Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University 36:1 (2021) 291-302

Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi
Journal of The Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University

Elektronik / Online ISSN : 1304 - 4915
Basılı / Printed ISSN : 1300 - 1884

Mixed-integer programming models for 1.5-dimensional cutting problem with technical constraints

Tuğba Saraç*, Müjgan Sağır
Department of Industrial Engineering, Eskisehir Osmangazi University, 26480 Eskisehir, Turkey

Highlights:

- Developing a new mathematical model for 1.5 dimensional cutting problem with technical constraints.
- Linearization of the nonlinear model.
- Comparison of the performances of developed mathematical models.

Keywords:

- 1.5 dimensional cutting problem
- Mixed-Integer programming models

Article Info:
Research Article
Received: 28.01.2020
Accepted: 25.08.2020

DOI:
10.17341/gazimmfd.681190

Correspondence:
Author: Tuğba Saraç
e-mail: tsarac@ogu.edu.tr
phone: +90 222 239 3750

Graphical/Tabular Abstract

Table A. M1, M2 and M3 models' comparison

		(*non-linear*)				(*linear*)				(*with pre-derived cutting plan*)			
		M1				M2				M3			
no	*c*	f_1	f_2	f	t	f_1	f_2	f	s	f_1	f_2	f	t
1	≤ 2	*1274*	*3*	*0.77*	*28*	*1274*	*3*	*0.77*	*1*	*1274*	*3*	*0.77*	1
	≤ 3	*1326*	*2*	*0.62*	*31*	*1326*	*2*	*0.62*	*1*	*1326*	*2*	*0.62*	1
2	≤ 2	-	-	-	200000	*2850*	*5*	*0.97*	8793	*2850*	*5*	*0.97*	2
	≤ 3	-	-	-	200000	*2719*	*4*	*0.84*	2493	*2719*	*4*	*0.84*	41
3	≤ 2	-	-	-	200000	3144	10	0.82	66049*	*3101*	*10*	*0.81*	1279
	≤ 3	-	-	-	200000	3353	7	0.69	5000*	3191	7	0.67°	200000
4	≤ 2	-	-	-	200000	-	-	-	5000*	2762	15	0.67^{+}	200000
	≤ 3	-	-	-	200000	-	-	-	5000*	-	-	-	200000

* stopped before time limit due to lack of memory / $^{\circ}$ absolute gap is 0.03% / $^{+}$ absolute gap is 11.3%.

Purpose:
To develop an integrated mathematical model that generates cutting patterns and finds the best patterns for 1.5-dimensional cutting stock problems with order type and strip number constraints.

Theory and Methods:
Generating cutting patterns is a difficult task for cutting stock problems. Many studies first generate the patterns and then use a solution method to find the best patterns. An integrated mathematical model (M1) that generates cutting patterns and finds the best ones is developed for 1.5-dimensional cutting stock problem with order type and strip number constraints. This new model is then linearized (M2) due to its nonlinear structure. A third model (M3) using pre-derived cutting plans is also developed, and test problems are generated randomly to compare them.

Results:
Developed models are compared by using derived test problems. The model using pre-derived cutting plans solved all problems in less time than other models as expected. However, deriving the cutting plans in advance is a significant challenge and requires time. On the other hand, the linear model that derives the cutting plans itself can find a solution up to a certain size in a reasonable time. The summary of the obtained results is given in Table A.

Conclusion:
The linearization of the mathematical model of 1.5-dimensional cutting stock problem where cutting patterns are also derived by the model is an important acquisition for both the literature and the production processes.

Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University 36:1 (2021) 291-302

Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi
Journal of The Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University
Elektronik / Online ISSN : 1304 - 4915
Basılı / Printed ISSN : 1300 - 1884

Teknik kısıtlı 1,5 boyutlu kesme problemi için karma tamsayılı matematiksel modeller

Tuğba Saraç*, Müjgan Sağır
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Mühendislik Mimarlık Fakültesi, Endüstri Mühendisliği Bölümü, 26040 Eskişehir, Türkiye

Ö N E Ç I K A N L A R

- Teknik kısıtlı 1,5 boyutlu kesme problemi için yeni bir matematiksel model geliştirilmesi
- Doğrusal olmayan modelin doğrusallaştırılması
- Geliştirilen matematiksel modellerin performanslarının karşılaştırılması

Makale Bilgileri
Araştırma Makalesi
Geliş: 28.01.2020
Kabul: 25.08.2020

DOI:
10.17341/gazimmfd.681190

Anahtar Kelimeler:
1,5 boyutlu kesme problemi, karma tamsayı programlama modelleri

ÖZET

Kesme problemlerinin çözümünde genellikle önce kesme planları türetilip daha sonra hangi kesme planlarının kullanılacağı belirlenmektedir. Öte yandan tüm kesme planlarını türetmenin güçlüğü ve kesme planı sayısının genellikle çok fazla olması bu konuda karşılaşılan en temel problemlerdir. Bu çalışmada parça çeşidi ve şerit sayısı kısıtlı 1,5 boyutlu kesme problemi için kesme planlarını da türeten bütünleşik bir matematiksel model geliştirilmiştir. Doğrusal olmayan bu model, çözüm güçlüğünü ortadan kaldırmak üzere doğrusallaştırılmıştır. Rassal olarak türetilen test problemleri kullanılarak, önerilen her iki modelle elde edilen sonuçlar, kesme planlarının önceden türetildiği klasik modelle karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar, kesme planlarını da kendisi türeten doğrusal modelin belirli büyüklüğe kadar makul sürede çözülebildiğini göstermiştir. Özellikle, problem için geliştirilen matematiksel modelin doğrusal yapıya kavuşturulmasının, literatür için önemli bir kazanım olacağı düşünülmektedir.

Mixed-integer programming models for 1.5-dimensional cutting problem with technical constraints

H I G H L I G H T S

- Developing a new mathematical model for 1.5 dimensional cutting problem with technical constraints
- Linearization of the nonlinear model
- Comparison of the performances of developed mathematical models

Article Info
Research Article
Received: 28.01.2020
Accepted: 25.08.2020

DOI:
10.17341/gazimmfd.681190

Keywords:
1.5 dimensional cutting problem, mixed-integer programming models

ABSTRACT

In solving cutting stock problems, generally, cutting patterns are generated first, and then it is determined which cutting plans will be used. On the other hand, the difficulty of generating all cutting patterns and often the large number of cutting patterns are the main problems encountered in this regard. In this study an integrated mathematical model that generates cutting patterns and finds the best patterns is developed for 1.5-dimensional cutting stock problems with order type and strip number constraints. This non-linear model has been linearized to eliminate solution difficulties. The performance of both models is compared with the performance of the model that uses the previously generated cutting patterns by using the randomly generated test problems. Obtained results show that the linear model, which also generates the cutting patterns itself, can be solved in a reasonable time up to a certain size. In particular, we believe that linearization of the nonlinear mathematical model for the problem will be an important contribution for the literature.

*Sorumlu Yazar/Corresponding Author: tsarac@ogu.edu.tr, msagir@ogu.edu.tr / Tel: +90 222 239 3750

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Cam, kağıt, tekstil, metal ve mobilya benzeri endüstri alanlarında, boyutları bilinen bir malzemeden, çeşitli biçim, miktar ve boyutlara sahip daha küçük parçaların kesilerek kullanılması gerekmektedir. Bu tür problemler, genel olarak, *kesme problemleri (cutting stock problems)* olarak adlandırılmaktadır. Kesilecek malzemeye *ana malzeme,* ana malzemeden kesilen küçük parçalara *sipariş parçası* ve sipariş parçalarının, ana malzeme üzerinde her farklı yerleşimine ise *kesme planı* (*pattern*) denilmektedir.

Kesme işlemini karakterize eden önemli bazı diğer kavramlar; kısıtlı/kısıtsız, giyotin kesme, kademeli/kademesiz kesme ve ortogonal/ortogonal olmayan kesme olarak sayılabilir. *Giyotin kesmede*, ana malzeme bir kenarından diğer kenarına kadar kesilir. Her adımda kesilen sipariş parçası ikiye ayrılır [1]. Bir kesme planında bir sipariş parçasının tekrar sayısı sınırlı değilse *kısıtsız giyotin kesme*, sınırlı ise *kısıtlı giyotin kesme* denir [2]. Dikdörtgen sipariş parçaların ana malzeme kenarlarına paralel (*ortogonal*) ya da herhangi bir açı ile (*ortogonal olmayan* bir şekilde) kesilmesi mümkündür [3]. Kesme sayısında bir sınır varsa *kademeli*, aksi halde *kademesiz* giyotin kesme söz konusudur [1] *İki kademeli kesme*, giyotinle kesmenin özel bir durumudur. Bu türde tüm kesmeler iki aşamada tamamlanır. İlk aşamada tüm enine (boyuna) kesmeler, ikinci aşamada ise tüm boyuna (enine) kesmeler tamamlanır.

Wascher vd. [4] 2005 yılında kesme problemleri için bir sınıflandırma önermiştir. Bu çalışmada kesme problemleri boyut, atama tipi, ana malzeme çeşitliliği, kesilecek sipariş parçası çeşitliliği ve kesilecek sipariş parçalarının şekli olarak beş ölçüte göre sınıflandırılmıştır.

Bir kesme probleminin en önemli karakteristiği; ana malzemenin ve sipariş parçalarının, kesme planlarının oluşturulması aşamasında göz önünde bulundurulması gereken *boyut* sayısıdır. Kağıt rulolar, metal çubuklar gibi sipariş parçalarının kesimi *bir boyutlu;* palet yerleştirme, büyük dikdörtgen ana malzemelerden küçük dikdörtgen sipariş parçalarının kesilmesi gibi problemler *iki boyutlu;* konteynır yerleştirme, ambalaj kutularına yerleştirme gibi problemler *üç boyutludur*. Dört boyutlu problemler, üç boyutlu bir kesme problemine zaman boyutunun da katılması ile ortaya çıkabilir [5].

Son on yılda kesme problemlerini ele alan ve matematiksel modellemeye yer veren çalışmalar incelenmiştir. Gramani vd. [6] iki boyutlu kesme problemi ve parti büyüklüğü belirleme problemleri için kesme planlarının önceden türetilmesine gereksinim duymayan, bütünleşik bir doğrusal karma tamsayılı matematiksel model geliştirmişlerdir. Problemin çözümü için Lagrange gevşetmesi temelli bir sezgisel algoritma önermişlerdir. Berberler ve Nuriyev [7], bir boyutlu kesme problemini alt küme toplamı (*subset-sum*) problemi olarak modellemişler ve problemin çözümü için bir dinamik programlama algoritması önermişlerdir. Cherri vd. [8] kesme sonrası oluşacak firelerin sonradan kullanılabilecek boyutlarda olmasını ele alan bir boyutlu kesme problemleri konulu çalışmaları kapsayan bir yayın taraması yapmışlardır. Kim vd. [9], teknik kısıtları olan iki boyutlu kesme problemi için doğrusal karma tamsayılı bir matematiksel model önermişlerdir. Problemin çözümü için sırt çantası temelli bir sezgisel algoritma geliştirilmiştir. Furini vd. [10], giyotin kısıtlı iki boyutlu kesme problemi için doğrusal karma tamsayılı bir matematiksel model önermişlerdir. Lin vd. [11], Bir boyutlu kesme problemi için bir genetik algoritma geliştirilmişlerdir. Coelho vd. [12] bir boyutlu kesme problemi için kesme planlarının önceden türetilmesini gerektirmeyen doğrusal karma tamsayılı bir matematiksel model önermişlerdir. Sonradan kullanılması mümkün olan firelerin ele alındığı çalışmada problemin çözümü için iki sezgisel algoritma geliştirilmiştir. Vanzela vd. [13], iki boyutlu kesme problemi ve parti büyüklüğü belirleme problemlerini birlikte ele almışlardır. Problemin çözümü için kolon türetme yöntemini kullanmışlardır. Melega vd. [14], parti büyüklüğü belirleme ve kesme problemini birlikte ele alan çalışmaları kapsayan bir yayın taraması yapmışlardır. Tanır vd. [15], kesilen parçaların bölünebildiği ve sonradan birleştirilebildiği bir boyutlu kesme problemini ele almışlardır. Bu problem için bir matematiksel model ve dinamik programlama temelli bir sezgisel algoritma önermişlerdir. Christofoletti vd. [16], üç boyutlu kesme problemi ve parti büyüklüğü belirleme problemini birlikte ele almışlardır. Ele alınan problem için doğrusal karma tamsayılı bir matematiksel model önermişlerdir. Kokten ve Sel [17], 1,5 boyutlu kesme ve ana malzeme seçimi problemi için doğrusal olmayan karma tamsayılı bir matematiksel model geliştirmişlerdir.

Son on yılda kesme problemlerini ele alan ve matematiksel modellemeye yer veren çalışmalar incelendiğinde genellikle bir ve iki boyutlu problemlerin ele alındığı, bir buçuk ve üç boyutlu kesme problemlerinin daha az çalışıldığı göze çarpmaktadır.

İzleyen kısımda bu çalışmanın konusu olan bir buçuk boyutlu problemlerle ilgili literatür ayrıca tartışılmaktadır.

Bir buçuk boyutlu problemler, iki boyutlu problemlerin özel bir durumudur. Dikdörtgen malzemeler çok uzun rulolar üzerine yerleştirileceği zaman bu tip problemler ortaya çıkar [18]. Dikdörtgen sipariş parçaları kesiliyor olmasına rağmen, problem iki boyutlu değildir, çünkü ana malzeme boyunca uzanan yan fire, bir boyutu ile tanımlanabilmektedir ancak problem, kesilecek sipariş parçalarının yerleştirilmesi sırasında hem boy hem de enlerinin göz önünde bulundurulma zorunluluğu nedeniyle bir boyutlu problemden karmaşıktır [19].

Song vd. [20] 1,5 boyutlu problemi farklı tanımlamıştır. Buna göre 1,5 boyutlu kesme problemi büyük dikdörtgen stok malzemelerinden daha küçük dikdörtgen sipariş malzemelerinin kesilmesi olup, bu problemde müşterilerin istediği sipariş parçasının boyu, bazen, ana malzemenin boyundan daha uzun olabilmektedir. Bu durumda toplam uzunlukları sipariş parçasının boyunu karşılayacak şekilde birkaç ana malzeme bir araya getirilir. Bu problemde, ana malzemelerin birleştirilebileceği varsayımı nedeniyle bu problem 1,5 boyutlu kesme problemi olarak tanımlanmıştır.

Kesme problemleri konusunda literatüre çok önemli katkılarda bulunan Dyckhoff vd. [3] tek boyutlu kesme probleminin sürekli formda olanını, bir artı yarım boyutlu, 1,5 boyutlu olarak adlandırmıştır. Dyckhoff'un sınıflandırmasındaki bu tanımlama literatürde fazla yer almamış, karşı gelen problemler, 1,5 boyutlu kesme problemi yerine, "bir boyutlu ve çeşitli boylardaki ana malzemelerin kesildiği problemler" olarak tanımlanmıştır [21]. Üstelik izleyen yılarda Dyckhoff problemleri boyutlarına göre sınıflandırırken tek boyutlu, iki boyutlu, üç boyutlu ve N-boyutlu (N>3) problemler olarak gruplamış, 1,5 boyutlu kesme probleminin tanımına yer vermemiştir [5].

Bir lisansüstü tez çalışmasında 1,5 boyutlu kesme problemi "açık boyut problemi" olarak yer almış, problem, bir boyutu sabit diğer boyutu açık olan dikdörtgen şeklindeki bir stok malzemesine, kesilecek sipariş parçası kümesindeki tüm sipariş parçalarını, fireyi enküçükleyecek şekilde atamak olarak tanımlanmıştır [22].

Yukarıdaki üç tanımda da ([3, 21, 22]) 1,5 boyutlu problem, eni sabit, uzunluğu sürekli formda kabul edilebilecek stok malzemesine dikdörtgen sipariş parçalarının yerleştirilmesi şeklindedir. Bu problem, literatürde, diğer kesme problemleri kadar yer almamış olmakla birlikte, özellikle kağıt, metal, saç levha gibi girdisi olan üretim ortamlarında önemli bir alana sahiptir.

Saraç ve Sağır [23], şerit sayısı ve parça çeşidi kısıtlı 1,5 boyutlu kesme ve ana malzeme seçimi problemini ele almışlardır. Problemin çözümü için iki aşamalı bir çözüm yaklaşımı önermişlerdir. İlk aşamada kesme planları şerit sayısı ve parça çeşidi kısıtları altında tam sayımlama ile türetilmiş ikinci aşamada ise hangi kesme planlarının ve ana malzemelerin seçileceğini belirlemek üzere iki amaçlı doğrusal olmayan, karma tamsayılı bir matematiksel model önerilmiştir. Matematiksel model ile gerçek hayat problemlerinin çözülememesi nedeniyle bir genetik algoritma geliştirilmiştir. Gasimov vd. [24], 1,5 boyutlu kesme ve ana malzeme seçimi problemi için yeni bir çok amaçlı doğrusal karma tamsayılı matematiksel model geliştirmişlerdir. Bu model kesme planlarının önceden türetilmesini gerektirmektedir. Kokten ve Sel [17], 1,5 boyutlu kesme ve ana malzeme seçimi problemi için doğrusal olmayan karma tamsayılı bir matematiksel model geliştirmişlerdir. Problemin çözümü için iki aşamalı her aşamada alt modellerin sırayla çözüldüğü bir ayrıştırma yöntemi kullanmışlardır.

1,5 boyutlu kesme problemlerini ele alan ve matematiksel model öneren çalışmalar incelendiğinde, Saraç ve Sağır [23] ve Kökten ve Sel [17] tarafından önerilen matematiksel modellerin doğrusal olmayan yapıda olduğu göze çarpmaktadır. Gasimov vd. [24] tarafından önerilen model doğrusal karma tamsayılı yapıdadır ancak şerit sayısı ve ürün çeşidi kısıtlarını dikkate almamaktadır ve kesme planlarının önceden türetilmesine gereksinim duymaktadır. Dolayısıyla, kesme planlarının önceden türetilmesine gereksinim duymayan, parça çeşidi ve şerit sayısı kısıtlı 1,5 boyutlu kesme problemi modelleri ilk defa bu çalışmada önerilmiştir.

İzleyen bölümde, sipariş parçası çeşidi ve şerit sayısı kısıtlı 1,5 boyutlu kesme problemi tanıtılmıştır. Üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümlerde sırasıyla, geliştirilen M1, M2 ve M3 modelleri sunulmuştur. Altıncı bölümde geliştirilen matematiksel modellerin çözüm performansları test problemleri üzerinde denenerek elde edilen sonuçlar paylaşılmıştır. Son bölümde ise sonuç ve öneriler tartışılmıştır.

2. SİPARİŞ PARÇASI ÇEŞİDİ VE ŞERİT SAYISI KISITLI 1,5 BOYUTLU KESME PROBLEMİ
(1.5 DIMENSIONAL CUTTING PROBLEM WITH ORDER PIECE TYPE AND STRIP NUMBER CONSTRAINTS)

Farklı boyutlara sahip dikdörtgen biçimindeki n adet sipariş parçasının, G enine sahip bir ana malzemeden kesilmesi söz konusudur. Ana malzemenin boyu (L), kesme planları oluşturulurken boy kısıtını ihmal etmeyi mümkün kılacak kadar uzundur. Bu nedenle kesme planları, sadece en kısıtı dikkate alınarak oluşturulur. Daha sonra bir kesme planında yer alan her farklı sipariş parçası için ayrı ayrı toplam boylar hesaplanır. Bunlardan enbüyüğü kesme planının boyunu belirler. Ana malzemeyi boyuna paralel keserek şeritlere ayırabilecek bıçak sayısı (t-1) sınırlıdır. Bu nedenle ana malzeme en fazla t adet şeride kesilebilir. Bir başka deyişle ana malzemeye enden en fazla t adet sipariş parçası yerleştirilebilir. Sipariş parçaları kesilirken döndürülemezler yani şipariş parçasının eni, ana malzemenin enine, boyu boyuna paralel olacak şekilde kesme yapılmalıdır. Ayrıca bir kesme planında yer alabilecek en fazla sipariş parçası çeşidi (c) sınırlıdır. Literatürde sipariş parçası çeşidi ve şerit sayısı kısıtlı 1,5 boyutlu kesme problemini dikkate alan sadece bir çalışmaya [23] erişilmiştir. Saraç ve Sağır [23], söz konusu çalışmalarında problemin çözümü için ilk aşamada sipariş parçası çeşidi ve şerit sayısı kısıtları altında tüm mümkün kesme planlarını tam sayımlama ile türetmiş, ikinci aşamada ise en uygun kesme planlarını seçmek üzere bir matematiksel model önermişlerdir. Ancak önceden türetilmiş kesme planlarını kullanarak talebi karşılayan eniyi kesme planlarını araştıran bu modelin, NP-zor yapıda olması sebebi ile çözümü için bir Genetik Algoritma önerilmiştir. İlgili çalışmada geliştirilmeye açık üç nokta bulunmaktadır: (1) [23]'de sunulan makalede, kesme planlarının 1 metre olduğu kabul edilmekte ve kesme planlarına küsuratlı parça yerleşimine izin verilmektedir. Kesme planları art arda sıralandığında küsuratlı parçalar bir araya gelerek tam parçaları oluşturmaktadır. Sadece son kesme planında küsuratlı bir parça kullanımı var ise aslında bu bir fire olmasına rağmen modelde fire olarak hesaba dâhil edilememektedir. Bu oran problem çözümünde çok küçük kaldığı için ihmal edilmiştir. Oluşabilecek fark, her ne kadar küçük bir değer de olsa, talebin karşılanmış görünmesine rağmen bazı sipariş parçalarının üretim adetlerinin talebin altında kalması riskini yaratmaktadır. Ayrıca her bir kesme planının toplam boyunun bir metrenin katları biçiminde olma zorunluluğu bazı kesme planları için gereksiz fireler oluşabilmektedir. (2) Her kesme planı değişikliği üretimde kesintiye yol açacağı için üreticiler genellikle mümkün olduğunca az sayıda kesme planı değişikliği yaparak üretimi tamamlamayı tercih etmektedirler. Ancak söz konusu çalışmada önerilen matematiksel modelde bu eğilim dikkate alınmamıştır. Bu nedenle toplam fireyi küçültebilmek için sık sık kesme planı değişikliği gerektiren çözümler elde edilmesi mümkündür. (3) İlgili çalışmada kesme planlarının önceden türetilmesine gereksinim duyulmaktadır. Ancak tüm mümkün kesme planlarının türetilmesi zahmetli bir aşamadır ve problemin boyutu arttıkça türetilebilecek kesme planlarının sayısı da üstel olarak artmaktadır.

Bu çalışmada, literatürde sipariş parçası çeşidi ve şerit sayısı kısıtlı 1,5 boyutlu kesme problemini ele almış tek çalışma olan ve yukarıda değinilen Saraç ve Sağır [23]'dan farklı olarak, (1) geliştirilen modellerde kesme planlarının fireleri tam olarak hesaplanabilmektedir. (2) Üretimde yaşanacak kesintileri en aza indirebilmek için modele, toplam firenin enküçüklenmesi amacının yanı sıra toplam kullanılacak kesme planı sayısının enküçüklenmesi amacı da eklenmiştir. (3) Kesme planlarının önceden türetilmesini gerektiren iki aşamalı bir çözüm yaklaşımı yerine kesme planlarını kendisi oluşturabilen matematiksel modeller geliştirilmiştir. Geliştirilen modeller izleyen bölümlerde ayrıntılarıyla açıklanmıştır.

3. M1 MODELİ: 1,5 BOYUTLU KESME PROBLEMİ İÇİN KESME PLANLARININ ÖNCEDEN TÜRETİLMESİNE GEREKSİNİM DUYMAYAN MODEL

(M1 MODEL: A MATHEMATICAL MODEL FOR 1.5 DIMENSIONAL CUTTING PROBLEM)

İndisler

j : sipariş parçası indisi $j \in \{1, \ldots, n\}$
k : kesme planı indisi $k \in \{1, \ldots, m\}$

Parametreler

n : sipariş parçası sayısı
m : en fazla türetilebilecek kesme planı sayısı
e_j : j. sipariş parçasının eni (cm)
b_j : j. sipariş parçasının boyu (cm)
d_j : j. sipariş parçasının talebi (adet)
G : ana malzemenin eni (cm)
L : ana malzemenin boyu (cm)
t : bir kesme planında enden kesilebilecek enfazla sipariş parçası sayısı (adet)
c : bir kesme planında yer alabilecek enfazla sipariş parçası çeşidi (adet)

Karar değişkenleri

μ_{jk} : j. sipariş parçasından k. kesme planında yer alan toplam miktar (adet)
y_{jk} : j. sipariş parçasından k. kesme planında enden yer alan miktar (adet)
γ_{jk} : j. sipariş parçasından k. kesme planında boydan yer alan miktar (adet)
z_k : k. kesme planı kullanılıyorsa 1, kullanılmıyorsa 0
w_{jk} : j. sipariş parçası k. kesme planında yer alıyorsa 1, almıyorsa 0
x_k : k. kesme planından kullanılacak net miktar (cm)

(M1):

Kısıtlar

$$\gamma_{jk} \leq \frac{x_k}{b_j} \qquad \forall j,k \qquad (1)$$

$$\mu_{jk} \leq \gamma_{jk} y_{jk} \qquad \forall j,k \qquad (2)$$

$$\sum_k \mu_{jk} \geq d_j \qquad \forall j \qquad (3)$$

$$\sum_j e_j y_{jk} \leq G\, z_k \qquad \forall k \qquad (4)$$

$$\sum_k x_k \leq L \qquad (5)$$

$$x_k \geq z_k \qquad \forall k \qquad (6)$$

$$x_k \leq L\, z_k \qquad \forall k \qquad (7)$$

$$y_{jk} \geq w_{jk} \qquad \forall j,k \qquad (8)$$

$$y_{jk} \leq \mathrm{t}\, w_{jk} \qquad \forall j,k \qquad (9)$$

$$\sum_j w_{jk} \leq c \qquad \forall k \qquad (10)$$

$$\sum_j y_{jk} \leq t \qquad \forall k \qquad (11)$$

$$x_k \geq 0 \qquad \forall k \qquad (12)$$

$$y_{jk} \geq 0 \textit{ ve tamsayı} \qquad \forall j,k \qquad (13)$$

$$\mu_{jk} \geq 0 \textit{ ve tamsayı} \qquad \forall j,k \qquad (14)$$

$$z_k \in \{0,1\} \qquad \forall k \qquad (15)$$

$$w_{jk} \in \{0,1\} \qquad \forall j,k \qquad (16)$$

Amaç fonksiyonları

$$f_1 = enk \sum_k x_k \qquad (17)$$

$$f_2 = enk \sum_k z_k \qquad (18)$$

Birleştirilmiş amaç fonksiyonu

$$f = enk \sum_k \frac{x_k}{L} + \sum_k \frac{z_k}{m} \qquad (19)$$

1'nolu kısıt kesme planında bir sipariş parçasının boydan kaç adet yer aldığının (γ_{jk}), 2'nolu kısıt ise bir sipariş parçasının bir kesme planında toplamda kaç adet yer aldığının hesaplanması içindir. 3'nolu kısıt talep kısıtıdır. Bir kesme planına yerleştirilen tüm sipariş parçalarının toplam eninin ana sipariş parçasının enini aşmaması 4'nolu kısıt ile sağlanmaktadır. 5'nolu kısıt toplam kullanılan kesme planı miktarının ana malzemenin boyunu aşmaması içindir. 6, 7'nolu kısıtlar x_k ve z_k için, 8, 9'nolu kısıtlar ise y_{jk} ve w_{jk} için ilişki kısıtıdır. Buna göre kullanılmayan bir kesme planı için o kesme planının kullanım miktarı değişkeni değer alamayacak, bir sipariş parçası bir kesme planında yer almıyorsa da o sipariş parçasının o kesme planında enden kaç tane yer aldığı değişkeni değer alamayacaktır. 10'nolu kısıt teknik kısıt olup, bir kesme planında en fazla *c* tane farklı sipariş parçasının yer alabileceğini göstermektedir. 11'nolu kısıt teknik kısıt olup, bir sipariş parçası bir kesme planında yer alıyorsa, ana malzemenin enine en fazla *t* şerit halinde yerleştirilebileceğini gösterir. (12-16) kısıtları işaret kısıtlarıdır. Problemde (17, 18) ile verilen iki tane amaç fonksiyonu tanımlanmıştır. İlki kullanılan kesme planlarının toplam boyunun diğeri ise kullanılan kesme planı çeşidinin enküçüklenmesi içindir. Bu iki amaç fonksiyonu 19'nolu denklemde görüldüğü gibi, ağırlıklı toplam skalerleştirme yöntemi kullanılarak birleştirilmiştir.

Yukarıda verilen M1 modeli, 2'nolu kısıttan görüldüğü gibi doğrusal olmayan yapıdadır. Bu kısıtta y_{jk} ve γ_{jk} ile gösterilen ve sırasıyla, *j.* sipariş parçasından *k.* kesme planında enden yer alan miktar (*adet*) ve *j.* sipariş parçasından *k.* kesme planında boydan yer alan miktar (*adet*) olarak tanımlanan karar değişkenlerinin çarpım ifadesi yer almaktadır. 2'nolu kısıt matematiksel model kısmında da açıklandığı gibi bir sipariş parçasının bir kesme planında toplamda kaç adet yer aldığının hesaplanması içindir. Görüldüğü gibi bu kısıtta iki karar değişkeninin çarpımı yer aldığı için doğrusallık bozulmaktadır. Bu model doğrusallaştırılarak izleyen bölümde detayları verilecek olan M2 modeli elde edilmiştir.

4. M2 MODELİ: M1 MODELİNİN DOĞRUSALLAŞTIRILMASI
(M2 MODEL: LINEARIZATION OF M1 MODEL)

M1 modelinde *j* sipariş parçasının *k* kesme planında toplamda kaç adet yer aldığının (μ_{jk}) hesaplanması için kullanılan (2) numaralı kısıt y_{jk} ve γ_{jk} karar değişkenlerinin çarpımını içerdiğinden doğrusal değildir. Bu kısıtı doğrusallaştırabilmek için M2 modelinde s_{jkr} karar değişkeni tanımlanmıştır. s_{jkr} *j.* sipariş parçası, *k.* kesme planında enden *r* sıra yer alıyorsa 1, almıyorsa 0 değerini alan bir 0-1 karar değişkenidir. $\propto_{jk}$ değişkeni ise M2 modelinde yeni tanımlanmış olan bir diğer değişkendir ve *j.* sipariş parçasından *k.* kesme planının toplam kullanım miktarına boydan sığan miktarı göstermektedir. M1 modelindeki 2'nolu kısıt yerine M2 modelinde 23'nolu kısıt önerilmiştir. Bu kısıtta *j* parçasının enden yer aldığı sıra sayısı olan *r* değeri kesme planına boydan sığdığı değer olan $\propto_{jk}$ karar değişkeni ile çarpılarak μ_{jk} değeri doğrusal bir ilişki ile hesaplanabilir duruma gelmiştir.

M1 modelinin doğrusallaştırılması ile elde edilen M2 modeli aşağıda verilmiştir. Sadece M1 modelinde verilmemiş olan indis, parametre ve karar değişkenleri tanımlanmıştır.

İndis

r : *sipariş parçasının kesme planında enden yer aldığı adet indisi* $r \in \left\{1, \dots, \underset{j}{enb}\ \{q_j\}\right\}$

Parametreler

q_j : *j. sipariş parçasının ana malzeme enine en fazla sığabileceği miktar (adet)* $q_j = \left\lfloor \frac{G}{e_j} \right\rfloor$

M' : yeterince büyük pozitif sayı $M' = \left\lfloor \frac{G}{e_j} \right\rfloor \left\lfloor \frac{L}{b_j} \right\rfloor$

M'' : yeterince büyük pozitif sayı $M'' = enb\ q_j$

Karar değişkenleri

s_{jkr} : j. sipariş parçasından k. kesme planında enden r sıra yer alıyorsa 1, almıyorsa 0

$\propto_{jk}$: j. sipariş parçasından k. kesme planının toplam kullanım miktarına boydan sığan miktar (adet)

σ_k : k. kesme planının kullanım miktarı* (adet)

**Matematiksel modelde her kesme planının 100 cm. olduğu varsayılırsa, σ_k karar değişkeni 100 cm.'lik kesme planlarından kaç kez kullanıldığını göstermektedir. Bu nedenle kesme planının kullanım sayısı, aynı zamanda kaç metre kullanıldığı anlamına da gelmektedir.*

(M2):

Kısıtlar

(3-5, 12-16)

$$\mu_{jk} \leq y_{jk}\ M' \qquad \forall j,k \tag{20}$$

$$\mu_{jk} \geq y_{jk} \qquad \forall j,k \tag{21}$$

$$\propto_{jk} \leq \frac{100\sigma_k}{b_j} \qquad \forall j,k \tag{22}$$

$$\mu_{jk} \leq r \propto_{jk} + (1 - s_{jkr})M' \qquad \forall j,k,r \mid r \leq q_j \tag{23}$$

$$y_{jk} = \sum_{r|r \leq q_j} r\, s_{jkr} \qquad \forall j,k \tag{24}$$

$$\sum_{r|r \leq q_j} s_{jkr} \leq 1 \qquad \forall j,k \tag{25}$$

$$\sum_j \sum_{r|r \leq q_j} s_{jkr} \leq c \qquad \forall k \tag{26}$$

$$\sum_j y_{jk} \leq t \qquad \forall k \tag{27}$$

$$\sum_j y_{jk} \leq \sigma_k M'' \quad \forall k \tag{28}$$

$$\sigma_k \geq z_k \quad \forall k \tag{29}$$

$$\sigma_k \leq L\, z_k \quad \forall k \tag{30}$$

$$x_k \geq b_j \propto_{jk} \quad \forall j,k \tag{31}$$

$$s_{jkr} \in \{0,1\} \quad \forall j,k,r \tag{32}$$

$$\sigma_k \geq 0 \textit{ ve tamsayı} \quad \forall k \tag{33}$$

$$\propto_{jk} \geq 0 \textit{ ve tamsayı} \quad \forall j,k \tag{34}$$

Birleştirilmiş amaç fonksiyonu

(19)

20, 21'nolu kısıtlar, μ_{jk} ve y_{jk} değişkenleri arasındaki ilişki kısıtlarıdır. y_{jk} sıfırsa μ_{jk} değişkeninin de sıfır olmasını sağlarlar. 22'nolu kısıt *j*. sipariş parçasının *k*. kesme planında boydan kaç adet yer aldığının hesaplatılması içindir. Karar değişkeni σ_k, *k*. kesme planının metre cinsinden kaç adet kullanıldığını belirttiğinden cm. ye çevirmek için 100 ile çarpılmaktadır. 23'nolu kısıt *j*. sipariş parçasının *k*. kesme planının toplam kullanım miktarında tam olarak kaç adet yer aldığının hesaplandığı kısıttır. 24'nolu kısıt bir sipariş parçasının bir kesme planında enden kaç adet yer aldığının hesaplatılması içindir. 25'nolu kısıt bir sipariş parçası bir kesme planında kullanılıyorsa enden sığabileceği miktarın tek bir değer olabileceğini gösterir. 26'nolu kısıt kesme planında en fazla *c* farklı sipariş parçası yer alabileceğini, 27'nolu kısıt ise bir kesme planında enden kesilebilecek enfazla *t* tane sipariş parçası olabileceğini gösterir. 28'nolu kısıt y_{jk} ile σ_k arasındaki, 29, 30'nolu kısıtlar ise σ_k ve z_k arasındaki ilişki kısıtlarıdır. 31'nolu kısıt kesme planının kullanılan net miktarının hesaplanması içindir. (32-34) kısıtlar işaret kısıtlarıdır.

Literatür araştırmasında da belirtildiği gibi bu tür problemler için kesme planlarını önceden türeterek karar modeline girdi şeklinde vermek de bir çözüm yaklaşımıdır. Ancak bu durumda problem boyutuna bağlı olarak türetilmesi gereken kesme planı sayısı çok büyük olabilmektedir. İzleyen bölümde önceden türetilmiş kesme planlarını kullanacak şekilde geliştirilen matematiksel model (M3) verilmektedir. Rassal olarak türetilen test problemleri önerilen M1 ve M2 modelleri ile çözüldüğünde elde edilen sonuçlar, M3 modelinin sonuçları ile ileriki bölümlerde karşılaştırılacaktır.

5. M3 MODELİ: ÖNCEDEN TÜRETİLMİŞ KESME PLANLARINI KULLANAN MATEMATİKSEL MODEL
(M3 MODEL: THE MATHEMATICAL MODEL USES GENERATED CUTTING PATTERNS)

Önceki bölümlerde tanımlanmamış olan indis, parametre ve karar değişkenleri ve M3 modeli aşağıda verilmiştir. M1 ve M2 modellerinde karar değişkeni olan y_{jk} M3 modelinde kesme planları önceden türetildiği için parametredir ve Y_{jk} ile gösterilmiştir.

Parametreler

p : kesme planı sayısı
Y_{jk} : *k*. kesme planında yer alan *j*. sipariş parçasının kesme planına enden kaç adet sığdığı (*adet*)

(M3):
Kısıtlar

(3, 5, 12, 14, 15, 22, 29-31, 33, 34),

$$\mu_{jk} = Y_{jk} \propto_{jk} \quad \forall j,k \tag{35}$$

Birleştirilmiş amaç fonksiyonu

(19)

35'nolu kısıt *j*. sipariş parçasının *k*. kesme planının toplam kullanım miktarında tam olarak yer aldığı miktarı hesaplayan kısıttır. İzleyen bölümde deneysel sonuçlara yer verilmektedir. M3 modeli için kullanılan kesme planlarının türetilmesine dönük şu açıklamalar yapılabilir:

Kesme planları oluşturulurken göz önünde bulundurulması gereken teknik kısıtlar aşağıda sıralanmıştır:

- Aynı kağıt kombinasyonu ve ondüle cinsine sahip olmak şartıyla, en fazla *c* adet farklı sipariş parçası aynı kesme planında yer alabilir.
- En fazla *t* sıra kesim yapılabilir.

Kesme planları bu özellikleri taşıyacak şekilde, Microsoft Excel ve Visual Basic Application programlama dili kullanılarak tam sayımlama yöntemiyle türetilmiştir.

Altıncı bölüm, yukarıda açıklanan üç matematiksel modelin çözüm performanslarının, test problemleri kullanılarak karşılaştırılmasına dönük deneysel çalışmaları ve sonuçlarını sunmaktadır.

6. DENEYSEL SONUÇLAR
(COMPUTATIONAL RESULTS)

Önerilen modellerin performanslarını gösterebilmek için, farklı sayıda sipariş parçasına sahip test problemleri '*enfazla iki çeşit parça içeren*' ve '*en fazla üç çeşit parça içeren*' kesme planlarına izin verilen iki durum için M1, M2 ve M3 modelleri ile çözülmüş ve elde edilen sonuçlar tartışılmıştır. Kullanılan test problemlerinin özellikleri izleyen alt başlıkta ayrıntısıyla verilmiştir. Elde edilen test sonuçları ise bölüm 6.2'de yer almaktadır.

6.1. Test Problemleri (*Test Problems*)

Bu çalışmada kullanılan test problemleri, Kasımbeyli vd. [25] tarafından bir boyutlu kesme problemleri için türetilmiş olan örneklerin 1,5 boyutlu probleme uyarlanması ile elde edilmiştir. Bunun için, bir boyutlu problemde yer alan sipariş parçalarının enleri belirli bir parametre ile çarpılarak boy değerleri türetilmiştir.

Kullanılan dört örnek problemin parametre değerleri aşağıda verilmiştir.

Örnek 1.

n = 5,
G = 110,
t = 8.
e = (10, 20, 30, 40, 60),
b = (13, 26, 39, 52, 78),
d = (6, 11, 4, 20, 15),
$K(c \leq 2)$ = 91,
$K(c \leq 3)$ = 132.

Örnek 2.

n = 10,
G = 120,
t = 9.
e = (10, 20, 30, 40, 60, 15, 25, 35, 45, 65),
b = (13, 26, 39, 52, 78, 19, 32, 45, 58, 84),
d = (7, 11, 3, 20, 15, 5, 10, 13, 20, 15),
$K(c \leq 2)$ = 357,
$K(c \leq 3)$ = 918.

Örnek 3.

n = 20, G = 130, t = 10,
e = (10, 20, 30, 40, 60, 15, 25, 35, 45, 65, 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32),
b = (13, 26, 39, 52, 78, 19, 32, 45, 58, 84, 14, 15, 16, 18, 27, 28, 29, 31, 40, 41),
d = (16, 11, 13, 20, 15, 15, 10, 13, 20, 15, 15, 11, 13, 20, 15, 15, 10, 13, 2, 15),
$K(c \leq 2)$ = 2.670,
$K(c \leq 3)$ = 21.409.

Örnek 4.

n = 30,
G = 280,
t = 28,
e = (10, 20, 30, 40, 60, 15, 25, 35, 45, 65, 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44, 51, 52, 53, 54),
b = (13, 26, 39, 52, 78, 19, 32, 45, 58, 84, 14, 15, 16, 18, 27, 28, 29, 31, 40, 41, 42, 44, 53, 54, 55, 57, 66, 67, 68, 70),
d = (5, 11, 3, 20, 15, 5, 10, 13, 20, 15, 5, 11, 3, 20, 15, 5, 10, 13, 20, 15, 5, 11, 3, 20, 15, 5, 10, 13, 20, 15),
$K(c \leq 2)$ = 22.399,
$K(c \leq 3)$ = 589.208.

Burada, K(c ≤ 2) ve K(c ≤ 3) sırasıyla en fazla iki çeşit ve en fazla üç çeşit parça içermesine izin verildiğinde, tamsayımlama ile türetilen kesme planı sayısıdır.

6.2. Test Sonuçları (Test Results)

Türetilen tüm örnekler, M1, M2 ve M3 modelleri ile GAMS paket programının Cplex çözücüsü kullanılarak Intel (R) Core (TM) i7- 5700 HQ CPU 2.70 GHz işlemcisi, 8 GB ram özelliklerine sahip bir bilgisayarda çözülmüştür. Elde edilen çözümler Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1 dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde örnek adı ve kesme planlarında en fazla kaç çeşit parçanın yer almasına izin verildiği (c) bilgileri yer almaktadır. Diğer üç bölümde ise sırasıyla M1, M2 ve M3 modelleri ile elde edilmiş kesme planlarının toplam boyu (f_1), kullanılan toplam kesme planı sayısı (f_2), skalerleştirilmiş amaç fonksiyonu değeri (f) ve saniye cinsinden çözüm süresi (s) verilmiştir. Eniyi çözümün elde edildiği sonuçlar italik yazılmıştır. Eniyi çözümlerine erişilebilen problemler için elde edilen kesme planları, her biri ayrı bir tabloda (Tablo 2-Tablo 6) olmak üzere ayrıntılı bir şekilde verilmiştir. Tablo 1'den görülebileceği gibi Örnek

Tablo 1. M1, M2 ve M3 modellerinin karşılaştırılması (M1, M2 and M3 models' comparison)

		(Doğrusal olmayan bütünleşik)				(Doğrusal bütünleşik)				(Önceden türetilmiş kesme planlı)			
		M1				M2				M3			
	c	f_1	f_2	f	s	f_1	f_2	f	s	f_1	f_2	f	s
Örnek 1	≤ 2	1.274	3	0,77	28	1.274	3	0,77	1	1.274	3	0,77	1
	≤ 3	1.326	2	0,62	31	1.326	2	0,62	1	1.326	2	0,62	1
Örnek 2	≤ 2	-	-	-	200.000	2.850	5	0,97	8.793	2.850	5	0,97	2
	≤ 3	-	-	-	200.000	2.719	4	0,84	2.493	2.719	4	0,84	41
Örnek 3	≤ 2	-	-	-	200.000	3.144	10	0,82	66.049*	3.101	10	0,81	1.279
	≤ 3	-	-	-	200.000	3.353	7	0,69	5.000*	3.191	7	0,67°	200.000
Örnek 4	≤ 2	-	-	-	200.000	-	-	-	5.000*	2.762	15	0,67$^+$	200.000
	≤ 3	-	-	-	200.000	-	-	-	5.000*	-	-	-	200.000

*hafıza yetmemesi nedeniyle süre limitinden önce durdu.
$^\circ$eniyi çözüme uzaklık %0,03 tür.
$^+$eniyi çözüme uzaklık %11,3 tür.

1 ve Örnek 2'nin $c \leq 2$ ve $c \leq 3$ için tüm matematiksel modellerle eniyi çözümlerine ulaşılmıştır. M1 modelinin çözüm süresi, Örnek 1 $c \leq 2$ ve $c \leq 3$ için sırasıyla 28 ve 31 saniyedir. M2 ve M3 modellerinin karşı gelen çözüm süreleri ise sadece bir saniyedir. M1 modeli ile Örnek 2, Örnek 3 ve Örnek 4 için herhangi bir çözüm bulunamamıştır. Öte yandan M2 ile Örnek 2'nin $c \leq 2$ ve $c \leq 3$ durumları için çözümü, M3 modeline göre daha uzun ancak makul sürede bulunabilmiştir. M3 modeline önceden türetilmiş kesme planları girdi olarak verilirken, M2'nin, kesme planlarını da türetecek yapıda olduğu hatırlanırsa, M2'nin çözüm süresinin kabul edilebilir olduğu görülmektedir. Nitekim kesme planlarını önceden türetmenin de önemli bir güçlük olduğu, üstelik ayrıca zaman gerektirdiği bilinmektedir. Son olarak örnek 4'ün sadece $c \leq 2$ durumu, M3 modeliyle çözülebilmiştir. Örnek 1'in $c \leq 2$ için elde edilen kesme planları Tablo 2'de, $c \leq 3$ için elde edilen kesme planları ise Tablo 3'de verilmiştir. Örnek 1'in $c \leq 2$ için elde edilen kesme planları ayrıca Şekil 1'de çizim olarak da verilmiştir.

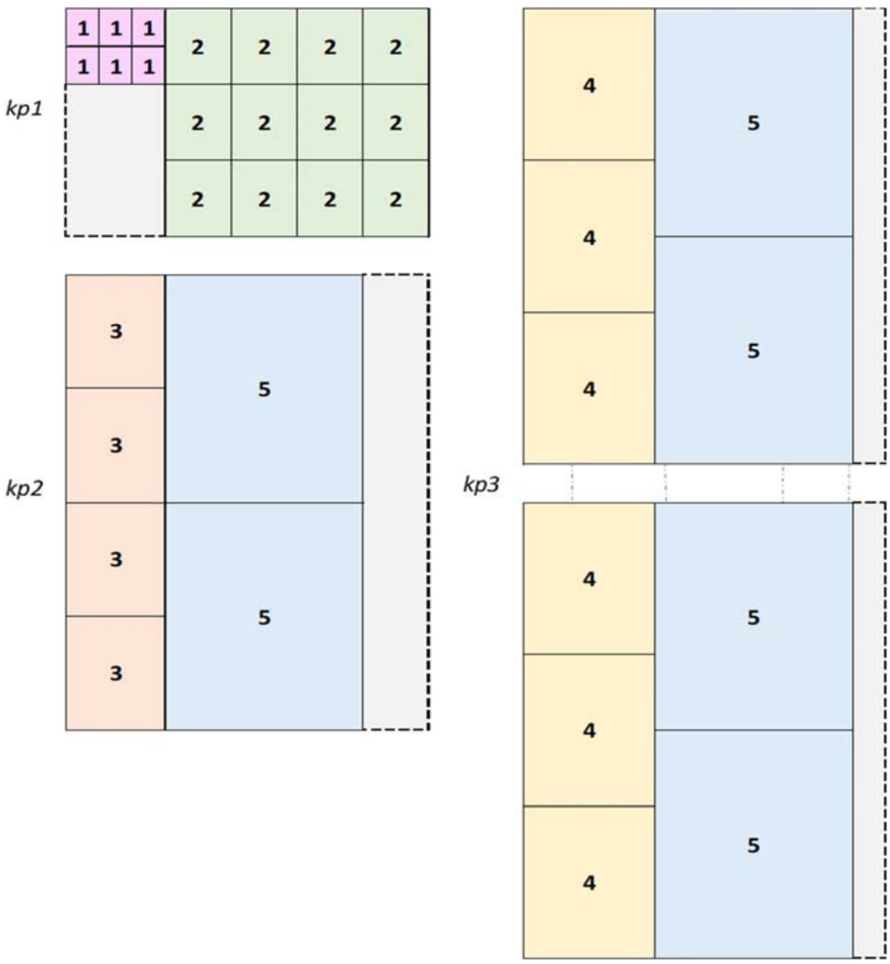
Tablo 2, Tablo 4 ve Tablo 6, dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde kesme planı numarası, ikinci ve üçüncü bölümlerde kesme planında yer alan parçaların; numarası, eni, kesme planının eninde kaç adet yer aldığı, boyu ve kesme planının boyunda kaç adet yer aldığı bilgileri bulunmaktadır. Son bölümde ise ilgili kesme planının (*kp*) eni ve boyu verilmiştir. Tabloların en alt iki satırında sırası ile elde edilmiş kesme planlarının toplam boyu (f_1) ve kullanılan toplam kesme planı sayısı (f_2) yer almaktadır.

Tablo 2. Örnek 1, $c \leq 2$ için eniyi çözümde türetilen kesme planları (Optimum cutting patterns for instance 1, $c \leq 2$)

Kesme Planı		Parça		Adet	Parça		Adet	Toplam
kp1	en	1	10	3	2	20	4	110
	boy		13	2		26	3	78
	toplam			6			12	
kp2	en	3	30	1	5	60	1	90
	boy		39	4		78	2	156
	toplam			4			2	
kp3	en	4	40	1	5	60	1	100
	boy		52	20		78	13	1.040
	toplam			20			13	

f_1 (kp top boy)= 1.274

f_2 (kp sayısı)=3



Şekil 1. Örnek1, $c \leq 2$ için eniyi çözümde türetilen kesme planları
(Optimum cutting patterns for instance 1, $c \leq 2$)

Tablo 3. Örnek1, c ≤ 3 için eniyi çözümde türetilen kesme planları
(Optimum cutting patterns for instance 1, *c* ≤ 3)

Kesme Planı		Parça		Adet	Parça		Adet	Parça		Adet	Toplam
	en		10	1		40	1		60	1	110
kp1	boy	1	13	6	4	52	20	5	78	15	1.170
	toplam			6			20			15	
	en		20	2		30	2				100
kp2	boy	2	26	6	3	39	2				156
	toplam			12			4				

f_1 = 1.326
f_2 = 2

Tablo 2'den görülebileceği gibi Örnek 1 *c* ≤ 2 için eniyi çözümde üç kesme planı türetilmiştir. İlk kesme planı (*kp1*), eni 10 br., boyu 13 br. olan parça 1'den enden 3 adet (yan yana), boydan 2 adet (alt alta) ve eni 20 br., boyu 26 br. olan parça 2'den enden 4 adet boydan ise 3 adet konularak elde edilmiştir. Bir başka deyişle *kp1*'de parça 1 alt alta 2 sıra, parça 2 ise alt alta üç sıra yer almaktadır. Böylece *kp1*'in toplam eni (10×3+20×4=) 110 br. dir. Kesme planının boyunu ise, planda yer alan 2 parçanın toplam kullanılan boy uzunluklarının daha büyük olanı belirlemektedir. Böylece *kp1*'in boyu *enb*{13×3, 26×3}=78'dir. *kp1* Şekil 1'de çizim olarak da verilmiştir. Şekil 1'den de görülebileceği gibi *kp1*'in boyunu parça 2 belirlemiştir. Bu kesme planında yer alan diğer parça olan parça 1'in altında yer alan, numaralandırılmamış ve kenarları kesikli çizgi ile çizilmiş alan kesme planının firesidir.

Tablo 3 ve Tablo 5, beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde kesme planı, ikinci, üçüncü ve dördüncü bölümlerde ise kesme planında yer alan parçaların; numarası, eni, kesme planının eninde kaç adet yer aldığı, boyu ve kesme planının boyunda kaç adet yer aldığı bilgileri bulunmaktadır. Son bölümde ilgili kesme planının eni ve boyu verilmiştir. Tabloların en alt iki satırında ise sırası ile elde edilmiş kesme planlarının toplam boyu (f_1) ve kullanılan toplam kesme planı sayısı (f_2) yer almaktadır.

Tablo 3'den de görülebileceği gibi Örnek 1 *c* ≤ 3 için eniyi çözümde iki kesme planı türetilmiştir. İlk kesme planı (*kp1*), parça 1'den 1 adet, parça 4'ten 1 adet ve parça 5'ten 1 adet yan yana konularak elde edilmiştir. *kp1*'in eni (10×1+40×1+60×1=) 110'dur. *kp1*'de parça 1 alt alta 6 sıra, parça 4, 20 ve parça 5 ise alt alta 15 sıra yer almaktadır. Dolayısıyla *kp1* planının boyu = *enb*{13×6, 52×20, 78×15} = 1.170'dir. Örnek 2'nin *c* ≤ 2 için eniyi çözüm ile elde edilen kesme planları Tablo 4'de, *c* ≤ 3 için elde edilen kesme planları ise Tablo 5'de verilmiştir.

Tablo 4'den görülebileceği gibi Örnek 2 c ≤ 2 için eniyi çözümde beş kesme planı türetilmiştir. İlk kesme planı (*kp1*), parça 9'dan 1 adet ve parça 10'dan 1 adet yan yana konularak elde edilmiştir. *kp1*'in eni (45×1+65×1=) 110'dur. *kp1*'de parça 9 alt alta 20 sıra ve parça 10 ise alt alta 15 sıra yer almaktadır. Dolayısıyla *kp1* planının boyu = *enb*{58×20, 84×15} = 1.260'dir. Kesme planlarının toplam boyu ise 2.850 olarak elde edilmiştir.

Tablo 4. örnek2, c ≤ 2 için eniyi çözüm ile türetilen kesme planları (Optimum cutting patterns for instance 2, *c* ≤ 2)

kesme planı		parça		adet	parça		adet	toplam
	en		45	1		65	1	110
kp1	boy	9	58	20	10	84	15	1.260
	toplam			20			15	
	en		20	2		25	3	115
kp2	boy	2	26	6	7	32	4	156
	toplam			12			12	
	en		10	3		30	3	120
kp3	boy	1	13	3	3	39	1	39
	toplam			9			3	
	en		15	1		35	3	120
kp4	boy	6	19	5	8	45	5	225
	toplam			5			15	
	en		40	1		60	1	100
kp5	boy	4	52	20	5	78	15	1.170
	toplam			20			15	

f_1 = 2.850
f_2 = 5

Tablo 5'den görülebileceği gibi Örnek 2 c ≤ 3 için eniyi çözümde dört kesme planı türetilmiştir. Kesme planlarının üç tanesi (*kp1*, *kp2*, *kp4*) üç çeşit parça içerirken *kp3* sadece bir çeşit parçadan oluşmaktadır. İlk kesme planı (*kp1*), parça 1'den 1 adet, parça 9'dan 1 adet ve parça 10'dan 1 adet yan yana konularak elde edilmiştir. *kp1*'in eni (10×1+45×1+65×1=) 120'dir. *kp1*'de parça 1 alt alta 9 sıra, parça 9, 20 ve parça 10 ise alt alta 15 sıra yer almaktadır. Dolayısıyla *kp1* planının boyu = *enb*{13×9, 58×20, 84×15} = 1.260'dır. Kesme planlarının toplam boyu ise 2.719 olarak elde edilmiştir. Örnek 3'ün *c* ≤ 2 için sadece M3 modeli ile eniyi çözümüne erişilebilmiştir. M3 modeli ile elde edilen kesme planları Tablo 6'da verilmiştir.

Tablo 6'dan görülebileceği gibi Örnek 3 c ≤ 2 için eniyi çözümde on kesme planı türetilmiştir. İlk kesme planı (*kp1*), parça 1'den 1 adet ve parça 4'den 3 adet yan yana konularak elde edilmiştir. *kp1*'in eni (10×1+40×3=) 130'dur. *kp1*'de parça 1 alt alta 16 sıra ve parça 4 ise alt alta 7 sıra yer almaktadır. Dolayısıyla *kp1* planının boyu = *enb*{13×16, 52×7} = 364'tür. Kesme planlarının toplam boyu ise 3.101 olarak elde edilmiştir.

Tablo 2-6'da verilen kesme planları genel olarak değerlendirilecek olursa, önerilen matematiksel modellerle

Tablo 5. örnek2, c ≤ 3 için eniyi çözüm ile türetilen kesme planları
(Optimum cutting patterns for instance 2, *c* ≤ 3)

Kesme Planı		Parça		Adet	Parça		Adet	Parça		Adet	Toplam
	en	1	10	1	9	45	1	10	65	1	120
kp1	boy		13	9		58	20		84	15	1.260
	toplam			9			20			15	
	en	4	40	2	6	15	1	7	25	1	120
kp2	boy		52	10		19	8		32	10	520
	toplam			20			8			10	
	en	5	60	2							120
kp3	boy		78	8							624
	toplam			16							
	en	2	20	1	3	30	1	8	35	2	120
kp4	boy		26	11		39	3		45	7	315
	toplam			11			3			14	

$f_1 = 2.719$
$f_2 = 4$

30 çeşide kadar sipariş parçası içeren problemler için kesme planı sayısını ve kullanılacak toplam ana malzeme boyunu enküçükleyecek kesme planlarının başarılı bir şekilde türetilebildiği görülmektedir.

Tablo 6. örnek3, c ≤ 2 için eniyi çözüm ile türetilen kesme planları (Optimum cutting patterns for instance 3, *c* ≤ 2)

Kesme Planı		Parça		Adet	Parça		Adet	Toplam
	en	1	10	1	4	40	3	130
kp1	boy		13	16		52	7	364
	toplam			16			21	
	en	2	20	2	3	30	3	130
kp2	boy		26	6		39	5	195
	toplam			12			15	
	en	5	60	1	10	65	1	125
kp3	boy		78	15		84	15	1.260
	toplam			15			15	
	en	6	15	5	11	11	5	130
kp4	boy		19	3		14	4	57
	toplam			15			20	
	en	7	25	2	18	24	3	122
kp5	boy		32	5		31	5	160
	toplam			10			15	
	en	8	35	1	9	45	2	125
kp6	boy		45	13		58	10	585
	toplam			13			20	
	en	12	12	3	17	23	4	128
kp7	boy		15	4		29	3	87
	toplam			12			12	
	en	13	13	5	19	31	2	127
kp8	boy		16	3		40	1	48
	toplam			15			2	
	en	14	14	2	20	32	3	124
kp9	boy		18	8		41	5	205
	toplam			16			15	
	en	15	21	3	16	22	3	129
kp10	boy		27	5		28	5	140
	toplam			15			15	

$f_1 = 3.101$
$f_2 = 10$

7. SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

Bu çalışma kapsamında, parça çeşidi ve şerit sayısı kısıtlı 1,5 boyutlu kesme problemi için, kesme planlarını da türeten yeni bir matematiksel model geliştirilmiş, model, doğrusal olmayan yapısı sebebiyle doğrusallaştırılmıştır. Ayrıca kesme planlarının önceden türetildiği üçüncü bir model de geliştirilmiştir. Modellerin çözüm performansını değerlendirebilmek için, türetilen test problemleri geliştirilen modellerle çözülmüş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır. Önceden türetilmiş kesme planlarını kullanan model beklendiği üzere tüm problemleri diğer modellerden daha kısa sürede çözmüştür. Ancak, kesme planlarını önceden türetmenin de önemli bir güçlük olduğu üstelik ayrıca zaman gerektirdiği bilinmektedir. Öte yandan, kesme planlarını kendisi türeten doğrusal modelin de belirli büyüklüğe kadar makul sürede çözüm bulabildiği görülmüştür. Bu çalışmada, bütünsel problem için geliştirilen matematiksel modelin doğrusal yapıya kavuşturulmasının, hem literatür hem de ele alınan problemin yaşandığı üretim süreçleri için önemli bir kazanım olacağı düşünülmektedir.

Gerçek hayatta sipariş parçası ve ana malzeme çeşitliliğinin fazla olduğu sektörlerde bile kağıt cinsi, ondüla türü ve teknik kesme kısıtları vb. sebeplerle çoğu durumda problemin doğası gereği birlikte ele alınabilir sipariş parçası sayısı önemli ölçüde azalabilmektedir. Bu nedenle önerilen yaklaşımın çok sayıda gerçek sistemde uygulanabileceği düşünülmektedir. Ancak, daha büyük boyutlarda problem çözümüne ihtiyaç duyulması halinde modellerin çözümü için metasezgisel yaklaşımlar denenebilir.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Morabito R.N., Arenales M.N., Arcaro V.F., And-or-graph approach for two-dimensional cutting problems, European Journal of Operational Research*,* 58 (2), 263-271, 1992.
2. Hifi M, Zissimopoulos V., Constrained two-dimensional cutting: An improvement of Christofides

and Whitlock's exact algorithm, Journal of the Operational Research Society, 48 (3), 324-331, 1997.

3. Dyckhoff H, Kruse H.J., Abel D., Gal T., Trim Loss and Related Problems, OMEGA The International Journal of Management Science, 13 (1), 59-72, 1985.
4. Wascher, G., Haußner, H., Schumann, H., An improved typology of cutting and packing problems, Working Paper (24), Last Revision: 2005-05-17, Otto von Guericke University, 38, 2005.
5. Dyckhoff, H., A typology of cutting and packing problems, European Journal of Operational Research, 44, 145–159, 1990.
6. Gramani, M.C.N., Franca, P.M., Arenales, M.N., Lagrangian relaxation approach to a coupled lot-sizing and cutting stock problem, International Journal of Production Economics, 119 (2), 219-227, 2009.
7. Berberler, M.E., Nuriyev, U.G., A new heuristic algorithm for the one-dimensional cutting stock problem, Applied and Computational Mathematics, 9 (1), 19-30, 2010.
8. Cherri, A.C., Arenales, M.N., Yanasse, H.H., Poldi, K.C., Vianna, A.C.G., The one-dimensional cutting stock problem with usable leftovers - A survey, European Journal of Operational Research, 236 (2), 395-402, 2014.
9. Kim, K., Kim, B.I., Cho, H., Multiple-choice knapsack-based heuristic algorithm for the two-stage two-dimensional cutting stock problem in the paper industry, International Journal of Production Research, 52 (19), 5675-5689, 2014.
10. Furini, F., Malaguti, E., Thomopulos, D., Modeling Two-Dimensional Guillotine Cutting Problems via Integer Programming, Informs Journal on Computing, 28 (4), 736-751, 2016.
11. Lin, W.S., Mu, D., Wu, J.Z., Study on One-Dimensional Wood Board Cutting Stock Problem Based on Adaptive Genetic Algorithm, International Journal of Future Generation Communication and Networking, 9 (4), 95-101, 2016.
12. Coelho, K.R., Cherri, A.C., Baptista, E.C., Jabbour, C.J.C., Soler, E.M., Sustainable operations: The cutting stock problem with usable leftovers from a sustainable perspective, Journal of Cleaner Production, 167, 545-552, 2017.
13. Vanzela, M., Melega, G.M., Rangel, S., de Araujo, S.A., The integrated lot sizing and cutting stock problem with saw cycle constraints applied to furniture production, Computers & Operations Research, 79, 148-160, 2017.
14. Melega, G.M., de Araujo, S.A., Jans, R., Classification and literature review of integrated lot-sizing and cutting stock problems, European Journal of Operational Research, 271 (1), 1-19, 2018.
15. Tanir, D., Ugurlu, O., Guler, A., Nuriyev, U., One-dimensional cutting stock problem with divisible items: a case study in steel industry, TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics, 9 (3), 473-484, 2019.
16. Christofoletti, M.M., de Araujo, S.A., Cherri, A.C., Integrated lot-sizing and cutting stock problem applied to the mattress industry, Journal of the Operational Research Society, DOI: 10.1080/01605682.2020.1718013.
17. Kokten E.S., Sel C., Cutting stock problem in the wood products industry: A two-stage solution approach, International Transactions in Operational Research, 1–29. 2020. DOI: 10.1111/itor.12802
18. Chauny F., Loulou R., Sadones S., Soumis F., A Two-phase heuristic for the two-dimensional cutting-stock problem, Journal of the Operational Research Society, 42 (1), 39-47, 1991.
19. Haessler R.W., Sweeney P.E., Cutting stock problems and solution procedures, European Journal of Operational Research, 54 (2), 141-150, 1991.
20. Song, X., Chu, C.B., Nie, Y.Y., Bennel, J.A.., An iterative sequential heuristic procedure to a real-life 1.5-dimensional cutting stock problem, European Journal of Operational Research, 175, 1870–1889, 2006.
21. Adakçı, S., Stok kesme problemi: Alüminyum sektöründe uygulaması, Yüksek lisans tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 2001.
22. Bayır, F., Kesme problemine sezgisel bir yaklaşım, Doktora Tezi, İstanbul Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü İşletme Fakültesi Sayısal Yöntemler Anabilim Dalı, İstanbul, 2012.
23. Saraç T., Özdemir M.S., A genetic algorithm for 1,5 dimensional assortment problems with multiple objectives, Lecture Notes in Artificial Intelligence, 2718, 41-51, 2003.
24. Gasimov, R.N., Sipahioglu, A., Sarac, T., A multi-objective programming approach to 1.5-dimensional assortment problem, European Journal of Operational Research, 179 (1), 64-79, 2007.
25. Kasimbeyli N., Saraç T., Kasimbeyli R., A two-objective mathematical model without cutting patterns for one-dimensional assortment problems, Journal of Computational and Applied Mathematics, 235 (16), 4663-4674, 2011.