Elementary Education Online, 14(3), 961-973, 2015.
İlköğretim Online, 14(3), 961-973, 2015. [Online]: http://ilkogretim-online.org.tr
http://dx.doi.org/10.17051/io.2015.37113

Learning Trajectories and Place in Mathematics Education

Sefa Dündar[1], Nazan Gündüz[2]

ABSTRACT. There are several studies related to learning on the field of education, but in the recent times, they have focused on examining how students think and how their thinking becomes more complicated in time. The conception of learning trajectories consisting of mathematical purpose, progressive improvements specific to the domain of child, appropriate activities for the different levels of these improvements has emerged in this review process. Various definitions of learning trajectories have been put forward by different researchers, and it has been observed that the trajectories are utilized in the processes of learning and teaching mathematics, and evaluating the subject learned. Therefore, the aim of this compilation study is primarily to introduce the conception of learning trajectories to national literature, to discuss this subject by using definitions of learning trajectories by various researchers, and to address the fields utilizing mathematics education briefly. It is suggested to conduct different studies at all levels about learning orbits.
Keywords: learning trajectory, mathematics education, learning

SUMMARY

Purpose and Significance: The purpose of the study is to analyze the term of learning trajectories and to form a conceptional frame by utilizing studies on this subject in mathematics education. The development of children's mathematics understanding from an early age is significant for them to be successful in mathematics in the following years. The improvement of children's mathematical thinking is a natural progress and it is an effective way for children to learn mathematics that teachers understand this natural progress and provide an education by means of proper activities for them. In this sense, we can use learning trajectories as supplementary tools that improve their mathematical understanding and reasoning improvement, during the learning process of persons from the beginning of their mathematical education.

***Methods*:** This study examines Learning Trajectories in the consideration of active research, and is a compilation study.

Findings: As a result of the studies and reviews, the following findings were obtained that the general theme of the definition of learning trajectories was the relatively predictable development and improvement of knowledge from a more simple understanding level to a more complex one, and that learning trajectories could be analyzed under the headings of aim, developmental way, and educational activities. Besides, it was concluded that learning trajectories were used as tools by teachers in the key educational activities such as planning, teaching, and assessing, and that teachers helped the integration of different mathematics subjects by using learning trajectories. It was also found that they reflected that there was a potential of creating a more productive classroom teaching by determining perfect standards for learning trajectories, preparing a proper curriculum, making valid assessments. Moreover, the following findings were also found that teachers utilized learning trajectories not only for the mathematics education of the students but also for their own learning.

Discussion and Conclusion: Learning trajectories have a major significance in the processes of learning, teaching and evaluating mathematics. The improvement of learning trajectories is important in terms of enabling each child to have a high competence level. In this sense, some studies and projects should be carried out to address the lack in the literature with regard to learning trajectories. Available learning orbits should be introduced and shared to a large mass of mathematics educators and should be translated so that it could be a useful tool for teachers.

[1] Asist.Prof.Dr. Abant Izzet Baysal University, Education Faculty, Mathematics Education, sefadundar@gmail.com
[2] Res.Asist. Canakkale Onsekiz Mart University, Education Faculty, Mathematics Education, nazan09gunduz@gmail.com

Öğrenme Yörüngeleri ve Matematik Eğitimindeki Yeri

Sefa Dündar[1], Nazan Gündüz[2]

ÖZ. Eğitim alanında öğrenme üzerine pek çok çalışma yapılmış olmakla birlikte son zamanlarda öğrenmeyle ilgili yapılan çalışmalar, öğrencilerin nasıl düşündüğünü ve düşüncelerinin zaman içerisinde nasıl karmaşık hale geldiğini inceleme üzerine odaklanmışlardır. Bu inceleme sürecinde, bireyin belirli bir alana özgü gelişimsel ilerlemeleri ve bu ilerlemelerin farklı seviyelerde uygun aktivitelerin toplamından oluşan öğrenme yörüngesi kavramı ortaya çıkmıştır. Öğrenme yörüngesi ile ilgili araştırmacılar tarafından çeşitli tanımlar yapılmıştır. Bu tanımlardan hareketle öğrenme yörüngesinin matematikte öğrenme, öğretme ve öğrenileni değerlendirme süreçlerinde kullanıldığı görülmüştür. Bu derleme çalışmasının amacı, öncelikle öğrenme yörüngesi kavramını ulusal literatüre kazandırmak, beraberinde öğrenme yörüngelerinin ne olduğuna ilişkin çeşitli araştırmacıların tanımlarından faydalanarak bu konu üzerinde tartışmak ve matematik eğitiminde kullanım alanlarına kısaca değinmektir. Öğrenme yörüngeleriyle ilgili olarak, her düzeyde matematik konuları kapsamında çeşitli çalışmaların yapılması önerilmektedir.
Anahtar Kelimeler: öğrenme yörüngesi, matematik eğitimi, öğrenme

GİRİŞ

Öğrenme Yörüngesi Nedir?

Yaklaşık yirmi yıldır öğrenme üzerine yapılan çalışmalar, öğrencilerin nasıl düşündüğünü ve bu düşünmelerin zamanla nasıl karmaşık hale geldiğini anlama üzerine odaklanmıştır. Yapılan bu çalışmalar incelendiğinde ortaya çıkan kavramlardan birisi de öğrenme yörüngesidir. Öğrenme yörüngesinin literatürde farklı terimlerle kullanıldığı görülmektedir. Simon (1995) hipotezsel öğrenme yörüngesi, Brown ve Campione (1996) gelişimsel koridor, büyük fikirler terimini kullanmışlardır. Clements ve Sarama (2004), Confrey, Maloney, Nguyen, Wilson ve Mojica (2008) öğrenme yörüngesi kavramını kullanırlarken Catley, Lehrer ve Reiser (2004) öğrenme performansları terimini kullanmışlardır. Öğrenme yörüngelerinin matematik ve fen eğitimindeki araştırmacılar tarafından da pek çok kez tanımı yapılmıştır (Catley, Lehrer & Reiser, 2004; Clements, Wilson & Sarama, 2004; Confrey, 2006). Bu farklı terimler arasındaki tanımların genel teması, bilginin zamanla tahmin edilebilir şekillerde kolaydan zora doğru ilerlemesinin anlamlandırılması şeklindedir (Clement & diğ., 2004). Öğrenme yörüngeleri, planlama, öğretme, değerlendirme gibi anahtar öğretimsel aktiviteler konusunda öğretmenler tarafından kullanılan araç gereçler olarak öne sürülmektedir. Ayrıca öğrenci kavramaları direk olarak gözlenemezken, öğrenme yörüngeleri, gözlenebilen anahtar maddeleri, yapıları ve davranışları betimlemeye ve tanımlamaya çalışmaktadır.

Öğrenme yörüngesi teriminini ilk defa ortaya atan Simon (1995) hipotezsel öğrenme yörüngeleri kavramını kullanmış ve yörüngelerin temelinin yapılandırmacı yaklaşıma dayandığını ifade etmiştir. Simon (1995) öğretmenin ders planının çerçevesine atıfta bulunmak için hipotezsel öğrenme yörüngeleri terimini şunlarda kullanmıştır;

- öğretmen bilgisi
- öğrencinin matematiksel görevlerle ilgili seçimi
- etkinlik sırası

Simon için hipotezsel öğrenme yörüngeleri üç parçadan oluşmaktadır. Bu parçaları içeren hipotezsel öğrenme süreçleri, öğrenmenin yönünü belirleyen öğrenme amacı, öğrenme aktiviteleri ve öğrenme aktiviteleri bağlamında öğrencilerin düşünce ve anlayışlarının nasıl geliştireceği üzerine odaklanmıştır (Simon, 1995). Simon'un (1995) hipotezsel öğrenme yörüngesi kavramı öğrenmelerin ilerleyeceği bir yola ilişkin olarak öğretmenlerin yordamasına atıfta bulunur. Buna dayalı olarak da Simon'un hipotezsel terimini kullandığı düşünülmektedir. Ayrıca öğrenme yörüngelerinin önceden bilinemediği gibi beklenen eğilime göre de şekillenebildiğini ifade etmiştir.

[1] Yrd.Doç.Dr. Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi, sefadundar@gmail.com
[2] Arş.Gör. Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi, nazan09gunduz@gmail.com

Hipotezsel öğrenme yörüngeleriyle birlikte, öğretmenler öğrencilerinin düşünme ve öğrenmelerine dayalı olarak kendi matematik bilgilerini ve öğrenme amaçlarını belirlemekte ve bu da hipotezsel öğrenme yörüngesi için bir yön sağlamaktadır. Bu amaçları başarmak amacıyla bir dizi aktivite seçmek gerekir ki bu da öğretmenlerin, öğrencilerin öğrenme yörüngelerini yordamaları ihtiyacını ortaya çıkarır (Bardsley, 2006). Öğretmen, öğrenciyle etkişelimde bulunarak ve etkileşimle birlikte öğrencileri gözlemleyerek öğrenci hakkında ve öğrencilerin öğrenmeleri hakkındaki bilgilerini şekillendirmekte ve bu bağlamda öğretimsel aktiviteler oluşturabilmektedir.

Clements ve Sarama (2004) öğrenme yörüngelerinin alternatif bir tanımını yapmıştır. Clements ve Sarama'nın (2004) öğrenme yörüngeleriyle ilgili tanımı Simon'un (1995) hipotezsel öğrenme yörüngesiyle ilgili tanımının özel bir durumudur. Farklı bir tanım yapmalarının sebebi Simon'un teorisinin bir kısmını reddetmeleri değil, program geliştiricilerin belirli bir takım sıralı öğretimsel aktivitelerin var olduğunu ifade etmesinden kaynaklanmaktadır (Bardsley, 2006). Clements ve Sarama (2004) öğrenme yörüngelerinin, matematiksel amaç doğrultusunda çocuğun belli bir matematik konusuna özgü gelişimsel ilerlemeleriyle, bu ilerleme sürecinin her aşamasına uygun çocuğun matematiksel konuyu daha derin anlamasını sağlayan öğretimsel aktivitelerinin toplamından oluştuğunu ifade etmişlerdir. Bununla birlikte matematiksel amaca bağlı olarak belirlenen gelişimsel ilerleme seviyelerinde karşılaşılacak soyutlama, genelleştirme ve karmaşıklık gibi birtakım niteliksel yapıları kazanmada sıkıntı yaşanmaması amacıyla matematiksel amaçların yapılandırılması gerekmektedir. Buradan hareketle öğrenme yörüngelerini de bu yapılandırmayı içeren süreç olarak tanımlamışlardır. Ayrıca Clements ve Sarama (2004) öğrenme yörüngelerini, matematiksel kavramların ve becerilerin gelişimlerinin haritalaması şeklinde ve belirli bir matematiksel konu alanında çocukların düşünmelerinin ve öğrenmelerinin betimlenmesi olarak ifade etmişlerdir. Bunlara ek olarak, çocukların zihinsel düşünme seviyelerinin gelişimiyle çocukları harekete geçirdiği varsayılan bir takım öğretimsel görevler vasıtasıyla, öğretimde rota belirlemek olarak kavramsallaştırılabileceğini belirtmişlerdir.

Confrey (2006) öğrenme yörüngesi için kavramsal yörüngeyi ve kavramsal koridoru tanımlamış ve bu kavramları temsil eden anahtar bileşenleri aşağıdaki gibi belirtmiştir:

- Öğrenci öğrenmelerinin doğrusal (linear) bir süreç olmadığı,
- Her öğrencinin öğrenme yörüngesi birbirinden farklı olabileceği,
- Öğrenciler yörünge yoluyla ilerledikleri için, tahmin edilebileceği gibi belli sınırlılıklarla ve engellerle karşılaşabileceği ve bunların literatüre ve önceki çalışmalara dayalı olduğu düşünüldüğü için öğretmenlerin planlarında ve öğretimlerinde daha ayrıntıya girmeleri gerektiği,
- Öğrencilerin ilerlediği koridorlar esnek olmasına ve farklı öğrencilerin farklı yollarda ilerlemesine izin verilmesine rağmen, sınıf içi ödev ve görevlerde öğretimin, öğrencilerin olası davranışlarının üzerinde sınır olarak görünmesine neden olabileceği şeklindedir.

Confrey, Maloney, Nguyen, Mojica ve Myers (2009) öğrencilerin informal bilgilerinden yola çıkarak, bu bilgiler arasında çeşitli ilişkiler kurduklarını ve yansıtmalar yaptıklarını böylece bu informal bilgilerden zamanla daha karmaşık bir anlama elde edebileceklerini ifade etmişlerdir. Bu bağlamda öğrenme yörüngelerini, "öğretim vasıtasıyla öğrencilerin karşılaştığı matematiksel yapılardaki ilişkilerin, araştırmacı tahminine dayalı ve deneysel destekli olarak betimlenmesidir" şeklinde tanımlamışlardır. Bu tanımdan yola çıkarak şu özellikler söylenebilir (Nguyen, 2010):

- Öğrenme yörüngeleri, öğrencilerin zamanla az karmaşık bilgiden daha karmaşık bilgiyi inşa etmelerini sağlayan yapıların sıralı ağıdır.
- Öğretim ve etkinlikler yörüngelerin bir parçası olmasının yanı sıra, öğretim olmadan yörüngeler aracılığıyla gelişim olmaz.
- Öğrenme yörüngeleri literatürün senteziyle oluşturulur.
- Öğrenme yörüngeleri, deneysel araştırmalar aracılığıyla güçlendirileren ve doğrulanan hipotezlerdir.

Confrey ve diğ. (2008) öğrenme yörüngelerini birkaç açıdan ele almışlardır. Birincisi, öğrenme yörüngeleri araştırmacılar tarafından yapılandırılan öğrencilerin öğrenme süreçlerindeki olası geçiş yollarının modelleridir. Bu yolun doğrusal olmadığını göstermişlerdir. Öğrencilerin çoklu yörüngeleri, sınırları matematiksel aktivitelerle kurulan benzer koridorların içindedir. Bu nedenle öğrenme yörüngeleri kavramsal koridorların içinde gömülüdür (Confrey & diğ., 2008). Bununla birlikte, bu koridorlar içinde öğrenciler bir takım sınırlar ve engellerle karşılaşmaktadırlar. İkincisi, öğrenme yörüngelerinin literatürün sentezine dayalı olup ve basit bir gözden geçirme olmamasıdır. Üçüncüsü, öğretimin rolü üzerinde odaklanmışlardır. Yani, öğretim aktiviteleri öğrencinin ilerlemesini desteklemek için bilinçli olarak sıralanmalıdır. Çünkü bu ilerlemeler doğal ilerlemeler değil bilinçli olarak öğretmenin yönlendirmesiyle yapılan ilerlemelerdir. Bunlara ek olarak, öğrenme süreçlerinde öğrencinin aktif rolünün önemli olduğu görüşüdür (Mojica, 2010).

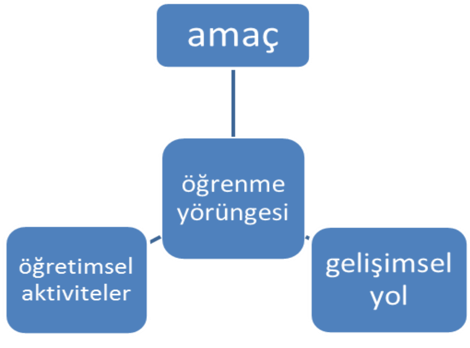
Corcoran, Mosher ve Rogat'a (2009) göre, öğrenme yörüngelerini, belirli standartlar belirleyerek, tutarlı bir müfredat düzenleyerek, geçerli değerlendirmeler inşa ederek ve daha verimli sınıf öğretimi üreterek öğrenci öğrenmelerini geliştirme potansiyeli olarak ifade etmişlerdir. Corcoran ve diğ. (2009), öğrenme yörüngelerinin temel bileşenleri üzerinde incelemelerde bulunmuşlar ve şunları ifade etmişlerdir:

- Matematik gibi disiplinlerin merkezi olan konu ve temalar aracılığıyla öğrenmeler için son noktalar tanımlanır.
- Bilginin boyutlarını tanımlayan ilerleme değişkenleri zamanla gelişir.
- İlerleme seviyeleri, çoğu çocuğun yeterlik edinmesine yönelik ilerlemesinin gelişimini betimler.
- Öğrenme performansları, değerlendirme gelişimi ve öğrenci ilerlemesini ortaya çıkaran aktiviteler için uygun durum sağlar.
- Değerlendirmeler, öğrencilerin kavram bilgilerinin gelişimini ölçer.

Maloney ve Confrey (2010) öğrenme yörüngelerinin doğrusal olmasa da rastgele de olmayan bilişsel ilerlemeleri temsil ettiğini ifade etmişlerdir. Sztajn, Confrey, Wilson ve Edgington (2012) yörüngelerin, öğrencilerin takip etmesi yüksek ihtimalli adımları tanımlamak için düzenlenen, deneysel araştırmalar aracılığıyla geliştirilen, düzenli beklenen eğilimler olarak temsil edilebiliceğini ve her öğrencinin yolunun kendine özgü olduğunu ifade etmişlerdir. Myers (2014) öğrenme yörüngelerinin, öğrencilerin zamanla matematiksel büyümelerini ve gelişimini detaylandıran ve deneysel olarak geçerliği olan araçlar olarak matematik eğitiminde önem kazandığını belirtmiştir. Myers öğrenme yörüngesi üzerine yapılan çalışmaları incelediğinde a) farklı matematik alanlarında öğrenme yörüngesinin geçerliliği ve gelişimi, b) kullanışlı bir değerlendirme ve müfredat geliştirici olabilen öğrenme yörüngelerinin yolu c) öğretimde öğrenme yörüngelerinin nasıl kullanıldığı şeklinde üç açıdan ele alındığını ortaya çıkarmıştır.

Öğrenme Yörüngesinin Bileşenleri

Öğrenme yörüngelerinin bileşenleri incelendiğinde üç kısımdan oluştuğu görülmüştür. Bunlar matematiksel *amaç*, bu amaca ulaşması için ilerlenen *gelişimsel yol* ve her seviye ile uyumlu *öğretimsel aktiviteler* şeklindedir (Clements & Sarama 2004).



Şekil 1. Öğrenme Yörüngesinin Bileşenleri

Amaç: Öğrenme yörüngelerinin ilk bileşenini amaç oluşturmaktadır. Amaç, burada büyük bir fikir içermektir. Örneğin sayılar; a) bir şeyin kaç adet olduğunu ifade eder, b) nesnelerin sıralarını belirtir, c) ölçüm sonuçlarını gösterir, d) geometrik şekillerin uzunluklarını, alanlarını, hacimlerini temsil eder, e) yaşadığımız dünyada konumumuzu belirleyebilmemiz için kullanılır. Bu şekilde temel bir işleve dayalı olarak amaç belirtilmelidir (Clements, Sarama & DiBiase, 2004).

Gelişimsel yol: Öğrenme yörüngelerinin ikinci kısmı olup, matematiksel amacı başarmayı sağlayan, sona doğru daha karmaşık olan düşünce seviyelerinden oluşan aşamadır. Yani, gelişimsel yol, çocuğun, belirli bir matematik alanındaki anlayışının ve yeteneğinin gelişmesinde takip edeceği kendine özgü *öğrenme rotası* olarak ifade edilmektedir (Clements & Sarama, 2009). Çocukların konularla ilgili fikirleri ve yorumları yetişkinlerinkinden farklı olduğu için öğrenme yörüngeleri önemlidir. Öğretmenler, çocukların ne yaptığını ve ne düşündüğünü, konularla ilgili anlama girişiminde bulundukları şeyleri, çocukların gözünden görmelilerdir. Buradan hareketle gelişimsel yolla ilgili bilgi; öğretmenin, çocukların düşünceleriyle ilgili algılarını zenginleştirir, öğretmene çocukların anlama seviyelerini değerlendirmede ve bu seviyede tercih edeceği öğretim aktivitesini belirlemede yardımcı olmaktadır (Clements & Sarama, 2009).

Öğretimsel aktiviteler: Öğrenme yörüngelerinin üçüncü kısmını oluşturmakta olup gelişimsel ilerlemedeki her düşünce seviyesiyle uyumlu öğretimsel görevler ve aktivitelerden oluşmaktadır. Bu görevler çocuğun konuyu öğrenmesinde yardımcı olması için düzenlenmiş olup, bu konuda uzmanlaşması için pratik yapmalarını da sağlamaktadır. Öğretmenler çocuğun bir seviyeden diğerine geçmesi için öğretimsel aktiviteleri kullanmaktadırlar (Clements & Sarama, 2009).

Öğrenme Yörüngelerini Kullanmanın Yararları

Öğrenme yörüngelerinin, müfredatın her seviyesinde öğretmenleri bilgilendirmek (Clement & diğ., 2004), öğrenilenleri ve öğrenme sürecini değerlendirmek (Battista, 2004; Confrey & Maloney, 2010) ve öğretmen eğitimi için (Mojica, 2010) kullanışlı olduğu düşünülmektedir. Öğrenme yörüngeleri yoluyla elde edilen öğrenci düşünmeleri bilgisini kullanarak, öğretmenler öğrencilerin gelişimsel seviyelerine dayalı amaçlara sahip olmaktadırlar (Clements, 2007; akt. Myers, 2014). Daha detaylı olarak, öğrenci çalışmalarını betimler (Wilson, 2009), öğrencileri daha etkili bir şekilde değerlendirir (McCool, 2009) ve kavram yanılgılarının yanı sıra öğrencinin stratejilerini de tahmin edebilmektedirler (Myers, 2014). Corcoran ve diğerleri (2009) öğrenme yörüngelerinin potansiyel yararları arasında "daha iyi odaklanmış standartlar, daha iyi dizayn edilmiş müfredat, daha iyi değerlendirmeler ve nihai olarak daha etkili öğretim ve gelişmiş öğrenci öğrenmeleri" nin olduğunu ifade etmişlerdir. Confrey ve diğ. (2008) ise öğrenme yörüngelerinden öğrenci düşüncelerinin zamanla nasıl geliştiğini belirleme adına bilgi alabileceğini belirtmişlerdir. Wilson (2009) ise öğrenme yörüngelerinin yazılacak müfredat/program için bir çerçeve sağlayacağını ifade etmiştir.

Araştırmacılar, öğrenme yörüngelerini kullanmanın birçok yararı olduğunu belirtmişlerdir. Çocuklarda özellikle erken yıllarda matematik gelişimi önemli olduğu için çocukların bu yıllarda matematik bilgilerinin daha sonraki yıllardaki matematik başarılarını ve onların okul hayatı boyunca devam eden kariyerlerini etkilediği bilinmektedir (Sarama & Clements, 2009). Çocukların düşünceleri, matematik öğrenmede doğal gelişimsel bir yol izlediğinden öğretmenlerin bu yolu anladıklarında ve çocukların ilerlemelerine dayalı olarak aktiviteler sunduğunda, gelişimsel olarak uygun ve özellikle etkili matematik öğrenme çevreleri inşa edilebileceği düşünülmektedir. Ayrıca öğrenme yörüngelerinde çocukların matematiksel akıl yürütmelerinin gelişimini açıklayıcı ve destekleyici kullanışlı araçlar da yer almaktadır (Sarama & Clements, 2009).

Öğrenme yörüngeleri matematik için okul yıllarının her kademesinde, sayılar ve işlemler gibi özel matematik konularında, elektrik gibi özel fen bilimleri alanlarına kadar her çeşit konu alanında etkin olarak kullanılabilmektedir (Sarama & Clements, 2009). Bununla birlikte, öğrenme yörüngelerini kullanmak konuların hem yatay hem de dikey entegrasyonunu kolaylaştırmaktadır. Öğrenme yörüngelerinin öğrencilerin rasyonel sayılar konusundaki muhakeme bilgilerini sınıf seviyeleri arasında entegre etmesi, ilkokul 2. sınıf seviyesindeki eş paylaştırma konusunun ortaokuldaki bölmenin, çarpmanın, oranın, kesirlerin temelini oluşturması buna örnek olarak verilebilir (Confrey & diğ., 2008).

Konulardaki bu sıralama ilkokul öğretmenlerine, öğrencilerinin gelecekte yaşayacağı okul deneyimleri açısından öğrenme etkinliklerinin önemini vurgulamaktadır.

Öğrenme yörüngelerini kullanmanın bir diğer yararı ise, öğretmenlere matematikte farklı konuları entegre etmede yardımcı olmasıdır (Confrey & diğ., 2008). Örneğin, eş dağılım öğrenme yörüngesi, öğretmenleri, sayıların, ölçmenin ve geometrinin nasıl eş paylaştırma konusuyla ilişkili olduğunu anlamayı desteklemektedir (Pothier & Sawada, 1983'ten akt., Confrey & diğ, 2008). Buna ek olarak, öğrenme yörüngeleri öğretmenlerin öğretimlerini yönlendirmede ihtiyaç duydukları pedagojik içerik bilgisinide desteklemektedir.

Öğrenme Yörüngesi Örnekleri

Matematik konu içeriklerinin bazılarıyla ilgili, bazı matematik eğitimcileri tarafından öğrenme yörüngeleri oluşturulmuştur. Bu öğrenme yörüngelerine örnek teşkil etmesi amacıyla aşağıdaki tablolarla birlikte örnekler verilmiştir.

Tablo 1: Sayı Algısı ile İlgili Öğrenme Yörüngesi Örneği (Daro, Mosher & Corcoran, 2011, s. 69-77)

Konu: Sayı Algısı **Yaş:2-7** **Geliştiren:** NRC report (Cross, Woods ve Schweingruber, 2009) **Çerçeve:** Sayı algısında 4 parçaya odaklanılmıştır. Bunlar 1) Niceliği görmek (kaç adet olduğunu görmek), 2) Sayı kelime listesini bilmek (bir, iki, üç vs.), 3) Saymaya başladığında 1-1 eşleme, 4) Sayıların sembollerini yazılması (1, 2, 3 vs.). Sayı kelime listesi diğer 3 parçaya göre daha büyük sayılar içerir. Öğrencilerin her parça için büyük sayıları öğrendikçe ve bunlar arasında ilişki kurabildikçe bilgileri artar. Sayı algısı için sıralama; Birincisi, objelerle sayıları birebir eşleyerek saymaya başlarlar. Önemli olan ikinci adım, son söylenen sayı kaç adet olduğunu da söylediği için sayma ve nicelik (miktar) arasında bağlantı kurmasıdır. Üçüncü adım, ters yöndeki sayma ve nicelik (miktar) arasında bağlantı kurmasıdır. 4 yaşındaki okul öncesi çocuklar bazı nesnelerin sayılarını birer birer sayarak belirleyebilirler. Son basamak ise onluklar ve birlik gruplar arasında ilişkileri ve 10' dan 100 'e basamak değerlerini ve daha büyük sayıların basamak değerlerini içerir.

Tablo 2: Sayı algısı, Çarpımsal Düşünme, Rasyonel Sayı Mantığı ve Uzunlukla İlgili Öğrenme Yörüngesi Örneği (Daro & diğ., 2011, ss.69-77)

Konu: Uzunluk **Yaş: 3-12 yaş** **Geliştiren:** Barrett, Clements, Cullen, McCool, Witkowski ve Klanderman (2009) **Çerçeve:** Barett ve diğerleri, uzunlukla ilgili yörüngeyi, önceki seviyelerle bütünleştirici olarak, artan bir karmaşıklık seviyesine göre şekillendirmişlerdir. Çocuklar matematikle daha az meşgul olsalar da daha ilk seviyelerde matematiksel nesnelerle ilgili mantığı almaktadırlar. Çocuklar boylamsal öğretim deneyimleriyle yönlendirildikleri için yörüngeler, çocukların deneysel akıl yürütmelerine dayalı olarak idealize edilmiş, belirli ve sıralı öğretimsel aktiviteler boyunca ilerlemektedirler. Bu öğretimsel deneyimler 10 seviyeden oluşur ve gözlenebilir eylemler, zihinsel nesneler üzerinde varsayılan içsel eylemler ve her seviyedeki öğretimsel görevlerle bağlantılıdır. İlk olarak çocuk geometrik konuları ve uzunluğu alandan veya hacimden ayıran boyutların dilini öğrenir. 6 yaş civarında çocuk, ölçüm şemalarının bir parçası olarak, doğru parçası boyunca noktalama veya tarama gibi uzamsal işlemleri birleştirebilir. Sonra, öğrenci birim işlemleri kazanır ve sayma ile birim tekrarlama arasındaki benzerlik kurmanın yollarını bulur. Öğrenciler nokta sayma, mesafe hesaplama ve bir doğru boyunca ilerleyen sayılar üzerinde aritmetik işlemler yapma koordinasyonunu elde ettiği için birim işlemleri tutarlı bir şekilde kazanır.

Tablo 3: Çarpımsal Düşünme, Rasyonel Sayı Mantığı ile İlgili Öğrenme Yörüngesi Örneği (Daro & diğ., 2011, ss. 69-77)

Konu: Çarpımsal Düşünme / Rasyonel Sayıların Mantığı **Yaş: 8. sınıf** **Geliştiren:** Confrey ve diğerleri (2009) **Çerçeve:** DELTA projesini yürüten Confrey ve arkadaşları rasyonel sayı muhakemesine ilişkin araştırmayı matematik eğitimi ve bilişsel psikolojinin senteziyle yürütmüşlerdir. Bu sentezden yola çıkarak 7 önemli öğrenme yörüngesi betimlemişler, ilkokul ve ortaokulda karmaşık bir yapısı olan rasyonel sayılar muhakemesi için geniş bir çerçeve içine bu yörüngeleri kombine etmişlerdir. Öğrenme yörüngeleri eş paylaştırma, çarpma ve bölme, sayı olarak kesir, oran orantı, benzerlik ve ölçekleme, uzunluk ve alan ölçüleri, ondalık sayılar ve yüzdelerle ilgilidir. Confrey a/b'nin anlamı için 3 önemli yapı tanımlamıştır. Oran olarak a/b, kesir olarak a/b ve işlemci olarak a/b. Confrey bu üç rasyonel sayı muhakeme yapısının temeli olarak eş dağılım/bölüşüm yapısını tanımlamıştır. Özellikle eş dağılım üzerine olan araştırmalar göstermektedir ki rasyonel sayı muhakemesine dayanan çarpımsal muhakeme, sayma ve toplama mantığından farklı olarak bilişsel köklere sahiptir. Buna ek olarak çocuklar küçük yaşlarda toplama ve çıkarmadan bağımsız olarak çarpımsal muhakemeyi geliştirirler. Var olan müfredatta rasyonel sayılarda eşdağılımın, bölmenin, çarpmanın, oranın ve kesirlerin paralel olarak gelişimi sağlanmadan tekrarlı toplamalarla çarpma tanıtılmaktadır. Çocuklara çarpmayı yalnızca geniş bir toplama konusu olarak anlatmak onlarda çarpımsal muhakemeyi engellemektedir. Bu bağlamda Confrey ve arkadaşları bir akademik yıl içinde ve akademik yıllar boyunca çocukların rasyonel sayıları öğrenmelerindeki ilerlemenin haritasını çizmek amacıyla öğrenme yörüngelerine dayalı tanılayıcı ölçümler geliştirmişlerdir.

Tablo 4: Uzunluk Ölçümüyle İlgili Öğrenme Yörüngesi (Sarama & Clements, 2009, ss. 48)

Gelişimsel İlerleme	Kavramsal Yapı ve Stratejiler	Öğretimsel Görevler
5 yaş: Dolaylı Uzunluk Karşılaştırmaları: Üçüncü bir nesne ile onları temsil eden iki nesnenin uzunluğunu karşılaştırır. Sayım sırasında eşit uzunlukta birimler olmadan, tahmin yoluyla veya uzunluk boyunca hareket ettirerek uzunluk atayabilir. Cetvel kullanabilir, ancak sık sık anlayış ya da beceriden yoksundur.	Belirli bir uzunluğun zihinsel imajı inşa edilir, korunur ve bir derece manipule edilir. Bazı nesnelere algısal destek sağlanmasıyla birlikte bu imgeler karşılaştırılabilir. Sayma şemaları, mesafe ve hareketin sezgisel birimleri üzerinde çalışır.	**Bir Uçtan Diğer Uca Kaydırma:** Çocuklar dolaylı olarak karşılaştırabilecekleri uzunluk için sayılar hakkında konuşmalıdır. Karşılaştırma yapmak için fiziksel yada çizgili birimleri bir objenin yanı sıra kullanmalıdır. Uzun ince birimlere odaklanmalı ve karşılaştırmalar yapmak için onları saymaya yardımcı olmalıdır. Herhangi bir nesnenin doğrusal yönünü vurgulamalı ve ince uzun nesneleri biriktirilebilecek üniteler olarak kullanmalıdır.
6 yaş: Bir Uçtan Diğer Uca Uzunluk Ölçer Ölçücü: Birimleri bir uçtan bir uca uzatır. Eşit uzunluk birimlerini tanıyamaz. Daha sonra bu seviyede durumları karşılaştırmak için ölçüm sonuçlarını karşılaştırma yeteneği gelişir. Uzunlukları karışla ölçmek için bir dizi birime ihtiyaç duyar.	Kısa uzunlukların tekrarı olarak oluşturulabilen uzunluk kavramı, bir uçtan bir uca uzanan uzunluk şemasının temelini oluşturur. Bu öncelikle küçük sayıdaki birimlerde uygulanır. Bu şemalar, daha açıklayıcı olmaya başlayarak, mesafeyi kaplamayı veya parçalarla uzunlukları oluşturmayı geliştirir.	Çocuklara bir cetvel yaptır ve birimleri (cm, ve inç) ile eşleştirmek için cetvele tikler ve numaralar koy. Öğrencilere sadece bir birimli bir uzunluk söyleyerek bu uzunluğa sahip objeleri tahmin etmeleri istenir. Bir uzunluğu rapor etmek için birimlerin tüm sayı değerlerini ölçen yazılımlar kullan.
7 yaş: Uzunluk Birimiyle İlgilenen ve Tekrarlayan: Bir birimin tekrar kullanımı yoluyla ölçüm yapar (Başlangıçta özensiz olabilir). Açıkça boyutu ve birim sayısını ilişkilendirir, ancak; değişen uzunluklarda birimleri kullanabilir. Bir bütün uzunluğunu elde etmek için uzunlukları ekleyebilir. Ölçmek için tek bir birimi yineler. Az bir yönlendirmeyle cetveller kullanılabilir.	Aktif şemalar, algısal olarak hazır olan objeler boyunca zihinsel birimleri tekrarlayabilme yeteneğini içerir. Fiziksel birimler bir sonraki tekrarlama pozisyonuna taşınırken, her yerleştirme görüntüsü korunabilir. Algısal bağlamların desteğiyle, şema bir nesnenin uzunluğunu ölçmek için daha az sayıda büyük birimlerin gerektiğini tahmin eder. Bu aktif şemalar, ölçüme yardım etmek için tüm ek şemaları saymaya olanak sağlar.	Birimler tutarlı ölçüleri hiçe saydığından dolayı birimlerde boşluk bırakmış ya da onları kapatmış gibi yapın. Sıfır noktasından başlayarak öğrencilere nesneleri çizdirin, ve cetvel uzunluğunca aralıklar ve numaralarla uçtan uca olan ölçülerin koordinasyonunu tartışın. Aynı nesne için farklı büyüklükteki birimlerde ölçüm yapın ve birim uzunluğuna ters varyasyonu açıklayın. Sadece bir birim ile modelini yapması için öğrencilerden onlara bir uzunluğu anlatarak nesneleri tahmin etmelerini isteyin.
8 yaş: Tutarlı Uzunluk Ölçüsü: Bükülmüş bir yolun uzunluğunu parçaların toplamı olarak düşünürler (Bitiş noktaları arasındaki mesafe değil). Özdeş birimlere ihtiyaç olduğunu, farklı birimler arasındaki ilişkiyi, ünitenin bölmelerini, cetvel üzerindeki sıfır noktasını ve mesafe birikimini bilerek ölçüm yapar. Birimleri ve alt birimleri koordine etmeye başlar.	Uzunluk şeması, toplam uzunluk ve birimlerin toplamı olarak bir objenin uzunluğunu eş zamanlı olarak görselleştirme ve anlama yeteneğini içeren ek hiyerarşik parçalara sahiptir. Bu şema eşit uzunluk birimleri ve cetvelle birlikte sıfır noktasının kullanımıyla ilgili sınırlamalar içerir. Birimler kendi hassasiyetini arttırmak için bölümlenmiş olabilir.	Birimin hem alt bölümünü hem yinelenmesini gerektiren nesneleri ve çizgi parçalarını ölçmek için fiziksel bir birim ve bir cetvel kullanın. Dörtte birlik ve sekizde birlik alt birimler oluşturun. Bir bütün olarak veya bir birimin parçası olarak saymak için, kalan boşluk ile nasıl başa çıkılabileceğini tartışın.
9 yaş: Kavramsal Cetvel Ölçüsü: İçsel ölçme aracına sahiptirler. Zihinsel olarak bir objeyi parçalara ayırarak ve parçaları sayarak obje boyunca hareket eder. Ölçümler (bağlı uzunluklar) üzerinde aritmetik işlem yapar. Doğrulukla tahmin eder.	Uzunluk şemalarının içselleştirilmesi, eşit uzunluk parçaları içindeki bir uzunluğun zihinsel olarak parçalanabilmesine veya yansıtarak mevcut veya hayali nesneler üzerine kadar görüntülenmiş bir uzunluğun zihinsel tahminine izin verir.	Eksik ölçümlerde, öğrenciler, kenarların alt kümesi için ölçümler kullanarak şekillerin ölçümlerini açıklamak zorundadırlar. Birim ve kompozit birimler için kriterler geliştirmek de dahil olmak üzere uzunlukları tahmin için açık stratejiler oluşturmaya öğrencileri teşvik edin.

Tablo 5: Toplama ve Çıkarma İşlemleri İçin Öğrenme Yörüngeleri: Gelişimsel Yol İçin Örnek Seviye ve Öğretimsel Aktiviteler (Clements & Sarama, 2009, ss. 65)

Yaş	Gelişimsel Yol Örnek Seviye	Öğretimsel Görevler Aktiviteler
5	**Değişik Olanı Bul:** Çocuklar eksik olan toplananı nesne üzerine ekleme yaparak bulurlar (5+…=7)	**Sözel problem**: Örneğin, çocuğa "5 topa sahipsin ve sonra biraz daha top alıyorsun, şimdi 7 topun var, kaç tane daha top aldın?" şeklinde soru sorulur. Çocuklar böyle problemleri çözmek için iki renk kullanırlar. **Şimdi Kaç Tane? Problemler.** Örneğin, kutuya nesne yerleştirdikçe çocuklar sayıyor, şimdi kutuda kaç tane var diye soruyorsun. 1 ekledin ve soruyu tekrarlıyorsun. Sonra çocukların cevabını objeleri sayarak kontrol ettin. Soruyu tekrarlayıp, cevapları kontrol ettin. Çocuklar hazır olduğunda 2 ekleme yaptın ve zamanla daha fazla eklemeler yaparak soruyu tekrar ettin.
5 1/2	**Sayma stratejileri:** Çocuklar birleştirme problemleri için toplamı bulurlar (8 elmaya sahipsin ve 3 tane daha aldın.) ve parça-bütün problemler (6 kız ve 5 erkek…) parmakla sayma modeli (parmakları kullanarak hızlıca niceliği tanımlamak). **Parmak Hesabı:** Öğretmen "4, 3 daha kaç eder" diye sorar. Çocuklar hep beraber "4, 5, 6, 7" diye tekrar ederler (ritmik saymayı veya adım adım parmakla saymayı takip ederler.). **Toplamak (Hesap etmek):** Çocuk kayıp olan ekleneni bulabilir (3+…=7) veya üzerine sayarak karşılaştırır. Örneğin çocuk 4, 5, 6, 7 şeklinde parmaklarını kullanarak sayar ve yukarı kaldırdığı parmakları da sayarak boş olan değeri bulabilir, veya öğretmen sorar "6 topa sahipsin, 8 top olması için kaç tane daha topa ihtiyacın var?" Çocuklar hep birlikte 6, 7 der (parmalarını kullanarak) ve havada olan parmakları 2 tanedir, dolayısıyla sonucun iki olduğunu söylerler.	**İkişerli Karşılaştırma:** Çocuklar hangisinin daha büyük olduğunu belirlemek için 2 kartı karşılaştırır. Öğretmen çocukların sayının üstüne sayma gibi daha sofistike stratejiler kullanması için destekler. **Parlak Fikir:** Sayılı ve noktalı kare kullan. Çocuklara sayılardan toplam miktara kadar saydır. Sonra oyun tahtasındaki boş alana ilgili sayıyı taşısınlar.
6	**Parça-Bütün:** Çocuk başlangıçtaki parça-bütün anlayışına sahiptir ve esnek stratejiler kullanarak önceki problem tiplerinin hepsini çözebilir (Bazı bilinen kombinasyonları kullanır 5+5=10 gibi).	**Gizli Nesne:** 4 sayısını siyah örtünün altına gizle ve çocukları 7 sayısını göster. Onlara 4 sayısını gizlediğini söyle ve toplam sayının kaç olduğunu sor veya toplamın 11 olduğunu söyle gizli olanı bulmalarını söyle. Çocuklar çözüm stratejilerini tartışsın, bu soruyu farklı toplamlar için sorabilirsin. **Barkley'in Kemikleri:** Çocuklar problemdeki boş olan toplananı bulsun. (4+… =7)
7	**Türetici:** Çocuk tüm problem tiplerini çözmek için esnek stratejiler ve türetilmiş kombinasyonlar kullanır (7+7=14 bu yüzden 7+8=15).	**Yirmi Bir:** Bu kart oyunu oyna. Bu oyun birinin kartlarda 21 elde etmesi veya 21'e olabildiğince yaklaşmasıyla biter. Her devrede eğer oyuncu 21'den az toplam elde ederse bir kart alabilir veya vazgeçmeyerek devam eder. Herkes bitirene kadar oyun devam eder. Toplamda 21'e en çok yaklaşan kazanır. **Çok Basamaklı Toplama:** 28+35=?

Öğrenme Yörüngelerinin Öğretimde Kullanılması ve İlgili Çalışmalar

Son zamanlarda araştırmacılar dikkatlerini, öğrenme yörüngelerinin öğretimde nasıl kullanılabileceği ve öğrencilerin başarılarına etkisinin nasıl olacağı hususuna çevirmişlerdir. Bu bağlamda öğretmenlerle pek çok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalar bir veya birkaç öğretmenden oluşan durum çalışmaları olabildiği gibi (Bardsley, 2006; Brown, Sarama & Clements 2007; Edgington, 2012) çok sayıda okulda birçok öğretmenle yapılan geniş çaplı çalışmalar şeklinde de olabilmektedir (Clements, Sarama, Wolfe & Spitler, 2013; Wilson, 2009). Bir okul öncesi öğretmeniyle yapılan araştırmada, Brown, Sarama ve Clements (2007) öğrenme yörüngeleri ile ilgili olarak öğretmeni birkaç yönden değerlendirmişlerdir. Bunlar, öğrencilerin gelişimsel seviyelerine dayalı açık amaçlar düzenleme, görev seçme ve değiştirme, öğrencilerin kavramalarını sağlamlaştırmaya yardım etmesi için öğrencilerin meşgul olacağı görevlerin oluşturulması şekindedir. Öğretmen, "öğrenme yörüngeleri benim esnek olmama, uyarlama yapabilmeme ve çocukların değişen ihtiyaçlarına cevap verebilmeme izin veriyor" şeklinde görüşünü ifade etmiştir (Brown & diğ., 2007). Bir diğer bulgu ise öğretmenlerle yapılan görüşmelerde öğrenme yörüngeleri için öğretmenler derin matematiksel bilgileri (Mojica, 2010) ve öğretme kararlarını etkilemek için öğrenci düşüncelerini kullanma (Bardsley, 2006; Mojica, 2010), öğrencilerin çalışmalarını daha detaylı tasvir etmek (Wilson, 2009), öğrencilerin kavramalarını anlamlandırmak (Confrey, 1990), gelişimsel-uygun aktiviteler seçmek (Brown, Sarama & Clements, 2007), öğrenci düşüncelerini tartışmak amacıyla öğretmenler için ortak dil kullanımı sağlamak (Wilson, 2009) ve öğrencilerin kavram yanılgılarını (Edgington, 2012) ortaya çıkarmada faydalı olduklarını beyan etmişlerdir (akt. Myers, 2014).

Wilson (2009) 12 hafta boyunca, öğretmenlerin öğretimde öğrenme yörüngelerini nasıl kullandıklarıyla ilgili bir araştırma yapmıştır. Wilson öğrenme yörüngelerinin öğretmenlere öğretimsel görevleri seçmeleri için teorik bir çerçeve sunduğu, sınıf içi tartışmalarda öğrencileri etkileşime yönlendirdiği ve öğrencilerin görevlerini analiz ettiğini söylemiştir. Benzer olarak Mojika (2010) 56 öğretmene 8 haftalık bir çalışma içerisinde öğrenme yörüngelerini öğretmiştir. Sonuç olarak öğretmenlerin kendi matematik bilgilerini daha da derinleştirmek için anladıkları şekilde öğrenme yörüngelerini kullandıkları sonucuna ulaşmıştır. Buna ek olarak öğrenme yörüngesi bilgisi, öğretmen adaylarına, öğretimle ilgili kararlar alırken öğrencilerin düşüncelerini dikkate alma açısından yardımcı olmuştur.

Daro ve diğ. (2011) çeşitli konu içerikleriyle ilgili 18 farklı matematik öğrenme yörüngesi toplamıştır. Öğrencileri, bir seviyeden diğer bir seviyeye taşımak üzere bu öğrenme yörüngeleri için öğrenme aktiviteleri düzenlemiştir. Daro ve diğ. (2011) yapmış oldukları analizlerde var olan öğrenme yörüngelerinin uzunluk, boyut, kavram yanılgıları ilgili olduğunu göstermişlerdir. Aynı zamanda öğrenme yörüngelerindeki görevlerin çeşitli olduğunu ifade etmişlerdir. Bazı öğrenme yörüngelerindeki belli görevler daha karmaşık anlamalara ulaşmak için düzenlenmişken, diğerleri çeşitli noktalarda öğrencilerin matematiksel düşüncelerini ortaya çıkarmak üzere oluşturulduğunu ifade etmişlerdir. Battista (2006) öğrenme yörüngesi ile ilgili yaptığı çalışmada, öğrenme yörüngesinin bilişsel tabanlı değerlendirme sisteminin bir parçası olduğu ve matematiksel bilginin öğretmenlere, öğrencilerin konuyu anlamaları için onlara bir çerçeve sağladığı ve sınıf içi değerlendirmelerde öğrencilerin düşüncelerini ortaya çıkarmak amacıyla öğretmenlere ilgili görevleri tasarlamaya yardımcı olduğunu ifade etmiştir.

Öğrenme yörüngeleri ile öğretim arasındaki ilişki öğrenme yörüngelerinin gelişimiyle beraber öğretmeye dayalı öğrenme yörüngelerinin gelişimini gerekli kılmıştır (Sztajn & diğ., 2012). Ball, Thames ve Phelps (2008) etkili öğretmenin, derste aktif olduğu esnada öğretim için matematiksel bilgilerini uygulayabilir olmaları gerektiğini söylemiştir. Bu süreçte öğretmenlerin, öğrencilerin öğrenme amaçlarının, öğrenmeyi geliştirmek için uygun matematiksel görevlerin ve öğrencinin öğrenmesi hakkında varsayım yapabileceğinin farkında olmaları gerekmektedir (Simon, 1995; Simon & Tzur, 2004). Aslında etkili bir öğretmen, öğrencinin bilişsel ilerlemeleri için bir yol taslağı çizmek adına hipotezsel öğrenme yörüngeleri üretmeli olduğu düşünülmektedir (Simon, 1995). Bu yolla öğretmenler derslerini düzenleyerek oluşacak etkili öğrenmeler için öğretimsel kararlar verebilirler (Bumen, 2007; Gilbert & Musu, 2008).

Clements, Sarama, Spitler, Lange ve Wolfe (2011) öğrenme yörüngelerinin etkililiğini değerlendirmek amacıyla 42 okulda çalışma yapmışlardır. Sonuç olarak öğrenme yörüngesinin kullanıldığı okullarda, kontrol grubundaki okullara nazaran öğrencilerin matematiksel bilgilerindeki gelişimin daha büyük olduğu ortaya çıkmıştır. Bunlara ilaveten, müdahele edilen öğretmenlerin sınıf içi uygulamaları incelenmiş ve bu öğretmenlerin öğrencilere karşı daha çok sorumluluk hissettiğini ve sınıfta kendiliğinden gelişen matematik öğretimiyle ilgili durumlardan yarar sağlama noktasında daha iyi oldukları sonuçlarına ulaşılmıştır.

Myers (2014) öğretmenlerin adil bir öğretim sağlamak amacıyla öğrenme yörüngelerini nasıl kullandıklarını öğrenmek amacıyla düzenlenmiş bir nitel araştırma yapmıştır. Yapmış olduğu araştırmada, sınıflarda öğrenciye ulaşabilmek amacıyla, öğrencilerin başarılarını arttırmak için hangi yollarla öğrenme yörüngelerini kullanmalıdır, öğrenme yörüngeleri öğrencilerin kendilerini tanımlamasında etkili olması için nasıl kullanılmalıdır gibi sorulara cevap aramıştır. Öğretmenlerle yaptığı bu çalışmada öğrenme yörüngelerini sınıflarda öğretmenlere uygulatarak etkililiği üzerine görüşmeler yaparak veriler toplamıştır.

Bu durum çalışmasında öğrenme yörüngelerinin potansiyel yararlarını ve eşit öğretimle ilgili öğrenme yörüngelerine bağlı öğretimin yararları olduğunu ortaya çıkarmıştır.

Öğretmenlerin öğrenme yörüngelerini kullanımı üzerine yapılan çalışmalar göstermiştir ki; öğretmenler öğrenme yörüngelerini anladıkça, matematik bilgilerinin gelişmesine, öğretim aktivitelerinin seçimine destek olduğuna, sınıf içinde öğrencilerin etkileşim haline girmesini sağladığı ve daha fazla öğrenme için öğrenci cevaplarının kendi yararlarına kullanımına hizmet ettiği görülmektedir. Ayrıca öğrenme yörüngelerinin ve öğrenme yörüngesi tabanlı öğretimin adil öğretimin sağlanması için kullanışlı yapılar olduğu sonucuna varıldığı gibi, tek başına kullanılmalarının yetersiz olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Matematik gerek ilköğretimde olsun gerekse daha sonraki eğitim seviyelerinde öğrencilerin başarısı için oldukça önemli bir derstir. Öğrenme yörüngeleri, öğrencilerin yaratıcılığını ve matematik anlayışlarını geliştirmelerinde oldukça güçlü bir araç olarak karşımıza çıkmaktadır (Sarama & Clements, 2009). Öğrenme yörüngeleri matematik öğretimini geliştirmek için bir araç olarak büyük bir öneme sahiptir. Ayrıca müfredat ve değerlendirmelerde daha iyi gelişim sağlamada büyük önem taşımaktadır. Öğrenme yörüngeleri her çocuğu yüksek yeterlik seviyesine getirme noktasındaki öğretmenler için yeni bir araç olması açısından önemlidir (Daro & diğ, 2011). Dolayısıyla matematik eğitimcileri ve eğitim kurumları önemli bir çalışma alanı olarak matematik eğitimindeki öğrenme yörüngesi üzerine olan araştırmaları fark etmelidirler.

Öğretim kurum ve kuruluşları, eğitimciler öğrenme yörüngeleriyle ilgili önemli boşluğu doldurmak için yeni araştırmalara ve geliştirme projelerine başlamalıdır. Matematikte öğrenme yörüngeleri anlayışımızda önemli boşluklar olduğu düşünülmektedir. Cebir, geometri, ölçme, oran-orantı ve yüzde, matematiksel akıl yürütmenin gelişimi gibi konularda özellikle öğrenme yörüngelerine ihtiyaç olduğu (Daro & diğ., 2011) ve bu alanlardaki boşlukları doldurmak için ivedilikle bir ulusal girişime ihtiyaç olduğu fark edilmiş ve öğrenme yörüngelerini yerleştirmek ve pekiştirmek için çalışmaların gerekliliği ortaya çıkmıştır. Örneğin, sayma ve çarpımsal düşünmeyle ilgili matematik eğitimindeki farklı araştırmacılar, kendi öğrenme yörüngelerini geliştirebilir ve deneysel çalışmalarla test edilerek programa entegre konusunda öneriler sunabilirler. Literatürde yer alan hazır öğrenme yörüngeleri geniş bir matematik eğitimci kitlesine tanıtılmalı ve öğretmenlerle paylaşılarak, onlar için kullanışlı bir araç olması için desteklenmelidir. Öğretmenler ve okul tarafından kullanılan öğrenme yörüngeleri tabanlı değerlendirme araçlarının gelişimi için araştırmalar yapılmalıdır. Matematik eğitimi araştırmacıları, değerlendirme (ölçme) uzmanları, bilişsel bilim adamları, program geliştiriciler ve sınıf öğretmenleri arasında daha fazla işbirliğinin oluşması sağlanması gerekir ki öğrenme yörüngeleri üzerinde derinlemesine çalışmalar yapılabilsin.

KAYNAKLAR

Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–406.

Bardsley, M.E. (2006). Pre-kindergarten teachers' use and understanding of hypothetical learning trajectories in mathematics education (Doctoral dissertation, State University of New York at Buffalo).

Barrett, J., Clements, D., Cullen, C., McCool, J., Witkowski, C., & Klanderman, D. (2009). Children’s abstraction of iterative units to measure linear space: A trajectory. Paper presented at the *Annual Meeting of the American Educational Research Association* (AERA). San Diego, California.

Battista, M. (2004). Applying cognition-based assessment to elementary school students' development of understanding of area and volume measurement. *Mathematical Thinking and Learning, 6(2),* 185-204.

Battista, M.T. (2006). Understanding the development of students’thinking about length. *Teaching Children Mathematics, 13*, 140–146.

Brown, A.L. & Campione, J.C. (1996). Psychological theory and the design of innovative learning environments: On procedures, principles, and systems. In L. Schauble & R. Glaser (Eds.), *Innovations in learning: New environments for education* (pp. 289-325). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Brown, C.S., Sarama, J., & Clements, D.H. (2007). Thinking about learning trajectories in preschool. *Teaching Children Mathematics, 14,* 178-181.

Bumen, N.T. (2007). Effects of the original versus revised Bloom's Taxnomy on lesson planning skills: A Turkish study among pre-service teachers. *Review of Education, 53*(4), 439–455.

Catley, K., Lehrer, R., & Reiser, B. (2004). *Tracing a prospective learning progression for developing understanding of evolution*. Washington, DC: National Academy Press.

Clements, D.H., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical thinking and learning, 6*(2), 81-89.

Clements, D.H., Sarama, J, & DiBiase, A.M. (2004). Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Clements D.H., & Sarama J. (2009) *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York, NY: Routledge.

Clements, D.H., Wilson, D.C., & Sarama, J. (2004). Young children's composition of geometric figures: A learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 163-184.

Clements, D.H., Sarama, J., Spitler, M.E., Lange, A.A., & Wolfe, C.B. (2011). Mathematics learned by young children in an intervention based on learning trajectories: A large-scale cluster randomized trial. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*(2), 127-166.

Clements, D.H., Sarama, J., Wolfe, C.B. & Spitler, M.E. (2013). Longitudinal evaluation of a scale-up model for teaching mathematics with trajectories and technologies: Persistence of effects in the third year. American Educational Research Journal, 50(4), 812-850.

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. In R. K. Sawyer (Ed.), *The cambridge handbook of the learning sciences* (pp. 135-152). New York: Cambridge University Press.

Confrey, J., Maloney, A., Nguyen, K., Wilson, P.H., & Mojica, G. (2008). Synthesizing research on rational number reasoning. Working Session at the Research Pre-session of the National Council of Teachers of Mathematics, Salt Lake City, UT.

Confrey, J., Maloney, A., Nguyen, K., Mojica, G., & Myers, M. (2009). *Equipartitioning/splitting as a foundation of rational number reasoning using learning trajectories*. Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 345–353). Thessaloniki, Greece.

Confrey, J., & Maloney, A.P. (2010). *A next generation of mathematics assessments based on learning trajectories*, East Lansing, MI.

Corcoran, T., Mosher, F.A., & Rogat, A. (2009). *Learning progressions in science: An evidence-based approach to reform*. New York: Center on Continuous Instructional Improvement Teachers College–Columbia University.

Daro, P., Mosher, F., & Corcoran, T. (2011). *Learning trajectories in mathematics* (Research Report No. 68). Madison, WI: Consortium for Policy Research in Education.

Edgington, C. (2012). Teachers' uses of a learning trajectory to support attention to student thinking in themathematics classroom. (Unpublished doctoral dissertation). North Carolina State University, Raleigh NC.

Gilbert, M.C., & Musu, L.E. (2008). Using TARGETTS to create learning environments that support mathematical understanding and adaptive motivation. *Teaching Children Mathematics*, *15*(3), 138–143.

McCool, J.K. (2009). Measurement learning trajectories: A tool for professional development. Illinois State University.

Maloney, A.P., & Confrey, J. (2010). *The construction, refinement, and early validation of the equipartitioning learning trajectory*. Paper presented at the 9th International Conference of the Learning Sciences, Chicago, IL.

Mojica, G. (2010). *Preparing pre-service elementary teachers to teach mathematics withlearning trajectories*. Unpublished doctoral dissertation. North Carolina State University, Raleigh, NC. Raleigh, NC.

Myers, M. (2014). The Use of Learning Trajectory Based Instruction (LTBI) in Supporting Equitable Teaching Practices in Elementary Classrooms: A Multi-Case Study.

Nguyen, K.H. (2010). Investigating the Role of Equipartitioning and Creating Internal Units in the Construction of a Learning Trajectory for Length and Area. ProQuest LLC. 789 East Eisenhower Parkway, PO Box 1346, Ann Arbor, MI 48106.

Sarama, J., & Clements, D.H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. New York, NY: Routledge.

Simon, M.A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*, 114–145.

Simon, M., & Tzur, R. (2004) Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 91 104.

Sztajn, P., Confrey, J., Wilson, P.H., & Edgington, C. (2012). Learning Trajectory Based Instruction Toward a Theory of Teaching. *Educational Researcher*, *41*(5), 147-156.

Wilson, P.H. (2009). *Teachers' uses of a learning trajectory for equipartitioning*. Unpublished doctoral dissertation. North Carolina State University. Raleigh, NC.