Elementary Education Online, 6(1), 154-179, 2007.
İlköğretim Online, 6(1), 154-179, 2007. [Online]: http://ilkogretim-online.org.tr

The Effects of Different Correlation Types on Goodness-of-Fit Indices in First Order and Second Order Factor Analysis for Multiple Choice Test Data

Halil Yurdugül[1]

ABSTRACT: This study explores the effects of different correlation types (covariance and correlation matrix, obtained from Pearson, Goodman, and Tetrachoric) on goodness-of-fit indices in first order and second order factor analysis. The data included Math and Science subsets in Student Selection and Placement Examination for Secondary Education test administered in 2001 with the participation of 553108 students. A first-order and second-order confirmatory factor analyses were performed on the matrix from item scores obtained from several correlation coefficients. The findings indicate that when second order factor loadings (first order correlations) were equal, solutions with Pearson correlation coefficients yielded the most satisfactory goodness-of-fit. When second order factor loadings (first order correlations) were not equal, solutions with tetrachoric correlations yielded the most satisfactory goodness-of-fit.

Key Words: Confirmatory factor analysis, hierarchical factor analysis, correlation, covariance, fit indexes

SUMMARY

***Purpose and significance**:* The factor analysis based on correlation and/or covariance matrix. However, there are several ways of correlation and yielded differently. In this study, correlation matrices which obtained from Pearson, Goodman, and tetrachoric correlation formulas used for confirmatory factor analysis (CFA). The effects of different correlation types on goodness-of-fit indices and lack-of-fit indices in different confirmatory factor model were investigated. The models consist of unidimensionality first order factor model based on zero correlations, multidimensionality first order factor model based on zero correlations, and second order based on first correlations among items in a multiple choice test.

***Methods**:* In this study, the data, gathered from the SSPE-SE (Student Selection and Placement Examination for Secondary Education) in Turkey, was used. The SSPE-SE consists of 100 multiple-choice items, divided into four subtests: Turkish, mathematics, sciences, and social sciences. Each subtest consists of 25 items. In the present study, the data was gathered from 553108 pupils and the math and sciences subtests of SSPE-SE carried out in 2001 were utilized. The sciences subtest measures had three sublatents (problem solving, using scientific methods, and biology). Also, the math subtest measures included five sublatents (computational, verbal problem, geometry, etc.). It was constituted three factor models by using the covariance matrix and correlation matrices as dichotomous data. These data were obtained from Pearson, Goodman, and tetrachoric correlations. The factorial models consist of a) unidimensionality first order factor model, b) multidimensionality first order factor model, and c) second order based on first correlations among items in a multiple choice test. In next step, the models were tested with CFA and were compared to its goodness-of-fit indices and lack-of-fit indices, which included chi-square values, GFI, RMSEA, SRMR values according to absolute fit indices and CFI, NRI values according to relative fit indices.

[1] Halil Yurdugül, Ph. D. Hacettepe University, Faculty of Education. yurdugul@hacettepe.edu.tr

Results: A total of 24 results from six factorial models and four different matrices were constructed. The goodness-of-fit and lack-of-fit indices were compared. The path diagrams of the models were presented in Appendix, and numerical results are displayed in the following table (See, Table 1).

	FIT Indices	Sciences Subtest			Math Subtest		
		Model I	Model II	Model III	Model I	Model II	Model III
Covariance	Min. fit Funtion	0,259	0,207	0,207	0,754	0,580	0,616
	Chi-Square	2988,916	2361,033	2361,033	7542,492	5795,675	6159,712
	GFI	0,977	0,981	0,981	0,922	0,938	0,935
	CFI	0,896	0,919	0,919	0,891	0,917	0,911
	NFI	0,885	0,908	0,908	0,888	0,914	0,909
	RMSEA	0,031	0,027	0,027	0,066	0,059	0,060
	SRMR	0,026	0,024	0,024	0,044	0,039	0,040
Pearson	Min. fit Funtion	0,255	0,204	0,204	0,758	0,581	0,618
	Chi-Square	2940,673	2324,208	2324,208	7578,345	5808,337	6176,599
	GFI	0,977	0,982	0,982	0,922	0,938	0,935
	CFI	0,898	0,921	0,921	0,890	0,917	0,935
	NFI	0,887	0,909	0,909	0,888	0,914	0,908
	RMSEA	0,030	0,027	0,027	0,066	0,059	0,060
	SRMR	0,026	0,024	0,024	0,044	0,039	0,040
Tetrachoric	Min. fit Funtion	0,855	0,674	0,674	0,205	0,155	0,165
	Chi-Square	10607,597	6742,834	6742,064	2045,859	1551,173	1647,370
	GFI	0,922	0,939	0,939	0,979	0,984	0,983
	CFI	0,841	0,876	0,876	0,935	0,952	0,949
	NFI	0,837	0,871	0,871	0,928	0,945	0,942
	RMSEA	0,061	0,054	0,054	0,032	0,028	0,029
	SRMR	0,044	0,041	0,041	0,026	0,023	0,023
Goodman	Min. fit Funtion	1,447	1,149	1,149	1,306	1,014	1,076
	Chi-Square	18343,754	14105,899	14105,900	13055,387	10142,836	10762,875
	GFI	0,872	0,899	0,899	0,870	0,895	0,890
	CFI	0,811	0,851	0,851	0,867	0,897	0,890
	NFI	0,808	0,848	0,848	0,865	0,895	0,890
	RMSEA	0,081	0,071	0,071	0,088	0,081	0,081
	SRMR	0,054	0,051	0,051	0,052	0,047	0,048

Model I: First order and unidimensional factor model
Model II: First order and multidimensional factor model
Model III: Secon order factor model

In sciences subtest, analyzing of models, include unidimensional first order, multidimensional first order, and second order, the goodness-of-fit indices and lack-of-fit indices based on Pearson correlation matrix and variance-covariance matrix are found to be approximately equal. The lowest goodness-of-fit value was obtained from Goodman correlation matrix. For each correlational matrix in four multidimensional first order and second order models showed almost equal results. However, these values were higher than unidimensional first order model. One reason for this is that multidimensional first order and second order models were more adequate with the nature of the datasets.

In Math subtest, the highest goodness-of-fit value was obtained from tetra choric correlation solutions. However, opposite to science subtest, in this set, multidimensional first order factor model gives more satisfactory indices compared to second order factor model in four different matrixes.

Discussion and Conclusions: The findings indicate that when second order factor loadings (first order correlations) were equal, solutions with Pearson correlation coefficients yielded the most satisfactory goodness-of-fit. When second order factor loadings (first order correlations) were not equal, solutions with tetra choric correlations yielded the most satisfactory goodness-of-fit. Therefore, in solving nth order factorial loadings (n-1), researchers are cautioned to consider order correlations and their importance.

Çoktan Seçmeli Test Sonuçlarından Elde Edilen Farklı Korelâsyon Türlerinin Birinci ve İkinci Sıralı Faktör Analizlerindeki Uyum İndekslerine Etkisi

Halil Yurdugül[2]

ÖZ. Bu çalışmada, ikili derecelendirilmiş çoktan seçmeli ölçme sonuçlarından elde edilen kovaryans ve korelasyon matrislerinin birinci ve ikinci sıralı doğrulayıcı faktör analizlerindeki sonuçların model uyumlarına etkisi araştırılmıştır. Bu nedenle; 553108 öğrencinin katıldığı Ortaöğretim Kurumları Öğrenci Seçme ve Yerleştirme Sınavı (2001)'nda yer alan matematik ve fen bilimleri alt testi ele alınmıştır. Madde puanlarından elde edilen veriler Pearson, Goodman ve tetrakorik korelasyon katsayıları ve maddeler arası kovaryans terimleri ile birinci sıralı ve ikinci sıralı modellerin doğrulayıcı faktör çözümlemesi yapılmıştır. Elde edilen sonuçlara göre ikinci sıralı faktör yükleri (birinci sıralı korelasyonlar) eşit olduğunda Pearson korelasyon katsayısına dayalı çözümler en iyi uyumu vermiştir. İkinci sıralı faktör yükleri (birinci sıralı korelasyonlar) eşit olmadığında ise tetrakorik koreslayona dayalı çözümler en büyük uyum değerlerini vermiştir.

Anahtar Sözcükler: Doğrulayıcı faktör analizi, hiyerarşik faktör analizi, korelasyon, kovaryans, uyum indeksleri

GİRİŞ

Öğrencilerin çoktan seçmeli test maddelerine verdikleri yanıtlar ya da bir diğer ifade ile öğrencilerin başarı puanları, test ile ölçülmek istenilen özelliğin bir fonksiyonudur, $X_i=f(T_i)$, ve öğrencilerin bu özelliğe sahip olma derecesine göre farklılık gösterir. Bu fonksiyonu doğrusal bir bağıntı olarak ele alan klasik test kuramına (classical test theory) ilişkin modelin çözümlenmesinde Spearman (1904) maddeler arası korelasyon yöntemini kullanarak faktör analizini geliştirmiştir. Faktör analizi genel olarak maddeler arası kovaryans ya da korelasyon değerleri üzerine kuruludur. Değişkenler arasındaki korelasyon çözümlemesindeki en önemli varsayımlar normallik ve doğrusal ilişki varsayımıdır. Ancak değişkenler kategorik bir yapıya sahip olduğunda özellikle normallik varsayımı bozulmaktadır. Kategorik değişkenler (categorical variables) arasındaki korelasyon değerlerini elde edebilmek için geliştirilmiş çok sayıda korelasyon katsayısı söz konusudur (Agresti, 1984).

Özellikle çoktan seçmeli test maddelerine ilişkin gözlenen puanlar 0 ve 1 şeklinde iki kategorili (dichotomous) veriler olduğu için kullanılabilecek korelasyon matrisleri Pearson korelasyon katsayısı (Pearson çarpım moment), tetrakorik korelâsyon katsayısı, phi korelâsyon katsayısı ya da parametrik olmayan yöntemlerle elde edilen korelâsyon katsayılarından elde edilmektedir. Ancak farklı korelasyon katsayılarının farklı sonuçlar vermesinden dolayı bu katsayılardan elde edilen sonuçlarda, faktör analizi sonuçlarını etkilemektedir.

Bu çalışmada 2001 yılında uygulanan Ortaöğretim Öğrenci Seçme ve Yerleştirme Sınavı'ndaki matematik ve fen alt testlerinin her birinde yer alan 25 maddeye ilişkin öğrencilerin verdikleri yanıtlar ele alınmış ve bu ikili derecelenmiş ölçme verilerinden Pearson korelasyon katsayısı, tetrakorik korelasyon katsayısı ve Goodman korelasyon katsayıları elde edilmiştir. Birinci sıralı-tekboyutlu, birinci sıralı-çokboyutlu ve ikinci sıralı-hiyerarşik doğrulayıcı faktör analitik modelleri kurularak bu modellerin öncelikle verilerin kovaryans terimlerine göre çözümlemesi yapılmış; çalışma kapsamına alınan korelasyon matrisleri ile aynı çözümlemeler yapılarak uyum iyiliği ve uyum eksikliği indeksleri karşılaştırılmıştır.

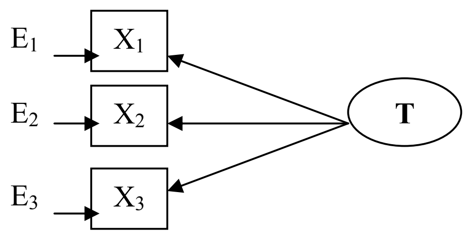
[2] Dr. Halil Yurdugül, Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Fakültesi. E-Posta: yurdugul@hacettepe.edu.tr

Ölçme Modellerinin Çözümlenmesi: Faktör Analizleri

Çalışmanın bu aşamasında birinci ve ikinci sıralı faktör analitik modellerinin tanımına yer verilmiştir.

Birinci Sıralı Açıklayıcı Faktör Analitik Modelleri

Ölçme modelleri, madde-yapı bağıntılarını kapsayan doğrusal modellerdir ve bu modellerin çözümlenmesi ile gözlenen puanlardan yararlanılarak ölçülmesi düşünülen gerçek puanların kestirilmesi amaçlanmaktadır.



Çizim 1: Ölçme modeli

Bu yaklaşım için genellikle klasik test kuramından yararlanılmaktadır. Klasik test kuramı, gözlenen puanların (X), gerçek puanlar (T) ve hata puanları (E) arasındaki bağıntıyı doğrusal regresyon modeli ile açıklayan bir modeldir.

$$X=T+E \qquad (1)$$

Bu regresif model, bağımsız değişkenlerin bilinmemesinden dolayı hipotetik bir yapıdadır (Lord & Novick, 1968) ve çözümlenmesi zordur. Bu nedenle paralel ölçmelere ihtiyaç vardır (DeVellis, 1991; Lord & Novick, 1968). Spearman (1904) paralel ölçmelerden oluşan bu modelin çözümlenmesi için *açıklayıcı faktör analizini* (exploratory factor analysis) geliştirmiştir.

$$\mathbf{Z}=\Lambda F+\mathbf{E} \qquad (2)$$

$$\mathrm{Var}(\mathbf{Z})=\mathbf{h}^2+\mathbf{e}^2$$

$$\mathrm{Var}(\mathbf{Z})=1 \rightarrow \quad 1=\mathbf{h}^2+\mathbf{e}^2$$

Burada **Z**, *n* adet gözleme ilişkin, *n*x1 boyutlu standartlaştırılmış gözlenen puanlar matrisini, Λ, *k* adet değişkene/maddeye ve bu maddelerin yöneldiği *m* adet yapıya ilişkin *k*x*m* boyutlu standartlaştırılmış faktör yükleri matrisini, *F* ortak faktörü ve **E** ise köşegen tekil (unique) matrisini göstermektedir. Spearman'ın (1904) bu yaklaşımında iki ayrı nokta ön plana çıkmaktadır. Bunlardan ilki; Eşitlik 1 ile verilen modelin çözümlenmesi için aynı yapıyı aynı duyarlılıkta ölçen "paralel" ölçmelere ihtiyaç duyulmasıdır. Diğeri ise, kullanılan yöntemin standartlaştırılmış gözlenen puanları kullanmasıdır. Bu standartlaştırma işlemi nedeniyle varyans-kovaryans matrisi (Σ), korelasyon matrisine (Θ) dönüşmektedir.

$$\Sigma=\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & & \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & & & \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \sigma_{k1} & \sigma_{k2} & \sigma_{k2} & \cdots & \sigma_k^2 \end{bmatrix} \qquad \Theta=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \rho_{21} & 1 & & & \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \rho_{k1} & \rho_{k2} & \rho_{k2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Burada σ_{ij}, i. ve j. maddeler arasındaki kovaryansı, ρ_{ij} ise bu maddeler arasındaki korelasyonu göstermektedir. Standartlaştırma işlemi sonucu gözlenen puanlar varyansı (matrisin köşegen elemanları) 1'e indirgenmektedir (Ek 1).

Birinci Sıralı Doğrulayıcı Faktör Analitik Modelleri

Jöreskog (1971) ise kovaryans yapı analizi (covariance structural analysis) yöntemini kullanarak *doğrulayıcı faktör analizini* (confirmatory factor analysis) geliştirmiştir[3].

$$\mathbf{X}-\mu=\Lambda \boldsymbol{F}+\mathbf{E}$$

$$\mathbf{X}=\mu+\Lambda \boldsymbol{F}+\mathbf{E} \tag{3}$$

$$\mathrm{Var}(\mathbf{X})=\Sigma=\Lambda\Phi\Lambda'+\Psi \tag{4}$$

Burada $\mathbf{\Phi}$, yapılar (faktörler) arasındaki mxm boyutlu varyans-kovaryans matrisini, Λ, faktör yükleri matrisini (kxm), $\mathbf{\Psi}$ ise hata terimleri kovaryans matrisini göstermektedir (Lucke, 2005). Eşitlik 3 ile verilen ifade doğrulayıcı faktör analizine karşılık gelmektedir ve çözümlenmesi için varyans-kovaryans matrisi ($\mathbf{\Sigma}$) kullanılmaktadır (Lord & Novick, 1968; Lucke, 2005; McDonald, 1985, 1999). Eşitlik 4 ile modelin varyans ifadesindeki $\mathbf{\Phi}$ matrisinin rankı 1 ise bu durumda ölçme kümesi tekboyutlu (unidimensionality) yani homojen, aksi halde çokboyutlu (multidimensional) yani heterojen ölçmeleri ifade etmektedir (Cortina, 1993; Lucke, 2005).

Doğrulayıcı faktör çözümlemesinin en önemli yanı kestirilen ölçme modellerinin tutarlılığının istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığının test edilebilmesidir. Açıklayıcı faktör çözümlemesinin en önemli olumsuzluğu ise, kestirilen ölçme model(leri)nin anlamlılığının test edilememesidir. Bunun temel nedenlerinde birisi; test istatistikleri ölçme sonuçlarının varyans-kovaryans terimleri üzerine kurulu olması ve açıklayıcı faktör analizinde bu değerlerin yapay şekilde yok edilmesi gösterilebilir (Cudeck, 1989). Bu nedenden dolayı, açıklayıcı faktör analizlerinin çözümlenmesi ile elde edilen özdeğerlerin (eigenvalue) üzerine bazı test istatistiklerinin geliştirilmiş olmasına karşın bu istatistikler büyük örneklemlerde çok kullanışlı değildir (Tabachnick & Fidel, 1996).

Diğer yandan açıklayıcı faktör çözümlemesi standartlaştırılmış sonuçlar içerdiği için elde edilen faktör yükleri ($\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$) aynı zamanda madde-faktör arasındaki korelasyon değerlerini vermektedir. Doğrulayıcı faktör analizindeki (standartlaştırılmamış) faktör yükleri ise birinci sıralı faktör modellerinde madde-faktör bağıntısına ilişkin regresyon katsayılarını içermektedir (Zinbarg vd., 2005). Bunun yanı sıra kovaryans terimlerinden elde edilen standartlaştırılmamış faktör yüklerini kullanarak maddeler arası (kestirilmiş-estimated) varyans-kovaryans matrisini "yeniden" elde etmek olanaklıdır. Bu ise maddelere ilişkin standartlaştırılmamış faktör yüklerinin çarpımları ile elde edilmektedir (Jöreskog, 1971, McDonald, 1999; Yurdugül, 2005).

$$\sigma_{ij}=\lambda_i\lambda_j \tag{5}$$

$$\sigma_i^{\,2}=\lambda_i\lambda_i \tag{6}$$

Bu durumda veri kümesinden elde edilen varyans-kovaryans matrisinin ($\mathbf{\Sigma}$) yanı sıra faktör yüklerinin kullanılmasıyla kestirilmiş varyans-kovaryans matrisini (**S**) elde etmek olanaklıdır.

[3] Standartlaştırılmamış faktör çözümlenmesini kuramsal olarak ölçme modelleri için ilk öneren Lord ve Novick (1968, sayfa: 333)'tir. Jöreskog (1971) ise bu modelin kestirilmesi için kovaryans yapı analizini geliştirmiştir.

$$S = \begin{bmatrix} (\lambda_1)^2 & & & & \\ (\lambda_2\lambda_1) & (\lambda_2)^2 & & & \\ (\lambda_3\lambda_1) & (\lambda_3\lambda_2) & (\lambda_3)^2 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ (\lambda_k\lambda_1) & (\lambda_k\lambda_2) & (\lambda_k\lambda_3) & \cdots & (\lambda_k)^2 \end{bmatrix}$$

Tekboyutlu ölçeklerde Φ=1 olduğu için Eşitlik 4 ile verilen ifadeye göre $\Sigma=\Lambda\Lambda'$ eşitliğine ulaşılmaktadır. Bu yaklaşım örnekleme dayalı istatistiksel bir kestirim olduğu için Ψ terimi ihmal edilmektedir.

Çok boyutlu ölçeklerde, $\Phi\neq1$, ise Φ matrisi birinci sıralı faktör analizinden elde edilen faktörler arasındaki varyans-kovaryans terimini göstermektedir. Bu durumda faktör yüklerinden varyans-kovaryans değerlerini tekrar elde edebilmek için Eşitlik 5 yerine;

$$\sigma_{ij} = \lambda_i\lambda_j\phi$$

eşitliği kullanılır (Byrne, 1998, Jöreskog, 1974, Lucke, 2005).

<u>İkinci Sıralı Doğrulayıcı Faktör Analitik Modelleri</u>

Eşitlik 3 ile verilen faktör analitik modeli madde-yapı üzerine kurulu ölçme modellerini içerdiği için birinci sıralı faktör modeli olarak adlandırılmaktadır (Byrne, 1998, Kline, 1998). Eğer Eşitlik 4 ile verilen ifadede Φ matrisinin rankı 1'den büyük, r(Φ)>1 ise ölçme modellerinin heterojen (çokboyutlu) olması nedeniyle birden fazla faktör (m>1) çözümü söz konusu olacaktır. Bu durumda **G**, ikinci sıralı faktörleri ve Γ ise birinci sıralı faktörlerin ikinci sıralı faktör üzerindeki faktör yükleri matrisini göstermek üzere, ikinci sıralı faktör analitik modeli,

$$\mathbf{F}=\Gamma \boldsymbol{G}+\varepsilon \qquad (7)$$

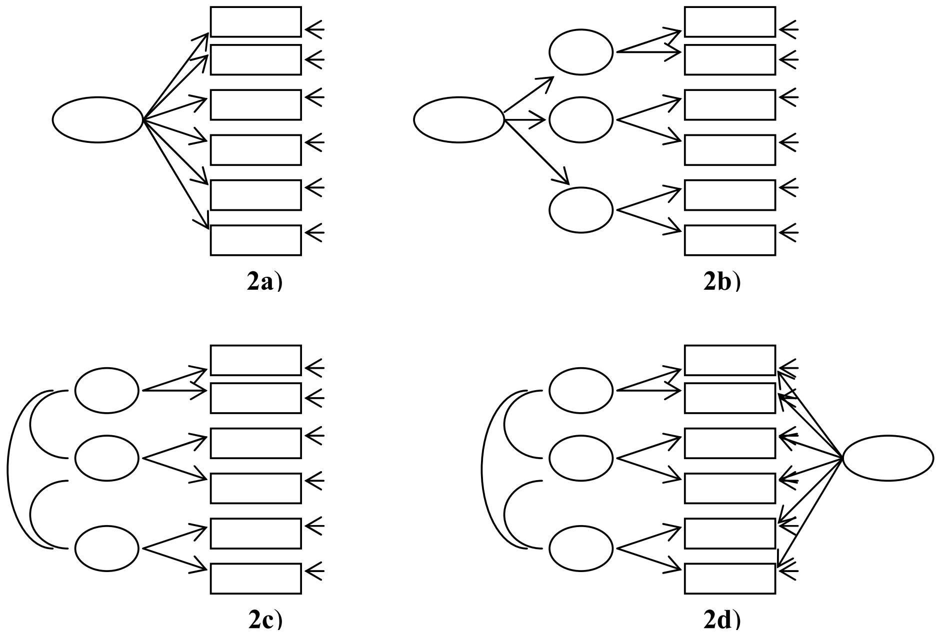
ve bu modelin varyans-kovaryans matrisi ise;

$$\Sigma^{(2)}=\Lambda(\Gamma\Phi\Gamma' + \Psi)\Lambda' + \theta$$

biçimindedir (Rindskopf ve Rose, 1988; Zinbarg vd, 2005).

Çokboyutlu ölçeklerde, ölçme aracı ile ölçülmesi düşünülen genel yapıyı belirlemek amacıyla hiyerarşik faktör analizinden yararlanılır. Birinci sıralı (first-order) faktör çözümlemesinden elde edilen faktörler "gerçek puan" (true score) değişkenleri olarak ele alınır ve ikinci defa (second order) faktör analizine tâbii tutulurlar. Aşamalı olarak devam eden bu işlem hiyerarşik faktör analizi olarak adlandırılır (Kline, 1998; Byrne, 1998). Hiyerarşik faktör analizi, özellikle ölçme aracının yapı geçerliğini ortaya koymakta ideal bir yapıdır (Béland & Maheux, 1989; Byrne, 1998).

Rindskopf ve Rose (1988), doğrulayıcı faktör modellerini Çizim 2'deki gibi 4 grupta ele almaktadır. Bunlar sırasıyla; tek faktör (one-factor) modeli (2a), grup faktör (group modeli (2c), ikinci sıralı faktör modeli (2b) ve iki-faktör modeli (bi-factor)(2d). Bu yaklaşımda birinci sıralı faktör modelleri "birinci sıralı-tekboyutlu" (2a) ve "birinci sıralı-çokboyutlu" faktör modelleri (2c) şeklinde ele alınmış ve adlandırılmıştır. Bu çalışmada da benzer bir sınıflama yapılmış ve birinci sıralı-tekboyutlu (2a), birinci sıralı-çokboyutlu (2c) ve ikinci sıralı-hiyerarşik (2b) modelleri kurulmuştur. Ancak iki-faktör modeli (2d) çalışma kapsamı dışında bırakılmıştır.



Çizim 2: Doğrulayıcı faktör modellerinin şematik yapıları

Hiyerarşik faktör çözümlemeleri, açıklayıcı faktör analitik modellerinin terimlerinden de elde edilebilmektedir. Ancak bunun için birinci sıralı faktör çözümlemelerinde dik döndürmeler yerine eğik döndürmelerde gerekmektedir. Dik döndürmeler (orthogonal rotations) birinci sıralı faktörler arasındaki 90 derecelik döndürmelerdir ve bu yöntem faktörler birbirlerine göre dik konuma getirildiği için faktörler arasındaki ilişkiler yok edilmektedir (Comrey & Lee, 1992; Pohlmann, 2004). Hiyerarşik faktör çözümlerine ulaşabilmek için eğik döndürmelere (oblique rotations) ihtiyaç vardır.

Faktör Analitik Modellerin Uyum İyiliği ya da Uyum Eksikliği

İstatistiksel doğrusal modellerin kestirilmesi kadar bu kestirilen modellerin istatistiksel anlamlılığının test edilmesi de önemlidir. Doğrulayıcı faktör çözümlemesinde, varyans-kovaryans matrisinin kestirilmesi aynı zamanda **Σ-S** farklılığı ile kestirimin tutarlılığını test etme olanağı da sağlamaktadır (McDonald, 1985, 1999). Bu durum, doğrulayıcı faktör analizinin temel yaklaşımı olan ve hipotetik olarak önceden kurulmuş ölçme modellerinin test edilmesini gündeme getirmektedir. Bu amaca yönelik olarak ki-kare (chi-square) dağılımı gösteren **Σ-S** farklılığı üzerine kurulu birçok ölçüt geliştirmiştir[4]. Bu ölçütlerin bir kısmı yokluk (null) hipotezi (Widaman & Thompson, 2003);

H_0: **Σ=S**

üzerine kurulu (merkezi) ki-kare dağılımını kullanırken diğerleri ise ki-kare'nin serbestlik derecesine oranına yönelik katsayılar olarak geliştirilmişlerdir.

$$\chi^2 = (N-1)(S-\Sigma) \tag{8}$$

Serbestlik derecesi= $\frac{1}{2}[p(p+1)]-k$

[4] Bu ölçütlerden bir kısmı merkezi ki-kare (central chi-square) diğerleri merkezi olmayan ki-kare (noncentral chi-square) dağılımı üzerine kuruludur. Merkezi olmayan ki-kare dağılımına ilişkin bilgiler Ek 2'de verilmiştir.

Doğrulayıcı faktör analitik modellerin kestirilmesinde yaygın bir şekilde ençok olabilirlik kestirim, EOK, (maximum likelihood estimation) yöntemi kullanılmaktadır. Bununla birlikte bu modellerin kestirim sonuçlarının geçerliği ise yine ki-kare test istatistiği ile test edilmektedir. Ençok olabilirlik fonksiyonu (EOF), (**Σ-S**) farklılığı yerine minimum ençok olabilirlik uyum fonksiyonunu;

$$F_{min} = \ln\left|\mathbf{S}\right| - \ln\left|\mathbf{\Sigma}\right| + iz(\mathbf{S\Sigma})^{-1} - k \qquad (9)$$

minimize etme ilkesi üzerine kuruludur. Burada iz( ) ifadesi (trace) parametre olarak ifade edilen matrisin köşegen toplamlarını göstermektedir. Minimum ençok olabilirlik fonksiyonu (F_{min}) ki-kare dağılımı gösterir ve çoklu normal dağılım varsayımına dayalıdır (Reise & Widaman, 1999). Ancak ki-kare test istatistiği örneklem genişliğine bağlı olarak tutarsız sonuçlar verebilmektedir (Hayduk, 1996, Hair vd., 1998; Hoelter, 1983; Tabachnick & Fidel, 1996). Oysaki faktör çözümlemeleri büyük örneklem genişlikleri gerektirdiği için (Comrey & Lee, 1992, Tabachnick & Fidel; 1996) bu durumlarda ki-kare test istatistiği yerine birçok alternatif ölçüt geliştirilmiştir. Ki-kare değerlerinin örneklem genişliklerine yönelik duyarlılığını gidermek için ki-kare değerlerinin serbestlik derecelerine bölünerek yapay bir şekilde standartlaştırılması yöntemine gidilmiştir (Hoelter, 1983). Bu ölçütler ölçme modellerinin kestirilmesi ve test edilmesi ilkesiyle çalışan doğrulayıcı faktör çözümlemelerinde söz konusudur. Aynı zamanda bu ölçütler uyum iyiliği (goodness-of-fit) ve uyum eksikliği (lack-of-fit) olarak iki farklı yapı da olabilmektedir (Mulaik vd., 1989).

Doğrulayıcı faktör analizinde kullanılan uyum indeksleri (goodness fitting) ve uyum eksikliği (lack of fitting) üzerine çok çeşitli çalışma söz konusudur. Bununla birlikte uyum indeksi ve/veya uyum eksikliği indeksi olarak geliştirilmiş 30'dan fazla indeks bulunmaktadır (Marsh, Balla & McDonald, 1988). Ancak bu indeksler her zaman birbirleriyle tutarlı sonuçlar vermediğinden dolayı "en iyi uyum indeksi" konusunda görüş ayrılıkları vardır (Thompson & Daniel, 1996). Bu nedenle model kestirimi içeren çalışmalarda Jaccard ve Wan (1996) en az 3 indeksin, Kline (1998) ise en az 4 indeksin rapor edilmesi gerektiğini vurgulamaktır. Steiger (1990) ise "en iyi uyum katsayı" diye bir kavramın olmadığını ifade etmektedir.

Bu tür indeksler uyum ya da uyum eksikliği indeksleri gibi iki farklı sınıfta ele alınabileceği gibi, ilgili literatürde daha yaygın bir sınıflama söz konusudur. Bu konudaki en temel sınıflamaya göre uyum ve uyum eksikliği indeksleri 2 kategoride ele alınmaktadır; (a) mutlak uyum indeksleri (absolute fit indexes), (b) artan ya da göreli uyum indeksleri (incremental or relative fit indexes) (Widaman & Thompson, 2003; Yuan, 2005).

Mutlak Uyum İndeksleri

Bu kategorideki ölçütler; tüm ölçme modeline yönelik olarak Eşitlik 9 ile verilen uyum fonksiyonu üzerine kuruludur. Bu fonksiyondaki, verilerden elde edilen varyans-kovaryans (**Σ**) matrisleri ile Eşitlik 5 ve Eşitlik 6'da verilen ilişkiler ile kestirilen varyans-kovaryans (**S**) matrisleri tüm maddelerden/değişkenlerden elde edildiği için bu tür indeksler kestirilen tüm modelin tutarlılığını göstermektedir (Hair vd, 1998). Bu kategoride yer alan ve sıkça kullanılan uyum ölçütleri; ki-kare (χ^2), uyum iyiliği indeksi (goodness of fit index-GFI), Yaklaşıklık Hata Kareler Ortalaması Karekökü, YHKOK (root mean square error of approximation, RMSEA) ve Hata Kareler Ortalaması Karekökü, HKOK (root mean square residual, RMR) ve standartlaştırılmış HKOK ölçütleri ifade edilmektedir.

Göreli Uyum İndeksleri

Mutlak uyum indeksleri Eşitlik 9 ile verilen uyum fonksiyonu üzerine kuruludur ve kestirilen (Eşitlik 5 ve Eşitlik 6) varyans-kovaryans matrisi ile verilerden elde edilen varyans-kovaryans matrisi arasındaki tutarlılığı ifade eder. Göreli uyum indekslerinde ise **Σ-S** ilişkisi yerine $\mathbf{S}$-$\mathbf{S}_0$ ilişkisi test edilmektedir (Hoelter ,1983; Mulaik vd, 1989; Widaman & Thompson, 2003 Yuan, 2005). Burada $\mathbf{S}_0$, yapısal değişkenleri 0 olan "yokluk (null)" model olarak adlandırılan bir modeldir ve amaç modelin (target model) kovaryans matrisi (**S**) ile $\mathbf{S}_0$ matrislerinin karşılaştırma ilkesine dayanır. Yokluk (null) modelin tüm kovaryans değerlerin 0'dır (Ogasawara, 2001). Bu kategoride ele alınan uyum indeksleri;

göreli uyum indeksi, GUİ, (comparative fit index, CFI), normlaştırılmış uyum indeksi, NUİ, (normed fit index, NFI).

İkili Derecelenmiş Veriler İçin Korelâsyon Katsayıları

Kovaryans terimi, iki değişkenin birlikte değişimlerine ilişkin bir ölçü olarak tanımlanır (Tabachnick & Fidel, 1996). Bununla birlikte eğitim bilimlerindeki ölçme çalışmalarında maddelerin birlikte değişimi, ölçme araçlarının içtutarlılığı (internal consistency) ve tekboyutluluğu (unidimensional) için gerekli bir koşul olduğundan dolayı yaygın bir kullanıma sahiptir[5]. İçtutarlılık maddeler arasındaki fonksiyonel bağıntıyı açıklar iken, kovaryans ya da korelasyon matrisinin rankının 1, $r(\Phi)=1$, olması ise tekboyutluluğu bir diğer ifade ile maddelerin homojenliğini ifade etmektedir (Cortina, 1993).

Kovaryanslar, çoktan seçmeli maddelere ilişkin puanlardan elde edilirler.

$$\sigma_{ij}=\pi_{ij}-\pi_i\pi_j$$

Burada σ_{ij}, i. ve j. maddeler arasındaki kovaryansı, π_i ve π_j, maddelerin güçlük indekslerini (madde ortalamaları) ve π_{ij} ise her iki maddeyi doğru yanıtlayan öğrencilerin ortalamasını göstermektedir. Korelâsyonlar ise kovaryansların standartlaştırılmış (-1 ve 1 tanım aralığına indirgenmiş) biçimidir (McDonald, 1999).

$$\rho_{ij}=\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i\sigma_j}$$

Bu ifade aynı zamanda Pearson korelâsyon katsayısına karşılık gelir.

Bununla birlikte çoktan seçmeli maddelere ilişkin korelâsyonlar 2x2 boyutunda olumsallık çizelgelerinden (contingency table) elde edilirler.

Tablo 1: i. ve j. maddeler için 2x2 boyutlu olumsallık çizelgesi

		***i.* madde**		
		0 (Yanlış Yanıt)	**1** (Doğru Yanıt)	*Toplam*
***j.* madde**	**0** (Yanlış Yanıt)	A	B	**A+B**
	1 (Doğru Yanıt)	C	D	**C+D**
	Toplam	**A+C**	**B+D**	**N**

Korelasyon, değişkenler arasındaki ilişkinin miktarı olarak ele alındığından dolayı değişkenlerin yapısına ilişkin olarak çok sayıda korelâsyon katsayısı geliştirilmiştir. Olumsallık çizelgelerinde yer alan sıralayıcı-kategorik değişkenler (ordinal categorical variables) ve sınıflayıcı-kategorik (nominal categorical variables) için Pearson korelasyon katsayısı (R), Spearman korelasyon katsayısı (R_S), Kendall'ın tau (τ) kaysayısı, Goodman (R_G) katsayısı, Yule'un Q katsayısı bunlara örnektir (Agresti, 1984).

Bunun yanı sıra; özünde sürekli değişken olmasına karşın yapay şekilde kategorik yapıya dönüştürülen ve 2x2 boyutlu olumsallık çizelgelerinde ifade edilebilen değişkenler için aynı zamanda tetrakorik korelasyon katsayısı mevcuttur. Tetrakorik korelasyon katsayısı, iki değişkenli normal dağılıma (bivariate normal distribution) sahip değişkenler arasındaki ilişkiyi göstermek için kullanılır (Lord & Novick, 1968). Davranış bilimlerinde ölçülmesi amaçlanan yapılar genellikle sürekli (continue) bir yapıya sahip oldukları için yapısal eşitlik modellerinde yaygın bir kullanım alanına sahiptir. Diğer korelasyon katsayılarının aksine Pearson katsayısı ile birlikte tetrakorik korelasyon katsayısı doğrusal ilişkilere dayalı olması nedeniyle (Bonett & Price, 2005) faktör analizinde sıkça kullanılmaktadır. Ancak değişkenler normal dağılımdan uzaklaştıkça tetrakorik korelasyon katsayısı da yanlılık göstermektedir (Greer, Dunlap & Beatty, 2003).

---

[5] Ölçme kümesinin tekboyutluluğu, özellikle klasik test kuramında ve madde-yanıt kuramında (item-response theory) önemli bir yere sahiptir.

Korelasyon katsayısı olarak adlandırılmamasına karşın iki maddenin fonksiyonu şeklinde ifade edilebilecek odds oranı (odds ratio) terimi maddeye verilen yanıtların değişimini gösteren bir ölçüt olarak ele alınmaktadır (Agresti, 1984).

$$\Omega = \frac{A.D}{B.C}$$

2x2 boyutlu olumsallık çizelgelerinden elde edilen korelasyon katsayıları arasında ilişkiler söz konusudur. Bunlar sırasıyla; τ=R=R_S ilişkisidir. Diğer taraftan R_G=Q iken R_G katsayısı aynı zamanda odds oranlarının bir fonksiyonudur (Agresti, 1984).

$$R_G = \frac{\Omega - 1}{\Omega + 1}$$

Korelasyon katsayılarının kendi aralarındaki fonksiyonel bağıntı nedeniyle (τ=R=R_S ve R_G=Q) bu çalışmanın kapsamına yalnızca Pearson korelasyon katsayısı (R), tetrakorik korelasyon ve Goodman'ın korelasyon katsayıları alınmıştır.

Bu çalışmada çoktan seçmeli test verilerinden elde edilen farklı korelasyon değerleri, üç farklı faktör modelinin çözümlenmesinde kullanılmış ve modellerin kestirimine ilişkin uyum ve uyum eksikliği indeksleri karşılaştırılmıştır.

YÖNTEM

Bu çalışmanın uygulama bölümünde 2001 yılında uygulanan Ortaöğretim Kurumları Öğrenci Seçme ve Yerleştirme Sınavı'nda yer alan matematik ve fen alt testi ele alınmış ve bu alt testteki 25'er maddeye ilişkin öğrenci yanıtları veri kümesi olarak kullanılmıştır. Sınava katılan 553108 öğrenci içerisinden basit rasgele (random) örnekleme yöntemiyle 10000 öğrenci yanıtları seçilmiş ve analizlerde kullanılmıştır.

Öncelikle bu veri kümesinden maddeler arası kovaryans matrisi ve sonra sırasıyla maddeler arası Pearson, Goodman, tetrakorik korelasyon katsayıları elde edilmiştir. Bunun yanı sıra Spearman ve Kendall tarafından geliştirilen korelasyon katsayıları hesaplanmasına rağmen Agresti (1984)'nin ifadesi ile paralel olarak bu katsayılar Pearson korelasyonları ile aynı sonuçlar ürettiği için kapsam dışı bırakılmıştır.

Uygulamanın sonraki aşamasında ise; (a) kovaryans ve korelasyon matrisleri üzerinden öncelikle fen ve matematik alt testleri tek boyutlu yapılar gibi ele alınarak birinci sıralı-tekboyutlu doğrulayıcı faktör analitik modelleri, (b) matematik ve fen bilgisi alt testleri farklı alt boyutlara göre birinci sıralı-çokboyutlu faktör analitik modelleri ve en son olarak birinci sıralı-çokboyutlu modeldeki faktörler üzerinden ikinci sıralı-hiyerarşik faktör modelleri kurularak bu modeller Lisrel 8.54 paket programı ile çözümlendi.

Her bir faktöriyel modelin çözümlenmesinden sonra elde edilen mutlak uyum ve uyum eksikliği indekslerinden ki-kare (χ^2), UİI (*GFI*), YHKOK (*RMSEA*) ve standart HKOK (*SRMR*) ile göreli uyum indekslerinden GUİ (*CFI*) ve NUİ (*NFI*) indeksleri gözlemlenmiştir. Sonuçlar çalışma kapsamında ele alınarak tartışılmıştır.

BULGULAR ve YORUMLAR

Bu çalışmada öğrencilerin çoktan seçmeli maddelere ilişkin gözlenen puanları üç farklı faktör modeline göre çözümlenmiştir.

<u>I. Model</u>

Çalışmanın uygulama bölümünde tüm maddeler tek bir genel yapıya yönelmiş olduğu varsayımı ile tekboyutlu madde-faktör ölçme modellerine dayana genel bir model kurulmuştur.

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_{25} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{25} \end{pmatrix} (F_1) + \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{25} \end{pmatrix}$$

Bu model, “birinci sıralı (tek faktörlü)” model olarak adlandırılmış ve modelin kestirimi için maddeler arası kovaryans matrisi ve korelasyon matrisleri (Pearson, tetrakorik, Goodman korelasyon katsayıları) kullanılmıştır.

II. Model

OK-ÖSYS’nda yer alan matematik alttestinin 5 ve fen bilgisi alt testinin ise 3 farklı beceriyi ölçtüğü varsayılmıştır. Bunlar; fen bilgisi alt testi için sırasıyla problem çözme, bilimsel yöntem ve biyoloji kapsamındaki öğrenme hedeflerinden oluşmaktadır (Berberoğlu, Kaptan ve Kutlu, 2005). Matematik alt testindeki maddeler ise işlemsel, sözel problem, geometri, düzlemsel ve görsel beceriler olarak gruplandırılmıştır. Bu nedenle 25 maddeye ilişkin çok faktörlü modeller kurulmuştur. Çalışmadaki II. Model türünü bu birinci sıralı-çokboyutlu faktörler oluşturmaktadır.

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_{25} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} \\ \vdots \\ \lambda_{2,1} \\ \vdots \\ \lambda_{3,1} \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{25} \end{pmatrix}$$

Bu “birinci sıralı-çok faktörlü” model kestiriminde elde edilen sonuçlar çalışma kapsamında değerlendirilmiştir.

III. Model

Çalışmada ele alınan 3. model ise birinci sıralı-çokboyutlu modelin uzantısı niteliğindeki ikinci sıralı-hiyerarşik modeldir (Rindskopf & Rose, 1988). Bu modelde birinci sıralı-çokboyutlu modelden elde edilen faktörler üzerinden ikinci sıralı faktör yapıları elde edilmiştir.

Standartlaştırılmamış hiyerarşik modele ilişkin gözlenen puan, genel ve grup faktörlerinin bileşenlerinde oluşmaktadır (Zinbarg vd, 2005).

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_{25} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} \\ \vdots \\ \lambda_{2,1} \\ \vdots \\ \lambda_{3,1} \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_{1,1} \\ \vdots \\ \delta_{2,1} \\ \vdots \end{pmatrix} (G_1) + \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{25} \end{pmatrix}$$

Burada F, grup faktörlerini ve G ise genel faktörü ifade etmektedir. Yine aynı ifadede λ_i değerleri birinci sıralı faktör yüklerini ve δ_i ise ikinci sıralı faktör yüklerini göstermektedir (Zinbarg vd, 2005).

Fen Bilgisi Alt Testine İlişkin Bulgular

Fen alt testinde yer alan 25 maddeye ilişkin veriler üzerinde KR_{20} ve McDonald’ın omega, ω, güvenirlik katsayıları (McDonald, 1985, 1999) elde edilmiş ve ölçme aracının güvenirliğinin alt sınırı KR_{20}=0,80 ve ω=0,92 olarak bulunmuştur. Aynı zamanda madde puanları dağılımına ilişkin betimsel istatistikler ise ortalama, μ=17, varyans, $\sigma^{(2)}$=22,12, çarpıklık katsayısı, $\sigma^{(3)}$=0,84 ve basıklık katsayısı ise $\sigma^{(4)}$ =0,42 olarak hesaplanmıştır. Örneklem değerleri, evren değerleri ile yaklaşık sonuçlar vermiştir (Yurdugül ve Aşkar, 2004).

Faktör Analitik Modelleri ve Fen Bilgisi Alt Test Sonuçları

Fen bilgisi alttesti için I., II. ve III. faktör analitik modelleri kurulmuştur. Bu modeller sırasıyla maddeler arası kovaryans matrisi ile birlikte Pearson korelasyon, tetrakorik korelasyon ve Goodman korelasyon katsayılarından elde edilen korelasyon matrisleri ile çözümlenmiştir. Her üç modelin çözümlenmesinde hesaplanan uyum ve uyum eksikliği indeksleri Tablo 2'de verilmiştir.

Tablo 2 üç boyutlu bir yapıya sahiptir. Bu boyutlar, faktöriyel modeller (sütunlar), uyum ve uyum eksikliği indeksleri (iç satırlar) ve faktör çözümlemesinde kullanılan matrislerden (dış satırlar) oluşmaktadır. Buna göre; birinci sıralı çok boyutlu modeller ile ikinci sıralı hiyerarşik modeller arasında uyum ve uyum eksikliği indeksleri eşit değerler üretmiştir. Bu iki modele ilişkin uyum değerlerinin yüksek çıkması, bu modellerin yapısal eşitlik olarak daha tutarlı modeller olduğunu ifade etmektedir. Ancak tüm maddelerin tek bir boyut olarak ele alındığında birinci sıralı-tek faktörlü model (diğer modellere göre) tüm uyum ve uyum eksikliği indekslerinde düşük değerler almıştır. Bununla birlikte birinci sıralı-çok faktörlü model ile ikinci sıralı modele ilişkin elde edilen indeks değerleri yaklaşık eşit çıkmıştır.

Tablo 2: Fen Bilgisi Alt Testinden Elde Edilen Sonuçlar

		Birinci Sıralı (Tekboyutlu)	**Birinci Sıralı (Çokboyutlu)**	**İkinci Sıralı (Hiyerarşik)**
Kovaryans	Min. Uyum Fonksiyonu	0,259	0,207	0,207
	Ki-Kare	2988,916	2361,033	2361,033
	UİÎ (*GFI*)	0,977	0,981	0,981
	GUİ (*CFI*)	0,896	0,919	0,919
	NUİ (*NFI*)	0,885	0,908	0,908
	YHKOK (*RMSEA*)	0,031	0,027	0,027
	SHKOK (*SRMR*)	0,026	0,024	0,024
Pearson	Min. Uyum Fonksiyonu	0,255	0,204	0,204
	Ki-Kare	2940,673	2324,208	2324,208
	UİÎ (*GFI*)	0,977	0,982	0,982
	GUİ (*CFI*)	0,898	0,921	0,921
	NUİ (*NFI*)	0,887	0,909	0,909
	YHKOK (*RMSEA*)	0,030	0,027	0,027
	SHKOK (*SRMR*)	0,026	0,024	0,024
Tetrakorik	Min. Uyum Fonksiyonu	0,855	0,674	0,674
	Ki-Kare	10607,597	6742,834	6742,064
	UİÎ (*GFI*)	0,922	0,939	0,939
	GUİ (*CFI*)	0,841	0,876	0,876
	NUİ (*NFI*)	0,837	0,871	0,871
	YHKOK (*RMSEA*)	0,061	0,054	0,054
	SHKOK (*SRMR*)	0,044	0,041	0,041
Goodman	Min. Uyum Fonksiyonu	1,447	1,149	1,149
	Ki-Kare	18343,754	14105,899	14105,900
	UİÎ (*GFI*)	0,872	0,899	0,899
	GUİ (*CFI*)	0,811	0,851	0,851
	NUİ (*NFI*)	0,808	0,848	0,848
	YHKOK (*RMSEA*)	0,081	0,071	0,071
	SHKOK (*SRMR*)	0,054	0,051	0,051

Tablo 2 üç boyutlu bir yapıya sahiptir. Bu boyutlar, faktöriyel modeller (sütunlar), uyum ve uyum eksikliği indeksleri (iç satırlar) ve faktör çözümlemesinde kullanılan matrislerden (dış satırlar) oluşmaktadır. Buna göre; birinci sıralı çokboyutlu modeller ile ikinci sıralı hiyerarşik modeller

arasında uyum ve uyum eksikliği indeksleri eşit değerler üretmiştir. Bu iki modele ilişkin uyum değerlerinin yüksek çıkması, bu modellerin yapısal eşitlik olarak daha tutarlı modeller olduğunu ifade etmektedir. Ancak tüm maddelerin tek bir boyut olarak ele alındığında birinci sıralı-tek faktörlü model (diğer modellere göre) tüm uyum ve uyum eksikliği indekslerinde düşük değerler almıştır. Bununla birlikte birinci sıralı-çok faktörlü model ile ikinci sıralı modele ilişkin elde edilen indeks değerleri yaklaşık eşit çıkmıştır.

Diğer taraftan kovaryans ve korelasyon matrislerine göre Tablo 2 incelendiğinde; kovaryans matrisi ve Pearson korelasyonuna dayalı korelasyon matrisinden elde edilen uyum ve uyumsuzluk indeksleri aynı elde edilmiştir. Bununla birlikte bu iki matrisi kullanan modeller en yüksek uyum ve uyumsuzluk değerlerine sahiptir. Goodman korelasyonu ile elde edilen veriler ise en düşük değerlere sahiptir. Tetrakorik korelasyona dayalı çözümlerden elde edilen sonuçlar ise Pearson ve Goodman korelasyonlarının arasında sonuçlar üretmiştir.

Matematik Alt Testine İlişkin Bulgular

Matematik alt testinde yer alan 25 maddeye ilişkin veriler üzerinden ölçme aracının güvenirliğinin alt sınırı KR_{20}=0,81 ve ω=0,90 olarak bulunmuştur. Aynı zamanda madde puanları dağılımına ilişkin betimsel istatistikler ise ortalama, μ=8,78, varyans, $\sigma^{(2)}$=23,92, çarpıklık katsayısı, $\sigma^{(3)}$=1,05 ve basıklık katsayısı ise $\sigma^{(4)}$ =0,68 olarak hesaplanmıştır. Örneklemden elde edilen değerler, evrene ilişkin değerlere çok yakın çıkmıştır (Yurdugül ve Aşkar, 2004).

Faktör Analitik Modelleri ve Matematik Alt Test Sonuçları

Matematik alt testi için birinci sıralı-tekboyutlu, birinci sıralı-çokboyutlu ve ikinci sıralı-hiyerarşik faktör modelleri kurulmuş ve bu çalışma kapsamına alınan matrisler yardımı ile çözümlenmiştir. Birinci sıralı-çokboyutlu ve ikinci sıralı-hiyerarşik modeller, matematik alt testinde yer alan maddelerin kapsamına göre "işlemsel", "sözel problem", düzlemsel bilgi", "geometri" ve "görsel içerik" şeklinde 5 boyutta ele alınmıştır. Ancak bu alt teste yer alan 23. madde, psikometrik değerlerindeki olumsuzluk nedeniyle kapsam dışı bırakılmıştır. Her üç modelin dört farklı matris ile çözümlenmesinde hesaplanan uyum ve uyum eksikliği indeksleri Tablo 3'te verilmiştir.

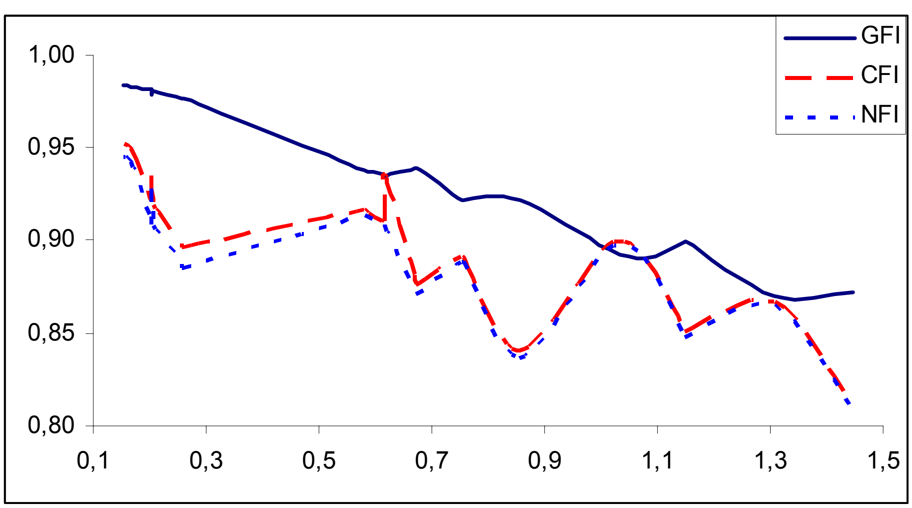
Tablo 3'te verilen her üç modelin kovaryans matrisi ile çözümlerine göre en iyi modeller birinci-sıralı-çokboyutlu ve ikinci sıralı-hiyerarşik modeller olduğu görülmektedir. Uyum indekslerine göre bu iki model çok yakın değerler almasına rağmen birinci sıralı-çokboyutlu faktör modellerinin daha tutarlı modeller olduğu görülmektedir. En düşük uyum ise birinci sıralı-tekboyutlu modelde gözlenmiştir.

Tüm modeller üzerinden gözlemlenen uyum indeksleri değerleri arasındaki ilişki ise; Uİİ(*GFI*) ≥ GUİ(*CFI*) ≥ NUİ(*NFI*) şeklindedir. Benzer şekilde uyum eksikliği indeks değerleri arasındaki ilişki ise; YHKOK(*RMSEA*) ≤ SHKOK(*SRMR*) şeklindedir. Bu ilişkilere göre mutlak uyum indeksleri, göreli uyum indekslerine göre daha büyük değerler üretmektedir.

Tablo 3: Matematik Alt Testinden Elde Edilen Sonuçlar

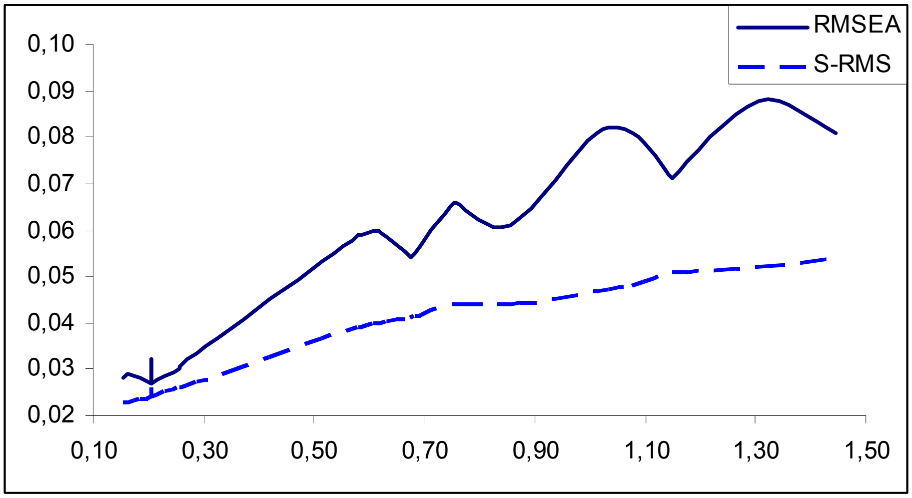
		Birinci Sıralı (Tekboyutlu)	Birinci Sıralı (Çokboyutlu)	İkinci Sıralı (Hiyerarşik)
Kovaryans	Min. Uyum Fonksiyonu	0,754	0,580	0,616
	Ki-Kare	7542,492	5795,675	6159,712
	UİI (*GFI*)	0,922	0,938	0,935
	GUİ (*CFI*)	0,891	0,917	0,911
	NUİ (*NFI*)	0,888	0,914	0,909
	YHKOK (*RMSEA*)	0,066	0,059	0,060
	SHKOK (*SRMR*)	0,044	0,039	0,040
Pearson	Min. Uyum Fonksiyonu	0,758	0,581	0,618
	Ki-Kare	7578,345	5808,337	6176,599
	UİI (*GFI*)	0,922	0,938	0,935
	GUİ (*CFI*)	0,890	0,917	0,935
	NUİ (*NFI*)	0,888	0,914	0,908
	YHKOK (*RMSEA*)	0,066	0,059	0,060
	SHKOK (*SRMR*)	0,044	0,039	0,040
Tetrakorik	Min. Uyum Fonksiyonu	0,205	0,155	0,165
	Ki-Kare	2045,859	1551,173	1647,370
	UİI (*GFI*)	0,979	0,984	0,983
	GUİ (*CFI*)	0,935	0,952	0,949
	NUİ (*NFI*)	0,928	0,945	0,942
	YHKOK (*RMSEA*)	0,032	0,028	0,029
	SHKOK (*SRMR*)	0,026	0,023	0,023
Goodman	Min. Uyum Fonksiyonu	1,306	1,014	1,076
	Ki-Kare	13055,387	10142,836	10762,875
	UİI (*GFI*)	0,870	0,895	0,890
	GUİ (*CFI*)	0,867	0,897	0,890
	NUİ (*NFI*)	0,865	0,895	0,890
	YHKOK (*RMSEA*)	0,088	0,081	0,081
	SHKOK (*SRMR*)	0,052	0,047	0,048

Kovaryans matrisi ve Pearson korelasyon matrisi ile çözümlenen her üç modelin uyum indeksleri aynı değerleri vermiştir. Diğer taraftan, tüm modeller üzerinden en düşük uyumu veren parametrik olmayan korelasyon yöntemi olarak ele alınan Goodman korelasyon katsayısıdır. Diğer taraftan en yüksek uyum ise tetrakorik korelasyon katsayısı ile çözümlenen modellerde gözlenmiştir. Fen bilgisi ve matematik alt testlerindeki tüm maddeler ve kullanılan tüm modeller üzerinden elde edilen uyum indekslerinin, minimum uyum fonksiyonuna göre elde edilen değerlerine ilişkin grafik Çizim 3'te ve aynı şekilde uyum eksikliği indeksleri ile minimum uyum fonksiyonu değerlerine göre grafik ise Çizim 4'de verilmiştir.



Çizim 3: Uyum indeksleri arasındaki ilişki

Çalışma kapsamına alınan uyum indeksleri, Eşitlik 9 ile verilen minimum uyum fonksiyonuna göre azalan sonuçlar üretmektedir. Mutlak uyum indeksi kapsamındaki Uİİ (*GFI*), göreli uyum indeksleri olan GUİ (*CFI*) ve NUİ (*NFI*) değerlerine göre daha sistematik bir davranış sergilemektedir.



Çizim 4: Uyum eksikliği indeksleri arasındaki ilişki

Matematik ve fen bilgisi alt testindeki tüm maddeler üzerinden elde edilen uyum eksikliği indeks değerlerinin minimum uyum fonksiyonu değerlerine göre çizilen grafikte (Çizim 4) SHKOK (*SRMR*) değerleri uyum fonksiyonunun monoton artan bir fonksiyonu olarak elde edilmiştir. YHKOK(*RMSEA*) değerlerinin ise bazı maddelerde uyum fonksiyonuna göre azalan bir yapısı olduğu görülmektedir.

TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada 0 ve 1 şeklinde puanlanmış çoktan seçmeli veriler için birinci sıralı-tekboyutlu, birinci sıralı-çokboyutlu ve ikinci sıralı-hiyerarşik faktör analitik modellerinin çözümlenmesinde kullanılan varyans-kovaryans matrisi ve çeşitlik korelasyon matrislerinin uyum ve uyum eksikliği indekslerine etkisi araştırılmıştır. Çalışmada ele alınan korelasyon matrisleri ise Pearson, tetrakorik ve Goodman korelasyon katsayılarıdır. Fen bilgisi alt testinde; varyans-kovaryans ve Pearson korelasyon değerleri ile çözümlenen tüm modeller için uyum indeksleri yaklaşık aynı sonuçları vermiştir. Bununla birlikte bu iki matris türü ile elde edilen çözümlemelerde en yüksek uyum indeksi ve en düşük uyum eksikliği indeks değerlerine sahiptir. Bu çözümlemelerde ortaya çıkan bir diğer sonuç ise; birinci sıralı-tekboyutlu ve ikinci sıralı-hiyerarşik model uyumlarının aynı sonuçlar vermesidir. Bu durum, Ek 3c'da gösterildiği gibi genel faktör üzerindeki birinci sıralı faktör yüklerinin yaklaşık olarak eşbiçimli (essentially tau equavalent) yapılardan oluşması gösterilebilir. Eşbiçimli ölçmeler de maddeler/faktörler arasındaki kovaryans değerlerinin eşit olması ile açıklanmaktadır (Millsap & Everson 1991; Raykov, 1997; Yurdugül, 2005). Bu konuda vurgulanması gereken bir diğer konu ise Rindskopf ve Rose (1988), birinci sıralı-çokboyutlu modellerde yer alan faktör sayısının 3 ve daha aşağı olması durumunda model uyumlarının aynı çıkacağını ifade etmiş olmalarıdır.

Matematik alt testinde ele alınan modellere ilişkin uyum indeks değerlerine göre en uygun (adequate) modelin birinci sıralı-çokboyutlu model olduğu görülmüştür. Fen bilgisi alt testindeki bulguların aksine matematik alt testinde birinci sıralı-çokboyutlu modelin uyum indeks değerleri ikinci sıralı-hiyerarşik modelin uyum değerlerine göre daha yüksek elde edilmiştir. Bu durum Rindskopf ve Rose'un (1988) daha önce belirtilen ifadeleri ile açıklanabileceği gibi, birinci faktör yüklerinin "konjenerik" (congeneric) yapılar oluşturması ile de açıklanabilir (Ek 4c). Konjenerik ölçmeler, maddeler/faktörler arasındaki kovaryans terimlerinin eşit olmaması ile ifade edilmektedir (Millsap & Everson 1991; Raykov, 1997; Yurdugül, 2005).

Matematik alt testinde girdi matrisleri içerisinde en yüksek uyum (Uİİ, GUİ, NUİ) ve en düşük uyum eksikliği indeks (YHKOK, SHKOK) değerleri tetrakorik korelasyon matrisi ile elde edilmiştir. Goodman korelasyon matrisi ise en düşük uyum indeks ve en yüksek uyum eksikliği indeks değerlerini vermiştir.

Greer vd. (2003), Pearson ve tetrakorik korelasyon karşılaştırmalarında, ikili derecelenmiş olan sürekli değişkenin bileşen (marjinal) dağılımından[6] tetrakorik korelasyonun çok fazla etkilenmediğini ifade etmişlerdir. Bununla birlikte Tablo 1'de gösterildiği gibi, olumsallık çizelgelerinde yer alan bileşen değerlerin aralığı 0,3 ve 0,7 dışında yer alıyor ise bu durumda tetrakorik korelasyon katsayısının kullanımını önermişlerdir. Değişkenlerin bileşen dağılımlarının 0,5 değerinden farklılaşması klasik madde analizinde maddelerin güçlük indeks (π ya da p) değerleri ve maddeler arası kovaryans değerlerinin geniş tanım aralıklarına yönelmesine neden olmaktadır. Bu durum ölçme modellerinin konjenerik yapısının göstergesidir. Matematik alt testinin ise böylesi bir yapıya sahip olduğu görülmüştür (Ek 4b, 4c). Matematik alt testinin konjenerik yapısından kaynaklı olarak tetrakorik korelasyon matrisinin girdi olarak kullanıldığı modeller uyum indeksleri olarak yüksek değerler üretmiştir.

Bu çalışmada ortaya çıkan bir diğer sonuç ise *mutlak uyum* (absolute fit) ve göreli uyum (comparative fit) indeksleri arasındaki farklılıktır. Çalışma kapsamına alının 6 adet model üzerinden elde edilen uyum indeksleri değerleri arasındaki ilişki;

Uİİ(*GFI*) ≥ GUİ(*CFI*) ≥ NUİ(*NFI*)

ve uyum eksikliği indeks değerleri arasındaki ilişki;

YHKOK(*RMSEA*) ≤ SHKOK(*SRMR*)

şeklinde ortaya çıkmıştır. Bu ilişkilere göre mutlak uyum indeksleri, göreli uyum indekslerine göre daha büyük değerler üretmektedir. Ancak Çizim 3 ve Çizim 4 ile verildiği gibi uyum ve uyum eksikliği indeksleri Eşitlik 9 ile verilen minimum ençok olabilirlik uyum fonksiyonu üzerine kurulu olmasına karşın; bazı uyum fonksiyonu değerleri karşısında uyum indeksleri arasındaki eşitsizliklerin [Uİİ(*GFI*) ≥ GUİ(*CFI*) ≥ NUİ(*NFI*)] yönü değişebilmektedir. Bununla birlikte; minimum uyum fonksiyonu değerlerine göre Uİİ(*GFI*) değerlerinin monoton azalan ve SHKOK(*SRMR*) değerlerinin ise monoton azalan bir yapıya sahip olduğu gözlenmiştir.

Bu çalışmada ele alınan tüm modeller, ençok olabilirlik fonksiyonu ile çözümlenmiştir. Dolayısıyla elde edilen sonuçlar ençok olabilirlik yöntemi için geçerlidir. Schumacker ve Beyerlein (2000), tetrakorik ve Pearson korelasyon matrisleri ile ençok olabilirlik yöntemi, genelleştirilmiş enküçük kareler (generalized least square) yöntemi ve ağırlıklandırılmamış enküçük kareler (unweighted least square) yöntemi ile model kestirimleri sonuçlarını karşılaştırmışlardır. Schumacker ve Beyerlein (2000)'in önerisi ise; doğrulayıcı faktör analizinin normallik varsayımından dolayı varyans-kovaryans matrisinin standartlaştırılmış biçimi olan Pearson korelasyon katsayısı ve faktör analitik modelinin çözümleme yönteminde ise genelleştirilmiş enküçük kareler ve ençok olabilirlik yöntemleridir. Ancak Mislevy (1986) uzun testlerde ve az sayıdaki faktör/yapı içeren çalışmalarda ençok olabilirlik yöntemini, çok sayıda faktör/yapı içeren kısa testlerde ise genelleştirilmiş enküçük kareler yöntemini önermektedir. Bu çalışmada fen bilgisi alt testindeki faktör sayısı üç ve matematik alt testinde ise 5 faktör olduğu için ortaya çıkan faklılıklar değişik kestirim yöntemleri ile tekrar ele alınarak çözümlenebilir ve sonuçlar karşılaştırılabilir.

Özet olarak; Steiger'in (1990) ifade ettiği gibi "en iyi uyum diye bir şey söz konusu değildir". Bu katsayılar değişik ölçme yapıları (paralel, eşdeğer, eşbiçimli ve konjenerik), maddelerin karakteristik özellikleri, korelasyon ve kestirim yöntemlerinden etkilenmektedir. Bu çalışmada ençok olabilirlik kestirim yöntemine göre; birinci sıralı-tekboyutlu, birinci sıralı-çokboyutlu ve ikinci sıralı-hiyerarşik doğrulayıcı faktör analitik modellerinin değişik kovaryans ve korelasyon matris girdilerine göre çözümlemeleri elde edilmiştir. Bu çözümlemelerden elde edilen uyum ve uyum eksikliği indeks değerlerinin birinci sıralı faktör sayısından ve bu faktörler arasındaki kovaryans terimlerinden

[6] İkili derecelenmiş değişkenlerin marjinal dağılımları Tablo 1 verildiği gibi i. değişken için A+C ve B+D gözeneklerinden oluşmaktadır.

etkilendiği görülmüştür. İlgili literatür ile tutarlı olarak; birinci sıralı faktör sayısı üç ve daha az olduğunda varyans-kovaryans matrisine dayalı çözümlemelere ilişkin uyum ve uyum eksikliği indeks değerleri, faktör sayısı daha fazla olduğunda ise tetrakorik korelasyon matrisine dayalı çözümlemelere ilişkin uyum ve uyum eksikliği indeks değerleri daha uygun elde edilmiştir. Bu durum birinci sıralı olarak elde edilen faktörler arasındaki eşbiçimli ya da konjenerik ölçmelerden de kaynaklanabileceği görülmüştür. Bir diğer ifade ile; birinci sıralı faktöriyel yapılar arasındaki korelasyonlar eşit olduğunda (aynı zamanda ikinci sıralı faktör yükleri) Pearson korelasyon değerleri en yüksek uyum değerlerini vermektedir. Bununla birlikte; birinci sıralı faktör yapıları arasındaki korelasyonlar farklı olduğunda ise tetrakorik korelasyonlar en yüksek uyum değerlerini vermektedir.

KAYNAKÇA

Agresti A. (1984). *Analysis of Ordinal Categorical Data*. New York: Wiley.

Béland, F. & Maheux, B. (1989). Construct validity and second-order factorial model: The second-order factor model. *Quality and Quantity, 23(2).* 143-159.

Berberoğlu, G., Kaptan, F. ve Kutlu, O. (2005). "Türkiye genelinde sekizinci sınıf öğrencilerinin fen bilgisi dersindeki üst düzey zihinsel becerilerinin incelenmesi", 6–18 Eylül *V. Ulusal Fen ve Matematik Eğitim Kongresi*, ODTÜ, Ankara.

Berstein, I. H. & Teng, G. (1989). Factoring items and factoring scales are different: Spurious evidencefor multidimensionality due to item categorization. *Psychological Bulletin, 105(3),* 467-477.

Bonett, D. G. & Price, R. M. (2005). Inferential methods fort he tetrachoric correlation coefficient. *Journal of Educational and Behavioral Statistics, 30(2)*, 213-225.

Byrne, B.M. (1998) *Structural Equation Modelling with LISREL, PRELIS, and SÍMPLIS: basic concepts, applications, and programming*. Mahwah, NJ: L. Erlbaum.

Cudeck, R. (1989). Anaylsis of correlation matrices using covariance structure models. *Psychological Bulletin, 105(2),* 317-327.

Comrey, A. L. & Lee, H. B. (1992), *A First course in factor analysis* (2nd ed.), Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cortina, J.M. (1993) What is coefficient alpha? An examination of theory and applications. *Journal of Applied Psychology, 78(1)*, 98-104

Cudeck, R. (1989). Analysis of correlation structures with covariance structure models. *Psychological Bulletin, 105*, 316-329.

DeVellis, R. F. (1991). *Scale development: Theory and applications*. Newbury Park, CA: Sage

Greer, T., Dunlap, W.P., & Beatty, G.O. (2003). A Monte Carlo evaluation of the tetrachoric correlation coefficient. *Educational and Psychological Measurement 63(6)*, 931-950.

Haddock, C. K., Rindskopf, D. & Shadish, W. R. (1998). Using odds ratios as effect sizes for metaanalysis of dichotomous data: A primer on methods and issues. *Psychological Methods*, *3(3)*, 339-353.

Hair, J. F., Anderson R. E., Tatham, R. L. & Black, W. C. (1998). *Multivariate data analysis* (5th ed.). Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Hayduk, L. A. (1996). *LISREL issues, debates, and strategies*. Baltimore, MD: The Johns HopkinsUniversity Press.

Hoelter, J. W. (1983). The analysis of covariance structures: Goodness of fit indices. *Sociological Methods and Research, 11,* 325-344.

Jaccard, J. & Wan, C. K. W. (1996). *LISREL approaches to interaction effects in multiple regression.* Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Jöreskog, K.G. (1971). Statistical analysis of sets of congeneric tests. *Psychometrika, 34,* 109-133.

Jöreskog, K. G. (1974). Analyzing psychological data by structural analysis of covariance matrices. In R. C. Atkinson, D. H. Krantz, R. D. Luce, & P. Suppes (Eds.), *Contemporary developments in mathematical psychology: Measurement, psychophysics, and neural information processing* (Vol. 2, pp. 1–56). San Francisco: Freeman.

Kline, R. B. (1998). *Principles and practice of structural equation modeling*. NY: Guilford Press.

Lord, F. M., & Novick, R. (1968). *Statistical theories of mental test scores*. Reading MA: Addison-Wesley.

Lucke, J. F. (2005). “Rassling the hog”: the influence of correlated item error on internal consistency, classical reliability, and congeneric reliability. *Applied Psychological Measurement, 29(1)*, 106–125.

Marsh, H. W., Balla, J. R., & McDonald, R. P. (1988). Goodness-of-fit indexes in confirmatory factor analysis: The effect of sample size. *Psychological Bulletin, 103,* 391-410.

McDonald, R. P. (1985). *Factor analysis and related methods*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

McDonald, R. P. (1999). *Test theory: a unified treatment*. Mahwah NJ: Erlbaum.

Millsap, R. E., & Everson, H. (1991). Confirmatory measurement model comparisons using latent means. *Multivariate Behavioral Research, 26,* 479–497.

Mislevy, R. J. (1986). Recent developments in the factor analysis of categorical variables. *Journal of Educational Statistics*, *11*, 3–31.

Mulaik, S. A., James, L. R., Van Alstine, J., Bennett, N., Lind, S. & Stilwell, C. D. (1989). Evaluation of goodness-of-fit indices for structural equation models. *Psychological Bulletin, 105*, 430-445.

Ogasawara, H. (2001). Approximations to the distributions of fit indexes for misspecified structural equation models. *Structural Equation Modeling*, *8*, 556–574.

Pohlmann, J. T. (2004). Use and interpretation of factor analysis in The Journal of Educational Research: 1992-2002. *The Journal of Educational Research*, *98*(1), 14-22.

Raykov, T. (1997). Estimation of composite reliability for congeneric measures. *Applied Psychological Measurement, 21,* 173-184

Reise, S. P. & Widaman, K. F. (1999). Assessing the fit of measurement models at the individual level: A comparison of item response theory and covariance structure approaches. *Psychological Methods, 4(1),* 3-21.

Rindskopf, D. & Rose, T. (1988). Second order factor analysis: Some theory and applications. *Multivariate Behavioral Research, 23,* 51–67.

Schumacker, R. E. & Beyerlein, S. T. (2000). Confirmatory factor analysis with different correlation types and estimation methods. *Structural Equatıon Modeling, 7(4)*, 629–636

Spearman, C. (1904). The proof and measurement of association between two things. *American Journal of Psychology*, 15, 72−101.

Steiger, J. H. (1990). Structural model evaluation and modification: an interval estimation approach. *Multivariate Behavioral Research*, *25 (2)*, 173-80.

Tabachnick, B. G. & Fidell, L. S. (1996). *Using multivariate statistics* (3 Ed.). New York: Harpercollins College Publishers.

Thompson, B. & Daniel, L. G. (1996). Factor analytic evidence for the construct validity of scores: A historical overview and some guidelines. *Educational and Psychological Measurement, 56,* 197-208.

Widaman, K. F. & Thompson, J. S. (2003). On specifying the null model for incremental fit indices in structural equaiton modeling. *Psychological Methods, 8(1),* 16-37.

Yuan, K. (2005). Fit indices versus test statistics. *Multivariate Behavioral Research, 40(1),* 115-148.

Yurdugül, H. (2005). Konjenerik test kuramı ve konjenerik madde analizi: Tek boyutlu çoktan seçmeli testler üzerine bir uygulama. *A.Ü. Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi 38(2),* 21-47.

Yurdugül, H ve Aşkar, P. (2004). Ortaöğretim Kurumları Öğrenci Seçme ve Yerleştirme Sınavı’nın cinsiyete göre madde yanlılığı açısından incelenmesi. *Egitim Bilimleri ve Uygulama Dergisi, 3(5)*, 3-20.

Zinbarg, R.E., Revelle, W., Yovel, I., & Li. W. (2005). Cronbach's Alpha, Revelle's Beta, McDonald's Omega: Their relations with each and two alternative conceptualizations of reliability. *Psychometrika*. *70,* 123-133.

Ek 1:

Kovaryans Yapı Modelleri İçin Korelasyon Çözümleri

Doğrulayıcı faktör analitik modelleri varyans-kovaryans terimleri üzerine kuruludur. Bu yaklaşım ilk olarak Lord ve Novick (1968) tarafından ifade edilmiştir. Jöreskog (1971, 1974) ise varyans-kovaryans terimleri üzerine kurulu çözümlemeler için yapısal kovaryans analizini (structural analysis of covariance) geliştirmiştir.

Açıklayıcı faktör analizi korelasyon yönelimli, temel bileşenler analizi ve doğrulayıcı faktör analizi ise varyans-kovaryans yönelimli bir yaklaşımdır (Schumacker & Beyerlein, 2000). Ancak Lisrel ile uygulamalarda varyans-kovaryans terimleri yerine korelasyon terimlerinin de girilmesi olanaklıdır. Bu durumda elde edilen çözümler standartlaştırılmış çözümlerdir.

Varyans-kovaryans matrisinin (Σ) köşegen terimleri maddelere ilişkin gözlenen puanlar varyansını [$Var(X_i)$], köşegen dışı terimler ise maddeler arası kovaryans terimlerini ifade etmektedir. Kovaryans matrisine dayalı standartlaştırılmamış faktör yükleri ise madde ile ölçülmeye çalışılan gerçek puanlar varyansını [$Var(T_i)$] ifade etmektedir. Bu terimler gerçekte ölçme sonuçlarının güvenirliğine ilişkin terimlerdir (McDonald, 1985, Raykov, 1997; Yurdugül, 2005).

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & & \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & & & \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \sigma_{k1} & \sigma_{k2} & \sigma_{k2} & \cdots & \sigma_k^2 \end{bmatrix} \qquad \Theta = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \rho_{21} & 1 & & & \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \rho_{k1} & \rho_{k2} & \rho_{k2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} s_1^2+\psi_1 & & & & \\ s_{21} & s_2^2+\psi_2 & & & \\ s_{31} & s_{32} & s_3^2+\psi_3 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ s_{k1} & s_{k2} & s_{k2} & \cdots & s_k^2+\psi_k \end{bmatrix}$$

Varyans-kovaryans matrisi standartlaştırıldığında madde varyansları 1'e indirgenmiş olmaktadır. Buna göre (Cudeck, 1989);

Modelin varyansı: $\Sigma=\Lambda\Phi\Lambda'+\Psi$

Maddelerin varyansı Köş(Σ)=Köş($\Lambda\Phi\Lambda'+\Psi$)= I

olacaktır. Ancak daha önemlisi standartlaştırma işlemine göre, her bir maddeye ilişkin hata terimleri de standartlaştırılmış olacaktır.

Ek 2:

Merkezi ve Merkezi Olmayan Ki-Kare Dağılımı

Gözlenen (madde) puanların standartlaştırılması, uygulamalarda sıkça rastlanan bir durumdur. Standartlaştırma işlemi iki aşamalı gerçekleştirilir. Bunlardan ilki; (a) maddelerin ölçek üzerinde merkezileştirilmesi yani her bir madde puanının, madde puanları ortalamasından çıkartılması ve diğeri ise (b) elde edilen merkezi puanların madde puanlarının standart sapmasına bölünmesidir.

$$Z = \frac{X_i - \overline{X}}{\sigma}$$

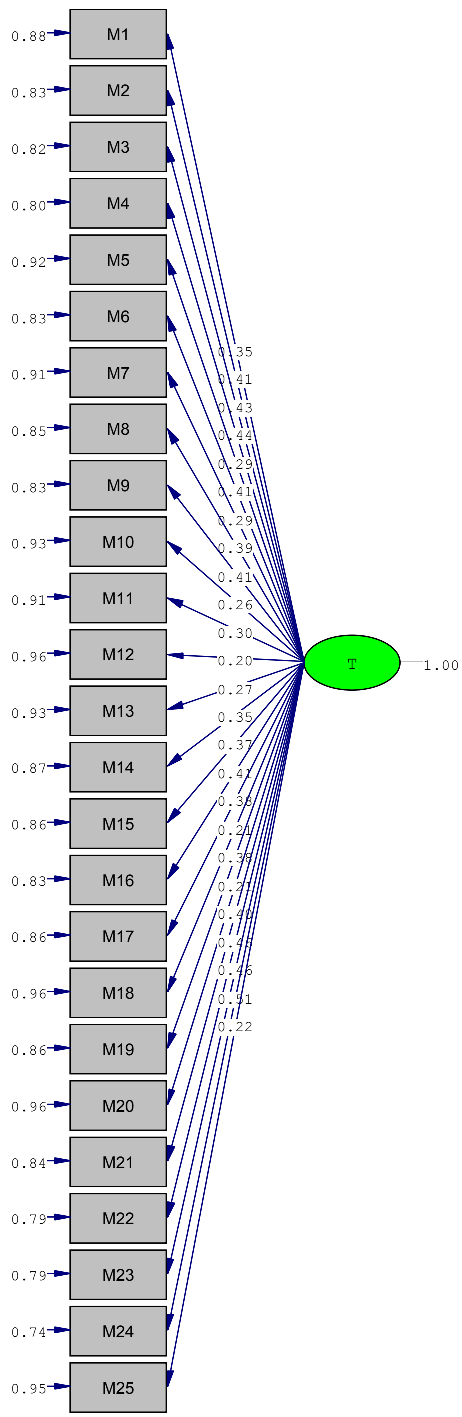
Standartlaştırılmış Z değişkeni ortalaması 0 ve varyansı 1 olan standart normal dağılıma sahiptir. $Z \sim N(0,1)$. Bu değişkenin karesi (Z^2) ise 1 serbestlik derecesine sahip ki-kare (chi-square) dağılım gösterir. $Z^2 \sim \chi^2_{(1)}$.

Eğer Z değişkeninin varyansı 1'den farklı ($\sigma_Z^2 \neq 1$) ise bu durumda Z değişkeni merkezi olmayan ki-kare dağılımı göstermektedir. Buna göre açıklayıcı faktör analitik modelinin;

$\mathbf{Z} = \Lambda \boldsymbol{F}$

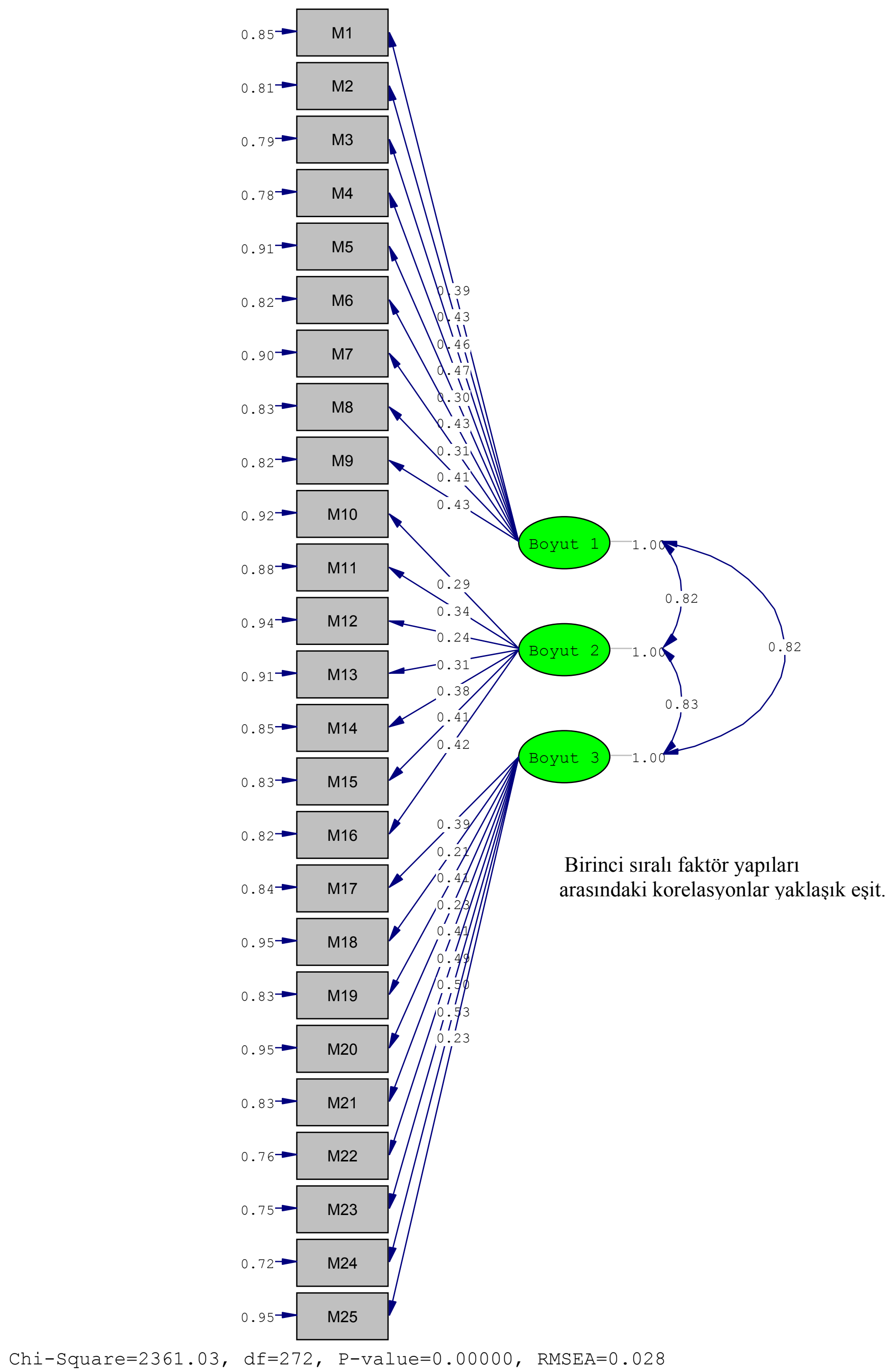
eşitliğinde standartlaştırılmış madde puanları (Z) merkezi ki-kare dağılımı gösterirken, gerçek puanlar (F) ise merkezi olmayan ki-kare dağılımı göstermektedir. Bu nedenle bazı uyum indeksleri merkezi ki-kare dağılımı ve diğerleri ise merkezi olmayan ki-kare dağılımı üzerine kuruludur.

Ek 3a: Fen Bilgisi Alt Testine İlişkin Birinci Sıralı-Tekboyutlu Faktör Modeli

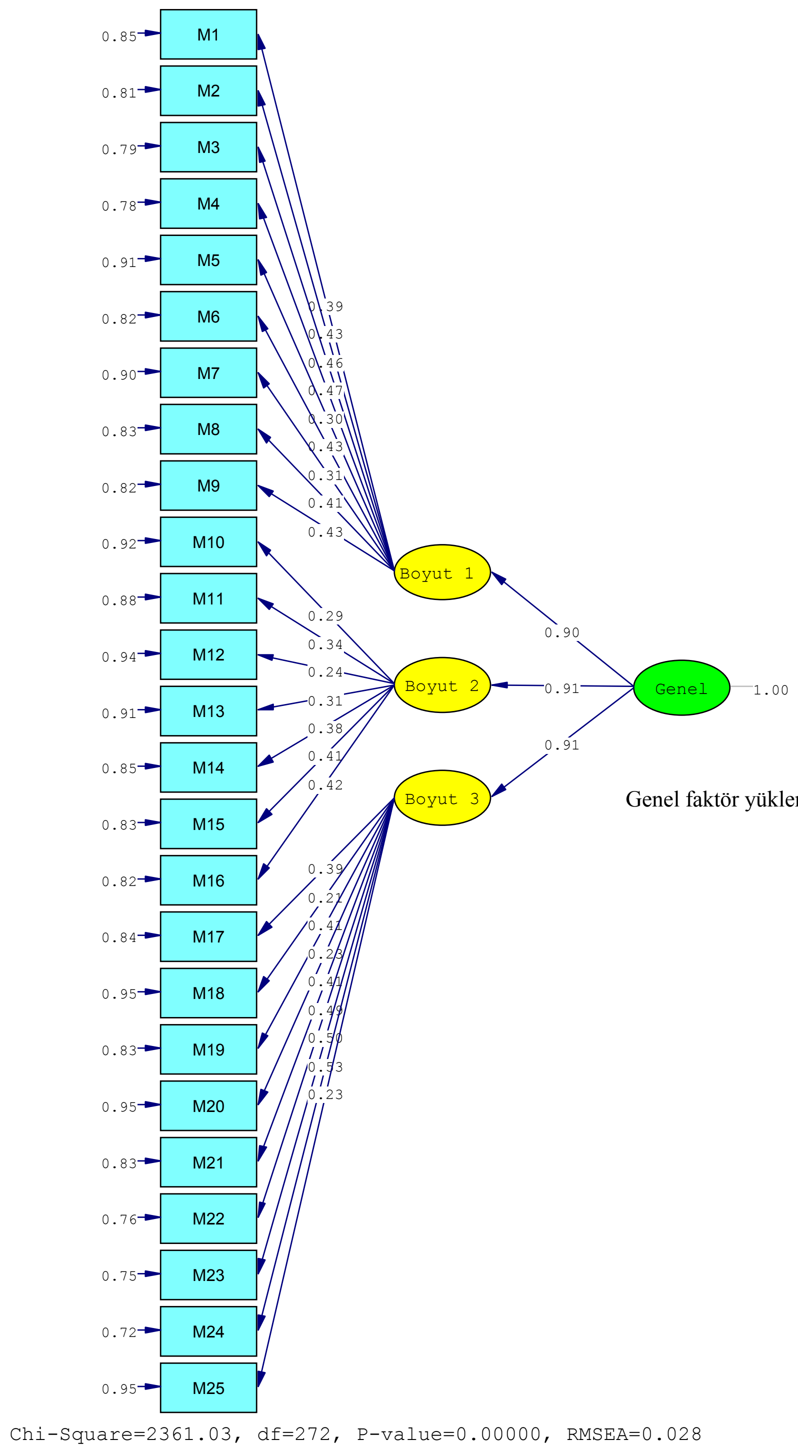


Chi-Square=2988.92, df=275, P-value=0.00000, RMSEA=0.031

Ek 3b: Fen Bilgisi Alt Testine İlişkin Birinci Sıralı-Çokboyutlu Faktör Modeli

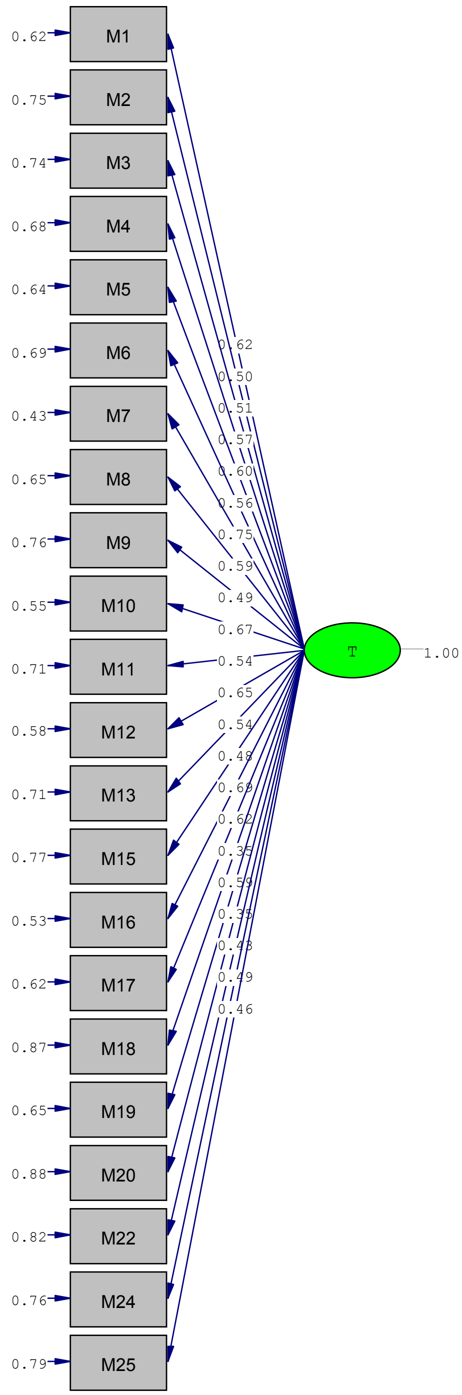


Ek 3c: Fen Bilgisi Alt Testine İlişkin İkinci Sıralı-Hiyerarşik Faktör Modeli



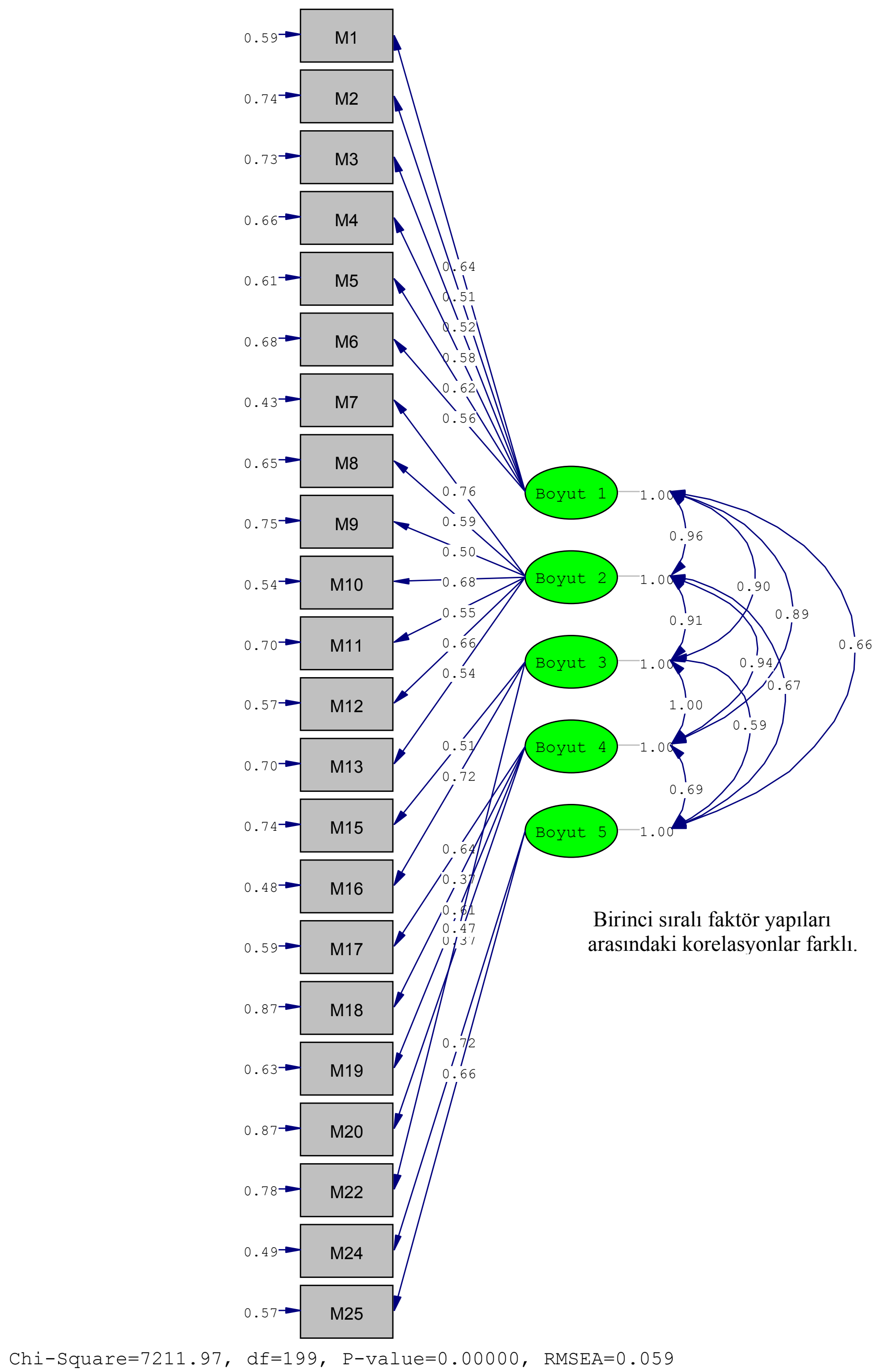
Genel faktör yükleri yaklaşık eşit.

Ek 4a: Matematik Alt Testine İlişkin Birinci Sıralı-Tekboyutlu Faktör Modeli



Chi-Square=9294.35, df=209, P-value=0.00000, RMSEA=0.066

Ek 4b: Matematik Alt Testine İlişkin Birinci Sıralı-Çokboyutlu Faktör Modeli



Ek 4c: Matematik Alt Testine İlişkin İkinci Sıralı-Hiyerarşik Faktör Modeli