

## Fraktal Kart Etkinliğiyle Fraktal Geometriye Giriş

Fatih KARAKUŞ

Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fatih Eğitim Fakültesi, Trabzon  
fkarakus58@gmail.com

**ÖZ.** Son yıllarda ilköğretim matematik öğretim programında yapılan değişiklikler sonucunda matematik öğretim programlarına fraktalar gibi birçok yeni kavram girmiştir. Bu etkinliğin amacı, ilköğretim 8. sınıf matematik öğretim programına yeni giren fraktalar konusunda hem öğrencilere fraktalları daha iyi anlamaları için alternatif bir yol sunmak, hem de öğretmenlere sınıflarında kullanacakları bir etkinlik tasarlamaktır. Hazırlanan etkinliğin öğrencilerin fraktalların temel özellikleri olan tekrarlama ve öz-benzerlik kavramlarını keşfetmelerine yardım edeceği düşünülmektedir. Bunun yanında etkinlik sayesinde öğrenciler somut materyal içerisinde bulunan farklı örüntüleri keşfetme fırsatı yakalayacaktır. Bu bağlamda öğrencilerin gruplar halinde çalışarak 3 boyutlu fraktal kart modelleri oluşturmaları ve elde ettikleri sonuçları ders sonunda tartışma imkânı sağlanmalıdır.

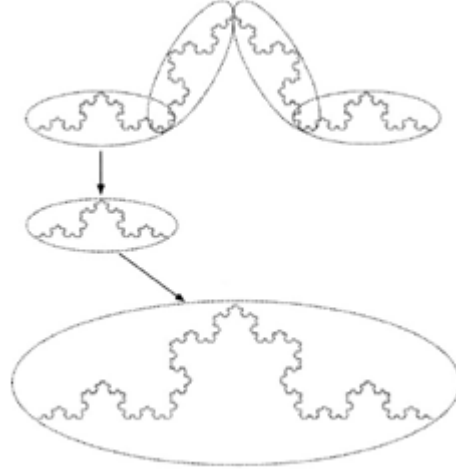
**Anahtar sözcükler:** Fraktal geometri, örüntü ve süslemeler, ilköğretim matematik öğretim programı.

### Giriş

Fraktal geometri matematiğin yeni bir alanı olarak son yıllarda hem matematik hem de matematik eğitiminde çalışılan popüler konulardan biridir. Fraktal kelimesi “düzensiz, kırıklı, karmaşık” anlamlarına gelen Latince “fractus” kelimesinden gelmektedir (Mandelbrot, 1983). Bu geometri doğanın matematik kullanılarak modellenmesinde Euclid geometrisinden çok daha başarılıdır (Baki, 2001). Bu nedenle bu geometriye kısaca doğanın geometrisi denilmektedir (Lornell & Westerberg, 1999). Euclid geometrisinin şekilleri; nokta, doğru, düzlem, daire, küre, üçgen, koni, silindir, vb. oluşmaktadır. Gerçekte bu şekillerin büyük bir çoğunluğu doğada bulunmayan soyut geometrik şekillerdir. Okullarda öğretilen geleneksel geometri idealize edilmiş soyutlamalardan oluşurken, tabiatdaki nesnelerin şekilleri çok daha karmaşıktır. Mandelbrot doğada Euclid geometrisine rastlamanın hemen hemen imkânsız olduğunu “Ne bulutlar birer küre, dağlar koni ve ağaç kabuğu pürüzsüz değildir, ne de şimşekler bir doğru boyunca ilerlemezler (Mandelbrot, 1983, s.1)” sözüyle ifade etmektedir. Bu bağlamda fraktal geometri, geometri eğitiminin genel amacı kapsamında öğrencinin kendi fiziksel dünyasını, çevresini, evreni açıklamada ve problem çözme sürecinde geometriyi kullanabilmesinde Euclid geometrisinden çok daha başarılıdır (Baki, 2001). NCTM’in 1992 yılında yayımladığı ek raporda da geleneksel matematik konularının yanında her seviyeden öğrencinin matematiğe olan ilgi ve ihtiyaçlarını artıracak, matematiğe karşı olumlu tutum geliştirmesini sağlayacak, matematik ile doğa arasında ilişki kuracak ve bu ilişkide teknolojiyi kullanmaya imkân verecek yeni matematik konuları üzerinde durulmuştur. Önerilen konulardan biri de fraktal geometridir. Yapılan birçok çalışmada fraktalların öğrencilerin matematiği bir bütün olarak görmelerine yardımcı olduğu vurgulanmaktadır (Simmt & Davis, 1998; Lornell & Westerberg, 1999; Raiteri, 2005; Karakuş, 2007; Fraboni & Moller, 2008; Karakuş & diğer, 2008). Bu geometri sayesinde öğrenciler geometri, sayılar ve cebir alanlarını birlikte kullanarak bu alanlar arasındaki ilişkileri görme fırsatı elde etmektedirler. NCTM (2000) raporunda öğrencilerin matematik konularının kendi aralarında, diğer disiplinlerle ve günlük hayatla olan ilişkilerini görmelerini sağlamanın onların matematiğin birbirinden ayrı ve soyut kurallar bütünü şeklindeki düşüncelerinde bir değişime neden olacağını ifade etmektedir.

“Fraktal nedir?” sorusuna verilecek en iyi yanıt bir fraktalın gösterdiği temel özellikleri belirlemektir. Bu bağlamda fraktalların genel olarak “tekrarlama”, “öz-benzerlik” ve “boyut” olmak üzere üç temel özelliği bulunmaktadır. İlköğretim seviyesi için boyut kavramının çalışılması uygun olmasa bile tekrarlama ve öz-benzerlik özellikleri verilen bir şeklin fraktal olup olmadığını belirlemede yeterli olacaktır. Tekrarlama, bir adımdaki sonucun diğer adımın başlangıcı olduğu devamlı bir yineleme süreci (Peitgen ve diğerleri, 1992, Kelley, 1999) olarak tanımlanmaktadır. Örneğin fonksiyonların kendileriyle bileşkeleri bu tür bir tekrarlama döngüsünü göstermektedir (Peitgen ve diğer., 2004). Öz-benzerlik, şeklin bir parçasının şeklin bütününe benzemesi olarak tanımlanmaktadır (Kelley, 1999).

Matematiksel fraktal örneklerinden Koch eğrisi ve Sierpinski üçgeni öz- benzerliği en iyi şekilde yansıtan fraktallardır.



**Şekil 1: Koch Eğrisi ve Öz-benzerlik**

Yeni ilköğretim matematik öğretim programımıza eklenen kavramlardan birisi olan ve örüntü ve süslemeler alt öğrenme alanında bulunan fraktalların matematik öğretim programına girmesinin nedeni *“matematiğin “örüntülerin bilimi” olduğu görüşünün yanı sıra, kavramların ve nesnelerin kendi için (immanent) doğalarıyla değil, onları içeren yapılarıyla (örüntülerle) ilgilendiği yaklaşımı göz önünde tutulmuştur. Bu yüzden örüntü alt öğrenme alanı, ayrıntılı olarak ele alınmış ve özel birer örüntü olan fraktallara yer verilmiştir.”* şeklinde ifade edilmektedir (MEB, 2007). Dikkat edilirse fraktalların öğretim programına katılma nedeni açık bir şekilde belirtilmemektedir. İlköğretim 8. sınıf matematik öğretim programında rastladığımız fraktalar konusu hem öğrenciler hem de öğretmenler için oldukça yeni bir konudur. Hazırlanan ders kitapları ve öğretmen kaynakları incelendiğinde bu konu üzerine yeterli açıklamaların yapılmadığı görülmektedir. Örneğin, öğrenci ders kitabında fraktal tanımı *“ bir şeklin orantılı olarak küçültülmüş ya da büyütülmüşleri ile inşa edilen örüntüler”* şeklinde ifade edilmektedir (MEB, 2008). Tanım örtük bir şekilde fraktalların önemli özelliklerinden biri olan öz-benzerliği vurgulamaktadır. Buna karşın fraktalların bir diğer özelliği olan ve örüntünün oluşmasını sağlayan tekrarlama (iteration) özelliğine değinilmemektedir. Ayrıca öğrencinin fraktal ve fraktal olmayan yapıyı karşılaştıran bir etkinlik ya da örnekle karşılaşmaması verilen bir örüntünün fraktal olup olmadığını belirlemesini güçleştirecektir. Bunun yanında fraktalların sahip oldukları matematiksel alt yapıya öğretim programında hiç değinilmemiştir. Öğretim programında örnek olarak verilen etkinlikler fraktalın ne olduğunu ve sahip olduğu matematiksel örüntüleri keşfetmekten ziyade daha çok verilen geometrik bir örüntüyü ifade etme ya da bir sonraki adımını çizme şeklindedir. Örüntü ve süslemeler alt öğrenme alanına eklenen fraktallar konusu bu haliyle hem öğrencilerin hem de öğretmenlerin zihinlerinde bir soru işareti olarak kalacaktır. Bu nedenle fraktal kavramlarının öğretimine yönelik öğretmenlerin sınıf içerisinde kullanabilecekleri materyallere ihtiyaç olduğu görülmektedir.

### **Çalışmanın Amacı**

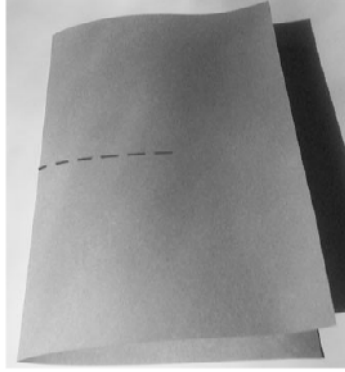
Bu etkinliğin amacı, ilköğretim 8. sınıf matematik öğretim programına yeni giren fraktallar konusunda hem öğrencilere fraktalları daha iyi anlamaları için alternatif bir yol sunmak, hem de öğretmenlere sınıflarında kullanacakları bir etkinlik tasarlamaktır. Etkinlikte 3 boyutlu olarak öğrenciler tarafından oluşturulan bir fraktal model kullanılarak öğrencilerin fraktalların temel özellikleri olan tekrarlama ve öz-benzerliği keşfetmelerine olanak tanınacaktır. Bu sayede öğrencilerin hem estetik duygularının hareketlendirileceği hem de keşfedecekleri örüntüler içerisinde cebir ve geometri alanlarını birlikte kullanacakları düşünülmektedir.

## Etkinlik

Fraktal kart etkinliğinde öğrenciler 2-3 kişilik gruplar şeklinde çalışabilirler. Öğrencilere etkinliğe başlamadan önce renkli A4 kâğıtları, cetvel ve makas dağıtılır. Grupların elde ettiği sonuçlar ders sonunda sınıf içi tartışmada değerlendirilebilir.

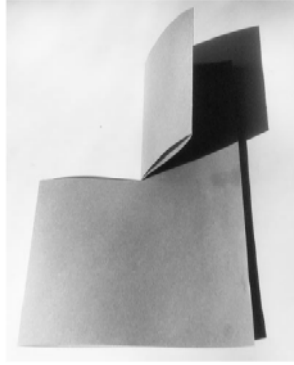
Bir Fraktal Kartı oluşturabilmek için aşağıdaki adımları takip edileceği öğrencilere ifade edilir:

1. Bir A4 kâğıdı alınız ve ortadan ikiye katlayınız. Katlanan kâğıdın kenarının orta noktasını bulunuz ve orta noktadan Resim1'deki gibi kâğıdın ortasına doğru kesikli çizgiler çiziniz. Daha sonra katlı kâğıdı kesikli çizgiler boyunca kâğıdın tam ortasına kadar kesiniz.

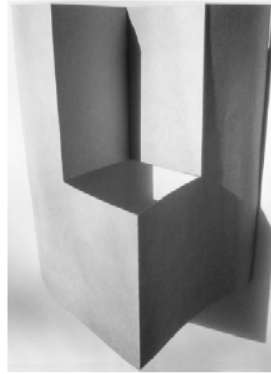


**Resim 1**

2. Şimdi kestiğiniz parçayı tekrar ikiye katlayınız (Resim 2). Katladığınız kısmı açınız ve içe doğru kıvrarak tekrar katlayınız. Oluşan şekil Resim 3'de görüldüğü gibidir. Şu anda fraktal kart oluşturmanın ilk adımını tamamladınız. Bunda sonra yapmanız gereken bu işlemi her yeni oluşan kâğıt parçaları için tekrarlamaktır.

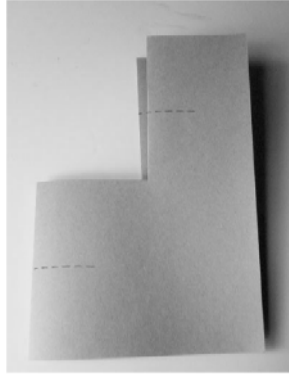


**Resim 2**

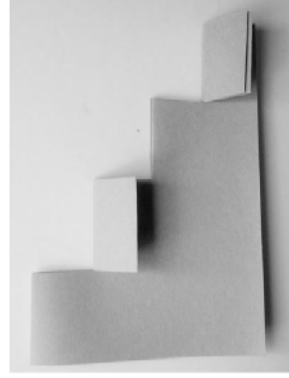


**Resim 3**

3. Altta ve üstte bulunan katlı kâğıtların bir kenarlarının orta noktalarını bulunuz. Bu noktalardan kâğıdın ortasına doğru kesik çizgiler çiziniz (Resim 4). Katlı kâğıtları kesikli çizgiler boyunca kâğıdın tam ortasına kadar kesiniz ve kesik parçaları katlayınız (Resim 5).

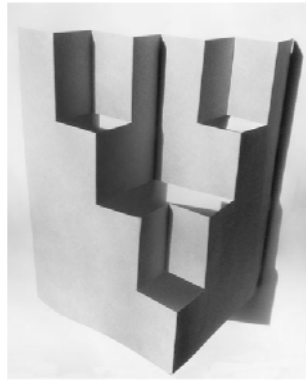


**Resim 4**



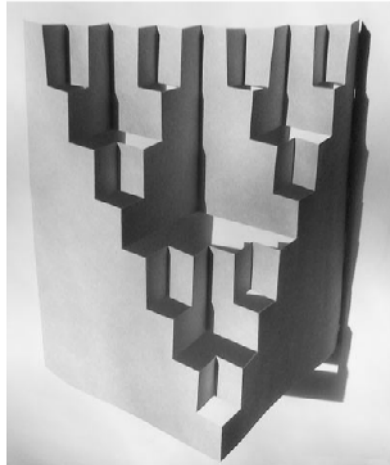
**Resim 5**

4. Katlı parçaları açınız ve içeriye doğru tekrar katlayınız (Resim 6). Fraktal kart oluşturmanın ikinci adımını tamamladınız.



**Resim 6**

5. Bu tekrarlama işlemini birkaç defa daha yineleyiniz. Elde ettiğiniz fraktal kart modellerinizi aşağıdaki resimlerle karşılaştırınız.



**Resim 7**



**Resim 8**

- Her bir grubun oluşturdukları modeli incelemeleri istenir ve öğrencilere aşağıdaki sorular yöneltilir:
  - Oluşturduğunuz modelde birbirine benzeyen parçalar var mıdır? Açıklayınız.
  - Oluşturduğunuz modelin bütünü ile herhangi bir parçasını birlikte düşününüz, ne tür bir ilişki görmektesiniz?
  - Bir küp şekli düşünün küpün bütünü ile bir parçası arasında bir benzerlik var mıdır? Açıklayınız.

- Bu sorular öğrencilerin fraktalların temel özellikleri olan öz-benzerlik kavramını keşfetmelerine yöneliktir. Ayrıca üçüncü soru öğrencilerin fraktal şekillerle Öklit geometrisindeki şekilleri karşılaştırmalarını ve aralarındaki farkları görmelerini sağlayacağı düşünülmektedir.
- Bu sorular sorulduktan sonra model içerisinde gizlenen örüntülerin öğrenciler tarafından keşfedilmesine yönelik olarak aşağıdaki tablonun doldurulması ve soruların cevaplanması istenir.

- Elde ettiğiniz sonuçlara göre aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

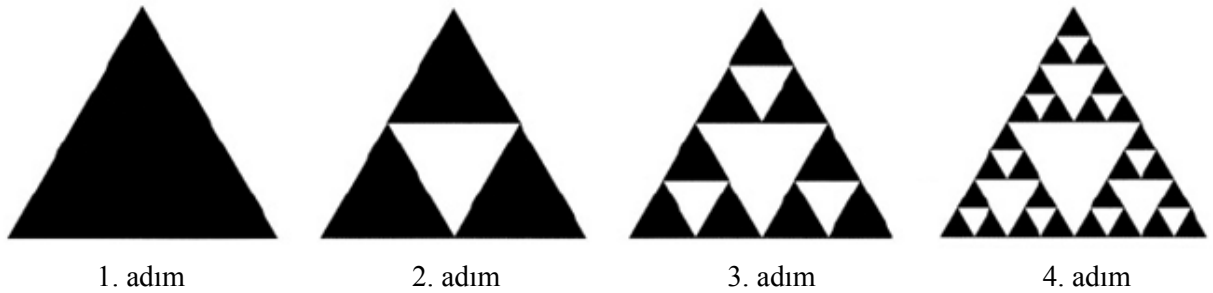
Adım sayısı	1	2	3	4
Benzer parça sayısı	1			

- Tabloyu inceleyiniz oluşan şekildeki benzer parça sayısı nasıl değişmektedir? Buna göre 5. ve 6. adımlar için oluşan benzer parça sayısını bulabilir misiniz?
- Elde ettiğiniz sonuçlara göre herhangi bir adım için oluşan benzer parça sayısını bulabileceğimiz bir kural yazabilir misiniz?
- Tabloda öğrencilerin her bir adımda benzer parça sayısının 3'ün kuvvetleri şeklinde değiştiğini görmesi amaçlanmıştır. Sorulan sorular öğrenciler herhangi bir adımdaki benzer parça sayısını bulmak için  $3^{n-1}$  şeklinde bir genellemeye ulaşmalarına yardımcı olacaktır.
- Daha farklı örüntülerin keşfedilmesi için öğrencilerden aşağıdaki tabloyu doldurmaları istenir.

- Benzer şekilde aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

Adım sayısı	1	2	3	4
Makasla kesme sayısı	1			
Oluşan boş kare sayısı	1			

- Tabloyu inceleyiniz 5. ve 6. adımlar için makasla kesme sayısını ve oluşan boş kare sayılarını bulabilir misiniz?
- Elde ettiğiniz sonuçlara göre herhangi bir adım için makasla kesme sayısını ve oluşan boş kare sayılarını bulabileceğimiz bir kural yazabilir misiniz?
- Tablodan ve sorulan sorulardan öğrencilerin makasla kesme sayısının  $2^{n-1}$  ve oluşan boş kare sayılarının da  $3^{n-1}$  şeklinde değiştiğini görmeleri amaçlanmıştır.
- Etkinliğin sonunda öğrencilerin ders kitaplarında bulunan Sierpinski üçgenindeki üçgen sayılarıyla fraktal kartta oluşan boş kare sayıları arasındaki ilişkiyi irdelemeleri için aşağıdaki soruların cevaplanması istenir.



Şekil 2: Sierpinski üçgenin oluşum adımları

- Oluşturduğunuz şekilde oluşan boş kare sayıları ile Sierpinski üçgeninde oluşan siyah üçgen sayıları arasında nasıl ilişki vardır? Açıklayınız.

Bu etkinlik sonucunda öğrenciler 3 boyutlu bir fraktal model oluşturacaklar ve bu model sayesinde fraktalların temel özellikleri olan ve onları Öklit geometrisinin şekillerinden ayıran tekrarlar ve öz-benzerlik kavramlarını keşfetme imkânı elde edeceklerdir.

## Kaynakça

- Baki, A. (2001). Bilişim Teknolojisi Işığında Matematik Eğitiminin Değerlendirilmesi. *Milli Eğitim Dergisi*, 149, 26–31.
- Fraboni, M. & Moller, T. (2008). Fractals in The Classroom. *Mathematics Teacher*, 102, 3, 197.
- Karakuş, F. (2007). İlköğretim Öğrencilerinin Fraktal Geometri Etkinliklerine Yönelik Görüşleri. *I. Ulusal İlköğretim Kongresi Bildiriler Kitabı*, Hacettepe, Ankara.
- Karakuş, F.; Kösa, T.; Erdem, Ç. (2008). Pascal Üçgeni ve Sierpinski Üçgeni Arasındaki İlişkinin İlköğretim Öğrencileri Tarafından Keşfedilmesi. *International Conference on Educational Science Bildiri Kitabı*, Eastern Mediterranean University, Famagusta, North Cyprus.
- Kelley, P. (1999). Build a Sierpinski Pyramid. *Mathematics Teacher*, 92(5), 384–386.
- Lornell, R. & Westerberg, J. (1999). Fractals in High School: Exploring a New Geometry. *Mathematics Teacher*, 92(3), 260–269.
- Mandelbrot, B. B. (1983). *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W. H. Freeman and Co.
- M.E.B (2007). *İlköğretim Matematik Dersi 6-8. Sınıflar Öğretim Programı ve Klavuzu*. Ankara.
- M.E.B (2008). *İlköğretim Matematik 8. Sınıf Ders Kitabı*. Devlet Kitapları, Ankara.
- NCTM (1992). *Commission on Standards for School Mathematics. Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics: Addenda Series, 9-12: A Core Curriculum*. Reston, Virginia: National Council of Teacher of Mathematics.
- NCTM (2000). *Principles and Standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.
- Peitgen, H-O.; Jürgens, H.; Saupe, D.; Maletsky, E.; Perciante, T.; Yunker, L. (1992). *Fractals For The Classroom: Strategic Activities Volume One*. NCTM, Springer.
- Peitgen, H-O.; Jürgens, H.; Saupe, D. (2004). *Chaos and Fractals New Frontiers of Science Second Edition*. Springer-Verlag, New York, Inc.
- Raiteri, A. C. (2005). An Action Research On Line To Introduce Fractals In The Teaching And Learning Of Mathematics From Primary To Secondary School ([http://math.unipa.it/~grim/cieaem/cieaem57\\_codetta.pdf](http://math.unipa.it/~grim/cieaem/cieaem57_codetta.pdf), adresinden 10.12.2006 tarihinde indirilmiştir).
- Simmt, E. & Davis, B. (1998). Fractal Cards: A Space for Exploration in Geometry and Discrete Mathematics. *Mathematics Teacher*, 91, 2, 102-108.