Ecesu DUMAN[1*]

[1]Sivas Bilim ve Sanat Merkezi, Sivas / Türkiye
[1]Sivas Science and Art Center, Sivas / Turkey
[*]ecesuduman@hotmail.com
[1]**ORCID:** 0000-0002-1281-463X

MAKALE BİLGİSİ / ARTICLE INFORMATION

Geliş Tarihi / Date Received
25.10.2019

Kabul Tarihi / Date Accepted
17.12.2019

Yayın Tarihi / Date Published
Aralık / December 2019

Yayın Sezonu / Pub Date Season
Aralık-Haziran / December - June

ATIF / CITE as

Duman, E. (2019). "Benzer Dizilerin Benzer Özellikleri" / "Similar Characteristics of Similar Series". bilar: Bilim Armonisi Dergisi, 2 (2): 65-85. doi: 10.37215/bilar.2019257651

https://dergipark.org.tr/tr/pub/bilar

Benzer Dizilerin Benzer Özellikleri*

Similar Characteristics of Similar Series

ÖZET

Matematiğin en önemli konularından biri diziler; dizilerin en dikkat çekenlerinden biri de Fibonacci dizisidir. Bu çalışmanın amacı, Fibonacci dizisine benzer diziler oluşturup bu dizilerin Fibonacci dizisinin özelliklerine benzer özellikleri olup olmadığını araştırmak ve varsa bu özellikleri ispatlamaktır. Bilindiği gibi Fibonacci dizisinde her bir terim, kendisinden önceki iki terimin toplamına eşittir. Bu çalışmada ise, her bir terimin kendinden önceki iki terimden birinin veya her ikisinin 1'den büyük doğal sayılarla çarpılıp sonrasında toplanmasıyla oluşan diziler ele alınmıştır. Böylece üç farklı dizi ailesi oluşturulmuştur. Birinci ailede, her bir terimin kendisinden önceki terimin k katı $(k=2,3,...)$ ile ondan önceki terimin toplamına eşit olduğu diziler alındı. İkinci ailede, her bir terimin kendisinden önceki terim ile ondan önceki terimin k katının $(k=2,3,...)$ toplamına eşit olduğu diziler alındı. Üçüncü ailede ise her bir terimin kendisinden önceki terimin k katı $(k=2,3,...)$ ile ondan önceki terimin k katının $(k=2,3,...)$ toplamına eşit olduğu diziler alındı. Literatürde bu dizilerden bazılarıyla ilgili çalışıldığı görülmektedir. Bu çalışmada diğer çalışmalardan farklı olarak, Fibonacci dizisinde geçerli olan 7 özellik temele alındı ve bu özelliklerin benzerleri oluşturulan dizilerde arandı. Her bir dizi ailesinden 2'şer tane olmak üzere 6 dizi üzerinde çalışıldı. Çalışmalar sonunda bu dizilerin de Fibonacci dizisindekilere benzer özellikleri sağladığı görülmüştür. Diziler üzerinde 42 özellik elde edilmiş ve bu özellikler ispatlanmıştır. Ayrıca dizilerin oluşum açısından benzerliği olduğu gibi elde edilen özellikler arasında da genellemeye imkân verecek benzerlikler olduğu görülmüştür.

Anahtar Sözcükler: Dizi, Fibonacci, Dizi özellikleri, İspat.

ABSTRACT

One of the most important subjects of mathematics is sequences; and one of the most striking series is Fibonacci series. The purpose of this study is to create series similar to Fibonacci series and to investigate whether these series have characteristics similar to those of Fibonacci series; and to prove these characteristics, if any. As is known, in Fibonacci, each term is equal to the sum of the two preceding terms. In this study, the series formed by one of two terms or both terms before each term are multiplied by natural numbers greater than 1 and then summed, were discussed. As a result, three different series families were formed. In the first family, the series were taken in which each term was equal to the sum of k-fold of $(k=2,3,...)$ the previous term and the two previous terms. In the second family, series were taken in which each term was equal to the sum of the previous term and the k-fold of $(k=2,3,...)$ the two previous terms. In the third family, series were taken in which each term was equal to the sum of k-fold of $(k=2,3,...)$ the previous term and k-fold of $(k=2,3,...)$ the two previous terms. It is seen that some of these series have been studied in the literature. In this study, unlike other studies, seven characteristics which are valid in Fibonacci series were taken as basis and then similar characteristics were searched in the generated series. 6 series were studied by taking 2 from each family. As a result of the studies, it was observed that these series bear similar characteristics to those of Fibonacci series. 42 characteristics were obtained on these series and were proved. In addition, it was observed that there were similarities in terms of formation as well as similarities between the obtained characteristics that would enable generalization.

Keywords: Series, Fibonacci, Characteristics of series, Proof.

*Bu çalışma, 50. TÜBİTAK Lise Öğrencileri Araştırma Projeleri Yarışması Kayseri Bölge sergisinde sunulmuştur.

1. GİRİŞ

Günlük hayatta genellikle nesnelerin ya da insanların arka arkaya sıralanmış halini ifade etmek için kullanılan "dizi" kelimesi, matematikte de bu anlamından pek fazla uzaklaşmamıştır. Bu kez nesneleri sayılar olan bir alanda belli bir ilişkiye veya ortak özelliğe göre sıralanmış sayıları ifade etmek için kullanılmaktadır. Asal sayıların oluşturduğu sıralamalar, beşin katı olan doğal sayıların oluşturduğu sıralamalar, üçgensel sayıların oluşturduğu sıralamalar matematikteki dizi örneklerinden bazılarıdır. Kuşkusuz en ünlü dizilerden biri "Fibonacci Dizisi"dir. Leonardo Fibonacci, (1175-1250) Liber Abaci adlı kitabında bir problem ve problemin çözümünü vererek bu diziden bahsetmiştir. Problem şu şekildedir (Pappas 2007): Bir aylık bir çift tavşan var. Bunlar ancak iki aylık olduklarında yavrulamaya başlayabilir. Bu tavşan çiftin iki aylık olduktan sonra her ay yeni bir çift tavşanı doğduğunu varsayalım. Eğer dünyaya gelen her yeni çift de yukarıda belirtildiği gibi yavrularsa, her ayın başında kaç çift tavşan olur? Bu problem çözüldüğünde ilk aydan itibaren tavşan sayılarının 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,... şeklinde ilerlediği görülür. Biraz daha incelendiğinde her bir sayının kendisinden önceki iki sayının toplamı olduğu görülür. İşte bu sayılar Fibonacci dizisinin terimleridir.

Fibonacci dizisindeki ardışık sayıların çam kozalağı, ayçiçeğinin çekirdek dizilimi, ağaçların dallanma biçimleri gibi doğanın pek çok yerinde insanların karşısına çıkması ve bu dizinin terimlerinin bir önceki terime bölümünün güzelliğin ölçüsü altın orana gittikçe yaklaşması Fibonacci dizisinin büyüsünü arttırmıştır. Pek çok insan bu dizi üzerinde araştırma yapmıştır. Hatta Fibonacci dizisinden esinlenerek Lucas, Pell, Jacobsthal gibi yeni diziler oluşturulmuş ve bunlar üzerinde çalışılmıştır. Köken (2008), çalışmasında Fibonacci ve Jacobsthal dizilerinin bir genelleştirilmesi olarak k-Jacobsthal dizilerinin, Lucas ve Jacobsthal Lucas dizilerinin bir genelleştirilmesi olarak da k-Jacobsthal Lucas dizilerinin tanımları ve özelliklerini vermiştir. Bolat (2008), k-Fibonacci sayılarının tanımından faydalanarak k-Lucas sayıları elde etmiş, bu sayılarla ilgili bazı özellikler ve uygulamalar göstermiştir. Güleç'in (2014) çalışmasında, Pell ve Pell-Lucas sayı dizilerinin özellikleri incelenmiş, bu dizilerin matris dizileri üzerinde durulmuştur. Altun (2016) ise genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas polinomlarında yeni bir aile elde ederek bu aile ile ilgili teorem ve özellikler bulmuştur. Bu çalışmada Fibonacci dizisinden ilham alarak benzer diziler oluşturulmuştur. Yapılan literatür taramasında bunların matematik dünyasında var olan diziler olduğu görülmüştür. Ancak bu konulardaki çalışmalardan farklı olarak benzer yöntemlerle oluşturulan dizileri hep birlikte, aralarındaki ilişkileri göstererek ve en önemlisi bu dizilerin sağladığı özellikleri bulup ispatlayarak ilerlenmiştir.

Bildiğimiz gibi Fibonacci Dizisi aşağıda verildiği gibi her bir terimin kendisinden önceki iki terimin toplamı olarak alınmasıyla oluşmuştur.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	...	a_n
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...	$a_{n-1}+a_{n+2}$

Bu dizinin pek çok özelliği vardır. Bu ilginç özelliklerden bazıları şu şekildedir (Maksudov ve Veliev 1993):

1. $a_1+a_2+a_3+...+a_n=a_{n+2}-1$
2. $a_1+a_3+a_5+...+a_{2n-1}=a_{2n}$
3. $a_2+a_4+a_6+...+a_{2n}=a_{2n+1}-1$
4. $a_1-a_2+a_3-...+(-1)^{n+1}.a_n=(-1)^{n+1}.a_{n-1}+1$
5. $a_1^2+a_2^2+a_3^2+...+a_n^2=a_n.a_{n+1}$
6. $a_{n+m}=a_{n-1}.a_m+a_n.a_{m+1}$
7. $a_{2n}=a_{n+1}^2-a_{n-1}^2$

Bu çalışmada da Fibonacci dizisinin oluşum özelliğinden ilham alınarak yeni diziler oluşturmaya çalışılmış ve bu dizilerin yukarıda verilen Fibonacci dizisinin 7 temel özelliğinin benzerlerini sağlayıp sağlamadığı üzerinde düşünülmüştür. Temelde 3 dizi ailesi alınmıştır. Kolaylık olması açısından her bir dizi ailesine sadece bu çalışma için geçerli isimler verilmiştir:

- **1K Ailesi:** Her bir terimin kendisinden önceki terimin k katı (k=2,3,...) ile ondan önceki terimin toplanmasıyla oluşan diziler. Literatürde k-bonacci dizileri olarak geçmektedir (Bolat 2008). $a_0=0$ ve $a_1=1$ olmak üzere $a_n=k.a_{n-1}+a_{n-2}$. k=2 için elde edilen versiyonuna Pell dizisi denilmektedir (Güleç 2014).
- **K1 Ailesi:** Her bir terimin kendisinden önceki terim ile ondan önceki terimin k katının (k=2,3,...) toplanmasıyla oluşan diziler. $a_0=0$ ve $a_1=1$ olmak üzere $a_n=a_{n-1}+k.a_{n-2}$. k=2 için elde edilen versiyonuna Jacobsthal dizisi denilmektedir (Köken, 2008).
- **KK Ailesi:** Her bir terimin kendisinden hemen önceki iki terimin toplamının k katı olan diziler. $a_0=0$ ve $a_1=1$ olmak üzere $a_n=k.(a_{n-1}+a_{n-2})$

1.1. Amaç

Bu çalışmanın amacı Fibonacci dizisine benzer diziler oluşturup bu dizilerin Fibonacci dizisinin özelliklerine benzer özellikleri olup olmadığını araştırmak ve varsa bu özellikleri ispatlamaktır.

1.2. Problem

Fibonacci dizisine benzer şekilde oluşturulan dizilerin, Fibonacci dizisinin özelliklerine benzer özellikleri bulunabilir mi?

Çalışmanın alt problemleri şu şekildedir:

- Fibonacci dizisine benzer şekilde oluşturulan dizilerin temel özellikleri nelerdir?
- Fibonacci dizisine benzer şekilde oluşturulan dizilerin, Fibonacci dizisinin özelliklerine benzer özellikleri var mıdır?
- Oluşturulan dizilerin varsa bulunan özellikleri nasıl ispatlanır?
- Oluşturulan dizilerin bulunan özellikleri birbiriyle ilişkili midir?

1.3. Tanımlar

Dizi: $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinden X'e tanımlı her fonksiyona bir dizi denir (Argün, Arıkan, Bulut, Halıcıoğlu 2014).

Dizinin Terimi: $\{a_n\}$ bir dizi olsun. Her $i \in \mathbb{N}$ için a_i'ye dizinin bir terimi ve a_n'ye dizinin genel terimi denir (Argün ve diğ., 2014).

Fibonacci Dizisi: $f_0=0$ ve $f_1=1$ olmak üzere, terimleri $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ şeklinde olan dizidir. Yani her bir terimi kendisinden önceki iki terimin toplamına eşittir.

2. MATERYAL ve METOT

Dizilerin hepsinde $a_0=0$ ve $a_1=1$ başlangıç terimleri alınarak 3 farklı dizi ailesi ele alınmıştır. Oluşturulan dizi ailelerinin her birinde k=1 alındığında klasik Fibonacci dizisi çıkmaktadır. O yüzden her bir dizi ailesi için k=2 değeri ve k=3 değeri alınarak elde edilen dizilerin özellikleri bulunmuştur. Özellikler bulunmaya çalışılırken öncelikle Fibonacci dizisinin özellikleri iyice incelenmiştir. Yeni dizilerde her bir özelliğin nasıl değişebileceğiyle ilgili tahminlerde bulunularak ilk başlarda deneme-yanılmalarla bazı özellikler bulunmuştur. İspatlara geçildikten sonra özelliklerin nasıl oluştuğu daha iyi anlaşıldığı için geri kalan özelliklerde deneme-yanılma kullanılmamıştır. Her bir dizinin temel oluşum özellikleri kullanılarak özellikler daha rahat ortaya çıkarılmıştır. İspatlarda ise daha çok doğrudan ispat yöntemi kullanılmak üzere yer yer tümevarımla ispat yöntemi de kullanılmıştır. İspatlar sırasında genellikle ilgili dizinin temel oluşum özelliği kullanılmıştır ve bazı yerlerde "[]" içinde açıklama eklenmiştir.

3. BULGULAR

Bu bölümde öncelikle her bir dizi ailesinin nasıl oluştuğundan kısaca bahsedilmiş, bu dizilerden elde edilebilecek sabit oranlardan bahsedilmiştir. Bu kısımlar çalışmanın temel konusu olan özellikler kısmının daha detaylı verilebilmesi için ispatları yapılmadan özet geçilmiştir. Daha sonra da her bir dizi ailesinde k=2 ve k=3 değerleri için elde edilen dizilerin Fibonacci dizisindekilere benzer özellikleri bulunmuş ve ispatlanmıştır.

3.1. 1K Dizi Ailesi ve Özellikleri

Bilindiği gibi Fibonacci dizisinde her bir terim kendinden önceki terime bölümü altın orana yaklaşır. Burada ikinci dereceden denklemleri kullanarak $a_n=k.a_{n-1}+a_{n-2}$ şeklindeki diziler için de benzer şekilde her bir terimin kendinden önceki terime bölümünün hangi sayılara yaklaşacağı araştırılırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

k=1 için Altın Oran $=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ k=2 için Gümüş Oran $=\dfrac{2+\sqrt{8}}{2}$ k=3 için Bronz Oran $=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$ k=n için Sabit Oran $=\dfrac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}$

3.1.1. 1K Dizi Ailesindeki k=2 Dizisinin Özellikleri

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	...	a_n
1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	...	$2.a_{n-1}+a_{n-2}$

1) $a_1+a_2+a_3+...+a_{n-1}+a_n=\dfrac{a_{n+1}+a_n-1}{2}$

İspat: $a_1+a_2+a_3+...+a_{n-1}+a_n$

$$= a_1 + \left(\frac{a_3 - a_1}{2}\right) + \left(\frac{a_4 - a_2}{2}\right) + \left(\frac{a_5 - a_3}{2}\right) + \left(\frac{a_6 - a_4}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{a_n - a_{n-2}}{2}\right) + \left(\frac{a_{n+1} - a_{n-1}}{2}\right)$$

$$= a_1 + \frac{a_3}{2} - \frac{a_1}{2} + \frac{a_4}{2} - \frac{a_2}{2} + \frac{a_5}{2} - \frac{a_3}{2} + \frac{a_6}{2} - \frac{a_4}{2} + \ldots + \frac{a_n}{2} - \frac{a_{n-2}}{2} + \frac{a_{n+1}}{2} - \frac{a_{n-1}}{2}$$

$$= \frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{2} + \frac{a_n}{2} + \frac{a_{n+1}}{2} = \frac{a_{n+1} + a_n - 1}{2}$$ [a_1=1 ve a_2=2 alınarak düzenlendi.]

2) $a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2n-1} = \dfrac{a_{2n}}{2}$

İspat: $a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2n-3} + a_{2n-1}$

$$= a_1 + \left(\frac{a_4 - a_2}{2}\right) + \left(\frac{a_6 - a_4}{2}\right) + \left(\frac{a_8 - a_6}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{a_{2n-2} - a_{2n-4}}{2}\right) + \left(\frac{a_{2n} - a_{2n-2}}{2}\right)$$

$$= a_1 + \frac{a_4 - a_2 + a_6 - a_4 + a_8 - a_6 + \ldots + a_{2n-2} - a_{2n-4} + a_{2n} - a_{2n-2}}{2}$$

$$= a_1 + \frac{a_{2n-2} - a_2}{2} = \frac{a_{2n} + 2a_1 - a_2}{2} = \frac{a_{2n}}{2}$$ [a_1=1 ve a_2=2 olduğundan]

3) $a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{2n} = \dfrac{a_{2n+1} - 1}{2}$

İspat: 1. özellikte n yerine 2n yazılırsa;

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2n} = \frac{a_{2n+1} + a_{2n} - 1}{2} \quad \ldots (*)$$

2. özellikten;

$$a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2n-1} = \frac{a_{2n}}{2} \quad \ldots (**)$$

(*) eşitliğinden (**) eşitliği taraf tarafa çıkarılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{2n} = \frac{a_{2n+1} + a_{2n} - 1}{2} - \frac{a_{2n}}{2} = \frac{a_{2n+1} - 1}{2}$$

4) $a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n+1}.a_n = \dfrac{(-1)^n\left[a_n - a_{n+1}\right] + 1}{2}$

İspat: 2. ve 3. özelliklerden iki eşitlik yazılır ve taraf tarafa çikarılır:

$$a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2n-1} = \frac{a_{2n}}{2}$$

$$a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{2n} = \frac{a_{2n+1} - 1}{2}$$

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} = \frac{a_{2n} - a_{2n+1} + 1}{2}$$

Bu eşitlikte dikkat edilirse çift indisli terimlerin negatif, tek indisli terimlerin pozitif işaretli olduğu görülür. Bunlara dikkat edilerek ve 2n yerine n alınarak son eşitlik tekrar düzenlenirse:

$$a_1 - a_2 + a_3 - ... + (-1)^{n+1}.a_n = \frac{(-1)^n\left[a_n - a_{n+1}\right] + 1}{2}$$

5) $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2 = \frac{a_n.a_{n+1}}{2}$

İspat: $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + ... + a_{n-1}^2 + a_n^2$

$= a_1^2 + a_2.a_2 + a_3.a_3 + a_4.a_4 + ... + a_{n-1}.a_{n-1} + a_n.a_n$

$= a_1^2 + a_2.\left(\frac{a_3 - a_1}{2}\right) + a_3.\left(\frac{a_4 - a_2}{2}\right) + a_4.\left(\frac{a_5 - a_3}{2}\right) + ... + a_{n-1}.\left(\frac{a_n - a_{n-2}}{2}\right) + a_n.\left(\frac{a_{n+1} - a_{n-1}}{2}\right)$

$= a_1^2 + \frac{a_2.a_3}{2} - \frac{a_1.a_2}{2} + \frac{a_3.a_4}{2} - \frac{a_2.a_3}{2} + \frac{a_4.a_5}{2} - \frac{a_3.a_4}{2} + ... + \frac{a_n.a_{n+1}}{2} - \frac{a_{n-1}.a_n}{2}$

$= a_1^2 - \frac{a_1.a_2}{2} + \frac{a_n.a_{n+1}}{2} = \frac{a_n.a_{n+1}}{2}$ [a_1=1 ve a_2=2 yerine alındı.]

6) $a_{n+m} = a_{n-1}.a_m + a_n.a_{m+1}$

İspat: m'ye göre tümevarım yapalım.

m=1 için doğru mu? $a_{n+1} = a_{n-1}.a_1 + a_n.a_{1+1} \rightarrow a_{n+1} = a_{n-1} + 2a_n$ doğrudur.

m=k için doğru olsun: $a_{n+k} = a_{n-1}.a_k + a_n.a_{k+1}$

m=k+1 için de doğru olur mu?

$a_{n+(k+1)} = a_{(n+1)+k} = a_n.a_k + a_{n+1}.a_{k+1}$ [m=k için doğru demiştik.]

$= a_n.a_k + (2.a_n + a_{n-1}).a_{k+1}$ [Dizinin özelliğinden]

$= a_n.a_k + 2.a_n.a_{k+1} + a_{n-1}.a_{k+1}$

$= a_n.(a_k + 2.a_{k+1}) + a_{n-1}.a_{k+1}$

$= a_n.a_{k+2} + a_{n-1}.a_{k+1}$

m=k+1 için doğru olduğunu göstermiş olur. Öyleyse özellik, dizinin tüm terimleri için geçerlidir.

7) $a_{2n} = \frac{(a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2)}{2}$

İspat: 6. özellik: $a_{n+m} = a_{n-1}.a_m + a_n.a_{m+1}$ idi. Burada m=n alalım:

$a_{n+n} = a_{n-1}.a_n + a_n.a_{n+1}$

$a_{2n} = a_{n-1}.\left(\frac{a_{n+1} - a_{n-1}}{2}\right) + \left(\frac{a_{n+1} - a_{n-1}}{2}\right).a_{n+1}$ [Dizinin özelliğinden]

$= \frac{a_{n-1}.a_{n+1} - a_{n-1}^2 + a_{n+1}^2 - a_{n-1}.a_{n+1}}{2} = \frac{a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2}{2}$ elde edilir.

3.1.2. 1K Dizi Ailesindeki k=3 Dizisinin Özellikleri

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	...	a_n
1	3	10	33	109	360	1189	3927	12970	...	$3.a_{n-1}+a_{n-2}$

1) $a_1+a_2+a_3+...+a_{n-1}+a_n=\dfrac{a_{n+1}+a_n-1}{3}$

İspat: $a_1+a_2+a_3+...+a_{n-1}+a_n$

$$=a_1+\left(\frac{a_3-a_1}{3}\right)+\left(\frac{a_4-a_2}{3}\right)+\left(\frac{a_5-a_3}{3}\right)+\left(\frac{a_6-a_4}{3}\right)+...+\left(\frac{a_n-a_{n-2}}{3}\right)+\left(\frac{a_{n+1}-a_{n-1}}{3}\right)$$

$$=a_1+\frac{a_3}{3}-\frac{a_1}{3}+\frac{a_4}{3}-\frac{a_2}{3}+\frac{a_5}{3}-\frac{a_3}{3}+\frac{a_6}{3}-\frac{a_4}{3}+...+\frac{a_n}{3}-\frac{a_{n-2}}{3}+\frac{a_{n+1}}{3}-\frac{a_{n-1}}{3}$$

$$=\frac{2a_1}{3}-\frac{a_2}{3}+\frac{a_n}{3}+\frac{a_{n+1}}{3}=\frac{a_{n+1}+a_n-1}{3}$$ [a_1=1 ve a_2=3 alınarak düzenlendi.]

2) $a_1+a_3+a_5+...+a_{2n-1}=\dfrac{a_{2n}}{3}$

İspat: $a_1+a_3+a_5+...+a_{2n-1}$

$$=a_1+\left(\frac{a_4-a_2}{3}\right)+\left(\frac{a_6-a_4}{3}\right)+\left(\frac{a_8-a_6}{3}\right)+...+\left(\frac{a_{2n-2}-a_{2n-4}}{3}\right)+\left(\frac{a_{2n}-a_{2n-2}}{3}\right)$$

$$=a_1+\frac{a_4-a_2+a_6-a_4+a_8-a_6+...+a_{2n-2}-a_{2n-4}+a_{2n}-a_{2n-2}}{3}$$

$$=a_1+\frac{a_{2n-2}-a_2}{3}=\frac{a_{2n}+3a_1-a_2}{3}=\frac{a_{2n}}{3}$$ [a_1=1 ve a_2=3 olduğundan]

3) $a_2+a_4+a_6+...+a_{2n}=\dfrac{a_{2n+1}-1}{3}$

İspat: 1. özellikte n yerine 2n yazılıp bu eşitlikten 2. özellik çıkarılsın;

$$a_1+a_2+a_3+...+a_{2n}=\frac{a_{2n+1}+a_{2n}-1}{3}$$

$$a_1+a_3+a_5+...+a_{2n-1}=\frac{a_{2n}}{3}$$

$$a_2+a_4+a_6+...+a_{2n}=\frac{a_{2n+1}+a_{2n}-1}{3}-\frac{a_{2n}}{3}=\frac{a_{2n+1}-1}{3}$$

4) $a_1-a_2+a_3-...+(-1)^{n+1}.a_n=\dfrac{(-1)^n\left[a_n-a_{n+1}\right]+1}{3}$

İspat: 2. ve 3. özelliklerden iki eşitlik yazılır ve taraf tarafa çıkarılır:

$$a_1+a_3+a_5+...+a_{2n-1}=\frac{a_{2n}}{3}$$

$$a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{2n} = \frac{a_{2n+1} - 1}{3}$$

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 ... + a_{2n-1} - a_{2n} = \frac{a_{2n} - a_{2n+1} + 1}{3}$$

Bu eşitlikte dikkat edilirse çift indisli terimlerin negatif, tek indisli terimlerin pozitif işaretli olduğu görülür. Bunlara dikkat edilerek ve 2n yerine n alınarak son eşitlik tekrar düzenlenirse:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^{n+1}.a_n = \frac{(-1)^n \left[a_n - a_{n+1}\right] + 1}{3}$$

5) $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2 = \dfrac{a_n.a_{n+1}}{3}$

İspat: $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + ... + a_{n-1}^2 + a_n^2$

$$= a_1^2 + a_2.a_2 + a_3.a_3 + a_4.a_4 + ... + a_{n-1}.a_{n-1} + a_n.a_n$$

$$= a_1^2 + a_2.\left(\frac{a_3 - a_1}{3}\right) + a_3.\left(\frac{a_4 - a_2}{3}\right) + a_4.\left(\frac{a_5 - a_3}{3}\right) + ... + a_{n-1}.\left(\frac{a_n - a_{n-2}}{3}\right) + a_n.\left(\frac{a_{n+1} - a_{n-1}}{3}\right)$$

$$= a_1^2 + \frac{a_2.a_3}{3} - \frac{a_1.a_2}{3} + \frac{a_3.a_4}{3} - \frac{a_2.a_3}{3} + \frac{a_4.a_5}{3} - \frac{a_3.a_4}{3} + ... + \frac{a_n.a_{n+1}}{3} - \frac{a_{n-1}.a_n}{3}$$

$= a_1^2 - \dfrac{a_1.a_2}{3} + \dfrac{a_n.a_{n+1}}{3} = \dfrac{a_n.a_{n+1}}{3}$ [a_1=1 ve a_2=3 yerine alındı.]

6) $a_{n+m} = a_{n-1}.a_m + a_n.a_{m+1}$

İspat: m'ye göre tümevarım yapalım.

m=1 için doğru mu? $a_{n+1} = a_{n-1}.a_1 + a_n.a_{1+1}$

$a_{n+1} = a_{n-1} + 3.a_n$ [a_1=1 ve a_2=3] dizinin özelliğinden doğrudur.

m=k için, $a_{n+k} = a_{n-1}.a_k + a_n.a_{k+1}$ eşitliği doğru olsun.

m=k+1 için de doğru olur mu?

$a_{n+(k+1)} = a_{(n+1)+k} = a_n.a_k + a_{n+1}.a_{k+1}$ [m=k için doğru demiştik.]

$= a_n.a_k + (3.a_n + a_{n-1}).a_{k+1} = a_n.a_k + 3.a_n.a_{k+1} + a_{n-1}.a_{k+1}$ [Dizinin özelliğinden]

$$= a_n.(a_k + 3.a_{k+1}) + a_{n-1}.a_{k+1} = a_n.a_{k+2} + a_{n-1}.a_{k+1}$$

m=k+1 için doğru olduğunu göstermiş olur. Öyleyse özellik, dizinin tüm terimleri için geçerlidir.

7) $a_{2n} = \dfrac{(a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2)}{3}$

İspat: 6. özellik: $a_{n+m} = a_{n-1}.a_m + a_n.a_{m+1}$ idi. Burada m=n alalım:

$$a_{n+n} = a_{n-1}.a_n + a_n.a_{n+1}$$

$$a_{2n} = a_{n-1}.\left(\frac{a_{n+1} - a_{n-1}}{3}\right) + \left(\frac{a_{n+1} - a_{n-1}}{3}\right).a_{n+1}$$

$$= \frac{a_{n-1}.a_{n+1} - a_{n-1}^2 + a_{n+1}^2 - a_{n-1}.a_{n+1}}{3} = \frac{a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2}{3}$$ elde edilir.

3.2. K1 Dizi Ailesi ve Özellikleri

Fibonacci dizisinde her bir terimin kendinden önceki terime bölümü altın orana yaklaşır. Burada ikinci dereceden denklemleri kullanarak $a_n = a_{n-1} + k.a_{n-2}$ şeklindeki diziler için de benzer şekilde her bir terimin kendinden önceki terime bölümünün hangi sayılara yaklaşacağı araştırılırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

k=1 için Altın Oran $= \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ k=2 için Sabit Oran $= \frac{1+\sqrt{9}}{2}$ k=3 için Sabit Oran $= \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ k=n için Sabit Oran $= \frac{n+\sqrt{4.n+1}}{2}$

3.2.1. K1 Dizi Ailesindeki k=2 Dizisinin Özellikleri

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	...	a_n
1	1	3	5	11	21	43	85	171	341	...	$a_{n-1} + 2.a_{n-2}$

1) $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \frac{a_{n+2} - 1}{2}$

İspat: $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$

$$= \left(\frac{a_3 - a_2}{2}\right) + \left(\frac{a_4 - a_3}{2}\right) + \left(\frac{a_5 - a_4}{2}\right) + \left(\frac{a_6 - a_5}{2}\right) + ... + \left(\frac{a_{n+1} - a_n}{2}\right) + \left(\frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{2}\right)$$

$$= \frac{a_3 - a_2 + a_4 - a_3 + a_5 - a_4 + a_6 - a_5 + ... + a_{n+1} - a_n + a_{n+2} - a_{n+1}}{2}$$

$$= \frac{a_{n+2} - a_2}{2} = \frac{a_{n+2} - 1}{2}$$ [a_1=1 alındı.]

2) $2.a_n = \begin{cases} a_{n+1} + 1, & n \text{ tekse} \\ a_{n+1} - 1, & n \text{ çiftse} \end{cases}$

İspat: n sayısının hem tek sayı hem de çift sayı olma durumları için tümevarımla ispatlayalım. n tek sayı olduğunda $2.a_n = a_{n+1} + 1$ eşitliği, n çift sayı olduğunda $2.a_n = a_{n+1} - 1$ sağlanır mı? Tümevarımın ilk adımında tek ve çift için alınması gereken en küçük sayılardan başladık.

n=1 için doğru mu? $2.a_1 = a_2 + 1 \rightarrow 2.1 = 1 + 1 \rightarrow a_1 = a_2 = 1$ olduğundan sağlandı.

n=2 için doğru mu? $2.a_2 = a_3 - 1 \rightarrow 2.1 = 3 - 1 \rightarrow a_2 = 1 \text{ ve } a_3 = 3$ olduğundan sağlandı.

n=k tek sayısı için $2.a_k = a_{k+1} + 1$ eşitliği, n=k çift sayısı için $2.a_k = a_{k+1} - 1$ eşitliği sağlansın. n=k+1 için doğru mu yani k+1 tek sayı iken $2.a_{k+1} = a_{k+2} + 1$ eşitliği, k+1 çift sayı iken $2.a_{k+1} = a_{k+2} - 1$ eşitliği sağlanır mı?

Öncelikle n=k+1 tek sayı olsun.

$2.a_{k+1} = 2.(a_{k+2} - a_k)$ [Dizinin özelliğinden; $a_{k+2} = a_{k+1} + 2.a_k$]

$= 2.(a_{k+2} - a_{k+1} + 1)$ [k+1 tekse, k çift olur. Bir önceki adımdan $2.a_k = a_{k+1} - 1$]

$2.a_{k+1} = 2.a_{k+2} - 2.a_{k+1} + 2 \rightarrow 4.a_{k+1} = 2.a_{k+2} + 2 \rightarrow 2.a_{k+1} = a_{k+2} + 1$ sağlanmış olur.

Şimdi n=k+1 çift sayı olsun.

$2.a_{k+1} = 2.(a_{k+2} - a_k)$ [Dizinin özelliğinden; $a_{k+2}=a_{k+1}+2.a_k$]

$= 2.(a_{k+2} - a_{k+1} - 1)$ [k+1 çiftse, k tek olur. Bir önceki adımdan $2.a_k=a_{k+1}+1$]

$2.a_{k+1} = 2.a_{k+2} - 2.a_{k+1} - 2 \rightarrow 4.a_{k+1} = 2.a_{k+2} - 2 \rightarrow 2.a_{k+1} = a_{k+2} - 1$ sağlanmış olur.

O halde özellik dizinin tüm terimlerinde geçerlidir.

3) $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \begin{cases} a_{n+1}, & n \text{ tekse} \\ a_{n+1} - 1, & n \text{ çiftse} \end{cases}$

İspat: $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \dfrac{a_{n+2} - 1}{2}$ [1. özellikten]

$= \begin{cases} \dfrac{(2.a_{n+1} + 1) - 1}{2}, & n \text{ tekse} \\ \dfrac{(2.a_{n+1} - 1) - 1}{2}, & n \text{ çiftse} \end{cases}$ [n tekse n+1 çift olur. Buna göre 2. özelliği uyguladık.]

$= \begin{cases} \dfrac{2.a_{n+1} + 1}{2}, & n \text{ tekse} \\ \dfrac{2.a_{n+1} - 2}{2}, & n \text{ çiftse} \end{cases} = \begin{cases} a_{n+1}, & n \text{ tekse} \\ a_{n+1} - 1, & n \text{ çiftse} \end{cases}$

4) $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \begin{cases} 2.a_n - 1, & n \text{ tekse} \\ 2.a_n, & n \text{ çiftse} \end{cases}$

İspat: $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \begin{cases} a_{n+1}, & n \text{ tekse} \\ a_{n+1} - 1, & n \text{ çiftse} \end{cases}$ [3. özellikten]

$= \begin{cases} 2.a_n - 1, & n \text{ tekse} \\ 2.a_n, & n \text{ çiftse} \end{cases}$ [2. özellikten]

3. ve 4. özellikler 2. özelliğin sonuçlarıdır. 2. özellik diğer özelliklerin ispatı için yardımcıdır.

5) $a_1 + a_3 + a_5 + ... + a_{2n-1} = \dfrac{a_{2n+1} + n - 1}{3}$

İspat: $a_1 + a_3 + a_5 + ... + a_{2n-1} = A$ olsun. O halde;

$= \left(\dfrac{a_3 - a_2}{2}\right) + \left(\dfrac{a_5 - a_4}{2}\right) + \left(\dfrac{a_7 - a_6}{2}\right) + ... + \left(\dfrac{a_{2n+1} - a_{2n}}{2}\right)$ [Dizinin özelliğinden; $a_{k+2}=a_{k+1}+2.a_k$]

$= \dfrac{a_3 - \left(\dfrac{a_3 - 1}{2}\right)}{2} + \dfrac{a_5 - \left(\dfrac{a_5 - 1}{2}\right)}{2} + \dfrac{a_7 - \left(\dfrac{a_7 - 1}{2}\right)}{2} + ... + \dfrac{a_{2n+1} - \left(\dfrac{a_{2n+1} - 1}{2}\right)}{2}$ [2. özellikten]

$= \dfrac{a_3 + 1}{4} + \dfrac{a_5 + 1}{4} + \dfrac{a_7 + 1}{4} + ... + \dfrac{a_{2n+1} + 1}{4}$

$= \dfrac{a_3 + a_5 + a_7 + ... + a_{2n-1} + a_{2n+1} + n}{4} = \dfrac{A - 1 + a_{2n+1} + n}{4}$ [$a_3+a_5+...+a_{2n-1}=A-a_1=A-1$ olur.]

$$A = \frac{A - 1 + a_{2n+1} + n}{4}$$

$$3.A = a_{2n+1} + n - 1$$

$$A = a_1 + a_3 + a_5 + ... + a_{2n-1} = \frac{a_{2n+1} + n - 1}{3}$$

6) $a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{2n} = \frac{a_{2(n+1)} - n - 1}{3}$

İspat: $a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{2n} = A$ olsun. O halde;

$$= \left(\frac{a_4 - a_3}{2}\right) + \left(\frac{a_6 - a_5}{2}\right) + \left(\frac{a_8 - a_7}{2}\right) + ... + \left(\frac{a_{2n+2} - a_{2n+1}}{2}\right)$$ [Dizinin özelliğinden; $a_{k+2} = a_{k+1} + 2.a_k$]

$$= \frac{a_4 - \left(\frac{a_4 + 1}{2}\right)}{2} + \frac{a_6 - \left(\frac{a_6 + 1}{2}\right)}{2} + \frac{a_8 - \left(\frac{a_8 + 1}{2}\right)}{2} + ... + \frac{a_{2n+2} - \left(\frac{a_{2n+2} + 1}{2}\right)}{2}$$ [2. özellikten]

$$= \frac{a_4 - 1}{4} + \frac{a_6 - 1}{4} + \frac{a_8 - 1}{4} + ... + \frac{a_{2n+2} - 1}{4}$$

$$= \frac{a_4 + a_6 + a_8 + ... + a_{2n} + a_{2n+2} + n}{4} = \frac{A - 1 + a_{2n+1} - n}{4}$$ [$a_4 + a_6 + ... + a_{2n} = A - a_2 = A - 1$ olur.]

$$A = \frac{A - 1 + a_{2n+2} - n}{4}$$

$$3.A = a_{2n+2} - n - 1$$

$$A = a_4 + a_6 + a_8 + ... + a_{2n} = \frac{a_{2(n+1)} - n - 1}{3}$$

7) $a_1 - a_2 + a_3 - ... + (-1)^{n+1}.a_n = \frac{(-1)^n.[a_{n+1} - a_{n+2}] + n}{3}$

İspat: 5. ve 6. özelliklerdeki eşitlikleri taraf tarafa çıkaralım:

$$a_1 + a_3 + a_5 + ... + a_{2n-1} = \frac{a_{2n+1} + n - 1}{3}$$

$$a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{2n} = \frac{a_{2(n+1)} - n - 1}{3}$$

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + a_{2n-1} - a_{2n} = \frac{a_{2n+1} + n - 1}{3} - \frac{a_{2(n+1)} - n - 1}{3}$$

$$= \frac{a_{2n+1} + n - 1 - a_{2(n+1)} + n + 1}{3} = \frac{a_{2n+1} - a_{2n+2} + 2n}{3}$$

Çift terimlerin işaretlerinin negatif, tek terimlerin işaretlerinin pozitif olduğu görülür. Bu göz önünde bulundurularak ve 2n yerine n alınarak tekrar düzenlersek aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^{n+1}.a_n = \frac{(-1)^n.[a_{n+1} - a_{n+2}] + n}{3}$$

8) $a_1^2+a_2^2+a_3^2+...+a_n^2=\dfrac{(-1)^{n+1}.\boldsymbol{a_{n+3}}+\mathbf{3}.\boldsymbol{a_{n+1}^2}+\boldsymbol{n}}{9}$

İspat: $A=a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+...+a_n^2$ olsun. O halde;

$$A=a_1.a_1+a_2.a_2+a_3.a_3+a_4.a_4+...+a_{n-1}.a_{n-1}+a_n.a_n$$

$$=a_1.(a_2-2.a_0)+a_2.(a_3-2.a_1)+a_3.(a_4-2.a_2)+a_4.(a_5-2.a_3)+...+a_n.(a_{n+1}-2.a_{n-1})$$

[Dizinin tanımından $a_{n+2}=2a_n+a_{n-1}$ aldık.]

$$=a_1.a_2-2.a_0.a_1+a_2.a_3-2.a_1.a_2+a_3.a_4-2.a_2.a_3+a_4.a_5-2.a_3.a_4+...+a_n.a_{n+1}-2.a_{n-1}.a_n$$

$$=-2.a_0.a_1-a_1.a_2-a_2.a_3-a_3.a_4-...-a_{n-1}.a_n+a_n.a_{n+1}$$

[a_0=0 alınırsa ve 2. özellik uygulanırsa;]

$$=-\left(\frac{a_2+1}{2}\right).a_2-\left(\frac{a_3-1}{2}\right).a_3-\left(\frac{a_4+1}{2}\right).a_4-...-\left(\frac{a_n\mp1}{2}\right).a_n+\left(\frac{a_{n+1}\pm1}{2}\right).a_{n+1}$$

$$=-\left(\frac{a_2^2+a_3^2+...+a_n^2}{2}\right)+\left(\frac{-a_2+a_3-a_4+...+(-1)^{n+1}.a_n}{2}\right)+\frac{(-1)^{n+1}.a_{n+1}}{2}+\frac{a_{n+1}^2}{2}$$

[a_1=1 alınırsa ve 7. özellik uygulanırsa;]

$$A=-\left(\frac{A-1}{2}\right)+\left(\frac{\frac{(-1)^n.[a_{n+1}-a_{n+2}]+n-3}{3}}{2}\right)+\frac{(-1)^{n+1}.a_{n+1}}{2}+\frac{a_{n+1}^2}{2}$$

$$3.A=\frac{\mathbf{(-1)^n.a_{n+1}}-(-1)^n.a_{n+2}+n-3-\mathbf{3.(-1)^n.a_{n+1}}+3.a_{n+1}^2+3}{3}$$

$$A=\frac{2.(-1)^{n+1}.a_{n+1}+(-1)^{n+1}.a_{n+2}+3.a_{n+1}^2+n}{9}$$

[Dizinin tanımından $a_{n+3}=2a_{n+1}+a_{n+2}$ alırsak;]

$$A=\frac{(-1)^{n+1}.a_{n+3}+3.a_{n+1}^2+n}{9}$$

9) $a_{n+m}=2.a_{n-1}.a_m+a_n.a_{m+1}$

İspat: m'ye göre tümevarım yapalım.

m=1 için doğru mu? $a_{n+1}=2.a_{n-1}.a_1+a_n.a_{1+1}\rightarrow a_{n+1}=2.a_{n-1}+a_n$ [$a_1=a_2$=1] doğrudur.

m=k için, $a_{n+k}=2.a_{n-1}.a_k+a_n.a_{k+1}$ eşitliği doğru olsun.

m=k+1 için doğru olur mu?

$a_{n+(k+1)}=a_{(n+1)+k}=2.a_n.a_k+a_{n+1}.a_{k+1}$ [m=k için doğru demiştik.]

$$=2.a_n.a_k+(a_n+2.a_{n-1}).a_{k+1}=2.a_n.a_k+a_n.a_{k+1}+2.a_{n-1}.a_{k+1}$$

$$=a_n.(2.a_k+a_{k+1})+2.a_{n-1}.a_{k+1}=a_n.a_{k+2}+2.a_{n-1}.a_{k+1}$$

m=k+1 için doğru olduğunu göstermiş olur. Öyleyse özellik, dizinin tüm terimleri için geçerlidir.

10) $a_{2n}=(a_{n+1})^2-(2.a_{n-1})^2$

İspat: 9. özellikteki m=n alalım. $a_{n+n}=2.a_{n-1}.a_n+a_n.a_{n+1}$

$$a_{2n}=2.a_{n-1}.a_n+a_n.a_{n+1}$$

$$=2.a_{n-1}.(a_{n+1}-2.a_{n-1})+(a_{n+1}-2.a_{n-1}).a_{n+1} \quad \text{[Dizinin özelliğinden]}$$

$$=2.a_{n-1}.a_{n+1}-(2.a_{n-1})^2+(a_{n+1})^2-2.a_{n-1}.a_{n+1}=(a_{n+1})^2-(2.a_{n-1})^2$$

3.2.2. K1 Dizi Ailesindeki k=3 Dizisinin Özellikleri

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	...	a_n
1	1	4	7	19	40	97	217	508	...	$a_{n-1}+3.a_{n-2}$

1) $a_1+a_2+a_3+...+a_n=\dfrac{a_{n+2}-1}{3}$

İspat: $a_1+a_2+a_3+...+a_n$

$$=\left(\frac{a_3-a_2}{3}\right)+\left(\frac{a_4-a_3}{3}\right)+\left(\frac{a_5-a_4}{3}\right)+\left(\frac{a_6-a_5}{3}\right)+...+\left(\frac{a_{n+1}-a_n}{3}\right)+\left(\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{3}\right)$$

$$=\frac{a_3-a_2+a_4-a_3+a_5-a_4+a_6-a_5+...+a_{n+1}-a_n+a_{n+2}-a_{n+1}}{3}$$

$$=\frac{a_{n+2}-a_2}{3}=\frac{a_{n+2}-1}{3}$$

2) $a_1+a_3+a_5+a_7+...+a_{2n-1}=\dfrac{3.a_{2n+1}-a_{2n+2}-2}{3}$

3) $a_2+a_4+a_6+...+a_{2n}=\dfrac{2.a_{2n+2}-3.a_{2n+1}+1}{3}$

İspat (2. ve 3. Özellikler): $a_1+a_3+a_5+a_7+...+a_{2n-1}=A$ $\qquad a_2+a_4+a_6+...+a_{2n}=B$

$$A=\left(\frac{a_3-a_2}{3}\right)+\left(\frac{a_5-a_4}{3}\right)+\left(\frac{a_7-a_6}{3}\right)+...+\left(\frac{a_{2n+1}-a_{2n}}{3}\right) \quad \text{[Dizinin özelliğinden; } a_{k+2}=a_{k+1}+3.a_k\text{]}$$

$$=\frac{a_3-a_2+a_5-a_4+a_7-a_6+...+a_{2n+1}-a_{2n}}{3}$$

$$=\frac{(a_3+a_5+a_7+...+a_{2n+1})-(a_2+a_4+a_6+...+a_{2n})}{3}$$

$$A=\frac{(A-1+a_{2n+1})-(B)}{3}\rightarrow 3.A=A-B+a_{2n+1}-1\rightarrow 2.A+B=a_{2n+1}-1 \quad \dots\ (*)$$

eşitliği elde edilir. Diğer yandan 1. özellik gereği şu eşitliği yazabiliriz:

$$a_1+a_2+a_3+...+a_{2n}=\frac{a_{2n+2}-1}{3}\rightarrow A+B=\frac{a_{2n+2}-1}{3} \quad \dots\ (**)$$

(*) eşitliğinden (**) eşitliği taraf tarafa çıkarılırsa;

$$A=a_{2n+1}-1-\frac{a_{2n+2}-1}{3}=\frac{3.a_{2n+2}-3-a_{2n+2}+1}{3}=\frac{\mathbf{3.a_{2n+1}-a_{2n+2}-2}}{\mathbf{3}}$$

bulunur. (**) eşitliğinde bulunan son eşitliği yerine yazıp B'yi yalnız bırakırız:

$$\frac{3.a_{2n+1}-a_{2n+2}-2}{3}+B=\frac{a_{2n+2}-1}{3}\rightarrow B=\frac{a_{2n+2}-1}{3}-\frac{3.a_{2n+1}-a_{2n+2}-2}{3}=\frac{\mathbf{2.a_{2n+2}-3.a_{2n+1}+1}}{\mathbf{3}}$$

4) $a_1-a_2+a_3-...+(-1)^{n+1}.a_n=(-1)^n.[2.a_{n+1}-a_{n+2}]-1$

İspat: 2. ve 3. özelliklerdeki eşitklikleri yazıp taraf tarafa çıkaralım:

$$(a_1+a_3+a_5+a_7+...+a_{2n-1})=\frac{3.a_{2n+1}-a_{2n+2}-2}{3}$$

$$(a_2+a_4+a_6+...+a_{2n})=\frac{2.a_{2n+2}-3.a_{2n+1}+1}{3}$$

$$a_1-a_2+a_3-a_4+...+a_{2n-1}-a_{2n}=\frac{3.a_{2n+1}-a_{2n+2}-2}{3}-\frac{2.a_{2n+2}-3.a_{2n+1}+1}{3}$$

$$=\frac{3.a_{2n+1}-a_{2n+2}-2-2.a_{2n+2}+3.a_{2n+1}-1}{3}=\frac{6.a_{2n+1}-3.a_{2n+2}-3}{3}=2.a_{2n+1}-a_{2n+2}-1$$

Çift indisli terimlerin işareti negatifken, tek indisli terimlerin işaretlerinin pozitiftir. Buna dikkat edilerek ve 2n yerine n yazılarak düzenlenirse aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$a_1-a_2+a_3-a_4+...+(-1)^{n+1}.a_n=(-1)^n.[2.a_{n+1}-a_{n+2}]-1$$

5) $a_{n+m}=3.a_{n-1}.a_m+a_n.a_{m+1}$

İspat: m'ye göre tümevarım yapalım.

m=1 için doğru mu? $a_{n+1}=3.a_{n-1}.a_1+a_n.a_{1+1}\rightarrow a_{n+1}=3.a_{n-1}+a_n$ $[a_1=a_2=1]$ doğrudur.

m=k için, $a_{n+k}=3.a_{n-1}.a_k+a_n.a_{k+1}$ eşitliği doğru olsun.

m=k+1 için doğru olur mu?

$a_{n+(k+1)}=a_{(n+1)+k}=3.a_n.a_k+a_{n+1}.a_{k+1}$ [m=k için doğru demiştik.]

$$=3.a_n.a_k+(a_n+3.a_{n-1}).a_{k+1}=3.a_n.a_k+a_n.a_{k+1}+3.a_{n-1}.a_{k+1}$$

$$=a_n.(3.a_k+a_{k+1})+3.a_{n-1}.a_{k+1}=a_n.a_{k+2}+3.a_{n-1}.a_{k+1}$$

m=k+1 için doğru olduğunu göstermiş olur. Öyleyse özellik, dizinin tüm terimleri için geçerlidir.

6) $a_{2n}=(a_{n+1})^2-(3.a_{n-1})^2$

İspat: 5. özellikteki eşitlikte m=n alalım. $a_{n+n}=3.a_{n-1}.a_n+a_n.a_{n+1}$

$a_{2n}=3.a_{n-1}.a_n+a_n.a_{n+1}$

$=3.a_{n-1}.(a_{n+1}-3.a_{n-1})+(a_{n+1}-3.a_{n-1}).a_{n+1}$ [Dizinin özelliğinden]

$=3.a_{n-1}.a_{n+1}-(3.a_{n-1})^2+(a_{n+1})^2-3.a_{n-1}.a_{n+1}=(a_{n+1})^2-(3.a_{n-1})^2$

3.3. KK Dizi Ailesi ve Özellikleri

Fibonacci dizisinde her bir terim kendinden önceki terime bölümü altın orana yaklaşır. Burada ikinci dereceden denklemleri kullanarak $a_n=$ k.[$a_{n-1}+a_{n-2}$] şeklindeki diziler için de benzer şekilde her bir terimin kendinden önceki terime bölümünün hangi sayılara yaklaşacağı araştırılırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

k=1 için Altın Oran $=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ k=2 için Sabit Oran $=\dfrac{2+\sqrt{12}}{2}$ k=3 için Sabit Oran $=\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$ k=n için Sabit Oran $=\dfrac{n+\sqrt{n^2+4.n}}{2}$

3.3.1. KK Dizi Ailesindeki k=2 Dizisinin Özellikleri

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	...	a_n
1	2	6	16	44	120	328	896	2448	...	$2.a_{n-1}+2.a_{n-2}$

1) $a_1+a_2+a_3+...+a_n=\dfrac{a_{n+2}-a_{n+1}-1}{3}$

İspat: $a_1+a_2+a_3+a_4+...+a_n$

$$=\left(\frac{a_3}{2}-a_2\right)+\left(\frac{a_4}{2}-a_3\right)+\left(\frac{a_5}{2}-a_4\right)+\left(\frac{a_6}{2}-a_5\right)+...+\left(\frac{a_{n+1}}{2}-a_n\right)+\left(\frac{a_{n+2}}{2}-a_{n+1}\right)$$

[Dizinin özelliğinden; $a_{n+2}=2.(a_{n+1}+a_n)$, dolayısıyla $a_n=\dfrac{a_{n+2}}{2}-a_{n+1}$ olur.]

$$=-a_2-\frac{a_3}{2}-\frac{a_4}{2}-\frac{a_5}{2}-...-\frac{a_n}{2}-\frac{a_{n+1}}{2}+\frac{a_{n+2}}{2}=\frac{-a_2-(a_2+a_3+a_4+...+a_n)}{2}-\frac{a_{n+1}}{2}+\frac{a_{n+2}}{2}$$

$$=\frac{-a_2-(A-a_1)}{2}-\frac{a_{n+1}}{2}+\frac{a_{n+2}}{2}$$

$A=-\dfrac{(A+1)}{2}-\dfrac{a_{n+1}}{2}+\dfrac{a_{n+2}}{2}$ [a_1=1 ve a_2=2 olduğundan]

$$A+\frac{(A+1)}{2}=\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{2}\rightarrow A=\frac{a_{n+2}-a_{n+1}-1}{3}$$

2) $a_1+a_3+a_5+...+a_{2n-1}=\dfrac{1+2.(a_{2n}-a_{2n-1})}{3}$

İspat: $a_1+a_3+a_5+...+a_{2n-1}$

$$=a_1+2.(a_1+a_2)+2.(a_3+a_4)+...+2.(a_{2n-2}+a_{2n-3})$$

$$= a_1 + 2.(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{2n-2}) = a_1 + 2.\left(\frac{a_{2n} - a_{2n-1} - 1}{3}\right)$$

[1. özellikte n yerine $2n-2$ aldık.]

$$= \frac{1 + 2.(a_{2n} - a_{2n-1})}{3}$$ [$a_1 = 1$ olarak yerine yazdık.]

3) $a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{2n} = \dfrac{2.(a_{2n+1} - a_{2n} - 1)}{3}$

İspat: $a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{2n}$

$$= a_2 + 2.(a_2 + a_3) + 2.(a_4 + a_5) + ... + 2.(a_{2n-2} + a_{2n-1})$$

$$= a_2 + 2.(a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + ... + a_{2n-1}) = a_2 + 2.\left(\frac{a_{2n+1} - a_{2n} - 1}{3} - 1\right)$$

[1. özellikte n yerine $2n-1$ aldık ve a_1 değeri 1'i çıkardık.]

$$= \frac{2.(a_{2n+1} - a_{2n} - 1)}{3}$$ [$a_2 = 2$ olarak yerine yazdık ve düzenledik.]

4) $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^{n+1}.a_n = (-1)^{n+1}.2.a_{n-1} + 1$

İspat: 2. ve 3. özelliklerdeki eşitlikleri taraf tarafa çıkaralım:

$$a_1 + a_3 + a_5 + ... + a_{2n-1} = \frac{1 + 2.a_{2n} - 2.a_{2n-1}}{3}$$

$$a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{2n} = \frac{2.a_{2n+1} - 2.a_{2n} - 2}{3}$$

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + a_{2n-1} - a_{2n} = \frac{1 + 2.a_{2n} - 2.a_{2n-1}}{3} - \frac{2.a_{2n+1} - 2.a_{2n} - 2}{3}$$

$$= \frac{1 + 2.a_{2n} - 2.a_{2n-1} - 2.a_{2n+1} + 2.a_{2n} + 2}{3}$$

$$= \frac{4.a_{2n} - 2.a_{2n-1} - \mathbf{2.a_{2n+1}} + 3}{3} = \frac{4.a_{2n} - 2.a_{2n-1} - \mathbf{4.a_{2n}} - \mathbf{4.a_{2n-1}} + 3}{3}$$

[$a_{2n+1} = 2.a_{2n} + 2.a_{2n-1}$ yazdık.]

$$= \frac{-6.a_{2n-1} + 3}{3} = \mathbf{1 - 2.a_{2n-1}}$$

Son eşitlikte tek indisli terimlerin pozitif katsayılı, çift indisli terimlerin negatif katsayılı olduğuna dikkat ederek ve 2n yerine n yazılarak düzenlenirse aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^{n+1}.a_n = (-1)^{n+1}2.a_{n-1} + 1$$

5) $a_{n+m} = 2.a_{n-1}.a_m + a_n.a_{m+1}$

İspat: m'ye göre tümevarım yapalım.

m=1 için doğru mu? $a_{n+1}=2.a_{n-1}.a_1+a_n.a_{1+1} \rightarrow a_{n+1}=2.a_{n-1}+2.a_n$ [a_1=1 ve a_2=2] doğrudur.

m=k için, $a_{n+k}=2.a_{n-1}.a_k+a_n.a_{k+1}$ eşitliği doğru olsun.

m=k+1 için doğru olur mu?

$a_{n+(k+1)}=a_{(n+1)+k}=2.a_n.a_k+a_{n+1}.a_{k+1}$ [m=k için doğru demiştik.]

$=2.a_n.a_k+(2.a_n+2.a_{n-1}).a_{k+1}=2.a_n.a_k+2.a_n.a_{k+1}+2.a_{n-1}.a_{k+1}$

$=a_n.(2.a_k+2.a_{k+1})+2.a_{n-1}.a_{k+1}=a_n.a_{k+2}+2.a_{n-1}.a_{k+1}$

m=k+1 için doğru oldu. Öyleyse özellik, dizinin tüm terimleri için geçerlidir.

6) $a_{2n}=\dfrac{(a_{n+1})^2-(2.a_{n-1})^2}{2}$

İspat: 5. özellikteki eşitlikte m=n alalım. $a_{n+n}=2.a_{n-1}.a_n+a_n.a_{n+1}$

$$a_{2n}=2.a_{n-1}.\left(\frac{a_{n+1}-2.a_{n-1}}{2}\right)+\left(\frac{a_{n+1}-2.a_{n-1}}{2}\right).a_{n+1}$$

$$a_{2n}=\frac{2.a_{n-1}.a_{n+1}-(2.a_{n-1})^2+(a_{n+1})^2-2.a_{n-1}.a_{n+1}}{2}$$

$$a_{2n}=\frac{(a_{n+1})^2-(2.a_{n-1})^2}{2}$$

3.3.2. KK Dizi Ailesindeki k=3 Dizisinin Özellikleri

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	...	a_n
1	3	12	45	171	648	2457	9315	...	$3.a_{n-1}+3.a_{n-2}$

1) $a_1+a_2+a_3+...+a_n=\dfrac{a_{n+2}-2.a_{n+1}-1}{5}$

İspat: $A=a_1+a_2+a_3+a_4+...+a_n$

$$=\left(\frac{a_3}{3}-a_2\right)+\left(\frac{a_4}{3}-a_3\right)+\left(\frac{a_5}{3}-a_4\right)+\left(\frac{a_6}{3}-a_5\right)+...+\left(\frac{a_{n+1}}{3}-a_n\right)+\left(\frac{a_{n+2}}{3}-a_{n+1}\right)$$

[Dizinin özelliğinden; $a_{n+2}=3.(a_{n+1}+a_n)$, dolayısıyla $a_n=\dfrac{a_{n+2}}{3}-a_{n+1}$ olur.]

$$A=-a_2-\frac{2.a_3}{3}-\frac{2.a_4}{3}-\frac{2.a_5}{3}-...-\frac{2.a_n}{3}-\frac{2.a_{n+1}}{3}+\frac{a_{n+2}}{3}$$

$$A=\frac{-a_2-2.(a_2+a_3+a_4+...+a_n)}{3}-\frac{2.a_{n+1}}{3}+\frac{a_{n+2}}{3}$$

$$A=\frac{-a_2-2.(A-a_1)}{3}-\frac{2.a_{n+1}}{3}+\frac{a_{n+2}}{3}$$

$$A=\frac{-3-2.A+2}{3}-\frac{2.a_{n+1}}{3}+\frac{a_{n+2}}{3}$$ [a_1=1 ve a_2=3 olduğundan]

$$3.A=-2.A+a_{n+2}-2.a_{n+1}-1\rightarrow A=\frac{a_{n+2}-2.a_{n+1}-1}{5}$$

2) $$a_1+a_3+a_5+...+a_{2n-1}=\frac{3.(a_{2n}-2.a_{2n-1})+2}{5}$$

İspat: $a_1+a_3+a_5+...+a_{2n-1}$

$$=a_1+3.(a_1+a_2)+3.(a_3+a_4)+...+3.(a_{2n-2}+a_{2n-3})$$

$$=a_1+3.(a_1+a_2+a_3+a_4+...+a_{2n-2})=a_1+3.\left(\frac{a_{2n}-2.a_{2n-1}-1}{5}\right)$$

[1. özellikte n yerine $2n-2$ aldık.]

$$=\frac{3.(a_{2n}-2.a_{2n-1})+2}{5}$$ [a_1=1 olarak yerine yazdık.]

3) $$a_2+a_4+a_6+...+a_{2n}=\frac{3.(a_{2n+1}-2.a_{2n}-1)}{5}$$

İspat: $a_2+a_4+a_6+...+a_{2n}$

$$=a_2+3.(a_2+a_3)+3.(a_4+a_5)+...+3.(a_{2n-2}+a_{2n-1})$$

$$=a_2+3.(a_2+a_3+a_4+a_5+...+a_{2n-1})=a_2+3.\left(\frac{a_{2n+1}-2.a_{2n}-1}{5}-1\right)$$

[1. özellikte n yerine $2n-1$ aldık ve a_1 değeri 1'i çıkardık.]

$$=\frac{3.(a_{2n+1}-2.a_{2n}-1)}{5}$$ [a_2=3 olarak yerine yazdık ve düzenledik.]

4) $$a_1-a_2+a_3-a_4+...+(-1)^{n+1}.a_n=(-1)^{n+1}.3.a_{n-1}+1$$

İspat: 2. ve 3. özelliklerdeki eşitlikleri taraf tarafa çıkaralım:

$$a_1+a_3+a_5+...+a_{2n-1}=\frac{3.(a_{2n}-2.a_{2n-1})+2}{5}$$

$$a_2+a_4+a_6+...+a_{2n}=\frac{3.(a_{2n+1}-2.a_{2n}-1)}{5}$$

$$a_1-a_2+a_3-a_4+...+a_{2n-1}-a_{2n}=\frac{3.(a_{2n}-2.a_{2n-1})+2}{5}-\frac{3.(a_{2n+1}-2.a_{2n}-1)}{5}$$

$$=\frac{3.a_{2n}-6.a_{2n-1}+2-3.a_{2n+1}+6.a_{2n}+3}{5}=\frac{9.a_{2n}-6.a_{2n-1}-\mathbf{3.a_{2n+1}}+5}{5}$$

[a_{2n+1}=3. a_{2n}+3. a_{2n-1} yazdık.]

$$=\frac{9.a_{2n}-6.a_{2n-1}-\mathbf{9.a_{2n}}-\mathbf{9.a_{2n-1}}+5}{5}=\frac{-15.a_{2n-1}+5}{5}$$

$$=\frac{-15.a_{2n-1}+5}{5}=\mathbf{1-3.a_{2n-1}}$$

Son eşitlikte tek indisli terimlerin pozitif katsayılı, çift indisli terimlerin negatif katsayılı olduğuna dikkat ederek ve 2n yerine n yazılarak düzenlenirse aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$a_1-a_2+a_3-a_4+...+(-1)^{n+1}.a_n=(-1)^{n+1}.3.a_{n-1}+1$$

5) $a_{n+m}=3.a_{n-1}.a_m+a_n.a_{m+1}$

İspat: m'ye göre tümevarım yapalım.

m=1 için doğru mu? $a_{n+1}=3.a_{n-1}.a_1+a_n.a_{1+1}\rightarrow a_{n+1}=3.a_{n-1}+3.a_n$ [a_1=1 ve a_2=3] doğrudur.

m=k için, $a_{n+k}=3.a_{n-1}.a_k+a_n.a_{k+1}$ eşitliği doğru olsun.

m=k+1 için doğru olur mu?

$a_{n+(k+1)}=a_{(n+1)+k}=3.a_n.a_k+a_{n+1}.a_{k+1}$ [m=k için doğru demiştik.]

$$=3.a_n.a_k+(3.a_n+3.a_{n-1}).a_{k+1}=3.a_n.a_k+3.a_n.a_{k+1}+3.a_{n-1}.a_{k+1}$$

$$=a_n.(3.a_k+3.a_{k+1})+3.a_{n-1}.a_{k+1}=a_n.a_{k+2}+3.a_{n-1}.a_{k+1}$$

m=k+1 için doğru oldu. Öyleyse özellik, dizinin tüm terimleri için geçerlidir.

6) $a_{2n}=\dfrac{(a_{n+1})^2-(3.a_{n-1})^2}{3}$

İspat: 5. özellikteki eşitlikte m=n alalım. $a_{n+n}=3.a_{n-1}.a_n+a_n.a_{n+1}$

$$a_{2n}=3.a_{n-1}.\left(\frac{a_{n+1}-3.a_{n-1}}{3}\right)+\left(\frac{a_{n+1}-3.a_{n-1}}{3}\right).a_{n+1}$$

$$a_{2n}=\frac{3.a_{n-1}.a_{n+1}-(3.a_{n-1})^2+(a_{n+1})^2-3.a_{n-1}.a_{n+1}}{3}$$

$$a_{2n}=\frac{(a_{n+1})^2-(3.a_{n-1})^2}{3}$$

Bulgular, özelliklerin karşılaştırmalı görülebilmesi için Çizelge-1'de özetlenmiştir.

Çizelge 1. Özelliklerin Karşılaştırmalı Gösterimi

Özellik	Fibonacci	1K (k=2)	1K (k=3)	K1 (k=2)	K1 (k=3)	KK (k=2)	KK (k=3)
$a_1+a_2+a_3+...+a_n$	$a_{n+2}-1$	$\frac{a_{n+1}+a_n-1}{2}$	$\frac{a_{n+1}+a_n-1}{3}$	$\frac{a_{n+2}-1}{2}$	$\frac{a_{n+2}-1}{3}$	$\frac{a_{n+2}-a_{n+1}-1}{3}$	$\frac{a_{n+2}-2.a_{n+1}-1}{5}$
$a_1+a_3+a_5+...+a_{2n-1}$	a_{2n}	$\frac{a_{2n}}{2}$	$\frac{a_{2n}}{3}$	$\frac{a_{2n+1}+n-1}{3}$	$\frac{3.a_{2n+1}-a_{2n+2}-2}{3}$	$\frac{1+2.(a_{2n}-a_{2n-1})}{3}$	$\frac{3.(a_{2n}-2.a_{2n-1})+2}{5}$
$a_2+a_4+a_6+...+a_{2n}$	$a_{2n+1}-1$	$\frac{a_{2n+1}-1}{2}$	$\frac{a_{2n+1}-1}{3}$	$\frac{a_{2(n+1)}-n-1}{3}$	$\frac{2.a_{2n+2}-3.a_{2n+1}+1}{3}$	$\frac{2.(a_{2n+1}-a_{2n}-1)}{3}$	$\frac{3.(a_{2n+1}-2.a_{2n}-1)}{5}$
$a_1-a_2+a_3-...+(-1)^{n+1}.a_n$	$(-1)^{n+1}.a_{n-1}+1$	$\frac{(-1)^n\left[a_n-a_{n+1}\right]+1}{2}$	$\frac{(-1)^n\left[a_n-a_{n+1}\right]+1}{3}$	$\frac{(-1)^n.[a_{n+1}-a_{n+2}]+n}{3}$	$(-1)^n.[2.a_{n+1}-a_{n+2}]-1$	$(-1)^{n+1}.2.a_{n-1}+1$	$(-1)^{n+1}.3.a_{n-1}+1$
$a_1^2+a_2^2+a_3^2+...+a_n^2$	$a_n.a_{n+1}$	$\frac{a_n.a_{n+1}}{2}$	$\frac{a_n.a_{n+1}}{3}$	$\frac{(-1)^{n+1}.a_{n+3}+3.a_{n+1}^2+n}{9}$	-	-	-
a_{n+m}	$a_{n-1}.a_m+a_n.a_{m+1}$	$a_{n-1}.a_m+a_n.a_{m+1}$	$a_{n-1}.a_m+a_n.a_{m+1}$	$2.a_{n-1}.a_m+a_n.a_{m+1}$	$3.a_{n-1}.a_m+a_n.a_{m+1}$	$2.a_{n-1}.a_m+a_n.a_{m+1}$	$3.a_{n-1}.a_m+a_n.a_{m+1}$
a_{2n}	$a_{n+1}^2-a_{n-1}^2$	$\frac{(a_{n+1}^2-a_{n-1}^2)}{2}$	$\frac{(a_{n+1}^2-a_{n-1}^2)}{3}$	$(a_{n+1})^2-(2.a_{n-1})^2$	$(a_{n+1})^2-(3.a_{n-1})^2$	$\frac{(a_{n+1})^2-(2.a_{n-1})^2}{2}$	$\frac{(a_{n+1})^2-(3.a_{n-1})^2}{3}$

4. SONUÇ ve TARTIŞMA

Fibonacci dizisi için bilinen 7 temel özelliğin benzerlerinin, bu çalışmada 1K, K1 ve KK diye isimlendirilen dizi ailelerinin elemanı olan dizilerde mevcut olup olmadığı araştırılmıştır. Her bir aileden ilk iki dizi üzerinde yani toplam 6 dizi üzerinde çalışılmıştır. 1K ailesinden alınan iki dizi için de bahsedilen 7 özellik elde edilmiştir. K1 ailesinden alınan ilk dizi (k=2 durumu) için, temel 7 özelliğin yanı sıra bu özelliklerin ispatlanmasına yardımcı olacak bir özellik ve bu özelliğin sonucu olan 2 özellik olmak üzere toplam 10 özellik ispatlarıyla verilmiştir. K1 ailesinden alınan ikinci dizi (k=3 durumu) için, temel özelliklerden terimlerin kareleri toplamıyla ilgili olan özellik hariç 6 özellik ispatlarıyla verilmiştir. KK ailesinden alınan iki dizi için de yine temel özelliklerden terimlerin kareleri toplamıyla ilgili olan özellik hariç 6'şar özellik ispatlarıyla verilmiştir. Böylece, Fibonacci dizisinin mantığına benzer şekilde üretilen dizilerle ilgili Fibonacci dizisinin özelliklerine benzeyen toplam 42 özellik ispatlarıyla verilmiştir.

Bulunan özelliklere bakıldığında, hem aynı aile içindeki dizilerin kendi aralarında hem de aileler arasında benzerlikler, ilişkiler görülmektedir. Bu sayede özellikler genelleştirilebilir ve bir sonraki adımda özelliğin ne şekilde değişeceği öngörülebilir. Örneğin tek sayı indisli terimlerin toplamını veren ifade, 1K dizi ailesinde k=2 için oluşturulan dizide $\frac{a_{2n}}{2}$ iken; aynı ailedeki k=3 için oluşturulan dizide $\frac{a_{2n}}{3}$ olmuştur. Bu şekilde aynı ailedeki sonraki diziler için $\frac{a_{2n}}{4},\frac{a_{2n}}{5},...$ şeklinde gidebileceği tahmin edilebilir.

Literatürdeki çalışmalara bakıldığında bu çalışmadaki yöntem ve bulgularla benzerlik gösteren bir çalışmayla karşılaşılmamıştır. Altun (2016), Güleç (2014) ve Bolat (2008) da çalışmalarını Fibonacci dizine benzer şekilde türetilen dizilerle yapmalarına rağmen onlar çok daha farklı dizi aileleriyle, farklı yön ve yöntemlerle çalışmışlardır. Yalnızca Köken'in (2008) yaptığı çalışmada bu çalışmadaki K1 ailesinin k=2 için elde edilen dizisi olan Jacobsthal dizisinin bazı özelliklerinden bahsedilmiş ancak tamamen farklı bir yol izlenmiştir.

Gelecek çalışmalarda bu çalışmada ele alınan dizi ailelerinin diğer elemanlarında (k=4,5,…) da benzer özellikler araştırılabilir. Bulunan özellikler dışında dizilerin bölünebilme özellikleri gibi yeni özellikler araştırılabilir. Bazı diziler için bulunamayan terimlerin kareleri toplamıyla ilgili olan özellik üzerinde çalışılabilir. Yine Fibonacci dizisine benzer şekilde farklı diziler oluşturulup, bu dizlerin özellikleri ispatlanabilir. Örneğin, bir terimi kendinden önceki iki terimin farklı tam sayı kuvvetlerinin toplamından oluşan diziler ele alınıp incelenebilir. Bu çalışmada elde edilen özelliklerin, uygulama alanları araştırılabilir, mümkünse anlamları analitik olarak yeniden yorumlanabilir.

KAYNAKLAR

Altun,İ. (2016). "Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas Polinomlarında Yeni Bir Aile". Yüksek Lisans Tezi, Erzincan Üniversitesi, Erzincan-Türkiye.

Argün, Z., Arıkan, A., Bulut, S., Halıcıoğlu, S. (2014). Temel Matematik Kavramlarının Künyesi: Gazi Kitabevi. Ankara-Türkiye.

Bolat, C. (2008). "k-Fibonacci, k-Lucas Sayılarının Özellikleri ve Uygulamaları". Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi. Konya-Türkiye.

Güleç,H.H. (2014). "Pell Matris Dizileri ve Özellikleri". Doktora Tezi, Selçuk Üniversitesi. Konya-Türkiye.

Köken, F. (2008). "Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Sayılarının Özelllikleri ve Uygulamaları". Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi. Konya-Türkiye.

Maksudov, F. ve Veliev, C. (1993) "Fibonacci sayıları hakkında bir kural". Matematik Dünyası Dergisi, 4: 14 Erişim adresi: http://www.matematikdunyasi.org/arsiv/PDF_eskisayilar/92_4_14_16_FIBONACCI.pdf Son Erişim Tarihi: 02.10.2018.

Pappas, T. (2007). Yaşayan Matematik: Doruk Yayıncılık. İstanbul-Türkiye.