



Middle School Students' Understanding of Average*

Zülbiye TOLUK UÇAR** Elif Nur AKDOĞAN***

ABSTRACT. The purpose of this study was to investigate 6, 7 and 8th grade students' understanding of average and how these understandings change with respect to the grade level. Participants of the study were 18 students, 6 from each grade level. Semi-structured interviews were conducted to collect the data. Five problems related to the concept of average were asked to the students during the interviews. Problems were developed with respect to the literature review. Data collected were analyzed using content analysis technique. Analysis showed that most of the students understood average as an arithmetic mean, students mostly preferred the arithmetic mean algorithm as a strategy and they didn't recognize average as a representative value. Results of the study were discussed in terms of the statistics education at middle school level.

Key Words: average, measures of central tendency, statistical thinking

SUMMARY

Purpose and Significance: The concept of average has an important place in data analysis. Lack of a clear definition of this concept results in difficulty in teaching and learning. The purpose of this study was to investigate how 6, 7 and 8th grade students interpret the concept of average and how these understandings differ with respect to the grade level.

Methods: This study was done at the center of the Bolu in a middle school. Participants of the study were 18 students from grades 6, 7, and 8, six from each grade level. Students participated in the study voluntarily. Semi-structured interviews were conducted with each students. Five problems were used during the interviews. Three problems were adapted from English to Turkish and the rest were developed by the researchers. Interviews were conducted during the school hours and tape recorded. Each interview lasted approximately 30 minutes. Students' solutions for each problem were also used in data analysis. Content analysis technique was used in order to analyze the data.

Results: It was found that most of the students understand average as an arithmetic mean. As a result, students mostly preferred the arithmetic mean algorithm as a strategy for solving problems. Half of the participants did not recognize average as a representative measure. Results also showed that students' understanding of average change with respect to the grade level.

Discussion and Conclusion: In this study, we investigated how middle school students solved problems about average and approaches they used for solving problems. Half of the students recognized that data was not a collection of individual numbers; rather it was an entity in itself. Other half of the students interpreted average as calculations carried out over several numbers and most of these students understood average as an arithmetic mean and some of these students used only algorithmic approach in solving problems. There were also some differences in students' understanding of average in terms of approaches they used. Four approaches were identified. These are average as mode, add-divide algorithm, average as midpoint and average as mathematical balance point. Mostly used approach was add-divide algorithm. These results showed that middle school students' understanding of average was limited. As an implication of this study, mathematics teachers should provide opportunities for their students so that students could collect, summarize and analyze data. In addition, the arithmetic mean algorithm should not be introduced too early. Because once students learn the algorithm, they hardly develop reasoning skills about average.

* This article was presented at 8th National Congress on Science and Mathematics Education, Bolu

** Asst. Prof. Dr., Abant İzzet Baysal University, Faculty of Education, toluk_z@ibu.edu.tr

*** Research Asst., Abant İzzet Baysal University, Faculty of Education, akdogan_e@ibu.edu.tr

6.-8. Sınıf Öğrencilerinin Ortalama Kavramına Yüklediği Anlamlar

Zülbiye TOLUK UÇAR** Elif Nur AKDOĞAN***

ÖZ. Bu araştırmanın amacı ilköğretim 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin ortalama kavramına yükledikleri anlamları incelemektir. Araştırmaya Bolu ilinde bulunan bir ilköğretim okulundaki 6, 7 ve 8. sınıflardan her seviyeden 6 öğrenci olmak üzere toplam 18 öğrenci katılmıştır. Öğrencilere, ortalama kavramı hakkındaki düşüncelerini açığa çıkarmaya yönelik 5 tane problem sorulmuş, bu problemlerin 3 tanesi alan yazını taramasından sonra Türkçeye çevrilmiş, 2 tanesi ise araştırmacılar tarafından yazılmıştır. Öğrencilerin her biriyle yarı-yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Veriler içerik analizi yöntemiyle analiz edilmiştir. Bulgular, öğrencilerin büyük çoğunluğunun ortalama kavramını, aritmetik ortalama olarak algıladıklarını, ortalama kavramı ile ilgili problemlerde ilk seçtikleri stratejinin aritmetik ortalama algoritmasını kullanma olduğunu ve öğrencilerin yarısının ortalamanın veriyi temsil etme gücünü anlamadıklarını göstermiştir. Araştırmanın bulguları, ilköğretimde istatistik eğitimi açısından tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Ortalama, merkezi eğilim ölçüleri, istatistiksel düşünce

GİRİŞ

Teknolojinin hızlı bir şekilde ilerlediği ve yayıldığı toplumumuzda bilgi ve veri toplama önemli bir rol oynamaktadır. Her gün bir yığın bilgi ile karşı karşıya kalmaktayız. Bu bilgiler yazılı ya da görsel medyada grafik, tablo ya da ortalama olarak karşımıza gelmektedir. Bilgi ve verilerin değerlendirilmesi ve yorumlanması sürecinde istatistiksel bilgiye ihtiyaç duyulmaktadır. Matematik eğitiminin amaçlarından biri de öğrencilere bu bilgilerle baş edebilme becerilerini kazandırmaktır. Sonuç olarak toplumda istatistiksel becerilere olan ihtiyaç karşısında matematik eğitiminde de yenilik arayışına gidilmiş ve eğitimin tüm seviyelerinde istatistik eğitiminde reform süreci başlatılmıştır. (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Bu reform çalışmaları öğrencilerin, özellikle ortaokul seviyesinde, istatistiksel uygulamalara yoğunlaşmalarının ve istatistiksel becerileri geliştirmelerinin önemli olduğunu açığa çıkarmıştır. Bu nedenle, birçok ülkede istatistik ve olasılık konuları matematik programlarında yerini almıştır. Bu programlarda, veri düzenleme, betimleme, temsil etme ve analiz etme süreçlerine önem vermeye başlanmıştır. İstatistik eğitimindeki yeni yaklaşım, Shaughnessy, Garfield ve Greer'in (1996) de öne sürdüğü gibi verileri grafiğe dökme becerisi gibi dar bir bakış açısından çok, veri toplama, veri analizi gibi önemli becerileri kapsayan daha geniş bir bakış açısına sahiptir (akt. Jones ve vd., 2000).

Uzun yıllar okullardaki matematik programlarında ortalama kavramı, merkezi eğilim ölçüleri (ortanca, tepe değer ve aritmetik ortalama) olarak tanımlanmış olsa da çoğunlukla aritmetik ortalama kavramı ile eş anlamda kullanılmış ve daha çok işlemsel açıdan ele alınmıştır (Watson ve Moritz, 2000). Türkiye'de de 2005 yılından önce, merkezi eğilim ölçüleri ilköğretim matematik programında 7. sınıfta bir ünite içinde ve birbirinden bağımsız birer kavram olarak yalnızca işlemsel açıdan ele alınmaktaydı. Bu kavramların veriyi temsil etme ve yorumlama özellikleri ise hemen hemen hiç vurgulanmamaktaydı (MEB, 1998). Dünyadaki reform çalışmalarına paralel olarak, 2004 yılında ilköğretim 6, 7, ve 8. sınıflar matematik programında ortalama kavramı, istatistik ve olasılık öğrenme alanının içinde merkezi eğilim ölçüleri olarak yerini almıştır.

Aritmetik ortalama, ortalama kavramının üç farklı anlamından sadece birisidir. Bir başka ifadeyle, aritmetik ortalama verinin ortalaması ya da merkezi eğilimi hakkında bilgi veren araçlardan biridir (Randall, 2006). Ortalama bir veri grubunun dağılımının merkezi hakkında bilgi verir. Ortalama bazen veride en sık tekrarlanan değer (tepe değer veya mod), bazen ortadaki değer (ortanca veya medyan) bazen de verinin denge noktasıdır (aritmetik ortalama). Ayrıca, verinin dağılımının şekline

** Yrd. Doç. Dr., Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, toluk_z@ibu.edu.tr

*** Arş. Gör., Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, akdogan_e@ibu.edu.tr

göre bu ölçülerden hangisinin daha iyi bir temsilci olduğu değişebilir. Örneğin, normal ya da normale yakın dağılımlarda aritmetik ortalama iyi bir temsilciyken, çarpık dağılımlarda ya da büyük uç değerlerin bulunduğu durumlarda ortanca daha iyi bir temsilci olabilir. Ortalamanın tek bir tanımının olmaması ve verinin dağılımından etkilenmesi nedeniyle, ortalama kavramı tam olarak anlaşılammakta, hatta çoğu zaman aritmetik ortalama ile eş anlamda kullanılmaktadır. Aritmetik ortalama ile ilgili yapılan araştırmalar da, bu kavramın sadece işlemsel açıdan anlaşıldığını ve veriyi temsil etme gücünün yeterince gelişmediğini göstermektedir (Pollatsek, Lima and D'Well, 1981; Mevarech, 1983; Cai, 1999). Cai (1999) Çinli ve Amerikalı 6. sınıf öğrencileriyle yaptığı araştırmada öğrencilerin aritmetik ortalama kavramını yeterince anlamadıkları için problem çözme durumlarında algoritmayı geriye doğru çalıştırmada güçlük çektiklerini belirlemiştir.

Çocuklarda merkezi eğilim ölçülerinin (ortanca, tepe değer ve aritmetik ortalama) algoritmik bilgisinin hızlı gelişmesine rağmen kavramsal bilgisinin gelişimi uzun yıllar almaktadır. Mokros ve Russell (1995) 4, 6 ve 8. sınıf öğrencilerinin ortalama ile ilgili problemlerin çözümlerinde kullandıkları stratejileri incelemiştir. Mokros ve Russell çocuklarda ortalama kavramı ile ilgili 5 gelişimsel yaklaşım belirlemiştir. Bu yaklaşımlardan ilk ikisinde çocuklar veriyi tek tek sayılardan oluşan bir sayı dizisi olarak ele aldıkları için, ortalamayı temsilci olarak görememektedirler. Bu nedenle de ya veride en çok tekrar eden değere yoğunlaşmaktadırlar ya da ortalamayı sadece bir işlem olarak algılamaktadırlar. Diğer 3 yaklaşımda ise çocuklar ortalamanın temsil etme özelliğini anlamaya ve ortalama kavramının tanımını geliştirmeye, ortalamanın verinin dağılımı hakkında bilgi veren ve veride tipik olanı temsil eden bir değer olduğunu anlamaya başlamaktadır. Watson ve Moritz (2000) benzer bir çalışmayı daha geniş bir örneklem üzerinden yapmıştır. Ortalama kavramının 3. sınıftan 9. sınıfa kadar 137 öğrencide nasıl geliştiğini incelediklerinde 6 hiyerarşik düzey tespit etmişlerdir. İlk 4 düzey ortalama kavramının sezgisel günlük yaşam düşüncelerinden, bir veri kümesinin merkezi ölçüsünü elde etmek için kullanılan işlemsel ve kavramsal açıklamalara dönüşümünü açıklarken, en üst 2 seviye ilk dört seviyede kazanılan anlamları karmaşık problem çözme ortamlarında ortalama algoritmasını geri çevirmeye ve ağırlıklı ortalama hesaplamaya nasıl taşıdıklarını açıklamaktadır. Ayrıca, Watson ve Moritz çocukların ortalama ifadesini genellikle "orta" olarak yorumladıklarını bulmuştur. Leavy ve O'loughlin (2006), 263 öğretmen adayıyla yapmış olduğu çalışmada öğretmen adaylarının ortalama hesaplama konusunda önceden gerekli işlemsel bilgilere sahip oldukları, formülleri ve kuralları bildiklerini fakat yeterli düzeyde kavramsal bilgiye sahip olmadıkları için kavramsal bilgi ile işlemsel bilgi arasında ilişki kuramadıklarını tespit etmiştir.

Ülkemizde ise, bu konuyla ilgili matematik eğitiminde yapılan araştırmalar incelendiğinde, ortalama kavramının nasıl algılandığı ile ilgili yeterli çalışma bulunmamaktadır. Bu nedenle ortalama kavramına öğrencilerin yüklediği anlamların ve ortalama problemlerini çözerken kullandıkları stratejilerin ortaya çıkarılmasına ihtiyaç duyulmaktadır. Ayrıca günümüzde matematik eğitiminde yapılan araştırmalar incelendiğinde yalnızca % 2 lik kısmının konusunun istatistik ve olasılık olduğu görülmektedir (Aisling ve Middleton, 2001). Bu yüzden bu alana yönelik araştırmaların sayısı artırılmalıdır. Bu bağlamda bu araştırmanın amacı, ilköğretim 6. – 8. sınıf öğrencilerinin ortalama kavramına hangi anlamları yükledikleri ve bu anlamların sınıflara göre nasıl değiştiğinin incelenmesidir.

YÖNTEM

Araştırmada nitel araştırma yöntemi kullanılmıştır. Şimşek ve Yıldırım (2006)'a göre nitel araştırma; gözlem, görüşme ve doküman analizi gibi veri toplama yöntemlerinin kullanıldığı, algıların ve olayların doğal ortamda gerçekçi ve bütüncül bir biçimde ortaya konmasına yönelik nitel bir sürecin izlendiği araştırma olarak tanımlanmaktadır. Bu nedenle, araştırmaya katılan ilköğretim 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin "ortalama" kavramına yükledikleri anlamları ortaya çıkarmak için öğrencilerle birebir görüşmeler yapılmıştır.

Katılımcılar

Araştırma Bolu ili merkez ilçesinde bir ilköğretim okulunda gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın verileri bu okulun 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinden her bir sınıf seviyesinden maksimum çeşitlilik

örneklemesine uygun olacak şekilde altışar öğrenci seçilerek, 18 öğrenciden toplanmıştır. Öğrenciler sınıflarında matematik derslerindeki başarı düzeylerinin alt, orta ve üst düzey olmasına dikkat edilerek, öğretmenleri tarafından problem çözüme düşüncelerini açıklayabilme becerisi ve çalışmaya gönüllü olmaları göz önüne alınarak yapılmıştır. Maksimum çeşitlilik örneklemesinin kullanımındaki amaç, örnekleme çalışılan probleme taraf olabilecek bireylerin çeşitliliğini maksimum derecede yansıtmaktır (Şimşek ve Yıldırım, 2006). Ayrıca farklı sınıf düzeylerinden öğrencilerin seçilmesindeki amaç, ortalama kavramının sınıflara göre nasıl geliştiğinin açığa çıkarılmasıdır.

Veri Toplama Süreci

Veri toplama aracı olarak, klinik mülakat yöntemi kullanılmıştır. Klinik mülakatlarda kullanılan 5 problem alanyazını taramasına göre hazırlanmıştır (Bkz. Ek). Problemlerin ilk 3 tanesi İngilizceden Türkçe'ye uyarlanmıştır. Birinci problem İstanbul'da ortalama yolculuk süresi ile ilgili bir gazete haberidir. Bu problem Watson ve Moritz'den (2000) uyarlanmış, çocukların ortalama kavramını günlük yaşamda nasıl anladıklarını ortaya çıkarmak için hazırlanmıştır. İkinci problem Mokros ve Russell'dan (1995) uyarlanmıştır. Bu problemde veri grafik biçiminde sunulmuş, öğrencilere grafikte verilen haftalık harçlık miktarlarının ortalamasını bulmaları sorulmuştur. Ağırlıklı ortalama ile ilgili 3. problem ise Pollatsek ve vd. (1981) den uyarlanmış asansör problemidir. Bu problemde ortalama ağırlıkları verilen 6 erkek ve 4 kadının 800 kg kapasiteli bir asansöre güvenle binip binemeyecekleri sorulmuştur. Son iki problem araştırmacılar tarafından hazırlanmıştır. Dördüncü problemde bir öğrenci grubunun 10 gruba ayrıldığı, her grupta ortalama 11 öğrencinin olduğu ve ilk 2 gruptaki öğrenci sayılarının 10 ve 9 olduğu bilgileri verilmiştir. Öğrencilerden hiçbir grupta 11 öğrenci olmamak şartıyla diğer 8 gruptaki öğrenci sayılarını bulmaları istenmiştir. Son problemde ise öğrencilerden tablo şeklinde sunulan veriyi en iyi şekilde temsil edecek ortalama değeri bulmaları beklenmiştir. Problemlerin sunum sırası her çocuk için aynı olmuştur. Görüşmeler, okulda ders saatleri içinde gerçekleştirilmiş ve ses kaydı yapılmıştır. Her bir görüşme yaklaşık 30 dakika sürmüştür. Görüşmelerde kaydedilen ses kayıtlarının çözümlenmesi yapıldıktan sonra öğrencilerin görüşme esnasındaki çözümleri de analizde kullanılmıştır.

Veri Analizi

Verilerin analizinde içerik analizi tekniği kullanılmıştır. Veri analizi üç aşamada gerçekleştirilmiştir. Birinci aşamada her öğrenci ile yapılan görüşmeler okunmuş ve kodlar belirlenmiştir. Elde edilen kodlara göre görüşmeler kodlanmıştır. Kodlamalardan sonra, her öğrencinin ortalama kavramı ile ilgili düşüncelerinin genel bir resmi çıkarılmıştır. İkinci aşamada ise, Mokros ve Russell'ın (1995) çalışmasında ortaya çıkan 4, 6 ve 8. sınıf öğrencilerinin ortalama kavramı ile ilgili problemleri çözerken kullandıkları yaklaşımlar kullanılarak kodlama yapılmıştır. Mokros ve Russell öğrencilerin ortalama problemlerinde 5 farklı yaklaşım kullandıklarını tespit etmiş ve her bir yaklaşım için kullanılan stratejileri listelemiştir. Mokros ve Russell'ın belirlemiş olduğu yaklaşımlar sırayla mod (en sık tekrar eden değer), algoritma, akla yatkınlık, orta nokta (medyan) ve matematiksel denge noktası yaklaşımlarıdır. Bu yaklaşımlar ve alt stratejiler kullanılarak görüşmeler tekrar kodlanmıştır. Her öğrencinin problemlere yaklaşımları tekrar ayrı ayrı incelenmiş, öğrencinin hangi stratejiyi kullandığı belirlendikten sonra, her problem için elde edilen analiz sonuçları bir araya getirilerek öğrencinin kullandığı en baskın strateji belirlenmiştir. Birinci ve ikinci aşamada elde edilen kodlar karşılaştırılarak her öğrencinin ortalama kavramına yüklediği en belirgin anlam belirlenmiştir. En son aşamada, öğrencilerin ortalama kavramını bir veri grubunu temsil etme gücünü anlayıp anlamadıkları değerlendirilmiştir. Ortaya çıkan analiz sonuçlarına göre öğrencilerin stratejilerinin sınıf seviyesine göre farklılık gösterip göstermediği belirlenmiştir.

BULGULAR

Yapılan analizler sonucunda öğrencilerin problemlerin çözümlerinde baskın şekilde kullandıkları stratejiler iki grupta toplanmıştır. Bu stratejiler ortalamanın bir veri grubunu temsil etme gücünün farkında olmayanlar ve temsil etme gücünü bilen stratejilerdir. Öğrencilerin bu stratejilere ve

sınıf seviyelerine göre dağılımı Tablo 1’de verilmiştir. Araştırmaya katılan 18 öğrenci bu iki gruba eşit olarak dağılmışlardır.

Tablo 1. Öğrencilerin problemlerde kullandıkları stratejilerin sınıf seviyelerine göre dağılımı

Stratejiler	Öğrenci sayısı		
	6. sınıf	7. sınıf	8. sınıf
Temsilci değil	4	3	2
Temsilci	2	3	4

Ortalamanın temsil etme gücünün farkında olmayan öğrencilerin problem çözme yaklaşımlarının esnek olmadığı gözlemlenmiştir. Bu gruptaki öğrenciler genellikle aritmetik ortalama algoritmasını kullanmayı tercih etmişler, algoritmayı kullanmadan ortalamayı bulmaları istendiğinde yeni bir strateji geliştirememişlerdir. Ortalamanın ne ifade ettiği sorulduğunda genellikle aritmetik ortalama algoritmasının nasıl yapıldığını açıklamışlardır. Bu gruptaki bir 6. sınıf öğrencisi ortalamayı hesaplarken bazı problemlerde algoritmayı ya yanlış kullanmış ya da ortalamanın nasıl hesaplanacağını bilmediğini söylemiştir. Ortalamanın temsil etme gücünün farkında olmayan öğrenciler genellikle ortalama kavramını günlük yaşamda duymadıklarını, matematikle ilgili bir kavram olduğunu belirtmişlerdir. Ortalama insan ifadesini “yaşına uygun davranan, savurgan olmayan, ne yararı ne zararı olan, fazla samimi olmayan, gürültülü yerleri seven, sorumluluklarını yerine getiren, herkesin fikrini alan” insan olarak yorumlamışlardır. Aşağıdaki alıntı bir 7. sınıf öğrencisinin ortalama insan ifadesini nasıl yorumladığını göstermektedir.

A: Ortalama insan ifadesini daha önce hiç duydun mu?

Ö: Hayır duymadım.

A: Peki şimdi duydun, burada ne anlatılmak isteniyor? Ortalama insan denilince senin aklına ne geldi?

Ö: Ortalama insan, herkesin düşündüğüne uyan yani bir insanların fikirlerine danışan, onların fikirlerini alıp bir işe başlayan gibi geldi...

Aşağıdaki alıntıda başka bir 7. sınıf öğrencisi ortalama insanı “tüm insanların toplam sayılarına bölümü” olarak tanımlamıştır. Bu öğrenci ortalama kavramını sadece algoritmik yönüyle düşünmektedir.

A: Ortalama insan ifadesini daha önce hiç duydun mu?

Ö: Evet aslında biraz duydum, nüfus sayımında veriliyor, ortalama... ya da yaklaşıklıkta da oluyor bunlarda.

A: Peki sence burada ortalama insan derken anlatmak istedikleri şey nedir?

Ö: Ortalama insan derken yani tüm insanların ne kadar sayıları varsa ona bölümü gibi bir şey...

Bu gruptaki öğrenciler ağırlıklı ortalama problemini çözerken, toplamı iki grubun ortalamalarını toplayarak bulmuş, verilen bir ortalamaya uygun veri grubu oluşturmaları istendiğinde ise toplam kaç kişi olduğunu bilemedikleri için tek tek veri oluşturamayacaklarını belirtmişlerdir. Ayrıca, ortalama hesaplarken tüm verileri dikkate almamışlar ve verinin dağılımına dikkat etmemişlerdir.

Ortalamanın temsil etme gücünün farkında olan öğrenciler problemleri çözerken daha esnek yaklaşmışlardır. Ortalamayı hesaplarken veriyi bir bütün olarak ele almış ve verinin dağılımına dikkat etmişlerdir. Bu gruptaki öğrenciler uç değerlerin ortalamayı etkileyebileceğini, bu nedenle hesaplarken bütün verilerin kullanılması gerektiğini açıklamışlardır. Ayrıca, bu öğrenciler günlük yaşamda ortalama kavramının neden kullanıldığını daha iyi açıklamışlardır. Örneğin, ortalama kavramının günlük yaşamda matematik dersi dışında da kullanıldığını ortalama sıcaklık, ortalama gelir, futbolda, bilgisayar oyunlarında ortalama puan olarak karşılaştıklarını belirtmişlerdir. Aşağıdaki alıntıda bir 7. sınıf öğrencisi günlük yaşamda ortalamayı nerelerde duyduğunu ve neden kullanıldığını

açıklamaktadır. Öğrenci açıklamasında ortalamanın bir dağılım hakkında bilgi veren bir değer olduğunu vurgulamaktadır.

A: *Günlük yaşamda, aile ortamında, arkadaş ortamında veya televizyonda ortalama kelimesiyle karşılaştın mı?*

Ö: *Evet*

A: *Nerelerde karşılaştın?*

Ö: *Mesela coğrafya dersinde ortalama sıcaklık, ortalama yağış miktarı, ... gibi.*

A: *Coğrafya dersinde ortalama sıcaklık, ortalama yağış kullanılıyor dedin. Ortalama nedir burada? Niçin ortalama kullanıyor olabilirler?*

Ö: *Genel şeyleri işte... Dağılışı diyebiliriz. Öyle diye geliyor aklıma.*

A: *Nasıl yani? Biraz daha açarsan...*

Ö: *Eeeee (düşünüyor). Genelleme yapıyoruz. Mesela hani her tarafında yağış farklı olabilir ama genel yağışın bir birime düşen değeri gibi bir şey... Yağış miktarı hakkında bize bilgi veriyor.*

Bir başka öğrenci (8. sınıf) grafikten ortalama hesaplama sorusunda, uç değerlerden sıfırı neden hesaplamaya kattığını şöyle açıklamıştır:

Ö: *5 kişi hiç harçlık almıyorsa tabi onu almak zorundayız.*

A: *Grafiğe baktığında neden 5'i almak zorundayız?*

Ö: *Çünkü yine kişi sayısına bağlı... Düşürecek o... bu 5 kişiyi şeyin dışında bırakırsak hem, gerçek verilere ulaşamayız. Yani 5 kişi de harçlık almasa da kesinlikle almalıyız onu.*

A: *Neden düşüreceğini düşünüyorsun, ortalamayı 5 kişinin?*

Ö: *Çünkü onlar hiç harçlık almıyor. Beş kişiyi almadan 3 YTL çıkacaksa ortalama, 5 kişiyi aldıktan sonra 2,2 YTL, 2 YTL gibi çıkar.*

Ortalama insanı ise “genele uyan, çoğunlukla aynı olan, orta özelliklere sahip olan” insanlar olarak tanımlamışlardır. Örneğin, bir 8. sınıf öğrencisi ortalama kavramını açıklarken robot resimlerin çizimlerinde olduğu gibi verilerin tam olarak bilinmediği durumlarda ortalamadan yararlandığını belirtmiştir. Bir başka 8. sınıf öğrencisi ortalamanın belli özellikler hakkında bir fikir vermek için, geneli anlamak, dağılım hakkında bilgi edinmek için kullanıldığını belirtmiştir. Bu gruptaki öğrenciler ortalamanın farklı farklı değerlerden oluşan veriler hakkında bilgi edinmek için gerekli olduğunu ileri sürmüşlerdir. Ortalamanın temsil etme gücünün farkında olan öğrenciler, ağırlıklı ortalama problemini çözerken aritmetik ortalama hesabında toplam ve ortalama arasındaki ilişkiyi doğru kullanmış ve açıklamışlardır. Toplamın gerçek bir veri olduğunu ve daha kesin olduğunu belirtirken, ortalamanın yaklaşık, kesin olmayan bir değer olduğunu belirtmişlerdir. Ayrıca, verideki değerlerin ortalama ile aynı olabileceği gibi farklı olabileceğinin hatta veri grubunda hiç olmayabileceğini belirtmişler, ortalamanın toplama göre daha iyi fikir verdiğini, değerlendirme yapmayı kolaylaştırdığını açıklamışlardır.

Öğrencilerin çözümleri ortalama kavramına yüklenen anlamlara göre de sınıflandırılmıştır. Sınıflandırma yapılırken bazı problemlerde farklı yaklaşımlar kullanılmış olsa da, bütün görüşme boyunca en baskın şekilde kullanılan stratejiye dikkat edilmiştir. Bu sınıflandırma sonucunda 4 değişik yaklaşım ortaya çıkmıştır. Tablo 2 bu yaklaşımları kullanan öğrencilerin sınıflara göre dağılımını özetlemektedir. Tablo 2’ye göre, öğrencilerin ortalama kavramına yüklediği anlamların sınıf seviyesine göre farklılık gösterdiği görülmüştür. Ortalamayı sadece mod olarak yorumlayan hiç 8. sınıf öğrencisi bulunmazken, matematiksel denge noktası olarak algılayan üç 8. sınıf öğrencisi olduğu belirlenmiştir. Benzer şekilde hiçbir 6. sınıf öğrencisi ortalamayı bir dağılımı temsil eden matematiksel denge noktası olarak yorumlamamıştır. Ayrıca, öğrencilerin çoğunluğu (7 öğrenci) ortalama kavramını topla ve böl şeklinde işlemsel yönüyle kullanmışlardır.

Tablo 2. Öğrencilerin ortalama kavramına yüklediği anlamların sınıflara göre dağılımı

Anlamlar	Öğrenci sayısı		
	6. sınıf	7. sınıf	8. sınıf
En sık tekrar eden değer (Mod)	1	1	0
Algoritma (Topla ve böl)	3	2	2
Orta nokta (Medyan)	2	2	1
Matematiksel denge noktası (Aritmetik ortalama)	0	1	3

Ortalama'yı sadece en sık tekrar eden değer olarak yorumlayan 2 öğrenci, genellikle problemleri çözerken verinin modunu dikkate almıştır. Örneğin trafikte harcanan ortalama yolculuk süresini çoğunluğun harcadığı süre olarak açıklamışlardır. Benzer şekilde, grafikten ortalama haftalık miktarını belirlerken grafikte en yüksek sütuna yoğunlaşmışlardır. Bu öğrenciler, ortalama'yı kullanmadan verilen ortalama'ya uygun veri grubu oluşturmaları istendiğinde çözümlerinin akla yatkınlığına bakmadan rasgele sayılar oluşturmuşlardır. Örneğin bir 6. sınıf öğrencisi ortalamanın 11 olduğuna dikkat etmeden bütün grupların öğrenci sayısını 11 den küçük seçmiştir. Ayrıca, bu iki öğrenci aritmetik ortalama algoritmasını birçok problemde yanlış kullanmışlardır. Örneğin bir 6. sınıf öğrencisi ortalama haftalık miktarını bulurken grafikte düşey eksenindeki verileri toplamış yatay eksenindeki sayıların toplamına bölmüştür. Ortalama kavramını çoğunlukla aritmetik ortalama algoritması ile açıklamaya çalışsan 7 öğrenci, işlem yapmadan ortalama'yı tahmin edemeyeceklerini, tek bildikleri yolun işlem yaparak bulmak olduğunu söylemişlerdir. Öğrencilerden neden toplayıp böldüklerini açıklamaları istendiğinde ise işlemin öyle yapılması gerektiğini, sonucu bulduklarını, toplamın büyük, ortalamanın küçük olması gerektiği için kullandıklarını, okulda ve dershanede bu şekilde öğrendiklerini belirtmişlerdir. Bir 8. sınıf öğrencisi neden ortalama kelimesinin kullanıldığı sorulduğunda aşağıdaki açıklamayı getirmiştir.

A: Neden insanlar ortalama kelimesini kullanıyorlar?

Ö: Kolaya kaçmak için kullanıyorlar.

A: Nasıl?

Ö: İşlem yapmak gibi, işlem kolaylık için, işlem yoksa sallarım...

Aynı öğrenci asansör probleminde erkek ve kadınların toplam ağırlıklarını bulurken, kadın ve erkeklerin ortalama ağırlıklarının toplamını bulmuştur. Bir 7. sınıf öğrencisi asansör probleminde gerçek kiloları bilmeden toplam ağırlığı bulamayacağını söylemiştir. Farklı sorularla öğrenciler sorgulandığında ise öğrencilerin sıkıldıkları, hatta heyecanlandıkları gözlenmiştir. Aşağıdaki alıntıda, bir 6. sınıf öğrencisi algoritmayı bilmesinin sezgisel düşüncesinin önüne nasıl geçtiğini açıklamaktadır.

A: Ortalama senin için sadece işlem mi ifade ediyor?

Ö: (Düşünüyor)Hani küçük olup da ortalamanın nasıl hesaplandığını bilmeseydim, bir şeyler söyleyebilirdim ama bildiğim için sadece işlem ifade ediyor...

Ortalama'yı orta değer olarak yorumlayan 5 öğrenci ise aritmetik ortalama algoritmasına alternatif strateji olarak veri grubunun orta noktasını bulmuşlardır. Bir öğrenci dışında hiçbir öğrenci medyan algoritmasını kullanmasa da yaklaşımları veri grubunun orta noktasını bulmayı içermiştir. Bu öğrenciler genellikle verinin en küçük ve en yüksek değerinin toplamını ikiye bölerek ortadaki değeri bulduklarını iddia etmişlerdir. Ortalama kelimesini ise genellikle "ortadaki değer", "tam ortada" olarak yorumlamışlardır. Ayrıca bir ortalama'ya uygun veri grubu oluştururken, ortalamanın sağına ve soluna sayıları dağıtarak simetrik bir dağılım elde etmişlerdir. Sayıları ortalamanın iki tarafına yerleştirirken sayı ikililerinin ortalamasının 11 olmasına dikkat etmişlerdir. Simetrik bir dağılım bulunmayan haftalık miktarları ile ilgili problemde ortalama'yı bulurken zorlanmışlardır. Bu stratejiyi kullanan bir 7. sınıf öğrencisinin açıklamaları aşağıdaki gibidir.

A: Peki şimdi diyelim ki grupların ortalaması 11 olacak ama gruplardaki öğrenci sayısı 11

Olmayacak, öğrencileri gruplara yerleştirebilir misin?

Ö: *Şimdi gruptaki her bir grupta 11 kişi olmayacak, ortalama 11 olacak.*

A: *Ortalama 11 olacak, evet.*

Ö: *Ortalama 11 olması için, yani bir grupta 8 kişi varsa, bir grupta 14 kişi olur gibi...*

Üç 8. sınıf ve bir 7. sınıf öğrencisinin çözümleri ortalamanın bir matematiksel denge noktası olduğu düşüncesini yansıtmıştır. Bu öğrenciler aritmetik ortalama algoritmasının kullanılmasının gerektiği problem durumlarında algoritmayı doğru şekilde uygulamışlardır. Ortalamayı bulmak için sadece algoritmaya güvenmemişler, farklı problem durumlarında uygun ortalamayı seçmişlerdir. Asansör probleminde, ortalama ve toplam arasındaki ilişkiyi esnek bir şekilde kullanarak problemi çözmüşlerdir. Grafikte verilen ortalama haftalık miktarları ile ilgili problemde, ortalamayı bulurken grafikte uç değerleri, yığılmanın olduğu kısımları dikkate alarak ortalamayı bulmuşlardır. Veri grubu oluşturma probleminde bu öğrenciler problemi alt ortalamalara ayırarak oluşturmuşlardır. Veri grubunu oluştururken sayıların ortalamadan eşit uzaklıkta olmasına dikkat etmişlerdir.

TARTIŞMA, SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada öğrencilerin ortalama kavramı ile ilgili problem durumlarına nasıl yaklaştıkları incelenmiştir. Öğrencilerin yarısı ortalama kavramını bir veri grubunu temsil eden bir değer olarak yorumlamamışlardır. Bu öğrenciler ortalama kavramını bir dizi sayının üzerine yapılan işlemler olarak algılamışlardır. Öğrencilerin diğer yarısının ise ortalama kavramının tanımını geliştirme sürecinde olduğu gözlenmiştir. Bu öğrencilerin ortalama kavramını verinin merkezinin bir ölçüsü olduğu, bir veri grubunun belli yönlerini temsil eden değer olduğunu sezgisel düzeyde anladıkları belirlenmiştir. Bu gruptaki öğrenciler ortalamanın bir veri grubu hakkında bilgi verdiğinin farkındadırlar. Mokros ve Russell'a (1995) göre temsil etme düşüncesinin ortalama ile ilgili herhangi bir çalışmanın temelini oluşturduğunu ve ortalamanın farklı anlamlarının (ortanca, tepe değer ve aritmetik ortalama) tanımlarını oluşturabilmek için bir ön şart olduğunu ileri sürmektedir. Hangi değer bir veri grubunu daha iyi temsil ettiğini belirlerken dağılımın şekli, uç değerler, yığılmalar, en sık tekrar eden değerler, ortadaki değerler bazı ipuçları verirler. Bu araştırmaya katılan 9 öğrenci veriyi tek tek sayıların oluşturduğu bir sayı dizisi olarak değil, veriyi bir bütün olarak ele alarak bu ipuçlarından bazılarını sezgisel düzeyde de olsa kullanmaktadırlar. Bu çalışmada ortalamanın bir veri grubunun temsilcisi olduğu anlayışının sınıf seviyesi ilerledikçe geliştiği belirlenmiştir. Benzer bulguları Mokros ve Russell (1995) 4, 6 ve 8. sınıf öğrencileriyle yaptığı çalışmada elde etmiştir. Fakat Watson ve Moritz (2000) ortalamanın temsilci olma düşüncesinin 3 ve 5. sınıf öğrencilerinde bulunmadığını tespit etmiştir.

Öğrencilerin ortalama kavramına yükledikleri anlamlara bakıldığında ise Mokros ve Russell'ın (1995) çalışmalarında ortaya çıkan 5 yaklaşımdan dört tanesi tespit edilmiştir. Bunlar en sık tekrar eden değer, topla-böl algoritması, ortadaki değer ve matematiksel denge noktası yaklaşımlarıdır. Öğrenciler arasında en yaygın olan yaklaşım topla-böl algoritması, daha sonra ortadaki değeri bulmadır. Bu çalışmada Mokros ve Russell'ın çalışmalarında buldukları aritmetik ortalamanın makul değer olarak algılanması ortaya çıkmamıştır. Ayrıca, bu çalışmada matematiksel denge noktası yaklaşımında Mokros ve Russell'ın bu yaklaşım için açıkladığı gibi, dengeleme ya da seviye ayarlama stratejilerini öğrenciler açık bir şekilde kullanmamışlardır. Mokros ve Russell'ın çalışmasının aksine, bu çalışmada ortaya çıkan matematiksel denge yaklaşımını en belirgin özelliği ortanca ve tepe değerin yanı sıra, aritmetik ortalama kavramının uygun bir biçimde uygulanmasıdır. Ayrıca, bu yaklaşımı kullanan öğrenciler aritmetik ortalama algoritmasını doğru şekilde kullanmanın yanı sıra farklı problem durumlarında uygun ortalamayı seçebilmişlerdir.

Bu çalışmada, öğrenciler çoğunlukla problemleri çözerken ilk tercih olarak algoritmik yaklaşım sergilemişlerdir. Fakat alternatif strateji geliştirmeleri istendiğinde çok azı bunu başarabilmiştir. Bu da öğrencilerin ortalama kavramını genellikle işlemsel açıdan yorumladıklarını göstermektedir. Buradan yola çıkarak, Mokros ve Russell'ın (1995) ifadesiyle "algoritmayla evli olan" öğrenciler, ortalamanın dar bir işlemsel kavram olduğu bakış açısından uzaklaştırılmalı, veriyi özetleme, betimleme ve karşılaştırma gibi etkinliklere yönlendirilmelidirler. Ayrıca, bir 6. sınıf öğrencisinin de belirttiği gibi

öğrencilerin aritmetik ortalamasının algoritmasıyla erken tanıştırmaları ortalama ile ilgili problem durumlarında akıl yürütmelerine engel olmaktadır. Randall (2006) benzer eğilimleri üniversite öğrencilerinde de gözlemlemiştir. Randall öğretmenlerin merkezi eğilim ölçülerini öğretirken aritmetik ortalamasının tek ve en uygun merkezi eğilim ölçüsü olduğu mesajını vermemeye dikkat etmelerini vurgulamaktadır (2006, s. 19). Öğrencilerin içinde ortalama ifadesi geçen problemlerde aritmetik ortalama algoritmasını kullanma eğilimleri başka çalışmalarda da ortaya çıkmıştır. Yıldırım (2006) PISA 2003’de sorulan matematik sorularının yanlışlığını araştırırken, içinde “ortalama olarak” ifadesi geçen fakat aritmetik ortalama algoritmasını kullanmayı gerektirmeyen bir soruda Türk öğrencilerinin başarısız olduklarını tespit etmiştir. Yıldırım bu başarısızlığın nedenini, problemin içinde ortalama ifadesinin bulunması nedeniyle, Türk öğrencilerinin aritmetik ortalamayı hesaplamaya çalışmış olmalarıyla açıklamaktadır.

Ayrıca, öğrencilerin ortalamasının kavramsal anlamını geliştirebilmeleri için sınıflarda yapılan etkinlikler sadece ortalamasının doğru hesaplanması üzerinde durmamalı, gerçek verilerle veriyi özetleme, betimleme ve karşılaştırma yapma fırsatları sağlamalıdır. Öğrenciler belli bir veri grubunu betimlerken, o veri grubunu en iyi şekilde temsil eden değeri bulmaya ve bunu bulurken verinin hangi özelliklerinden yararlandıklarını açıklamaya teşvik edilmelidirler. Sınıf içinde kullanılan veri grupları farklı dağılım özellikleri göstermeli ve öğrenciler bu dağılım özelliklerinin ortalamayı nasıl etkilediğini, hangi ortalamasının en uygun olduğunu incelemeli ve tartışmalıdırlar. Öğrencilerde bu becerileri geliştirebilmek için öğretmenler de bu yönde hazırlanmalıdırlar.

Bu araştırmada elde edilen bulgulardan ortaya çıkarılacak bir diğer önemli sonuç ise öğrencilerin tablo ve grafik okuma becerilerinin yetersiz olmasıdır. Öğrencilerin tablo ve grafik şeklinde sunulan sorularda diğer sorulara göre daha çok zorlandıkları gözlenmiştir. Öğretmenler matematik öğretimlerinde farklı temsil biçimlerini kullanmalı ve öğrencilerini bu yönde desteklemelidirler.

KAYNAKÇA

- Cai, J. (2000). Understanding and Representing the Arithmetic Averaging Algorithm: An Analysis and Comparison of US and Chinese Students’ Responses, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31, 839-855.
- Jones, G., Thornton, A., Langrall, W., Mooney, S., Perry, B., & Putt, J. (2000). A Framework for Characterizing Children’s Statistical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 2 (4), 269-307.
- Leavy, A.M. & Middleton, J.A. (2001, April). Middle Grade Students Understanding of the Statistical Concept of Distribution. American Educational Research Association Annual Conference in Seattle, Washington, USA.
- Leavy, A.M. & O’Loughlin, N. (2006). Preservice Teachers Understanding of the Mean: Moving Beyond the Arithmetic Average, *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 53-90.
- Mevarech, Z. (1983). A deep structure model of students’ statistical misconceptions, *Educational Studies in Mathematics*, 14, 415-429.
- Milli Eğitim Bakanlığı, (1998). İlköğretim Okulu Matematik Dersi Öğretim Programı, “6. 7., 8. sınıflar”. Ankara. National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: VA.
- Pollatsek, A., Lima, S. & Well, A.D. (1981). Concept or computation: Students’ understanding of the mean, *Educational Studies in Mathematics*, 12, 191-204.
- Randall, G. (2006). An Exploration of Students’ Statistical Thinking. *Teaching Statistics*, 28(1), 17-21.
- Mokros, J. & Russell, S. (1995). Children’s Concepts of Average and Representativeness, *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 20-39.
- Şimşek, H. ve Yıldırım, A. (2006). *Nitel Araştırma Yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Watson, M. & Moritz, J. (2000). The Longitudinal Development of Understanding of Average, *Mathematical Thinking and Learning*, 2(1&2), 11-50.
- Yıldırım, H. H. (2006). *The Differential Item Functioning (DIF) Analysis of Mathematics Items in the International assessment Programs*. Yayımlanmamış Doktora Tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara.

EK

Görüşme Soruları:

Günlük yaşamda ortalama kelimesiyle karşılaştın mı?

- (evet karşılaştımsa cevap) Nerelerde karşılaştın? Örnek verir misin?
- “ortalama insan” ifadesinden ne anlıyorsun?

1. Problem

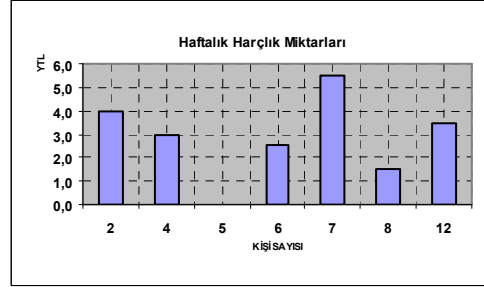
Yandaki gazete haberi 27.09.2007 tarihinde radikal gazetesinde yayınlanmıştır.

- Bu haberde belirtilen ortalama yolculuk süresi 30 dakikadan ne anlıyorsun?
- Sence bu haberdeki “ortalama” kelimesi ne anlama gelmektedir? Bunu nasıl hesaplamış olabilirler?



2. Problem

- Grafikten ne anlıyorsun?
- Çocuklara en çok kaç yıl harçlık veriliyor?
- Bu grafiğe göre, çocukların aldığı ortalama haftalık harçlık kaç yıl dir?
- Ortalamayı belirlerken grafikte nelere dikkat ettin?



3. Problem

Güvenli bir şekilde bir asansöre binebilmek için sınır 10 kişidir ve bu 10 kişinin ağırlıkları toplamı en fazla 800 kg olmalıdır. Bu asansöre 10 kişi binecektir ve bu 10 kişiden 6'sı erkek, 4 ü kadındır. 6 erkeğin ağırlıklarının ortalaması 90 kg dır ve 4 kadının ağırlıklarının ortalaması ise 65 kg dir.

- Bu 10 kişi güvenle asansöre binebilir mi? Neden?
- Bu sonucu belirlerken nasıl bir yol izledin?
- Bu 10 kişinin ağırlıklarının ortalamasını bulabilir misin?
- 6 erkeğin ağırlıklarının ortalaması 90 kg ve 10 kişinin ağırlıkları toplam 800 kg derken ortalama ve toplam ifadelerinden ne anlıyorsun?

4. Problem

Bir etkinlik için 10 grup oluşturulmuştur. Her gruptaki ortalama öğrenci sayısı 11 dir. İlk iki grubun öğrenci sayısı verilmiştir.

- Her grupta ortalama 11 öğrenci olması için diğer gruptaki öğrenci sayısını bulabilir misin?
- Bu grupların hiçbirinde 11 öğrenci olmamak koşuluyla, gruptaki öğrenci sayısını bulabilir misin?

1. grup: 10 kişi
2. grup: 9 kişi
3. grup:
4. grup:
5. grup:
6. grup:
7. grup:
8. grup:
9. grup:
10. grup:

5. Problem

Yandaki tabloda 7 ay süresince bir kursa her ay kaydolun kişi sayısı verilmiştir. Bu tabloya göre

- Senelere göre, bu aylarda kursa kaydolun öğrencilerin ortalaması nedir?
- Ortalamayı işlem yapmadan tahmini olarak belirleyebilir misin? Bunu tabloyu kullanarak nasıl buldun?
- Tahmini olarak bu sonucu bulmada tabloda ne kolaylık sağladı?
- (Tahmini ortalamayı bulurken en az ve en yüksek katılıma bakıyorsa bu şıktaki soru öğrenciye sunulmuştur.) Her sene için ortalama bulurken, yalnızca en az ve en yüksek katılım olan aya bakmamız yeterli mi sence? Neden?

sene	1.ay	2.ay	3.ay	4.ay	5.ay	6.ay	7.ay
1996	77	71	80	75	73	79	77
1995	75	71	77	80	77	77	69
1994	79	71	74	79	77	73	72