesne olduğunu ve düzlemdeki her nokta gibi vektörün de ötelemeye tabi olduğunu ifade edememişlerdir. Bu bulgular araştırmamızı oluştururken bize aşağıdaki gibi rehberlik etmiştir.

Flanagan'ın (2001) çalışmasındaki bu tür analizler araştırmamıza müfredat geliştirirken ve uygularken önemli ölçüde rehberlik etmiş ve buna binaen yukarıda bahsi geçen sorunların yaşanmaması için nelere dikkat edilmesi gerektiği üzerine derinlemesine analizler yapılmıştır. Örneğin, "vektör kavramı ile hiç tanışmamış öğrenciler vektörü nasıl yapılandırırsa, (örneğin, *yönlü doğru parçası*) ışın kavramı ile karıştırılmasına müsaade edilmez?" sorusuna odaklanılmıştır. Bu soruya cevap aranırken öğrencilerin vektörün ışın kavramından farklı sonlu bir geometrik nesne olduğu üzerinde yoğunlaşması sağlanılmış ve doğru parçasından farklı olarak belli bir yön belirttiği bilgisi yapılandırılmıştır. Ayrıca, vektör kavramının kendi yapısının doğru biçimde algılanmasının ötelemeyi anlamayı, matematiksel anlamda yorumlamayı kolaylaştıracağı düşüncesi araştırmanın ana temasını oluşturmuştur. Araştırma sırasında vektörün öteleme içerisinde parametre rolünü ifade ederken, bir diğer rolünün de (tanım kümesinin bir elemanı olması) gözden kaçmaması için önlemler alınmıştır. Örneğin, öğretim sırasında yazılım ortamında kullanılan tüm düzlemlerde vektörün kendisinin de görüntüsü önceden belirtilmiştir. Böylece vektörün parametre rolü dışında aynı zamanda bir tanım kümesi elemanı olduğu farkındalığı kazandırılmak istenmiştir.

## YÖNTEM

Araştırma tasarlanırken öncelikle öteleme dönüşümünün yapısına odaklanılarak bir matematiksel analiz ortaya çıkarılmış, öğrencilerin olası hazır bulunuşluk düzeyleri üzerinde düşünülerek bu düzeyleri belirlemek için araştırmacılarca mülakatlar hazırlanmış, ve müfredat geliştirirken öğrencilerin olası gelişim aşamaları üzerinde derinlemesine düşünülerek ortaya çıkabilecek muhtemel sorunlar analiz edilmiştir. Tasarım aşaması bittikten sonra üretilen müfredat parçası bir pilot çalışma ile üç tane 6. sınıf öğrencisi üzerinde denenmiş ve edinilen deneyimler dikkate alınarak yenilenmiştir. Daha sonra Ankara ili sınırlarındaki bir ilköğretim okulunun 6. sınıfından seçilen dört öğrenci ile mülakat yapılarak hazır bulunuşluk düzeyleri belirlenmiş ve tasarlanan müfredat, mülakatlardan elde edilen bulgular da dikkate alınarak öğrencilere bireysel olarak ayrı ayrı uygulanmıştır. Bu uygulamaların hepsi video kaydına alınmıştır. Uygulamaya katılacak öğrenciler seçilirken sınıfta düşüncelerini açıklamaktan çekinmeyen, fikirlerini çekinmeden paylaşan ve öteleme dönüşümü ile vektör kavramlarını bilmeyen öğrencilerin seçilmesine dikkat edilmiş ve araştırmayı başlatabilmek için gerekli yazılı izinler alınmıştır. 6. sınıf seviyesinde öğrencilerle çalışılmasının nedeni, MEB müfredatına göre öteleme dönüşümü öğretimine 6. sınıfta başlanılmasıdır.

Uygulamalar öğrencilerin rahatsız edilmeyeceği boş bir sınıfta her öğrenci ile ayrı ayrı yapılmıştır. Uygulama esnasında Wingeom-tr[8] yazılımı yüklü ve bu yazılım kullanılarak hazırlanmış soruları içeren bir dizüstü bilgisayar, boş kağıt, kalem ve silgi gibi materyaller öğrencilerin kullanımına sunulmuştur. Öğrencilere ayrı ayrı bireysel olarak ders verilmesinin çeşitli sebepleri vardır. Bireysel çalışmalarla öğrenci ile öğretmen arasında karşılıklı etkileşim daha iyi sağlandığı için öğrenci algılarının daha iyi gözlemlenmesine imkan sağlanmaktadır. Bu nedenle öğrencilerin öteleme dönüşümünü yapılandırırken deneysel işlemlerden matematiksel soyutlamaya nasıl geçtiği, konuyu nasıl algıladıkları ve yorumladıkları ile ilgili analizlerde kolaylık sağlaması açısından bireysel çalışmalar yapılması uygun görülmüştür. Literatürde de bunun örnekleri mevcuttur (örneğin, Simon vd., 2010; Steffe, 1991; Tzur, 1999).

Bahsi geçen tasarım bir öğretim deneyi (Steffe ve Thompson, 2000) olarak uygulanmıştır. Araştırmacılardan ilki araştırmacı-öğretmen kimliğiyle uygulamaları tek başına yapmıştır. Araştırmacılar her uygulamanın ardından çekilen videolar üzerinden analizler yapmış ve sonrasında ileri aşamalarla ilgili gerekli kararları birlikte vermişlerdir. Üretilen müfredat parçası her öğrenciye ayrı ayrı günde birer saat olmak üzere toplamda 4 saat uygulanmıştır. Uygulama esnasında üretilmiş olan müfredatın işleyen ve işlemeyen kısımları üzerinde araştırmacılar devamlı surette analizler yaparak dersler çıkarmaya çalışmıştır. Yapılan bu analizler uygulamayı tekrar geliştirmek amacıyla kullanılmış ve uygulama tamamlandıktan sonra da geriye dönük nitel analizler yapılmıştır.

## TEORİK ÇATI

Araştırmada Piaget'nin ürettiği *asimilasyon prensibi*, *deneysel* ve *düşündürücü soyutlama* yapılarının yanı sıra ilk olarak Paryzsz (1988) ve ardından Labord'un (1993) geliştirerek araştırmalarında ortaya attığı *figür-çizim* teorisinden ve öteleme dönüşümünün *matematiksel yapı*sının analizinden faydalanılmıştır. Figür-çizim teorisi dışındaki çatılar müfredat geliştirme ve uygulamalarda rehberlik ederken, figür-çizim teorisi veri analizinde daha ağırlıklı olarak kullanılmıştır. Bu teorilerin kısaca içerikleri ve nasıl araştırmaya rehberlik ettikleri aşağıda sırasıyla verilmektedir.

Araştırmaya katılan öğrenciler için öteleme dönüşümü daha önceden bilmedikleri bir konudur. Öğretim tasarımında bu durum özenle dikkate alınmıştır. Piaget'e (2001) göre birey, karşılaştığı yeni durumu veya bilgiyi ancak eski bilgi ve deneyimleri yardımıyla anlamlandırıp özümseyebilir. *Asimilasyon prensibi* olarak adlandırılan bu prensibe göre öteleme dönüşümünü bilmeyen bir öğrenci

[8] Wingeom-tr yazılımı halen Phillips Exeter Akademi'de matematik bölümünde öğretim üyeliği yapan Profesör Richard Parris tarafından üretilmiş olup İsmail Özgür Zembat tarafından Türkçe'ye çevrilmiştir. Bu programın seçilme nedenleri, programın bedava olarak sınıflarda rahatça kullanılabilmesi, araştırmacıların programla yeterince tanışık olmaları ve programın sunduğu kısıtlılıkların öğrenmeyi kolaylaştırmasıdır. Programla ilgili ayrıntılar ileriki kısımlarda verilmektedir.

bu dönüşümü doğrudan aktarımla hazmedip öğrenemez. Bu dönüşümü öğrenmesinin tek yolu ancak bu dönüşümle ilgili hazmedebileceği bazı bileşenleri hâlihazırda kendi bilişsel mekanizmasında bulundurmasıdır[9]. Yani öğrenci ötelemeyi bilmeyebilir ancak benzerlik, eşlik, mesafe belirleme, karşılaştırma, açı, uzunluk ve vektör gibi ötelemeyi öğrenmeye yardımcı olabilecek kavramları bilebilir ve bunlar sayesinde ötelemeyi, dikkatli uygulanan bir öğretim düzeneği ile hazmedebilir. Bir başka deyişle öğretmen hazırladığı öğretim düzeneğinde öğrencinin bildiği bu kavramları öğrenciye kullandırarak ötelemeye dair çıkarımlarda bulunmasını ve bu konuyu anlamlandırmasını sağlayabilir. Bu çalışmada müfredat geliştirilirken öğrencilerin ötelemeyi bilmediği gerçeğinden hareketle hangi ön bilgiye sahip oldukları bire bir mülakatlarla ortaya çıkarılmış ve öğretimde sadece bu bilgilerini öğrencilere kullandırarak öteleme dönüşümünü sindirmeleri sağlanmaya çalışılmıştır. Tasarım aşamasında devamlı surette öğrencilerin neleri bilip neleri bilmediği üzerine yoğunlaşılarak sadece bilinenleri onlara kullandırmak hedeflenmiştir. Bu bağlamda asimilasyon prensibi öğretim esnasında bir sonraki adımı atmada bize rehberlik etmiştir.

Öğretimin hazırlamasında yardımcı olan bir diğer önemli anlayış da öğrencileri matematiğin genel yapısı gereği soyutlama yapmaya sevk etme gerekliliğidir. Öğrencilerin bir kavramı ne derecede soyutladıklarını değerlendirebilmek için Piaget'nin (2001) *deneysel soyutlama* (empirical abstraction) ve *düşündürücü soyutlama* (reflective abstraction) kavramları dikkate alınmıştır. Deneysel soyutlama, Piaget'nin (2001) deyimiyle, bireyin bir takım etkinlikler sonucunda bir konu ya da olayın fiziksel özelliklerini anlamlandırması ve bu özellikler üzerine çıkarımlarda bulunmasıdır. Bu aşamada odak fiziksel özellikler (bilgisayar ekranında bir komutun uygulanmasının sonucunu gözlemlemek, iki nesnenin kenar uzunluklarının ilişkisinden ziyade renklerine odaklanmak, vs.) olduğu için kavramsal anlamda bir genellemeden çok işlemsel anlamda ve görünen özelliklere göre bir genelleme yapılır. Düşündürücü soyutlama ise kişinin bir konu üzerine yaptıkları eylemler üzerine düşünerek çalıştığı alana yönelik, kendi içinde bulunduğundan daha ileri bir seviyede, bir takım yeni ilişkilendirmeler yapıp çıkarımlarda bulunmasıdır. Öğretim tasarımında öğrencileri deneysel soyutlamadan çok düşündürücü soyutlamaya sevk edecek etkinlikler tasarlanmıştır. Öğretim deneyi süresince öğrencilerin gelişimleri incelenirken bu iki yapıya özellikle dikkat edilmiş ve yapılan video analizlerinde öğrencilerin hangi aşamada düşündürücü ya da deneysel soyutlamaya daha yakın olduklarına odaklanılmıştır.

Son olarak öğrencilerin odaklandıkları geometrik yapıları algılayış tarzı *figür-çizim* ayrımına dikkat edilerek analiz edilmiştir. Bu ayırım ilk olarak Parzysz (1988) tarafından ortaya atılmış ve sonraları Laborde (1993) tarafından geliştirilmiştir. Bunlara ek olarak en son Hollebrands ve Smith (2009) dinamik geometri ortamlarında yapılan eğitim-öğretim faaliyetlerinde araştırmacıların bugüne kadar kullandıkları bu teori kapsamında üretilen terminolojiyi şu şekilde özetlemişlerdir. Dinamik geometri ortamlarında dört tane temel unsur ön plana çıkmaktadır: *çizim*, *yapı*, *diyagram* ve *figür*.

Bu unsurları açıklarken şu şekilde bir örnekten faydalanılmıştır. Örneğin Wingeom-tr ortamını ele alalım. Wingeom-tr programını çalıştırabilmek için http://math.exeter.edu/rparris/wingeom.html sitesinden indirilebilen Wingeomtr.exe dosyası üzerine fare ile çift tıklanarak, çıkan pencereden "Ekran" ve sonrasında "2-BOYUT" alt menüsüne tıklanır. Sonrasında "Seçenekler" menüsünden "ARAÇLAR" alt menüsü seçildiğinde ekranda görülebilecek tipik bir Wingeom-tr ekranı Şekil-1'deki gibidir[10].

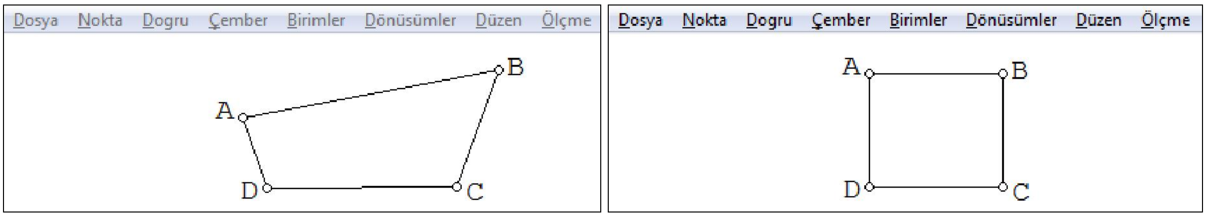
Programın bu kısmında istenilen herhangi iki boyutlu geometrik şekli çizmek mümkündür. Örneğin, bir kare çizmek istenildiğinde çeşitli yollar izlemek mümkündür. Farenin sağ tuşuna tıklanarak ekranda herhangi bir yere bir A noktası ve sonrasında yine sağ tuş yardımıyla B, C, D noktaları konulabilir. Bu A noktasının üzerinde iken farenin sol tuşu basılı tutulup B'ye kadar uzatılırsa AB doğru parçası çizilmiş olur. Aynı yöntemle BC, CD ve DA doğru parçaları da çizilebilir. Ortaya Şekil 2'nin sol kısmındaki gibi bir şekil çıkar. Bu şekil ekranın sağında bulunan "Seçenekler" kutusundaki "HAREKETLİ" aracı işaretlenerek fare yardımıyla A, B, C ve D köşelerinden hareket ettirilerek istenen konumda düzeltilip görünüm itibariyle bir kareye benzetilebilir; bu taktirde de Şekil 2'nin sağ kısmındaki gibi bir görünüm edilir. Öğrenciler bu tarz bir yöntemle bir kare çizip bu kareyi ekranda görünen haliyle, özelliklerine odaklanmaksızın, ele alabilirler. Dikkat edilirse bu çizim,

[9] Bu konuyla ilgili ayrıntılı bilgi veren örnek bir çalışma için bakınız; Zembat (2007).

[10] Normalde bu işlemlerden sonra gri bir ekran ortaya çıkar. "Diger" menüsünden "RENK" ve sonrasında "ZEMIN RENGI" komutları seçilip istenen renk (ki Şekil 1'de bu beyazdır) ekran zeminine uygulanabilir.

sadece belli doğru parçalarının birbiriyle birleştirilmesi ve bu birleşimin farenin (el becerisi yardımıyla) kullanımıyla düzenlenerek, elde edilmiştir. Bu durumda öğrenciler "*çizim*" hakkında, yani sadece ekranda geometrik bir nesne olan karenin temsili durumundaki ve el maharetiyle çizilen bir şekle odaklanarak bu şeklin görünen vasıfları hakkında muhakeme yapmaktadır. Burada *çizim* herhangi bir geometrik şeklin görünen özellikleri ile ele alınmasıdır. Hollebrands ve Smith (2009) bu tarz muhakemeyi literatüre dayanarak "*çizim hakkında muhakeme*" olarak isimlendirmişlerdir.

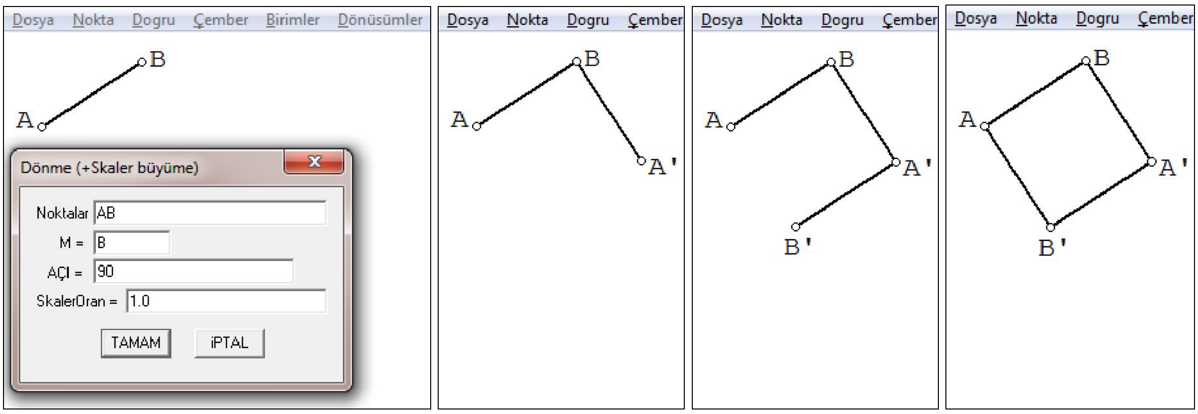

***Şekil 1.*** Genel görünümüyle Wingeom-tr ekranı.




***Şekil 2.*** Wingeom-tr ortamında göz kararı kare çizimi için kullanılan yöntem.

Öte yandan yukarıdaki örnekteki durumun tersine bir kare, içerdiği geometrik ilişkiler dikkate alınarak, şu şekilde oluşturulabilir. Yeni bir ekrana farenin sağ tuşu yardımıyla iki nokta, A ve B, konulup bir doğru parçası, AB, çizilebilir. Daha sonrasında ekranın üst kısmındaki "Dönüşümler" menüsünden "Dönme" alt menüsü tıklanır ve ekrana gelen pencerede istenen bilgiler girilir (bakınız Şekil 3, en sol kısım). Yani AB doğru parçası B noktası merkez olacak şekilde 90 derece saat yönünün tersine döndürebilir. Sonuçta Şekil 3'te soldan ikinci kısmındaki gibi bir ekran elde edilir. Aynı işlemler kullanılarak oluşan yeni şekilde BA' doğru parçası A' noktası merkez kabul edilerek 90 derece saat yönünün tersine döndürülürse Şekil 3'teki soldan üçüncü şekil elde edilir. Bundan sonra yine AB doğru parçası A noktası merkez kabul edilerek saat yönünde 90 derece döndürülerek (veri olarak "-90" girilmeli) Şekil 3'teki en sağdaki kısımda göründüğü gibi kare şeklinde bir *figür* elde edilmiş olur.

"Seçenekler" menüsünden "Hareketli" seçeneği işaretlenip elde edilen son *figür*, örneğin, A noktasından hareket ettirildiğinde kare olma özelliği bozulmadan büyütülüp küçültülebilen bir kareye sahip olunduğu görülecektir. Şekil 3'teki kare ile Şekil 2'deki kare görünüm itibariyle aynı olmasına rağmen arka planda içerdikleri matematik açısından farklıdırlar. Şekil 2'deki karenin herhangi bir köşesinden hareket ettirildiğinde kare olma özelliği kaybolacaktır, öte yandan Şekil 3'te durum bunun tam tersidir. Şekil 2'de olduğu gibi kareyi dik kesişen eş kenarlara sahip olma özellikleri ile düşünüp ele alan öğrenciler kareyi bir "*figür*" olarak muhakeme etmektedir. Hollebrands ve Smith (2009) bu tarz muhakemeyi literatüre dayanarak "*figür hakkında muhakeme*" olarak isimlendirmişlerdir.




***Şekil 3.*** Dönme dönüşümü yardımıyla Wingeom-tr ortamında kare oluşturma işlemi.

Bu örneklerden hareketle geometrik yapılar *figür* ya da *çizim* olarak ele alınabilmektedir. *Çizim* olarak ele alındıklarında sadece görünümleri itibariyle ön plana çıkarken, *figür* olarak ele alındıklarında görünümlerinden ziyade arka planda içerdikleri matematiksel yapı ve özellikleriyle ele alınmaktadırlar. Eğer öğrencinin figüre mi yoksa çizime mi odaklandığı tam olarak kestirilemiyorsa, veya eldeki veriler tam kesin sonuç vermiyorsa, o taktirde *diyagram* kelimesine sığınılmaktadır. Bunların yanında yine Hollebrands ve Smith'in (2009) yaptığı ayırımdan hareketle, Wingeom-tr gibi bir dinamik geometri yazılım ortamında belli bir araç kullanılarak (örneğin, paralelkenar oluşturma komutu) oluşturulan şekle *yapı* (construction), oluşturma sürecine de *yapılandırma* (constructing) denilmektedir. Yukarıdaki örnekte Şekil 3'teki gibi oluşturulan bir kare yapı ve onu oluşturma süreci de yapılandırma olarak düşünülebilir. Bu çalışmada da yapılan analizlerde bu ayırımlara dikkat edilmiştir.

## BULGULAR

Araştırmada elde edilen veriler ilk mülakat, öğretim videoları ve son mülakattan elde edilerek yine bu sıralamaya göre üç aşamada analiz edilmiştir. İlk mülakatların analizi öğrencilerin ötelemeyi anlamlandırabilmeleri için yeterli ön koşul bilgilere sahip olup olmadıklarını araştırmak için kullanılmıştır. İkinci olarak, öğretim esnasında öğrencilerin öteleme dönüşümünü öğrenirken geçtiği aşamaların analizi yapılmış ve öteleme dönüşümünün yapılandırılmasında vektör kavramının etkisi üzerine odaklanılmıştır. Son olarak da süreç tamamlandıktan sonra yapılmış olan son mülakatların analizine odaklanılmıştır. Yapılan tüm analizlerde öğrencilerin algılarının nasıl gelişip değiştiği üzerine, belirtilen teorik çatılar temelinde, saptamalarda bulunulmuş ve müfredat geliştirmeye yönelik çıkarımlarda bulunulmuştur. Bulgular düzenlenirken öncelikle öğrencilerin ön bilgileri ile araştırmada Wingeom-tr ve öteleme dönüşümünün anlaşılması için gerekli ön bilgi ve becerilerin nasıl ele alındığına dair bulgular incelenmiştir. Sonrasında, ikinci araştırma problemi ayrıntılı incelenerek, öğrencilerin öğretim sırasındaki gelişen algılarına odaklanılmış ve bu esnada birinci araştırma probleminin çözümünü ortaya koyacak müfredat geliştirmeye yönelik çıkarımlarda bulunulmuştur. İki araştırma problemine üretilen çözümler ise *Tartışma ve Sonuçlar* kısmında ayrıntılı ele alınmıştır. Analiz kısmında kullanılan tüm öğrenci isimleri gerçek olmayığ takma isimlerdir.

### Öğrencilerin Araştırmadan Önceki Ön Bilgileri

Uygulamalar başlamadan önce öğrencilerin vektör hakkındaki bilgileri analiz edilmek istenirken, onların sadece vektörün öteleme için gerekli özelliklerini (yön ve büyüklük) bilip bilmedikleri üzerinde durulmuştur. Öteleme dönüşümü uygulanmış olan bir düzlemde dönüşümün parametresi olan vektörün *yönü* görüntünün pozisyonunu belirtirken (yani esas şeklin ne tarafına düştüğünü), vektörün *büyüklüğü* ise esas şekil ile görüntü arasındaki mesafeyi belirtmektedir. Öğrencilerin ötelemeyi yapılandırırken vektörün altında yatan bu özellikleri bilmeleri öğretim açısından önem taşımaktadır. Bu nedenle de ilk mülakatlarda bu kavramlar sorgulanmıştır.

Mülakatlarda Berk ve Efe vektör kavramı hakkında hiç bir şey bilmediklerini ifade ederken, Ozan ve Öznur bu kavram hakkında bir takım açıklamalarda bulunmuşlardır. Ozan kareli bir zemin üzerinde bir ucuna ok koyarak oluşturduğu çizgileri (doğru parçaları) vektör olarak ifade ederken, vektörün bir ışın mı, doğru parçası mı, yoksa bir doğru mu olduğu konusunda kararsızdır: "Belli bir yönde olan sonsuza gitmeyen bir doğrudur, sonsuza gitmeyen bir çizgidir, doğrudur. Sonsuza gitmeyen bir ışındır." Bu anlatımdan hareketle Ozan için vektör, bir anlık fotoğrafı çekilmiş olan bir resim, diğer bir deyişle bir çizim, olup bu resmin içeriği ve diğer şekillerden farklılığı konusunda net bir fikre sahip değildir. Öznur ise vektörü kareli zemin üzerinde şu şekilde tarif etmektedir: "Vektör bir doğru parçasıdır. Bir kare çizdik örneğin, içinde yerini belirlemek için 3 birim sağa, 4 birim yukarı falan derken bunların yerini belirlemek için yapılan şeye denir." Bu açıklamanın sonrasında sorgulandığında kareli zemin olmadığı takdirde bu geometrik şeklin bir ışın olacağını dile getirmiştir. Dolayısıyla Öznur vektörü kareli bir zemine bağımlı düşünmekte ve kareli ortam dışında ışın olarak kabul etmektedir. İki kavram arasındaki fark sorulduğunda Öznur: "Işın normalde bir taraftan sonsuza gitmektedir, ancak vektör sonsuza kadar gitmemektedir. Vektörde sadece bu tarafa [oku göstererek] gittiğini anlatmaktayız" demiştir. Öznur vektör kavramı hakkında matematiksel dayanağı olmayan bir takım bilgilere sahiptir; diğer bir deyişle vektör onun için bir çizimdir. Öğrencilerin bu kavram hakkında matematiksel anlamda algı eksiklikleri öğretimi planlarken bize yol göstermiştir. Bu bilgiler sayesinde öteleme öğretiminden önce hazırlık olması açısından vektör kavramının öğretimine yönelik yeni bir plan hazırlanmasına karar verilerek uygulamaya konulmuştur.

Vektörün yanı sıra öğrencilerin diğer ön bilgileri de araştırılmış ve şu verilere ulaşılmıştır. Öğrencilerin nokta kavramını sadece bulundukları konuya (context) göre değerlendirebildikleri, bu kavramın konum belirleyici özelliğini genelleştiremedikleri görülmüştür. Bunun üzerine öğrencilerin öteleme için ön koşul olan bu özelliğe düşündürücü soyutlama temelinde odaklanması için öğretime eklemelerde bulunulmuştur. Mülakatlar sırasında nokta kavramı dışında öteleme ve vektörün öğretimi için gerekli olduğu düşünülen eğri, doğru, doğru parçası kavramları, uzunluk ölçme becerisi ve eş-benzer şekilleri algılamaya dair sorulara verilen cevaplar; öğrencilerin tüm bu geometrik cisimleri figür olarak ele alabildiklerini göstermiştir.

**Öğretimin Başında Yazılımın ve Ötelemenin Anlaşılması için Gerekli Ön Beceri ve Bilgiler**

Wingeom-tr yazılımı kağıt ortamının sınırlı kaldığı birçok geometri kavramını temsil etmede kolaylık sağlayıcı niteliktedir. Bu yazılım kullanıcıların geometrik cisimleri inşa etmesine, bu cisimlerin özellikleri hakkında tahminlerde bulunup hipotezler kurmasına, bu hipotezleri test etmesine ve dinamik yapısıyla bazı ispatlar yapmaya olanak tanımaktadır. Yazılımın en önemli özelliklerinden biri de oluşturulacak nesneye bağlı öncül nesnelerin belirlenmesidir. Örneğin doğru çiziminde doğruya temel oluşturan iki nokta belirlenmediği takdirde yazılımda bu geometrik şekli oluşturmak mümkün değildir. Yazılımın bu özelliği aktif düşünmeyi tetiklemekte çünkü kullanıcının doğru oluştururken "bir doğru en az iki noktası ile belirlenir" matematik bilgisine sahip olması şarttır. Bu araştırma sırasında ötelemeye dair tasarlanan öğretimin uygulanabilmesi için de öğrencilerin programa dair bazı temel becerilere önceden sahip olmaları gerekmektedir. Bu beceriler araştırmanın başında öncelikle kazandırılmaya çalışılmıştır. Bunlar sırasıyla, (a) Nokta, doğru parçası, üçgen ve çember çizebilmek, (b) Yazılımın *hareketli* komutunu etkin kullanabilmek, (c) Ölçme komutunu kullanarak açı ölçüsü ve kenar uzunluğunu hesaplayabilmek, (d) Vektörün anlamına dair soruları çözebilmek. Programın kullanımı kolay ve dilinin açık olması nedeniyle ve ayrıca öğrencilerin yaşları itibariyle bu tür programları kolayca öğrenmeye yatkın olmasından dolayı, öğretimde bu kısım fazla zaman almamış ve aynı gün içinde hem yazılımla ilgili temel beceriler öğretilmiş hem de ötelemeyi öğrenmede gerekecek matematiksel ön bilgiler yapılandırılmıştır.

Wingeom-tr yazılımına dair becerilerin yanında öğrencilerin öteleme dönüşümünü hazmedebilmeleri için belli kavramlara hâlihazırda sahip olmaları gerektiğinden – assimilasyon prensibi gereği – öğretimde bu kavramlara öncelik verilmiştir. Öğretimde öncelik verilen bu kavramlar sırasıyla aşağıdaki gibidir.

1. Noktanın uzayda/düzlemde konum belirleyicisi olma anlamı,
2. İki nesnenin birbirine göre bulundukları konumlar arasındaki ilişkinin yön ve birim açısından analizinin anlaşılması,
3. Vektörün en azından yönlü bir doğru parçası olarak anlaşılması,
4. Vektörlerin sadece tek bir bileşenden (yatay ya da düşey) oluşabileceği gibi ("tek adımlı vektörler" olarak adlandırılmıştır) iki bileşenden (yatay ve düşey) de oluşabileceği ("iki adımlı vektörler"),
5. Vektörlerin başlangıç ve bitiş noktaları dikkate alınarak isimlendirilmesi,

6. Düzlemde herhangi iki nokta verildiğinde (A ve B gibi) istenen yöne göre (A'dan B'ye veya B'den A'ya) vektörün belirlenebilmesi,

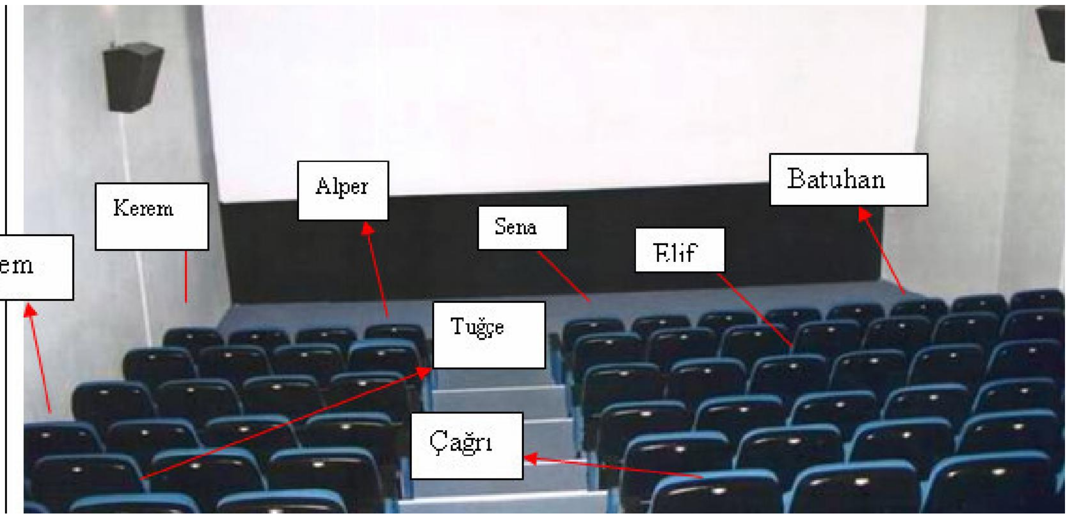
Öğretimde bu kavramlara sırasıyla öncelik verilmiş ve sonrasında öteleme dönüşümünün öğretimine geçilmiştir.

**Öğrencilerin Öğretim Esnasında Gelişen Algıları**

Uygulamada öncelikle vektörün matematiksel anlamının kavratılması üzerine geliştirilen müfredat parçası uygulanmış ve ardından öteleme dönüşümünün öğretimine geçilmiştir.

**I. Vektörün Anlamının Yapılandırılması**

Vektör kavramının algılanabilmesi için öncelikle noktanın konum belirleyici özelliğinin anlaşılması gerekmektedir. İki noktanın birbirine göre konumlarının ifade edilmesi, vektörün bitiş noktasının başlangıç noktasına göre konumunun belirlenebilmesi için bir ön bilgidir. Bu nedenle ilk olarak noktaların birbirlerine göre konumları dikkate alınıp, ardından bu noktaların birinden diğerine çizilen doğru parçasından yola çıkarak vektör kavramına geçilmeye çalışılmıştır. Vektörün yapılandırılması için dört öğrenciye de aynı öğretim uygulanmıştır. Öncelikle gösterilen Şekil 4'teki gibi bir sinema salonu fotoğrafının noktalı kâğıt ortamına taşınması istenmiş ve belirli koltuklar nokta olarak işaretletilmiş ve "şu koltukta Kerem bu koltukta Alper oturuyorsa, Kerem'e göre Alper'in nerede oturduğunu birimler ve yön kullanarak söyler misin?" tarzında sorular yöneltilmiştir.




***Şekil 4.*** Vektörün anlamı yapılandırılırken kullanılan sinema salonu fotoğrafı.

Bütün öğrenciler bu işaretlemeleri yaparken nesneleri noktalı kâğıt ortamına aktarmada (hizalama ve koltuklar arası yaklaşık mesafeler açısından) herhangi bir sorunla karşılaşmamıştır. Örneğin, Efe bu işaretlemeleri yaparken "oturma sıralarına ve arka arkaya oturma şekillerine bakarak" nerede olduklarını tahmin ettiğini açıklayarak doğrusallığa ve ardışıklığa odaklanırken; Berk, "kaç birim yukarıda, sağda, solda olduğuna, kimin kimin arkasında olduğuna dikkat ettim" yanıtını vererek yön ve birim belirtici ifadeler kullanmıştır. Günlük hayattaki bir kesitin noktalı kâğıda aktarılırken sadece göz kararı bir takım becerilere dayanarak değil, matematiksel ifadelere dayanarak ele alınması öğrencilerin krokiyi matematiksel yapısıyla birlikte bir figür olarak ele aldığını göstermektedir.

Aynı şekilde öğrencilerin sinema salonu krokisinde kullanılan (nokta olarak işaretlenen) koltukların birbirine göre konumlarını ifade etmede de zorluk çekmedikleri görülmüştür. Örneğin, Öznur "Kerem, Meryem'in 4 birim yukarısındadır" diyebilmiştir. Öğrencilerin, noktalar arasındaki konumu doğru biçimde ifade etmeleri öğretimin tasarımı ile de ilişkilidir. Çünkü sinema salonu modelinin kullanılması, öğrencilerin günlük hayattaki bildikleri bir durumu (yön ifade etme, mesafe), matematiksel bir ortama (noktalı kâğıda) kolaylıkla aktarabilmelerini sağlamıştır. Ayrıca noktaların konumları arasındaki ilişkinin ifade edilmesi de daha sonra öğrenilecek vektör kavramının başlangıç ve bitiş noktalarını anlama açısından bir ön hazırlık olmuştur.

Bu bölümden sonra öğretim için belirtilen sinema ortamının doğal yapısından yararlanılarak bir koltuktan diğerine ilerleyen bir kişinin izlediği yolun öğrenci tarafından çizilmesi istenmiştir. Bu kısımda öğrencilerin vektörün dik bileşenlerini öğrenmeleri amaçlanmıştır. Öğrenciler bu çizimleri istenilen şekilde yapmıştır. Daha sonra "*İki koltuk arasında hiç koltuk olmasaydı en kısa nasıl bir yol izlenirdi*?" sorusu sorulmuş ve bu çizimin de öğrenciler tarafından doğru bir şekilde ifade edildiği görülmüştür. Bu durumda ilk çizilen doğru parçaları vektörün yatay ve düşey eksenlerdeki bileşenleri, ikinci çizilen doğru parçası ise vektörü belirlemektedir (bkz. Şekil 5).


***Şekil 5.*** Efe'ye ait kağıt üzerinde örnek bir çalışma

Burada araştırmacının doğrudan devreye girmesiyle öğrencilere bu şeklin adının vektör olduğu belirtilmiştir. Bu kısma kadar öğrencilerin vektörlerin dik bileşenlerine bakarak birimleri ve yönleri ile ilgili bir takım ifadelerde bulunması (örneğin, 6 birim yukarı, 1 birim sağa) bu yapının *figür* olarak algılandığını göstermez. Çünkü öğrenciler vektörün belli bir büyüklükte olduğu ve bu büyüklüğün de vektörün dik bileşenlerinin birimlerine bağlı olduğu konusunda henüz bir açıklamada bulunmamışlardır.

Tüm öğrenciler genel olarak ele alındığında, onların bu matematiksel yapıya odaklanmalarında öğretim sırasında kullanılan günlük hayat kesitinin (sinema salonu) faydası göz ardı edilemez. Sinema salonu kendi yapısından dolayı dik bileşenlerin öğretimi için uygun bir doğal ortam olmuştur. Herhangi bir ortamda iki nokta arasındaki en kısa mesafe belirtilirken doğrusal bir yol izlense de sinema salonu ortamında koltuklar arasında ilerleyebilmek için (yatay veya düşey eksende) belli bir yol izlemek doğal olarak zorunludur. Dikkat edilirse sorulan sorularda bir koltuktan diğerine sadece iki aşamada gidilebilmektedir – sorularda sadece ve özellikle bazı koltuklara odaklanılmıştır. Bu nedenle öğretimde öğrenciler bu ortamın yapısını göz önünde bulundurarak önce koltukların yan yana sıralı olması sebebiyle bir noktadan başka bir noktaya izlenen yolu (yatay ya da düşey eksenlerdeki bir AB doğru parçası gibi) belirlerken dik bileşenlere odaklanmakta ve daha sonra da aynı yer değiştirme işlemini ara koltukların olmadığı ortamda düşünerek vektörün yapısına odaklanmaktadır.

Öğretim sırasında vektörler ile ilgili yapılan bir sınıflandırma biçimi de vektörün yapılandırılmasına yardımcı olmuştur. Sadece yatay ya da sadece düşey eksenlerdeki mevcut vektörler "tek adımlı vektör," hem yatay hem düşey eksenlerin bileşkesi olarak ifade edilen vektörler ise "iki adımlı vektör" olarak isimlendirilmiştir. Bu kısımla ilgili öğretim öğrencilerin vektörü anlamlandırmaları açısından çok önemlidir. Çünkü mülakatlar sırasında vektör hakkında hiç bilgisi olmayan (Berk ve Efe ) ya da bir takım kavram yanılgıları olan öğrenciler (Ozan ve Öznur) için vektör sadece birimlerle ifade edilen bir çizim olmaktan çok, bitiş noktasının başlangıca göre yönü ve uzaklığı ile anlam kazandığı bir figüre dönüşmüştür. Örneğin, Öznur bu öğretim sayesinde vektörün aslında özel bir doğru parçası olduğu düşüncesini yapılandırmış ve böylece noktaların birbirlerine göre konumu üzerine düşünerek başlangıç ve bitiş noktalarının öneminin farkına varmıştır. Ayrıca bu sayede gidilen yolun sınırlı olması dikkate alınarak gidiş yönüne göre anlam kazanan ok işaretinin ışında geleneksel olarak kullanılan oktan farkı da kavranmıştır. Bunu, Berk'in, "Batuhan, Sena'nın koltuğuna ilerliyor bu yüzden oku Sena'nın olduğu noktaya koyarım" tarzındaki yorumlarından anlıyoruz. Vektörün anlamı bu şekilde yapılandırıldıktan sonra öteleme dönüşümündeki rolüne odaklanılmıştır.

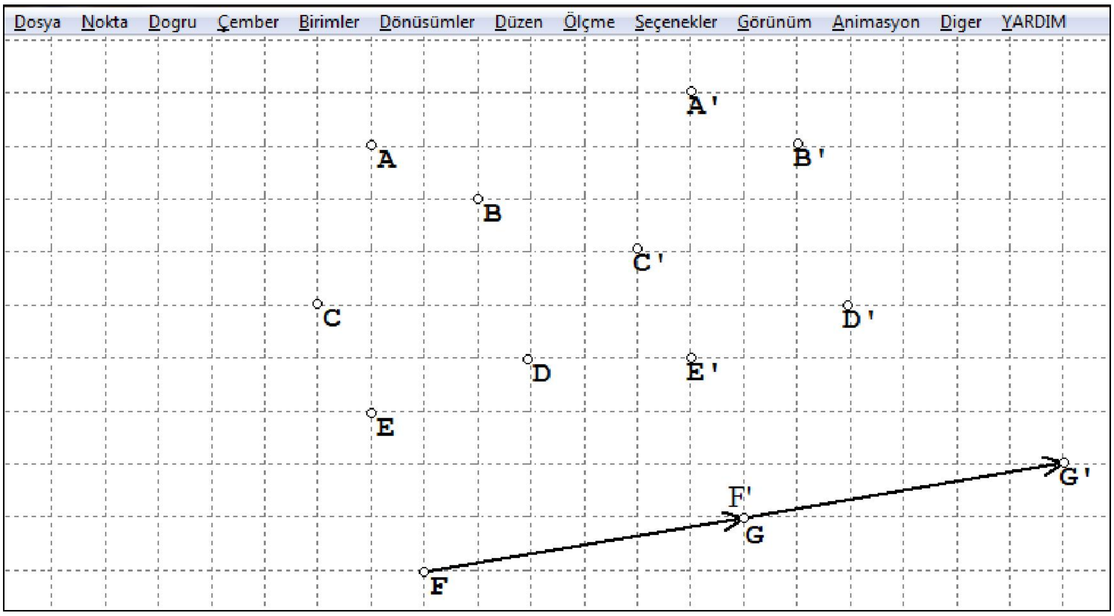
**II. Vektörün Öteleme Dönüşümündeki Rolünün Yapılandırılması**

Uygulamalarda öncelikle vektör kavramının yön ve büyüklük gibi iki önemli özelliği öğrenciler tarafından ne kadar iyi yapılandırılırsa bu kavramın öteleme dönüşümündeki etkisinin de o derece iyi anlaşılacağı düşünülmüştür. Öğretimin yazılım kullanılarak gerçekleştirilmesi vektörün rolünün ortaya çıkarılmasında büyük avantaj sağlamıştır. Çünkü öğrenciler yazılımı kullanarak vektörün yönünü değiştirebilecekleri gibi büyüklüğünü de değiştirebilmişlerdir. Böylece yönünün ve büyüklüğünün görüntüyü nasıl etkilediklerine dair eylemler üzerine düşünüp arka plandaki matematiksel anlama odaklanabilmişlerdir. Bu yorumlamalar sırasında öğrenmenin nasıl gerçekleştiği ve yazılımdan nasıl yararlanıldığı ve ayrıca öğrencilerin hangi durumlarda *çizim*den hangi durumlarda *figür*den yararlanarak vektörün etkisini anlamlandırdıkları üzerine analizler yapılmıştır. Analizler sırasında üç ana noktaya odaklanılmaktadır. Bunlar; (1) Vektörün dönüşümde araç olarak kullanılması; (2) Öğrencilerin esas nokta (tanım kümesi elemanları bu şekilde ifade edilmiştir) ile görüntü arasındaki mesafeye ve yön ilişkisine odaklanmaları; (3) Vektörün dönüşümdeki rolünün kavramsallaştırılması. Bu üç ana tema aşağıda hem noktaların hem de kapalı geometrik şekillerin ötelenmesi için ayrı ayrı ele alınmıştır.

**A. Noktaların Ötelenmesi**

Bu kısımda sadece noktaların ötelenmesine odaklanılmakta ve bu yukarıda da belirtildiği üzere üç alt başlıkta ele alınmaktadır.

***1. Vektörün araç olarak kullanılması:*** Vektörün esas noktaları ve görüntüleri nasıl etkilediği Şekil 6'daki gibi bir ortamda öğrencilere incelettirilmiştir. Yazılımın "hareketli" seçeneğini kullanarak dört öğrenci de ekranda gördükleri değişimden esinlenerek "etkilenen" ve "etkileyen" olarak sınıflandırdıkları bu noktaların hangilerinin görüntü hangilerinin esas nokta olduklarını anlamada bir problem yaşamamıştır. Esas noktaları ve sonrasında görüntüleri hareket ettirerek sadece ekrandan aldıkları dönüte göre hangi noktaların hangilerini etkilediğini inceleyen öğrenciler esas noktaların karşılık gelen görüntü noktalarını etkilediğini çizim hakkında muhakeme yaparak (ekranda vektör değiştirildiğinde esas nokta ve görüntü hareketlerine odaklanarak) deneysel olarak soyutlamışlardır. Bu tarz bir soyutlama deneysel temelde olsa dahi öğrencilerin vektörün ötelemedeki etkisini anlamalarına ileriki aşamalarda büyük destek sağlamıştır.




***Şekil 6.*** Wingeom-tr ortamında serbest noktaların ötelenmesinde kullanılan ekran kesiti

Bu kısımdan sonra öğrencilerin vektörün büyütülüp küçültülmesinin vektör haricindeki noktaları nasıl etkilediği üzerine düşünmeleri sağlanmıştır. Öncelikle yazılımdaki noktaları hareket ettirme özelliğinden yararlanan öğrenciler vektörü büyütüp küçülterek ekranda değişen ve sabit kalan durumları gözlemlemişlerdir. Dört öğrenci de genel olarak benzer açıklamalar yapmışlardır. Ozan'ın yaptığı ilk açıklama "esas noktalar duruyor, üslüler oynuyor" şeklindedir. "Bu hareket ne şekilde oluyor?" sorusu üzerine ise "noktalar arası birim büyüyor, uzatınca esaslarından uzağa gidiyorlar" cevabını vermiştir. Benzer şekilde Efe de "görüntüler asıllardan, aradaki farkı koruyacak şekilde uzaklaştı" şeklinde bir açıklama yapmıştır. Dört öğrenci de bu kısımda ekrandaki değişimi doğru bir şekilde ifade etmiştir. Fakat bu ifadeyi yine belli bir eylemden yararlanarak ekranda gördüklerinden hareketle çizim hakkında (noktaların vektör değişimine dayalı bağıl hareketi üzerine) muhakeme ederek gerçekleştirmişlerdir.

Ekranda fare yardımıyla vektörün büyüklüğünü değiştiren öğrenciler bu esnada sıfır vektörüne dair de bir çıkarımda bulunmuşlardır. Ozanın, "vektör [ün] ... başı ve sonu üst üste gelince esas noktalarla görüntüler üst üste gelir" ifadesi bu durumu açıklamaktadır. Aynı şekilde vektör küçültüldüğünde esas noktalarla görüntüleri arasındaki mesafenin kısalacağını açıklayan Efe de "vektör üst üste geldiğinde yani sıfır olduğunda esas noktalarla görüntüleri üst üste gelir [*fare ile vektörü yok oluncaya kadar küçültür*]" açıklamasını yaparak sıfır vektörü üzerine, isim vermeksizin, düşünebilmiştir. Öğrencilerin bu açıklamaları da sadece yapılan eylemi sözel olarak ifade etmek olarak değerlendirilebilir. Çünkü yazılımda fare ile deneme yaparak hangi durumda esas ve görüntü noktalarının çakışabildiğini deneysel olarak soyutlamışlardır. Yani dört öğrenci de burada sıfır vektörünün etkisi konusunda *çizime dayalı bir muhakeme* içerisindedir. Bu aşamaya kadar öğrenciler için vektör, yazılımın dinamikliğinin de yardımıyla, öteleme dönüşümünü uygulamada bir *araç*tır. Çünkü o an için öğrenciler yazılımın sağladığı imkanlarla sadece vektörün esas nokta ve karşılık gelen görüntülerine genel anlamda nasıl bir etkide bulunduğu üzerine odaklanmışlardır.

***2. Noktalararası mesafe ve konuma odaklanma:*** Her ne kadar öğrenciler Wingeom-tr ortamında vektörün büyüklüğünün esas ve görüntü noktaları arasındaki uzaklığı etkilediğini ifade edebilseler de, bu uzaklığın tam olarak vektörün büyüklüğüyle ilişkili olduğunu ve vektörün yönünün dönüşümdeki etkisini bildiklerini söyleyemeyiz. Bu kısımla ilgili öğrencilerin ne öğrenip öğrenmediğini anlayabilmek için bilgisayar üzerinde herhangi bir işlem yaptırmaksızın bir noktanın görüntüsünün nerede olması gerektiği öğrencilere sorulmuştur. Ozan bu soruya şu şekilde yaklaşmıştır.

A: 3 birimlik bir vektörün olsa idi [*o anda ekranda belirlenmiş vektör sağa doğru*] A noktasının görüntüsü nerede olurdu?
O: A' nın 3 birim uzaklığında. [*parmağıyla A noktasının 3 birim sağını işaret eder*]
A: Tam orada olduğunu nereden anlayabiliyorsun? Sadece 3 birim uzaklık orası mıdır? Aşağı, yukarı ya da sol taraf olamaz mı?
O: Çünkü vektöre bağlı. Tek adımlı vektör sağa gittiği için.
A: Vektör sol yönlü olsa idi görüntü nerede olurdu?
O: Burada olurdu. [*parmağıyla A'nın 3 birim solunu işaret eder*]

Bu açıklamalar Ozan'ın vektörün hem büyüklüğü hem de yönünün, dönüşümü nasıl etkilediğini dikkate aldığını göstermektedir. Öznur'un vektörün etkisi ile ilgili anlayışı ise; "görüntünün tam olarak nerede olması gerektiğini vektöre dayanarak nasıl bulabiliriz?" sorusuna verdiği cevaplardan hareketle ortaya çıkarılmıştır. Öznur, yazılımın kullanılmadığı kareli zeminde noktaların görüntüsünün nerede olması gerektiği sorusu yöneltildiğinde başlangıçta doğru yeri ifade etse de açıklamakta zorlanmıştır. Daha sonra belirtilen noktanın görüntüsünün yerini, vektörün büyüklüğü ile olan ilişkisini açıklamıştır: "Vektör bu kadar çaprazlamasına gelmiş, burada da öyle [*nokta ile görüntüsü arasını işaret eder*]." Ayrıca görüntüyü uygun yerde belirleyerek vektörün yönünü de dikkate aldığını göstermiştir: "Çünkü O noktası [*vektörün bitiş noktasını işaret ederek*] tarafına göre hareket ediyor" ifadesi bu algıyı desteklemektedir.

Öznur ile Ozan'ın noktalar arası mesafeye ve noktaların birbirlerine göre konumlarına odaklanmasını şu şekilde açıklamak mümkündür. Wingeom-tr ortamında noktaları hareket ettirerek çizimler hakkında muhakeme yaparken bir anda öğretmenin araya girmesiyle öğrencilerden Wingeom-tr ortamını kullanmaksızın ekranda gördükleri statik ortamdan yararlanarak muhakeme yapmalarını istemesi, öğrencileri dinamik Wingeom-tr ortamında o ana kadar yaptıkları eylemler hakkında düşünmeye sevk etmiş, ve yapılan bu değerlendirme sonucunda noktalar arası mesafeyi ve noktaların birbirlerine göre konumlarını incelerken ister istemez vektöre odaklanmaya mecbur kalmışlardır. Daha henüz vektörün dönüşümdeki rolünü düşündürücü soyutlama temelinde ele alamamalarına rağmen bu yapıyı figüre dayalı muhakeme etme yolunda epey bir mesafe katetmişlerdir.

***3. Vektörün dönüşümdeki rolü:*** Ozan ve Öznur esas noktalar ile görüntüleri arasındaki mesafe ile vektörün büyüklüğünü araştırmacının müdahalesi olmadan ilişkilendirebildikleri için yazılımı kullanmadan bir noktanın vektöre bağlı görüntüsünü kolaylıkla ifade edebilmişlerdir. Ayrıca daha sonra sorulan farklı soru tiplerinde de noktanın ötelenmesinde vektörün yön ve büyüklüğünü dikkate almaları onların dönüşümde vektörün rolünü kavramsallaştırdıklarını gösterir.

Fakat Efe ve Berk esas nokta ile görüntü arasındaki mesafeye odaklanamadığı için araştırmacının bazı sorgulamaları onları bu konuda düşünmeye zorlamıştır. Örneğin, Berk'ten Şekil 6' daki ortamda görüntü noktalarını tespit etmesi istediğinde ancak vektörü hareket ettirerek görüntüleri tespit edebileceğini söylemiştir. Bu durum, Berk'in yazılımda vektörün "hareketli" seçeneği sayesinde değiştirilebilme özelliğinin sanki öteleme dönüşümü için bir şart olarak ele aldığını göstermektedir. Yani hâlihazırda dönüşümün uygulandığı bir düzlemde, dönüşümün olmadığı gibi bir anlayış söz konusu olabilir. Bu düşünceler Berk'in ekranda vektörü çizim olarak ele almasının bir sonucudur. Bu durumun yarattığı sakıncadan kurtulmak için kâğıt üzerinde bir takım çalışmalarla Berk'in bu düşüncesini gözden geçirip değiştirmesi sağlanmıştır. Berk'in düzlemdeki noktalara tek tek değil de genel olarak sanki bütüncül bir fotoğrafmış gibi bakması, vektörün uzaklığı etkilediğini anlasa da bu uzaklığın vektörün büyüklüğüne denk geldiğini görmesine engel olmuştur. Bu durumda araştırmacının verdiği bir ipucu ("A ve A-üssü noktalarına odaklanabilirsin") daha kısıtlı bir bölüme, daha dikkatli odaklanmasını sağlamıştır. Buna rağmen aradaki mesafeye odaklanmayan Berk için aşağıdaki diyalogdaki gibi bir sorgulama süreci başlar çünkü araştırmacı-öğretmen bu sayede Berk'in daha kolay muhakeme yürüteceğini düşünmüştür.

A: Vektörü 0 birimken yavaş yavaş büyüttüğünde ne oluyor ekranda?

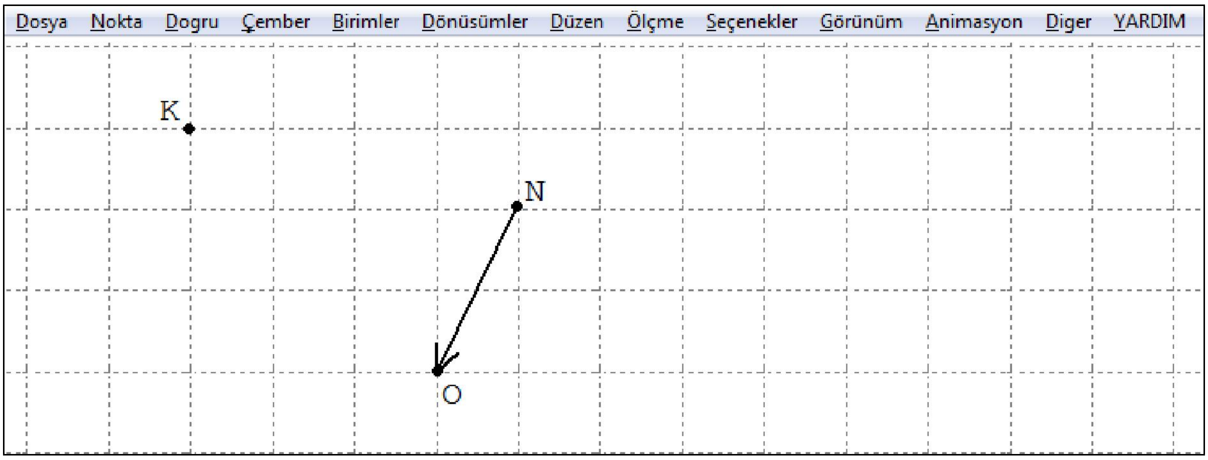
B: Vektörü bir birim büyütünce bir birim büyüyor [*A ile A□arasındaki mesafeyi kasteder* ]

A: Peki vektör 2 birim olsa idi A-üssü nerede olacaktı?

B: A'dan 2 birim uzakta olacaktı.

Bu kısımda Berk vektörün büyüklüğünün esas nokta ile görüntü arasındaki mesafeye eşit olduğu gerçeğine odaklanabilmektedir. Fakat bu algı ekranda dönüşümün görünen vasıflarından hareketle çizime dair muhakeme ile kazanılmıştır. Efe için de benzer bir durum söz konusu olmuş, araştırmacı-öğretmenin benzer müdahaleleriyle öğrenci çizime dayalı muhakeme yürütmüştür.

Bu nedenle bu iki öğrencinin algılayışından emin olmak için Şekil 7'de belirtilen ekranda yazılım kullanmadan görüntünün yerini tahmin etmeleri istenmiştir.




***Şekil 7.*** Vektörün dönüşümdeki bir noktaya etkisini test etmek amacıyla hazırlanan sorudaki statik düzenek.

Bu kısımda amaç bu öğrencilerin "vektör hareket etmese dahi bir noktanın görüntüsünün yerini belirlemede etkili olduğu" fikrini yapılandırmalarına yardımcı olmaktır. Berk ve Efe ekrandaki hareketlilik olmadan görüntüyü nasıl belirleyecekleri konusunda muhakeme yapabilmişler, yön ve büyüklüğün etkisini ifade eden açıklamalarla görüntü noktasını doğru bir biçimde belirlemişlerdir (örneğin, "görüntü bu taraftadır, çünkü vektör bu tarafa gidiyor"). Berk ve Efe için bu andan itibaren vektörü figür olarak ele aldıklarını söylemek mümkündür. Burada kullanılan statik ortam ve öğrencilere doğru noktalara odaklanması konusunda verilen yönlendirmeler (her ne kadar öğretmen merkezli yönlendirme de olsa) öğrencilerin vektörün rolünü anlamasında önemli rol oynamıştır. Berk ve Efe'nin vektörün dönüşümdeki rolünü anlamlandırmada dinamik ortamdan statik ortama geçişin büyük önemi vardır. Çünkü dinamik ortamda yazılımın kullanıcıya sunduğu *noktaları hareket ettirme* imkanı öğrencilerin arka plandaki matematiksel fikirlere odaklanmasını engellemekte ancak dinamik ortamdaki bu deneyimden sonra statik ortama dönmek öğrencilerin bir an için durup geriye dönük analiz yapmalarına, o ana kadar dinamik ortamda takip ettikleri zihinsel ve fiziksel eylemleri sorgulayıp üzerine düşünmelerine ve vektörün dönüşümdeki rolüne dair örüntüler oluşturmalarına yardımcı olmuştur.

Bu kısımda ilk başta Efe ve Berk'in sahip oldukları bazı yanılgılar ötelemenin öğretimi sırasında yazılım kullanırken bazı hususlara dikkat edilmesi konusunda bize fikir vermiştir. Çünkü öğretim planlanırken her ne kadar yazılımın bir araç olarak kullanılması amaçlanmış olsa da, öğrenciler öteleme dönüşümünün icrasında sanki ekranın hareketli olma zorunluluğu varmış gibi ekran hareketliliğinin de dönüşüm için ayrı bir faktör olduğunu zannedebilmektedir. Bu nedenle ötelemede vektörün etkisinin anlaşılması için yazılımın hareket ettirme seçeneği kullanılırken öğrencilerin doğru kısımlara odaklanması sağlanmalıdır (Efe ve Berk ile yapılan çalışmalar buna örnektir). Doğru kısımlardan kastımız esas noktalar ile görüntüleri arasındaki mesafe ve bu ikisinin birbirlerine göre konumlarının vektörle olan ilişkisidir. Böylece öğrenciler devamlı surette büyüklüğü değiştirmede işe yaradığı sanılan vektörü, belli bir büyüklükte sabitleyince de dönüşümde etkili bir faktör olduğu konusuna figüre dayalı muhakeme ile odaklanabilirler.

**B. Geometrik Şekillerin Ötelenmesi**

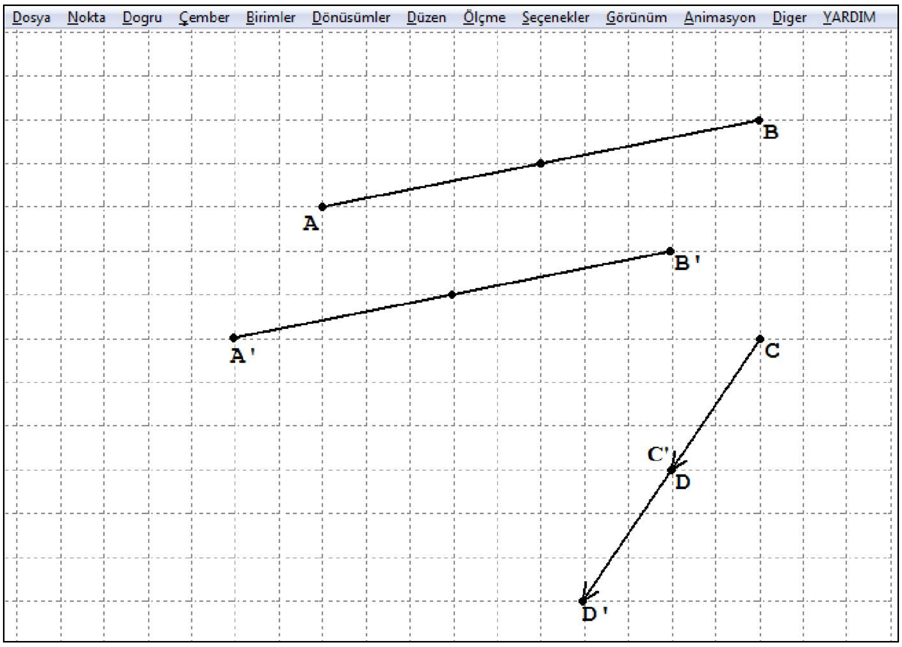
Öğrencilerin noktalardan oluşan yapıların ötelenmesinde vektörün etkisinden matematiksel anlamda bahsedebilmesi için öncelikle bu geometrik şekilleri birer noktalar kümesi olarak ele almaları önemlidir. Çünkü vektörün hem büyüklüğünün, hem de yönünün ötelemedeki etkisini anlamlandırırken bir nokta, bu noktanın görüntüsü, nokta ve görüntüsünün birbirlerine göre konumları ve aralarındaki mesafe üzerine odaklanmak gerekmektedir. Bunun nedeni öğrencilerin şekil ve görüntüsü arasındaki uzaklığı belirleyebilmesi için en az iki referansa ihtiyaç duymasıdır. Eğer öğrenci bu iki referansı tespit etmeksizin dönüşümü vektörle ilişkilendirmek isterse büyük ihtimal bu etkiyi algılayamaz. Bu nedenle öğretimde üzerinde durulan ilk husus öğrencilerin dikkatini bu kısıma çekmek olmuştur. İlk olarak, aşağıda analizi verildiği üzere, doğru parçalarının ötelendiği Şekil 8'deki temsil hazırlanarak öğrencilerin önceki etkinliklerdeki kazanımları kullanmalarına imkan sağlayacak bir dizi soru yöneltilmiştir.

***1. Vektörün araç olarak kullanılması:*** Şekil 8'deki gibi bir düzenekte dört öğrenci de vektör büyütüldüğünde AB′ doğru parçasının AB doğru parçasından uzaklaştığı, küçütüldüğünde de yaklaştığını dile getirmişlerdir. Yazılımın dinamikliğinden yararlanarak fare yardımıyla ekranda vektörün büyüklüğüyle oynayarak bu sonuca vardıkları için öncelikle vektörü *çizim* olarak ele aldıkları yani vektörü sadece mesafe etkileyen bir araç olarak düşündüklerini söylemek mümkündür.

**2. *Şekillerarası mesafe ve konuma odaklanma:*** Öğrencilerden Efe, Ozan ve Öznur iki şekil arasındaki mesafeye referans iki nokta seçerek odaklanırken, Berk yine bu mesafeden çok yazılımın dinamikliğine odaklanarak bu konu hakkında öncelikle figüre dayalı muhakeme yapamamıştır. Öğrenciler Şekil 8'deki gibi bir düzenekte çalışırken, araştırmacı-öğretmen "vektörün tam olarak etkisi ne oldu" sorusunu yönelttiğinde, Ozan ve Efe vektörün etkisini ifade ederken ilk olarak doğru parçasının uç noktalarına odaklanmışlardır. Örneğin; Ozan'ın, "B noktası [*AB doğru parçasının bir uç noktası*] buradaki birime göre uzaklaşıyor [*vektörü gösterir*]" ifadesi ve benzer şekilde Efe'nin; "vektör 2 birim sola, 3 birim aşağı, aynı şekilde B-üssü de öyle" açıklamaları bu durumu göstermektedir. Her iki öğrenci de şekil ve görüntüsüne vektörün yaptığı etkiyi incelerken bu şekiller üzerinde belirledikleri karşılık gelen noktalara bağlı (örneğin, B ile B′) olarak açıklama yapmaktadırlar.

Şekil 8'deki gibi bir ekranda belirtilmiş AB doğru parçasının ötelenmesinde vektörün etkisini anlamaya çalışan Ozan, A ve B noktalarının ötelemeye nasıl uğradığını açıklarken doğru parçası üzerindeki diğer noktalara odaklanmamıştır. Ozan'ın "vektör büyüyünce aradaki noktaların yerleri değişmiyor" şeklindeki ifadesi gösteriyor ki ona göre doğru parçasını oluşturan uç noktalar arasındaki noktalar vektör ile değişime uğramamaktadır. Ozan'ın böyle düşünmesine neden olacak durum ise şekil üzerinde ifade etmek gerekirse vektör büyütüldüğünde [AB] ve [AB′] üzerindeki noktalar, birbirlerine göre konumları düşünüldüğünde, hareket etmemektedir (bağıl hareket). Efe'nin açıklamaları da aynı şekilde olup iki öğrenci de vektörün etkisini etiketli noktalar için algılamalarına rağmen tüm doğru parçası üzerindeki noktalar için ifade edememişlerdir.

Ozan ve Efe'nin doğru parçası üzerindeki noktaların (Şekil 8'deki etiketsiz noktalar) vektörün etkisiyle dönüşüm altındaki görüntülerini ifade ederken öncelikle bu şekiller üzerindeki uç noktaları dikkate alıp görüntülerini belirleyip daha sonra bu görüntü noktalarını çizgi ile birleştirdikleri görülmüştür. Bu durumda onların bu dönüşümü algılarken doğru parçasını içerdiği noktaları göz önünde tutarak değil de (birinci uç nokta, ikinci uç nokta ve aradaki çizgi şeklinde) bir bütün çizgi olarak ele aldığı ve bütünsel olarak dönüşüme uğrattıklarını söyleyebiliriz. Fakat bu durum *çizime* *dayalı muhakeme* yaptıkları sonucunu doğurmaz. Matematiksel anlamda öğrencilerin yaptıkları işlemler yanlış değildir. Çünkü öğrencilerin doğru parçasını ötelerken bileşenleriyle birlikte düşünmeksizin bütünsel olarak ele almalarına ekranda doğru parçasını daimi surette bütünsel olarak görmesi sebebiyet vermiş olabilir. Yazılım üzerinde bir doğru parçası çizilirken üzerinde bulunan çoğu noktanın işaretlenebilmesi noktalar ve görüntüler arasındaki ilişkinin muhakeme edilmesini kolaylaştırabilirdi. Burada hem yazılımda doğru parçasının noktalar kümesi olarak gösterilememesi, sadece bir çizgi olarak görülmesi, hem de araştırmacının öğretim esnasında şeklin tamamına odaklanması bahsedilen durumu doğurmuş olabilir. Esas şekil olan doğru parçalarının bütünsel olarak ele alınması öğrencilerin muhakemesi açısından bir zayıflık olmamasına rağmen bu tür dinamik geometri programlarının bir kısıtlılığıdır diyebiliriz. Bu sebeple öğretime başlanırken sadece noktaların ötelenmesinden başlamak ve ondan sonra doğru parçası ve 2 boyutlu şekilleri ele almanın ötelemenin yapısını özümsemede ne kadar etkin olduğu bu örnekten anlaşılmaktadır.




***Şekil 8.*** Geometrik şekillerin ötelenmesinde vektörün rolünü yapılandırmak için kullanılan düzenek.

Öznur da Ozan ve Efe gibi öncelikle doğru parçasının uç noktalarına vektörün yaptığı etkiyi, yön ve büyüklük olarak ifade etmiştir. Fakat Öznur diğer öğrencilerden daha açıklayıcı cevaplar verdiği için vektörün rolünü *figür* olarak ele aldığını rahatlıkla söyleyebiliriz. Çünkü aşağıdaki diyalogdan, doğru parçasını oluşturan diğer noktaların vektörden ne şekilde etkilendiğini anladığı görülmektedir.

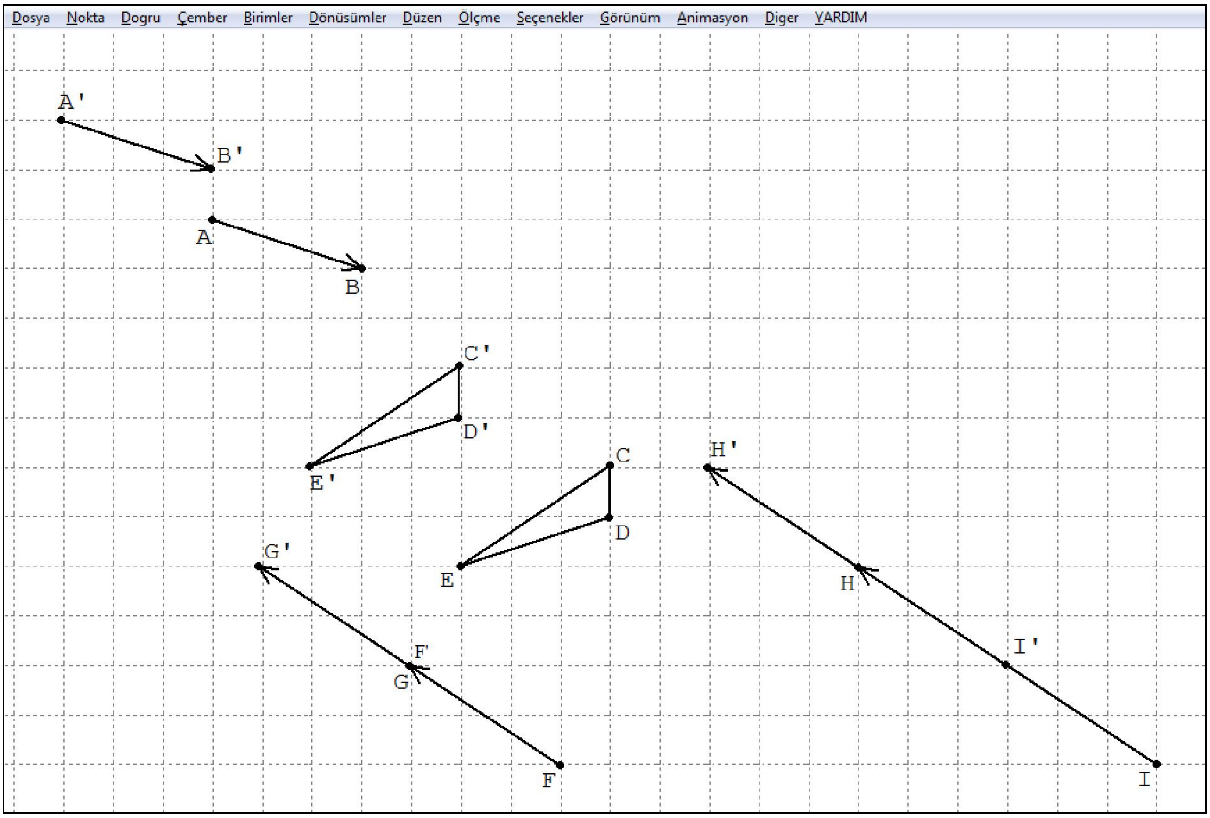
A: A ve B'nin görüntüsünü açıkladın, aradaki noktalar nasıl oluşmuş peki?

Ö: Bunlar birbirine paraleldir, bu nedenle aradaki uzaklık her yerde aynıdır.

Burada Öznur'un yaptığı açıklama aslında üst düzey bir öğrenmenin gerçekleştiğini göstermektedir. Çünkü Öznur burada daha önceki (paralel doğrular arasındaki uzaklığın eşit olması) bilgisini burada dile getirerek şekil ile görüntüsü arasındaki mesafenin sabit olduğunu vurgulamaktadır. Doğal olarak doğru parçasının tamamının vektörün büyüklüğüne göre ötelendiğini kendi matematiksel çıkarımlarıyla ifade etmiştir. Bu aşamada vektörü figür olarak ele alabildiği söylenebilir. Ayrıca "A ile B arasındaki işaretli nokta nasıl dönüşüme uğramıştır" sorusu üzerine "2 birim sola, 3 birim aşağı" cevabını verdiğinde bu nokta için de sonucun aynı şekilde olduğunu belirtmiştir. Ayrıca "aradaki diğer noktaların(*[AB] üzerindeki noktaların*) dönüşümü nasıldır?" sorusuna "aynıdır" diyerek doğru parçası üzerindeki her noktanın da aynı dönüşüme tabi olduğunu figür temelinde anladığını göstermiştir.

Berk için tanım kümesindeki her noktanın aynı vektörle ötelendiği düşüncesini anlamlandırmak biraz daha zor olmuştur. Noktaların ötelenmesinde vektörü ilişkilendirirken karşılaşılan sorun yine ortaya çıkmıştır. Çünkü öncelikle belirlenmiş vektöre bir hareket sağlayıcı olarak baktığı için, dinamikliğin olmadığı bir yerde vektörü etkisiz düşünmüştür. İlk olarak ötelemeyi bir şekle eş bir şekil belirlemek (çizilen eş şeklin yeri önemsiz) olarak algılayan Berk, vektörün sadece hareket ettirildiğinde bu eş şekiller arasındaki mesafeyi belirleyeceğine inanmaktadır. Diğer bir deyişle Berk noktalı ortamda bu işi anlamlandırabilmişken bu anlamlandırma düşündürücü soyutlama temelinde olmadığı için bu yeni ortamda tekrardan deneysel soyutlamaya geri dönmüştür.

**3. *Vektörün dönüşümdeki rolü:*** Öğrencilerin ötelemede vektörle ilgili anlayışları genelde önceden çizilmiş bir vektörün etkisi üzerine düşündürülerek geliştirilmiştir. Şekil 9'da resmedilmiş ortamda (ve aynı tarz bir kaç soruda) ise daha önceden ötelemeye uğratılmış bir düzlem verilmiş ve bu düzlemde ötelemeye uğramış bir üçgen ve yanında birçok vektör resmedilmiştir. Öğrencilerden ise bunun gibi statik ortamlarda DCE üçgeninin ötelenmesini belirlerken vektörü tespit etmeleri istenmiştir.




***Şekil 9.*** Dönüşüme etki eden vektörün tespitine yönelik kağıt ortamında hazırlanmış bir soru

Bu soru için dört öğrenci de dönüşüme etki eden vektörü (FG vektörü) belirtmekte başarılı olmuşlardır. Bu belirlemeyi yaparken de referans olarak bir köşe noktası ve görüntüsü arasındaki mesafeye odaklanmışlardır. Örneğin; Öznur C noktası ve C-üssü noktası arasındaki mesafenin F ile G arasındaki mesafeye eşit olduğunu söylerken bunu vektörün yatay ve düşey iz düşümündeki bileşenlerinin ebatlarını düşünerek, o bileşenlerin kaçar birim olduğunu belirleyerek ifade etmiştir. Diğer öğrenciler de temel aldıkları iki etiketli nokta (esas nokta ve görüntüsü) üzerinden hangi vektörün dönüşüm için parametre olduğunu ifade edebilmişlerdir. Öğrenciler bu tespiti yaparken tanım ve değer kümesine dikkat ederek ötelemenin özelliklerini göz önünde bulundurdukları için sadece kâğıttaki çizimden yararlanarak değil, figüre odaklanarak bu tespiti yapmışlardır diyebiliriz.

Bu kısımda öğrencilerin hepsi için vektörün dönüşüme etkisini kavradıkları söylenebilir. Aynı zamanda düzlemde birçok vektör olabilecekken dönüşüm için sadece tek bir parametre (vektör) olabileceği konusunda farkındalık kazanmışlardır. Öğretimin ilk başında öteleme dönüşümüne uğratılmış bir düzlemde yazılımın dinamikliğini kullanarak vektörün sadece şekil ile görüntü arasındaki mesafeyi etkilediğini (*çizim*e odaklanarak) söyleyen öğrenciler, öğretimin sonunda bu etkinin tam olarak nasıl olduğunu statik bir ortam olan kâğıt ortamındaki farklı tipteki sorular için de ifade edebilmişlerdir. Bu da vektörün dönüşümdeki rolünü kavramsallaştırdıklarını göstermektedir.

## TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu çalışmanın amacı öteleme dönüşümünün yapısını, anlaşılması için gereken bileşenleri, öteleme öğretimi için geliştirilen müfredat parçasının ilköğretim seviyesinde uygulanmasını ve bu esnada gelişen öğrenci algılarını incelemektir. Yapılan araştırma sonucunda şu çıkarımlardan bahsedilebilir. Aşağıda bahsi geçen üç çıkarımdan her biri makalenin başında verilen iki araştırma sorusuna sırasıyla cevap niteliğindedir.

1. Makalenin başında halihazırdaki MEB ilköğretim matematik programının teorik bir analizi yapılırken programın öteleme ile ilgili bölümünde vektör kavramından bahsedilmeyip pedagojik kaygılarla öğrencilerin sadece belli bir kaydırma eylemine odaklatıldığı söylenmiştir. Bu kısımda bahsedilen ve birinci araştırma problemine cevap niteliği taşıyan argüman makalenin ilk kısımlarında verilen teorik analizin araştırmanın bulguları ışığında tekrardan ele alınması niteliğindedir. Bulgular, öteleme dönüşümü matematiksel anlamda yapılandırılırken tanım ve değer kümelerinin ve aralarındaki ilişkinin anlaşılmasının önce dinamik sonrasında statik ortamlarda ve vektöre odaklanarak yapılması gerektiğini göstermektedir. Bu yapıldığında her ne kadar zorlu bir süreç olsa da öğrenciler öteleme dönüşümünü bileşenleriyle birlikte ele alıp, öteleme ile ilgili problemleri muhakeme edebilmektedirler. Diğer taraftan öteleme dönüşümü sadece esas şekillerin görüntüsünü çizme uygulamasından ibaret bir geometri konusu olarak ele alındığında, öğrencilerin bu dönüşümü sadece çizim temelinde, dönüşümün içerdiği matematiksel ilişkilerin anlamından yoksun olarak, bir farkındalığa sahip olabileceğini söylemek mümkündür. Çünkü yapılan bu çalışmada vektöre odaklı dinamik bir ortamda hazırlanan bir müfredat parçası uygulanırken dahi öğrencilerin, gerekli öğretmen rehberliği olmadığı taktirde, çizime dair muhakeme yapmaya sürüklendikleri görülmüştür. Çizimden çok figüre dayalı bir muhakeme yeteneğinin gelişmesi geometri öğreniminde öğrencilerin gerekli düşündürücü soyutlamayı yapmalarına imkan sağlayacağı için MEB yeni matematik programının bu doğrultuda, en azından geometrik dönüşümler konusunda, tekrardan gözden geçirilmesinde fayda vardır. Aksi halde halihazırdaki yapısıyla programı takip eden bir öğretmenin verilen örnekleri kullanarak geometrik dönüşümlerden ötelemenin matematiksel bileşenlerini öğrencilere öğretebilmesi pek mümkün görünmemektedir. Doğru parçasını ilköğretim başlangıç sınıflarında gören öğrencilerin 6. sınıf seviyesinde, yukarıda bahsi geçen düzenekle, öteleme için temel teşkil eden vektör kavramını öğrenemeyeceği kaygısıyla, ötelemeyi öğretiminde vektörlere bu aşamada yer verilmemesi mantık teşkil etmemektedir. Bu çalışma göstermiştir ki vektörler öğrencilerce yöne ve belli bir büyüklüğe sahip doğru parçaları olarak yapılandırılabilir ve bu tarz algı öteleme dönüşümünü anlamlandırmada kâfidir. Bu çıkarım Glass'ın (2004) çalışmasıyla da desteklenmektedir. Bunların yanında noktanın konum belirleyici olma anlamının yapılandırılması da önem teşkil eder. Araştırmada kullanılan sinema salonu modelinde koltukların birbirlerine göre konumundan noktanın konum belirleyici özelliği, koltuklar arasında ilerlemeye odaklanarak da vektörün büyüklük ve yönüne dair çıkarımların yapılabildiği görülmüştür. Bu araştırma göstermiştir ki nokta kavramının yine MEB matematik programında göz ardı edilen konum belirleyici özelliği ve bunun öğreniminde sinema modeli gibi modellerin kullanımı vektörü yapılandırmada çok önemlidir.

2. Matematiksel anlamda öteleme dönüşümü bir izometridir - yani özellik/uzaklık koruyan bir fonksiyondur. Bu fonksiyon birebir ve örten olup düzlemdeki tüm noktaları yine düzlemde noktalara dönüştürür ve bu dönüşüm belli bir kısıtlamaya (parametreye) sahiptir. Öteleme dönüşümünü belirlenmiş bir vektör kısıtlar. Tüm bu bilgilerden hareketle öteleme dönüşümü matematiksel olarak aşağıdaki şekilde $\vec{v}$ vektörünü kendine parametre kabul eden bir fonksiyon olarak ifade edilebilir:

$$Ö_{\vec{v}}: (x, y) \rightarrow (x+a, y+b)$$

Verilen bu matematiksel tanım Martin (1982)'nin ötelemeyi analizinden elde edilmiş olup üst düzey matematik bilgisi gerektiren ve pedagojik bağlantılar göz ardı edilerek verilen, herhangi bir matematik kitabında bulunabilecek bir tanımdır. Bu tanımın ilköğretim 6-8. sınıflarda kullanılması öğrenciler açısından hiçbir anlam ifade etmeyeceği gibi onları ezbere sevk edecektir. İşin matematiksel boyutu böyle tanımlanırken pedagojik boyutunun da dikkatlice düşünülmesi ve ikisinin bir potada eritilmesi gerekmektedir. Bu araştırma öteleme dönüşümü ile ilgili matematiksel ve pedagojik bakış açılarını aşağıda açıklandığı şekilde bir potada eritmiş ve ikinci araştırma sorusuna cevap vermemizi sağlamıştır. Araştırma için geliştirilen ve uygulanan müfredat parçası dört ana aşamadan oluşmaktadır. Her aşamada öğrenilmesi gereken kavramlar sırasıyla belirtilmektedir. Bu dört aşama çalışmamızdan elde edilen bulgularla aşağıdaki son halini almış olup müfredat geliştirmede ve bu konunun öğretiminde araştırmacılara ışık tutacak niteliktedir.

**Aşama #1.** *Öteleme dönüşümü düzlemi düzleme dönüştüren bir dönüşüm olduğu için düzlemdeki tüm noktaların ötelendiğinin öğrencilerce anlaşılması önemlidir.* Bu yüzden tasarlanan müfredat parçasında ilk aşama geometrik birimlerden *nokta*nın ötelenmesi ile ilgilidir. Buradaki amaç, öğrencilerin ötelemeyi geometrik şekillerin fiziksel olarak ekranda kaydırılması şeklinde yanlış bir yargıya varmalarını engellemek ve düzlemdeki her bir noktanın ötelemeye uğrayarak yine düzlemdeki noktalarla eşleştirildiği fikrinin yapılandırılmasını sağlamaktır. Bu nedenle çalışmadan elde edilen bulgulara göre öğrencilerin anlamlandırması gereken matematiksel fikirler şunlardır:

A. Ekranda belli sayıda verilen noktalar kümesinin (tanım kümesi) ve bunların herhangi bir öteleme dönüşümü altındaki görüntülerinin (değer kümesi) belirlenebilmesi önemlidir.

B. Vektörün öteleme dönüşümündeki rolünün anlaşılması önemlidir. Bu rolü anlamada şu bileşenlerin kavramsallaştırılması temel teşkil eder. (1) Vektörün değiştirilmesi sadece değer kümesindeki noktaları, yani görüntü noktalarını etkiler; (2) Vektörün büyüklüğünün değiştirilmesi esas noktalar ile görüntü noktalarının birbirlerine göre konumlarını ve aradaki mesafeyi etkiler; (3) Vektörün yönünün değiştirilmesi görüntü noktalarının hareket yönünü etkiler, (4) Sıfır vektörü için esas noktalar karşılık gelen görüntü noktaları ile çakışırlar.

C. Öteleme dönüşümü düzlemi düzleme dönüştürdüğü için düzlemdeki tüm noktalar dönüşüme uğramaktadır. Dolayısıyla bilgisayar ekranında aslında bir kaç nokta ve öteleme altındaki görüntüleri görülmesine rağmen ekranda görünmeyen tüm noktalar da dönüşüme uğramaktadır. Diğer bir deyişle, ekranda görünen sadece dönüşümün bir düzlem parçasına uygulanmasıdır. Bu anlamda Wingeom-tr (ve diğer benzer dinamik geometri programları) tanım kümesinin tamamında değil de sadece bir kısmında çalışıldığını gizlemekte olup bunun öğrencilerce anlaşılması önemlidir.

**Aşama #2:** *Dönüşümün parametresi olan vektörün kendisinin de ötelemeye tabi tutulduğunun anlaşılması ayrıca bir öneme sahiptir.* Vektör ötelemede bir parametre rolü yanında ötelenen düzlemin, yani tanım kümesinin de bir elemanıdır. Literatürde bunun anlaşılmasının büyük sorunlardan biri olduğu belirtilmekte (örneğin, Yanık, 2006) ancak bir çözüm de üretilmemektedir. Çözüm aşağıda verilen fikirlerin öğrencilerce yapılandırılmasında yatmaktadır.

A. Bir öteleme dönüşümü dikkate alındığında dönüşümün parametresi olan vektörü oluşturan noktaların kendileri de düzlemdeki diğer noktalar gibi aynı vektör yardımıyla dönüşüme uğrarlar.

B. Öteleme dönüşümünde sadece vektör üzerindeki başlangıç ve bitiş noktaları gibi bazı noktalar değil, vektörün tümü dönüşüme uğrar.

**Aşama #3:** *Ötelemenin sonlu/sonsuz geometrik nesnelere (çember, doğru, vs.) uygulanabilirliğinin hazmedilmesi önem teşkil etmektedir.* Bunu yapılandırmanın yollarından birisi doğru parçasının ötelenmesine odaklanmaktır. Bu yapılırken aşağıdaki kazanımlar dikkate alınmalıdır.

A. Bir doğru parçası ile öteleme dönüşümü altındaki görüntüsü eştir.

B. Vektörün yönü ve büyüklüğü değişse bile ötelemeye uğratılan doğru parçasının ve görüntüsünün eşliği bozulmaz.

C. Doğru parçası üzerindeki belirli noktalar bu doğru parçasının görüntüsü üzerinde aynı konumda başka noktalara dönüşür.

D. Doğru parçası üzerindeki tüm noktalar vektörün yön ve büyüklüğüne bağlı olarak dönüşüme uğrar.

E. Sıfır vektörüne göre yapılan bir öteleme dönüşümü bir doğru parçasını kendine dönüştürür.

F. Verilen bir doğru parçasının istenilen vektöre bağlı olarak bir öteleme dönüşümü altındaki görüntüsünün kareli kâğıt ortamında belirlenmesi önemlidir.

**Aşama #4:** *Ötelemenin özellik/uzaklık koruyan bir dönüşüm olduğunun bilinmesi önemlidir.* Bu kazanımın edinilmesi çokgenlerin ötelenmesine odaklanmak ile mümkündür. Böylece çokgenlerin açı ve kenar bileşenlerinin dönüşümden nasıl etkilendiğini inceleme fırsatı bulunur. Bu aşamaya temel teşkil eden matematiksel fikirler şu şekilde ele alınabilir.

A. Bir çokgen ve öteleme altındaki görüntüsü içerdikleri açı ölçüleri ve kenar uzunlukları bakımından eştirler. Yani öteleme dönüşümü uygulanan bir düzlem parçasının iç dinamiği korunur.

B. Bir üçgen üzerindeki esas noktalar, bir öteleme dönüşümü altında, görüntü üçgeninde karşılık gelen görüntü noktalarına dönüşür.

C. Bir çokgenin bir öteleme dönüşümü altındaki görüntüsünün konumu vektörün uzunluğuna ve yönüne bağlıdır.

Tasarımın bu son aşamasında öncelikle üçgenlerden faydalanılmıştır. Bunun nedeni öğretimin en başından itibaren var olan anlayış gereği basitten karmaşığa dogru bir öğretim zinciri tasarlanmak istenmesidir. İlk olarak noktalar, ardından doğru parçaları ve daha sonra en az kenarlı çokgen olan üçgen ve sonrasında çokgenler ile çalışmalara devam edilmek istenmiştir. Literatürde araştırmalar sırasında (örneğin, Yanık, 2006) genelde öğrencilerin bir çokgenin öteleme altındaki görüntüsünü belirlerken şekil ile görüntü arasındaki mesafenin tespitinde problem yaşadıkları fark edilmiştir. Bu araştırma sırasında ilk bölümlerde düzlemdeki her noktanın vektör yönü ve büyüklüğü dikkate alınarak ötelemeye uğradığı fikri kazandırıldığı için bu kısımda öğrencinin çokgeni hem bir bütün olarak hem de noktalar kümesi olarak düşünmesi amaçlanmıştır. Böylece araştırmaya katılan öğrencilere, çokgen üzerindeki bir nokta ile bu noktanın öteleme altındaki görüntüsü arasındaki mesafenin vektör uzunluğuna eşit olduğu düşüncesini kazandırmak kolaylaşmıştır. Bu bulgudan hareketle ötelemeye dair müfredat ya da ders geliştirmede kullanılan geometrik nesne veya cisimler (üçgen, çokgen, vs.) hem içerdikleri noktalar temelinde (lokal) hem de bütüncül olarak (global) ele alınmalıdır. McClain, Cobb, ve Gravemeijer (2000) bu tarz yaklaşımın, yani lokal-global ayrımının, farklı bir alan olan istatistikte veri analizinde, özellikle veri grafiklerini incelerken grafikleri nokta bazında olduğu kadar bütüncül olarak da ele almanın öğretimde ne kadar faydalı olduğunu yaptıkları araştırmada ortaya koymuştur. Aynı ayırımın birlikte ele alınmasının analitik geometri konusunun bir parçası olan öteleme dönüşümü öğretilirken ne kadar önemli olduğunu bu çalışma da göstermiştir.

Dönüşüm öğretilirken bir başka sorun da dinamik ortamın tek başına kullanılmasının yetersizliğidir. Sadece dinamik ortam kullanıldığında öğrenciler çok fazla çizime dayalı muhakemeye maruz kalmakta (Holebrands, 2003) ancak, çalışmamızda da görüldüğü üzere, dinamik ortamın ardından statik ortamdaki şekil ve görüntüsünü içeren düzlem resimleri üzerinde çalışıldığında öğrencilerin dinamik ortamda edindikleri deneyimler üzerine düşünme imkanına sahip oldukları gözlenmektedir. Dolayısıyla ders ve müfredat tasarımında dinamik ortamda çalışma ve ardından statik ortamda fikir yürütme metodu izlenmelidir ki bu yaklaşım ilgili literatüre yeni bir katkıdır. Bu durum aşağıda daha ayrıntılı ele alınmaktadır.

Araştırmamız figür-çizim ayrımına dikkat etmenin öteleme dönüşümünün öğretiminde öğretmene rehberlik edebileceğini ortaya koymaktadır. Figür-çizim ayrımına odaklanmanın ne kadar önemli olduğu bu araştırmaya mahsus yeni bir sonuç olmamakla birlikte öteleme dönüşümü için özellikle dinamik bir ortam olan Wingeom-tr ortamında bu ayrıma odaklanmanın öğretmenin ders esnasında öğrenci algılarını ve bu algıların gelişimini anlık analizlerinde etkin bir rol oynadığını rahatlıkla söyleyebiliriz. Öte yandan araştırmanın genel amacı öğrencilerin öteleme dönüşümüne temel teşkil eden bileşenler (korunum, vektörün rolü, noktanın konum belirleyici özelliği, vs.) arasındaki ilişkileri bütünsel olarak ele alıp dönüşümü anlamlandırmasını sağlamak olduğu için, uygulamalar sırasında öğrencilerin geliştirdikleri bu anlamların çizim mi yoksa figür temeli mi olduğuna odaklanmak müfredat geliştirmede ve veri analizinde etkin bir rehber olmuştur. Bu ayırıma odaklanma sayesinde çizime dayalı muhakemeden figüre dayalı muhakemeye geçişte özellikle vektörü öğrenmenin ne derece etkin olduğu da ortaya çıkarılmıştır. Dolayısıyla müfredat geliştirirken ya da ders üretiminde vektöre ve rolüne odaklayıcı etkinlik üretimi, öğrencileri çizimden figüre odaklanmaya iteceği için, önemlidir.

Portnoy, Grundmeier, ve Graham (2006) öğretmen adaylarıyla yaptıkları çalışmada onların geometrik dönüşümleri nasıl algıladıklarını incelerken dönüşümleri belli geometrik cisimler üzerinde etki yapan eylemler olarak ele aldıklarını belirlemişlerdir. Diğer bazı araştırmacılar da (örneğin, Hollebrands, 2003; Yanık ve Flores, 2009) aynı şekilde geometrik dönüşümlerin öğretiminde öğrencileri işin eylemsel boyutundan matematiksel boyutuna çekmenin zorluklarından bahsetmektedirler. Başka bir deyişle, dönüşümler öğrenciler ve öğretmen adayları için genellikle çizime dayalı muhakemenin ve eylemlerin ötesine geçmemektedir. Bu çalışma göstermiştir ki çizime dayalı muhakemeden figüre dayalı muhakemeye geçişte dinamik Wingeom-tr yazılımının öğrenci algısına büyük etkisi vardır. Öteleme dönüşümü barındırdığı matematiksel anlamlar gereği hareketlilik içeren bir geometrik kavram olduğu için dinamik yazılımlar öğrencilerin öğrenme sürecinde muhakeme yapmalarını önemli ölçüde etkilemektedir. Kağıt üzerindeki statik ortamın aksine Wingeom-tr'nin sağladığı dinamik ortamda vektörün ötelemeyi etkileyen özellikleri (yön ve birimler) rahatlıkla değiştirilebildiği için öğrencilerin bu kavramların rolleri hakkında fikir yürütmelerine kolaylık sağlamıştır. Öte yandan Wingeom-tr gibi dinamik programlar dikkatsizce ve devamlı surette kullanıldığı taktirde öğrencileri çizime dayalı muhakeme yapmaya da zorlayabilir. Çünkü öğrenciler bu tür ortamların sağladığı imkanlara (uzunluk bulma, açı belirleme, düzlem değiştikçe ölçümlerin değişimlerini gözlemleme, nesnelerin bağıl hareketini gözlemleme, vs.) kendilerini gereğinden fazla kısıtlayıp, sorgulanmadıkları sürece, arka planda yatan matematiksel fikirleri göz ardı edebilirler. Dolayısıyla öğrencileri programla baş başa bırakmayıp, çizime dayalı muhakemeye bağımlılık hissedildiği anda öğretmenin arka plandaki matematiği öğrencilere sorgulatması gerekmektedir. Bu sorgulama da statik ortamdaki halihazırda uygulanmış öteleme dönüşümlerinin analiziyle daha etkin olmaktadır.

Çizime dayalı muhakemeden figüre dayalı muhakemeye geçişi, yukarıda bahsi geçen aşamalara göre tasarlanan, ve dinamik ve statik ortamdan faydalanan bir müfredat parçasının uygulanması kolaylaştırmıştır. Bu tasarım sayesinde uygulamaya katılan dört öğrenci için öteleme dönüşümü MEB programında önerildiği gibi şekillerin kaydırılması anlamına gelen bir eylemden öte bir kavram haline bürünmüştür. Yapılan öğretim sonunda alınan yanıtlar göstermiştir ki dinamik ve statik ortamların sırasıyla birlikte ele alınmasıyla öğrenciler ötelemenin en önemli yapı taşlarından birisinin vektör olduğunu ve ayrıca ötelemenin tanım kümesi ile değer kümesi arasında matematiksel ilişkiler içeren bir dönüşüm olduğunu anlamlandırmışlardır. Dolayısıyla müfredat geliştirmede ve ders üretiminde bu sıraya dikkat edilmesi öğretmen ve araştırmacılara avantaj sağlayacaktır.

## KAYNAKÇA


Baki, A. (1996). Matematik ögretiminde bilgisayar herşey midir? *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 12*, 135-143

Faydacı, S. (2008). *İlkögretim 6. sınıf ögrencilerine geometrik dönüsümlerden öteleme kavramının bilgisayar destekli ortamda ögretiminin incelenmesi*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi, Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Enstitüsü, Ankara, Türkiye.

Flanagan, K. (2001). *High school student' understandings of geometric transformations in the context of a technological environment*. Unpublished Ph.D. Dissertation, The Pennsylvania State University, University Park, USA.

Glass, B. (2004). Transformations and technology: What path to follow? *Mathematics Teaching in the Middle School, 9*(7), 392-397.

Güven, B., ve Karataş, İ. (2003). Dinamik geometri yazılımı Cabri ile geometri öğrenme: Öğrenci görüşleri. *The Turkish Online Journal of Educational Technology – TOJET, 2*(2), 67-78.

Hollebrands, K. F. (2003). High school student' understandings of geometric transformations in the context of a technological environment**.** *Journal of Mathematical Behavior, 22*, 55-72.

Hollebrands, K. F., & Smith, R. C. (2009). Using interactive geometry software to teach secondary school geometry: Implications from research. In T. V. Craine, & R. Rubenstein (Eds.), *Understanding geometry for a changing world: Seventy first yearbook* (pp.221-232). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Labord, C. (1993). Learning from Computers: Mathematics Education and Technology. In C. Keitel, & K. Ruthven (Eds.), *The computer as part of the learning environment: The case of geometry* (p. 48-67). Berlin: Springer.

Martin, G. (1982). *Transformation geometry: An introduction to symmetry*. New York: Springer-Verlag.

McClain, K., Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2000). Supporting students' ways of reasoning about data. In M. Burke and R. Curcio, (Eds.), Learning mathematics for a new century, 2000 yearbook (pp.174-187). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Parris, R. (2011). *Wingeom (trans. to Turkish, I. O. Zembat)*. Exeter, NH: Peanut Software.

Parzysz, B. (1988). "Knowing vs seeing": Problems of the plane representation of space geometry .figures*Educational Studies in Mathematics, 19*, 79-92.

Piaget, J. (2001). *Studies in reflecting abstraction* (Trans. R. L. Campbell). Sussex, England: Psychology Press.

Portnoy, N., Grundmeier, T. A., & Graham, K. J. (2006). Students' understanding of mathematical objects in the context of transformational geometry: Implications for constructing and understanding proofs. *Journal of Mathematical Behavior, 25*, 196-207.

Simon, M. A., Saldanha, L., McClintock, E., Akar, G. K., Watanabe, T., & Zembat, I. O. (2010). A developing approach to studying students' learning through their mathematical activity. *Cognition and Instruction, 28*(1), 70-112.
Steffe, L. P. (1991). The constructivist teaching experiment: Illustrations and implications. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 177-194). Dordrecth, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
Steffe, L. P., & Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp.267–307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
T.C. Milli Eğitim Bakanlığı (MEB). (2009). *İlköğretim matematik dersi 6–8. Sınıflar öğretim programı*. Milli Eğitim Bakanlığı Yayınları: Ankara.
Tzur, R. (1999). An integrated study of children's construction of improper fractions and the teacher's role in promoting that learning. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(4), 390-416.
van de Walle, J. A. (2007). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (Sixth Edition – International Edition). Boston: Pearson Education, Inc.
Yanık, H. B. (2006). *Prospective elementary teachers' growth in knowledge and understanding of rigid geometric transformations*. Unpublished Ph.D. Dissertation, Arizona State University, USA.
Yanık, H. B., & Flores, A. (2009). Understanding rigid geometric transformations:Jeff's learning path for translation. *The Journal of Mathematical Behavior, 28*(1), 41-57.
Yanık, H. B. (2011). Prospective middle school mathematics teachers' preconceptions of geometric translations. *Educational Studies in Mathematics, 78*(2), 231-260.
Zembat, I. O. (2007). Asimilasyon prensibinin anlamının öğretmen adaylarınca kavranması ve takdir edilmesi. *Hacettepe Universitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 32*, 306-318.
Zembat, I. O. (2010). A micro-curricular analysis of unified mathematics curricula in Turkey. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 42*(5), 443-455. doi: 10.1007/s11858-010-0236-y