

ORTOTROPİK MALZEMEYE SAHİP ANKASTRE KOMPOZİT ÇUBUK ELEMANIN TİTREŞİMİNİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİYLE MODELLENMESİ

Mustafa Oğuz NALBANT¹

ÖZET

Kompozit yapıların titreşim analizi, birçok mühendislik uygulamalarında pratik önem kazanmaktadır. Kullanım yerine ve çalışma şartlarına göre, tabakalı kompozit kirişlerde büyük genlikli titreşimler oldukça etkilidir. Yapısal sistemlerin sayısal analizleri arasında en yaygın kullanıma sahip olan sonlu elemanlar metodunun uygulanması sırasında her bir elemana ait serbestlik derecelerinde oluşan deplasman ve kuvvetlerin ilişkisi eleman rijitlik matrisleri ile oluşturulur. Bu çalışmada, ortotropik malzemeye sahip kompozit malzemeden yapılan tabakalardan oluşturulmuş ankastre çubuk elemanın serbest titreşim davranışları incelenmesi amaçlanmıştır. Çubuk elemanın matematiksel modellenmesi sonlu elemanlar metodu ile elde edilmiştir. Ayrıca modelleme aşamasında klasik kiriş teorisi olan Euler-Bernoulli Teorisi'nden faydalanılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sonlu Elemanlar, Kompozit Malzeme, Titreşim

FINITE ELEMENT MODELING OF VIBRATION OF BUILT-IN COMPOSITE ROD ELEMENT WITH ORTHOTROPIC MATERIAL

ABSTRACT

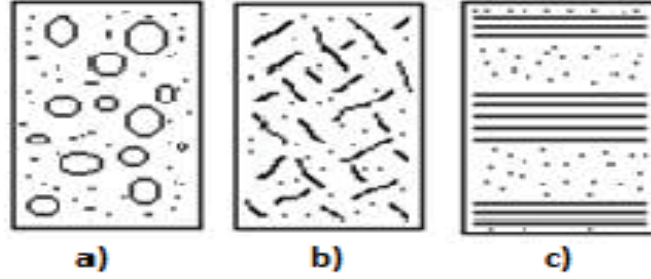
Vibration analysis of composite structures is gaining practical importance in many engineering applications. Depending on the place of use and operating conditions, large amplitude vibrations are highly effective in laminated composite beams. In the application of the finite element method, which is the most widely used among the numerical analysis of structural systems, the relationship between displacement and forces that occur in degrees of freedom of each element is formed by element stiffness matrices. In this study, it is aimed to investigate the free vibration behavior of built-in rod element made of composite material with orthotropic material. Mathematical modeling of the bar element is obtained by finite element method. In addition, Euler-Bernoulli Theory, which is the classical beam theory, was utilized in the modeling stage.

Keywords: Finite Elements, Composite Material, Vibration

1. GİRİŞ

Mühendislik uygulamalarında kullanılan yapı malzemelerini dört grupta incelemek mümkündür. Bunlar metaller, polimerler, seramikler ve kompozitlerdir. Kompozit malzemeler ise, aynı veya farklı iki ya da daha fazla malzemenin uygun olan özelliklerini tek bir malzemede toplamak ya da yeni bir özellik ortaya çıkarmak amacıyla makro düzeyde

birleştirilmesi ile oluşturulan malzemeler olarak adlandırılabilir. Şekil 1 de bazı kompozit malzemelerin içyapıları görülmektedir. Metal alaşımları da birkaç malzemeden meydana gelirler fakat kompozit malzemeler gibi makro düzeyde birleştirilmediği için kompozit malzeme olarak adlandırılmazlar (Gibson, 1994). Kompozit malzemelerle ilgili (Lurie K.A., Cherkhev A.V. 2018 ve D.D.L. Chung, 2018) gibi birçok akademik çalışma mevcuttur.



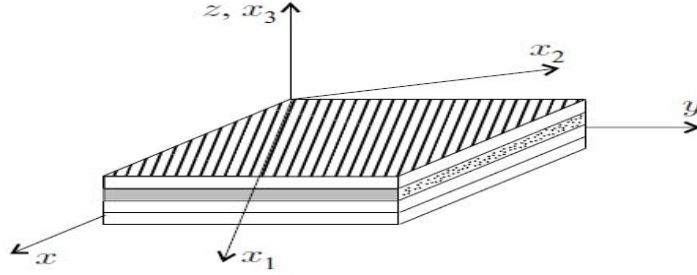
Şekil 1. a) Taneli Kompozit b) Lifli Kompozit c) Tabakalı Kompozit

Kompozit malzemeler binlerce yıldır insan hayatında önemli bir yere sahip polimerlerdir. Evlerimizin yapımında kullanılan beton ise kompozit malzemeye basit bir örnektir. Ayrıca ahşap, kemik gibi kompozit malzemeler doğada değişik biçimlerde bulunabilmektedir. Kompozit malzemeler yüksek özgül dayanım ve yüksek özgül modülü oranlarına sahip olduğundan, özellikle hafiflik ve dayanımın önem kazandığı hava ve uzay teknolojilerinde (uçak pervaneleri, kanatları, uzay mekiği gövdeleri vs.), kara ve deniz taşımacılığında geniş bir uygulama alanına sahiptir. Ayrıca günlük hayatta kullandığımız mutfak eşyaları, çeşitli spor malzemeleri, tıp gereçleri, robot malzemeleri yapımında, kimya ve elektroteknik sanayisinde kullanılmaktadır. Kompozit malzemeler uygulama alanlarına göre kiriş, plak ve kabuk gibi taşıyıcı yapılarda kullanılabilir. Kalınlık ve genişliği uzunluklarına göre çok daha az olan ve eksenine düşey yönde etkiyen yükleri taşıyan yapı elemanları kiriş olarak adlandırılırlar. Kirişler uçlarında farklı sınır koşullarına sahip olabilirler. Örnek olarak basit desteklenmiş kiriş bir ucu kayar diğer ucu ise pimli kirişlerdir. Basit desteklenmiş kiriş yatay ve dik yönde harekete kısıtlanmıştır, fakat dönme yapabilmektedir. Kayar destekte ise kiriş yatay yönde hareket edebilir. Ankastre kirişlerde bir uç sabit diğer uç serbest, sabit kısım hareketsiz olup dönme yapmaz. Bu nedenden dolayı bu uçta bir moment ve kuvvet meydana gelir. Kirişe uygulanan dış yanal yükler sonucunda kirişte iç kuvvetler oluşur bunlar kesme kuvvetleri ve eğilme momentleridir. Yüklemeden sonra kirişin düz eksenli çökme eğrisi denen bir eğriye eğilir. Bu olaya kirişin eğilmesi denir. Kirişte ortaya çıkan genleşme ve gerilmeler doğrudan eğrilik kavramıyla belirlenen bu çökme eğrisinin şekline bağlıdır (Gere ve Timoshenko, 1992).

Bu çalışmada, ortotropik malzemeden yapılan tabakalardan oluşturulmuş kompozit ankastre çubuk elemanın sonlu elemanlar metodu ile matematiksel metodu oluşturulmuştur. Matematiksel model daha sonra titreşim analizleri yapmak için kullanılacaktır.

2. KOMPOZİT TABAKALI ANKASTRE KİRİŞLERİN MATEMATİKSEL MODELLENMESİ

2.1. Kiriş Teorilerinin Ele Alınması



Şekil 2. Global (x, y, z) ve Yerel (x_1, x_2, x_3) (László P. Kollár , George S. Springer, 2009)

Kirişlerde deformasyonun kinematiğini açıklayabilmek için birçok kiriş teorisi oluşturulmuş ve (RA Jafari-Talookolaei, M Abedi, M Şimşek, M Attar, 2018 ve 5. Hadi, A., Nejad, M. Z., Rastgoo, A., & Hosseini, M.) gibi çalışmalarındaki kullanılmıştır. Şekil 2 de görülen dikdörtgen kesitli, katmanlı kompozit kirişler için kullanılan en temel ve basit modellerden birisi ise “Euler-Bernoulli Teorisi diğer adıyla “Klasik Kiriş Teorisidir. Diğer bir modelleme ise “Timoshenko Kiriş Teorisidir. Klasik laminasyon (kompozit) teorisine göre kiriş üzerindeki herhangi bir noktaya ait yer değiştirme bileşenleri

$$U(x, y, z) = u(x, y) - zw, x \quad (1)$$

$$V(x, y, z) = v(x, y) - zw, y \quad (2)$$

$$W(x, y, z) = w(x, y) \quad (3)$$

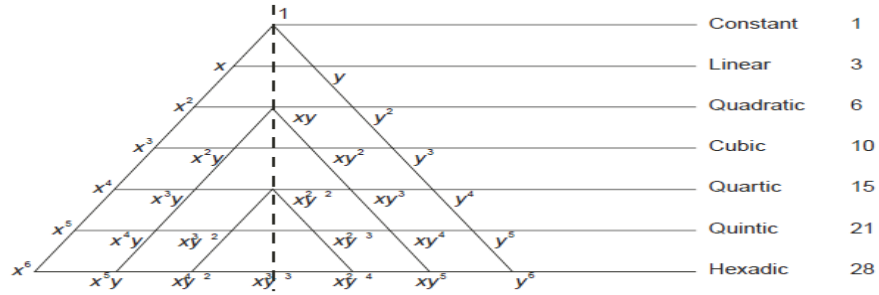
gibidir. Buradaki ise U, V, W değerleri katmana ait her bir noktanın sırasıyla (x, y, z) eksen takımlarındaki yer değiştirmeleri, u, v, w ise orta düzlemdeki bir noktanın yer değiştirmesini ifade etmektedir. Kiriş teorisinde tüm büyüklükler y -ekseninden bağımsız olduğu için, Klasik kiriş teorisinde yer değiştirme alanı

$$U(x, z) = u(x) - zw, x \quad (4)$$

$$W(x, z) = w(x) \quad (5)$$

şeklinde ifade edilir (Reddy ve ark.,1997).

2.2. Şekil Fonksiyonunun Eldesi



Şekil 3. Pascal Üçgeni

Ortotropik malzemeye sahip kompozit malzemeden yapılan tabakalardan oluşturulmuş ankastre çubuk elemana ait şekil fonksiyonunun eldesi için kullanacak olduğumuz çökme değeri için şekil 3 te görülen pascal üçgeninden faydalanılmıştır.

$$w(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 \quad (6)$$

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Burada w (çökme) değerimizin birinci türevi bize θ (dönme) değerimizi vermektedir.

$$\theta_1 = \frac{dw_1}{dx} \quad \theta_2 = \frac{dw_2}{dx} \quad (8)$$

olarak yazılabilir.

$$\{\delta\} = [A]\{q\} \quad (9)$$

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & 1 & 2x_1^2 & 3x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 0 & 1 & 2x_2^2 & 3x_2^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$$\{q\} = [A]^{-1} \{\delta\} \quad (11)$$

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & 1 & 2x_1^2 & 3x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 0 & 1 & 2x_2^2 & 3x_2^3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & 1 & 2x_1^2 & 3x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 0 & 1 & 2x_2^3 & 3x_2^3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$[N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \{\delta\}_e = [N] \{\delta\}_e \quad (15)$$

Burada $[N]$ şekil fonksiyonları matrisi olup,

$$[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \quad (16)$$

şekindedir. (S.S. Bhavikatti, 2007)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} = [B] \quad (17)$$

$$[B] = \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} = N = [N_1''(x) \ N_2''(x) \ N_3''(x) \ N_4''(x)] \quad (18)$$

(Yijun Liu, 2003)

2.3. Gerilme Bileşenlerinin Dönüşümü

(x, y, z) koordinatları, problemin çözümünde kullanılan koordinatlar ve (x_1, x_2, x_3) koordinatları da, malzemenin temel koordinatları olarak tanımlanmıştır (Şekil 1). Tabakalara üstten bakıldığında (ters olarak), (x, y, z) koordinatları; x_1, x_2 düzleminde x_1, x_2, x_3 'ün saat ibresi yönünde θ açısı kadar döndürülmesi ile elde edilir. Bu iki eksen takımındaki koordinatlar arasındaki gerilme dönüşümü aşağıdaki denklemler yardımıyla elde edilir.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin 2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

Bu eşitlik;

$$(\sigma)_p = [T](\sigma)_m \quad (20)$$

şeklinde yazılabilir ve burada $[T]$ dönüşüm matrisi olarak tanımlanır. Malzeme katsayılarının dönüşümü ise matrisimize sınırlarımızı girdiğimizde

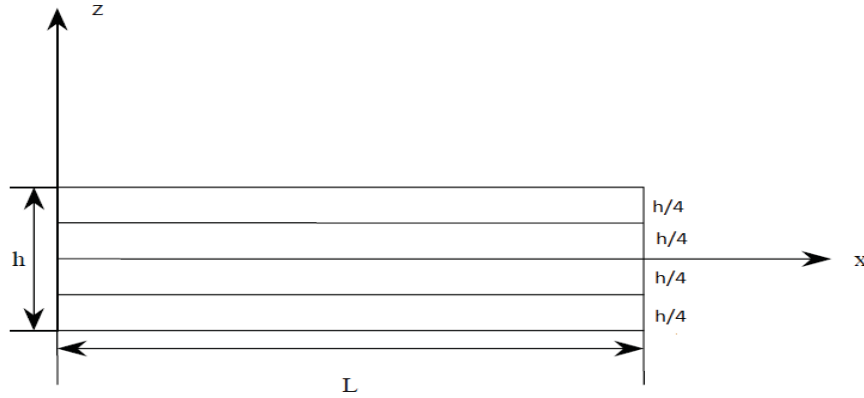
$$\sigma_{xx} = [\cos^2 \theta] \{\sigma_1\} \quad (21)$$

şeklindeki dönüşüm matrisini elde ederiz.

$$[\bar{Q}] = [T][Q][T]^T \quad (22)$$

ifadesi verilir. Burada $[Q]$, malzeme koordinatlarındaki 6x6 boyutundaki malzeme dirençlik matrisidir. (Aysun B. , Ahmet S. , 2006)

2.4. [D] Dirençlik Matrisinin Elde Edilmesi



Şekil 4. Dört Katmanlı Simetrik Kiriş

Ortotropik malzemeye sahip kompozit malzemeden yapılan tabakalardan oluşturulmuş ankastre çubuk elemana ait dirençlik katsayısını bulurken eleman şekil 4 te görülen dört katmanlı simetrik kiriş gibi düşünülmüştür.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} & Q_{15} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} & Q_{25} & Q_{26} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & Q_{34} & Q_{35} & Q_{36} \\ Q_{41} & Q_{42} & Q_{43} & Q_{44} & Q_{45} & Q_{46} \\ Q_{51} & Q_{52} & Q_{53} & Q_{54} & Q_{55} & Q_{56} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{63} & Q_{64} & Q_{65} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

Gerilme- Burulma ilişkilerini gösteren bu matriste sınırları girdiğimiz takdirde;

$$\sigma_2 = \sigma_3 = \gamma_{23} = \gamma_{13} = \gamma_{12} = \tau_{12} = 0 \text{ olur.}$$

Bunun sebebi kirişimizi X ve Y eksenlerimizde incelediğimizden kaynaklanmaktadır ve matrisimiz,

$$\{\sigma_1\} = [Q_{11}]\{\varepsilon_1\} \quad (24)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliklerdeki Q_{ij} değerleri indirgenmiş elastik sabitler olup, Young, Kayma modülleri ve poisson oranları cinsinden aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$Q_{11} = E_1 \quad (25)$$

Burada Q_{11} değerimiz ε_1 parametresine eşit çıkmaktadır (R. M. Jones, 1973).

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k - z_{k-1}) \quad (26)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (27)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (28)$$

Burada A_{ij} boyuna uzama direngenliği, D_{ij} eğilme direngenliği, B_{ij} ise eğilme-boyuna uzama eşleşmesi direngenliği olarak ifade edilir. Kirişimizde boyca uzama olmadığı için A_{ij} ve B_{ij} direngenlik matrislerini kullanmayız. Bu nedenle direngenlik matrisimiz D_{ij} eğilme direngenlik matrisine eşit olur. (Aysun B. , Ahmet S. , 2006).

2.5. Rijitlik Matrisinin Elde Edilmesi

2.5.1. Potansiyel Enerji Yaklaşımı İle Eleman Rijitliğinin Hesabı

Dörtgen elemanlar için rijitlik matrisi elastik enerji ifadesinden hareketle elde edilebilir. Bu eşitlik,

$$U = \int \frac{1}{2} \{\sigma\} \{\varepsilon\} \partial V \quad (29)$$

formülüyle ifade edilir. Formülde kalınlık sabit alınır ve eleman boyutunda yazılırsa,

$$U = \sum_e t_e \int \frac{1}{2} \{\sigma\} \{\varepsilon\} \partial A \quad (30)$$

yukarıdaki gibi olur. Şekil değiştirme-yer değiştirme ilişkisi ise,

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{Bmatrix} \quad (31)$$

şeklindedir. Denklemden sınır şartlarını girdiğimiz takdirde $\varepsilon_y = \varepsilon_{xy} = 0$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x\} = \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} \quad (32)$$

şekline dönüşür.

$$\left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} = d \quad (33)$$

$$N.d = [B] = \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \quad (34)$$

Diğer taraftan

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (35)$$

olduğundan eleman içindeki gerilmeler,

$$\{\sigma\} = [D][B]\{q\} \quad (36)$$

olur. Bu durumda şekil değiştirme enerjisi ifadesini,

$$U = \sum_e \frac{1}{2} \{q\}^T \left[t \int_{-1}^1 [B]^T [D][B] \partial x \right] \{q\} \quad (37)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu da

$$U = \sum_e \frac{1}{2} \{q\}^T [k]_e \{q\} \quad (38)$$

olup eleman rijitlik matrisi olan $[k]_e$,

$$[k]_e = t \int_{-1}^1 [B]^T [D][B] \partial x \quad (39)$$

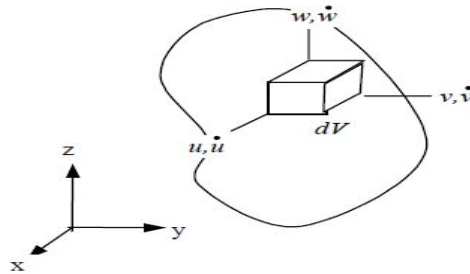
şekindedir. Eleman rijitlik matrisi (4x4) boyutundadır. (Topcu, M. , Taşgetiren, S. , 1998)

2.6. Kütle Matrisinin Eldesi

Kütle matrisinin elde edilebilmesi için cismin kinetik enerji ifadesi aşağıdaki gibi

$$T = \frac{1}{2} \int_v \{u\}^T \{u\} \rho \partial v \quad (40)$$

yazılabilir. İfadede bulunan ρ yoğunluk $\{u\}$ ise u, v, w bileşenlerine sahip x noktasının hız vektörüdür.



Şekil 5. Yayılmış kütleli katı cisim, diferansiyel hacim üzerinde deplasman ve hız bileşenleri

$$\{\dot{u}\} = [\dot{u}\dot{v}\dot{w}] \quad (41)$$

Sonlu eleman modelinde cisim şekil 5 te görüldüğü gibi yayılmış kütleli belirli sayıda elemanlara bölünür ve deplasmanlar düğüm deplasmanları cinsinden şekil fonksiyonları yardımıyla aşağıdaki,

$$\{u\} = [N]\{q\} \quad (42)$$

gibi gösterilir, dinamik analizde ise düğüm deplasmanları vektörü zamana bağlı olarak değiştiğinden hız vektörü benzer şekilde,

$$\{\dot{u}\} = [N]\{\dot{q}\} \quad (43)$$

yazılabilir. Kinetik enerjide yerine koyduğumuzda ise ,

$$T_e = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T \left| \int_e \rho [N] [N]^T \partial v \right| \{\dot{q}\} \quad (44)$$

Elde ederiz. Parantez içindeki ifade ise eleman kütle matrisini vermektedir.

$$[m_e] = \int_e \rho [N]^T [N] \partial V \quad (45)$$

Kullandığımız dörtgen eleman için düzlem gerilme ve şekil değiştirme durumunda deplasman bileşenleri u ve v dir.

Düğüm deplasmanları vektörü 4 elemalı ve eleman şekil fonksiyon matrisi ise,

$$[N] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \quad (46)$$

şeklinde yazılır. Bu durumda eleman kütle matrisi aşağıdaki gibi,

$$[m_e] = \rho h t_e \int_e [N]^T [N] \partial x \quad (47)$$

olur. Bu integrasyon nümerik olarak yapıldığında eleman kütle matrisi elde edilir.(Topcu, M. , Taşgetiren, S. , 1998)

3. SONUÇLAR

Bu çalışmada, ortotropik malzemeye sahip kompozit malzemeden yapılan tabakalardan oluşturulmuş ankastre çubuk elemanın serbest titreşim davranışları incelenmesi amaçlanmıştır. Elemanın sonlu elemanlar metodu kullanılarak deplasmanları, şekil fonksiyonu, direngenlik matrisi, rijitlik matrisi ve kütle matrisi, başarıyla elde edilmiştir.

Bir sonraki çalışmada ortotropik malzemeye sahip ankaste kompozit çubuk elemana ait elde edilen matematiksel model kullanılarak MATLAB programı ile titreşim analizi yapılacak ve sonuçlar çeşitli sınır şartları altından grafiksel olarak karşılaştırılacaktır.

4. KAYNAKLAR

1. **Aysun B. , Ahmet S.**, 2006 , “Değişik Fiber Oryantasyonlarına Sahip Tabakalı Kompozit Kirişlerin Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Titreşim Analizi DEÜ Mühendislik Fakültesi Fen ve Mühendislik Dergisi”
2. **D.D.L. Chung**, 2018, “Thermoelectric polymer-matrix structural and nonstructural composite materials”, *Advanced Industrial and Engineering Polymer Research*, Volume 1, Issue 1, Pages 61-65, ISSN 2542-5048, <https://doi.org/10.1016/j.aiepr.2018.04.001>.
3. **Gere, J., M., Timoshenko, S., P.**, 1992, “Mechanics of Materials”, Chapman & Hall.
4. **Gibson, R., F.**, 1994, “Principles of Composite Materials Mechanics”, McGraw-Hill International Editions.
5. **Hadi, A., Nejad, M. Z., Rastgoo, A., & Hosseini, M.**, 2018, “Buckling analysis of FGM Euler-Bernoulli nano-beams with 3D-varying properties based on consistent couple-stress theory”, *Steel and Composite Structures*, 26(6), 663–672. <https://doi.org/10.12989/SCS.2018.26.6.663>.
6. **Jafari-Talookolaei, R., Abedi, M., Şimşek, M., & Attar, M.** 2018, “Dynamics of a micro scale Timoshenko beam subjected to a moving micro particle based on the modified couple stress theory”, *Journal of Vibration and Control*, 24(3), 527–548, <https://doi.org/10.1177/1077546316645237>.
7. **László P. Kollár , George S. Springer**, 2009 , “Mechanics of Composite Structures” , Cambridge University Press
8. **Lurie K.A., Cherkaev A.V.** 2018, "Effective Characteristics of Composite Materials and the Optimal Design of Structural Elements. In: Cherkaev A.V., Kohn R. (eds) Topics in the Mathematical Modelling of Composite Materials. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser, Cham
9. **S.S. Bhavikatti**, 2007 “Finite Element Analysis”
10. **Topcu, M., Taşgetiren, S.**, 1998, “*Mühendisler için Sonlu Elemanlar Metodu*”, PAÜ Mühendislik Fakültesi Matbası, Ders kitapları Yayın No: 007
11. **Jones, R., M.**, 1975, “Mechanics of Composite Materials”, Newyork, Hemisphere.
12. **Reddy, J., N., Wang, C., M., Lee, K., H.**, 1997, “Relationships Between Bending Solutions of Classical and Shear Deformation Beam Theories”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 34, 26, 3373-3384.
13. **Yijun Liu** , 2003 “Finite Element Method Course Notes”