AJESI - Anadolu Journal of Educational Sciences International, 2020; 10(1): 54-73
DOI: 10.18039/ajesi.681924

Matematik Öğretmen Adaylarının Tek Değişkenli Fonksiyonların Limit Kavramına Yönelik İşlemsel Bilgilerinin İncelenmesi[1]

Birgül YILDIZ[2], Gonca İNCEOĞLU[3],

Geliş Tarihi: 15.11.2019 *Kabul Tarihi: 21.01.2020* *Araştırma Makalesi*

Öz

Bu araştırmanın amacı öğretmen adaylarının tek değişkenli fonksiyonların limiti kavramına yönelik işlemsel bilgilerinin incelenmesidir. Bu araştırmada öğretmen adaylarının limit kavramı ile ilgili sadece işlemsel bilgisi ele alınmıştır. Araştırmanın modeli temel nitel araştırma olup veri toplama aracı açık uçlu sorulardan oluşmaktadır. Bu çalışmada, elde edilen bulguların yorumlanmasında içerik analizi tekniği benimsenmiştir. Bu araştırmanın katılımcıları 2017-2018 eğitim öğretim yılı güz döneminde Türkiye' de bir devlet üniversitesinde İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programında kayıtlı olan Analiz I dersini alan 30 öğretmen adayından oluşmuştur. Araştırmadan elde edilen veriler incelendiğinde öğretmen adaylarının genellikle fonksiyonun bir noktadaki limitini bulurken istenen noktayı fonksiyonda yerine yazdıkları, eşleniği ile çarparak ve cebirsel işlemler yaparak sonuca ulaşmayı tercih ettikleri görülmüştür. Öğretmen adayların tek değişkenli fonksiyonların sol, sağ limitini almada ve tanım değerini limit değerine eşitlemekte başarılı oldukları gözlenmiştir. Adaylar en çok tam değer fonksiyonunun limitini bulmada zorlanmışlardır. Bu durum; adayların tam değer fonksiyonu ile ilgili kavramsal bilgi eksikliğine sahip olmaları ile ilgilidir. Limit, fonksiyonun limiti alınan noktadaki değeri ile ilişkilendirilirse ezbere çözümler elde edilir. Bir fonksiyonun bir noktadaki limiti, fonksiyonun limiti alınan noktanın komşuluğundaki davranışı ile ilişkilendirilmelidir. Limit öğretiminde kavramsal ve işlemsel bilgi arasında denge kurulmalı ve ezbere yöntemlerden kaçınarak matematiksel düşünmenin gelişimini sağlayacak kavramsal öğrenmeyi destekleyen öğretim yöntemleri kullanılmalıdır.

Anahtar kelimeler: İşlemsel bilgi, tek değişkenli fonksiyonlar, limit

[1]Bu çalışma "Matematik Öğretmen Adaylarının Tek ve İki Değişkenli Fonksiyonlarda Limit ve Süreklilik Konusundaki Kavramsal ve İşlemsel Bilgilerinin İncelenmesi" isimli yüksek lisans tezinden üretilmiştir. Bu araştırma için, Anadolu Üniversitesinden 09.04.2018 tarih ve 41452 sayı ile etik kurul izni alınmıştır.

[2]İstanbul İl Milli Eğitim Müdürlüğü, Sultangazi Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi, e-mail: birgulyildiz777@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9931-9449
[3]Anadolu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü e-mail: gyildiri@anadolu.edu.tr, ORCID: 0000-0002-5237-6822

AJESI - Anadolu Journal of Educational Sciences International, 2020; 10(1): 54-73
DOI: 10.18039/ajesi.681924

Investigation of Mathematics Teacher Candidates' Operational Knowledge of Single Variable Functions to Limit Concept

Submitted by 15.11.2019 *Accepted by 21.01.2020* *Research Paper*

Abstract

The aim of this study is to examine the pre-service teachers' operational knowledge about the limit concept of single variable function. The model of the study is a basic qualitative research and the data collection tool consists of open-ended questions. In this study, content analysis technique was adopted in the interpretation of the findings. The participants of this study consisted of 30 teacher canditates who took Analiz I lesson in the Primary Mathematics Teaching Program of the Department of Primary Education of a state university in Turkey. When the data obtained from the research is examined, it is seen that the candidates usually write the desired point in the function instead of finding the limit of the function at a point, they prefer to reach the result by multiplying the conjugate and performing algebraic operations. It was observed that the candidates were successful in taking the left, right limit of the functions of one variable and equalizing the definition value to the limit value. Candidates were most likely to find the limit of the exact value function. This situation; the lack of conceptual knowledge about the full value function of the candidates. If the limit is related to the value of the function with the value at the point taken, solutions by heart are obtained. The limit at a point must be associated with the behavior of the function in the neighborhood of the point being received. The relationship between conceptual and computational knowledge should be established in limit teaching and attention should be paid to semantic learning that will enable students to develop mathematical thinking instead of memorized methods.

Keywords: Operational information, single variable functions, limit

Giriş

Kavramsal bilgi, matematiksel kavramların kendilerini ve bunlar arasındaki ilişkileri içerir. Matematikte yer alan kavramların insan zihninde meydana getirilen ilişkiler olması, bunları kazanabilmek için belirli bir zihinsel gelişmişlik seviyesine ulaşılmış olması gerekir (Baykul, 2005).

İşlemsel bilgi, matematikte yer alan semboller, kurallar ve matematik yaparken kullanılan işlemlerin bilgisi olarak tanımlanır (Baykul, 2005). Matematik hem kavramsal hem de işlemsel bilgiyi içermektedir. Kavramsal ve işlemsel bilgi arasındaki ilişki kavramların uygun temsil edilmesi ve açıklanması; kuralların, yöntemlerin işlemsel bilgiyi kavramsal yapıya uygun hale getirmesi ve anlamlı akıl yürütmenin temeli üzerine kurulmalıdır. Matematiksel süreç içerisinde, uygulanan adımlar anlamlı olmalı ve adımların uygulanma nedenleri ifade edilebilmelidir; yani oluşturulan her adımın kavramsal yapı ile ilişkisi kurulmalıdır (Van de Walle, 2004).

Matematiğin formal dilinde yer alan her sembol uygun kavramlarla anlam meydana getirir (Schoenfeld, 1985). İşlem bilgisi onu oluşturan iki ayrı kısımla birlikte ele alınmaktadır. İşlem bilgisinin yer aldığı birinci kısım matematiğin sembolleri ve dili temsil eden bölümünden oluşurken, ikinci kısım ise kuralları, matematiksel problemlerin çözümünde kullanılan bağıntıları, somut nesneler üzerinde var olan işlemleri, görsel diyagramları, zihinsel hayalleri veya matematiksel sistemin oluşturduğu standart olmayan diğer nesneleri kapsar (Hiebert ve Lefevre, 1986). İşlem bilgisi, konuya ilişkin neden ve niçin soruları ele alınmadan yalnızca kural boyutunda ezberlenerek kazanıldığı için öğretimde de genellikle kavramsal bilgilere değil işlemsel bilgilere öncelik verilir.

İşlemsel bilgi, problem çözmede kullanılan işlem adımları ve algoritmaları içeren bilgi olarak ele alınmaktadır (Star, 2005, s.11). Kavramsal bilgiden farklı olarak alan yazında bireyin işlemsel bilgiye anlamadan da sahip olabileceği vurgulanmıştır (Skemp, 1987).

Öğrenciler, limit kavramını belli bir seviyeye kadar kullanabilmelerine rağmen kavramın oluşturulabilmesi ile ilgili üst düzey aşamalarda zorluklar yaşadıklarını belirten araştırmalar neticesinde öğrencilerin limit kavramını oluşturmada yaşayabilecekleri sorunlar aşağıda sunulmaktadır:

1. Fonksiyonun bir noktadaki limitini hesaplamak,

2. Fonksiyonun bir noktadaki limitinin varlığını gösterebilmek,

3.Fonksiyonla limitin ilişkisini kurabilmek, (Barbé, Bosch, Espinoza ve Gascón, 2005; Çıldır, 2012; Gürbüz, Toprak, Yapıcı, ve Doğan, 2011; Hofe, 1997).

Artigue (2000) Analiz dersi bağlamında limit kavramının birleştirici rolünü, problemlere çözüm getirme rolünden daha önemli olduğunu belirtirken Cornu (1991) da limit kavramını analizin her konusuna yerleşmiş ve merkezinde bulunan bir kavram olarak ifade etmiştir.

Jordaan (2005) yapmış olduğu araştırmada öğrencilerden " Fonksiyon belli bir noktada limite sahip olmayabilir." ifadesini değerlendirmelerini istemiştir. 42 öğrencinin katıldığı çalışmada 17 öğrenci verilen ifadenin yanlış olduğunu belirtmiştir. Bu yanıtı veren öğrencilerin limit kavramını içselleştirirken fonksiyon kavramı ile ilişkilendirdikleri görülmüştür. Öğrenciler fonksiyonun limitinin olması için verilen fonksiyonun sürekli olması ön koşuluna sahip olması gerektiğini ifade etmiştir. Jordaan (2005), “Limit istenildiği kadar kesin yapılabilecek olan bir yaklaştırma belirtir” ifadesinin doğru olup olmadığının belirtilmesini istemiştir. 42 öğrenciden 24 kişi bu soruya yanıt olarak ifadenin doğru olduğunu belirtmişlerdir. Araştırmasında $f(x) = \frac{x^2-9}{3x-9}$ fonksiyonunun $x \to 3$ için limitini sormuş ve 42 öğrencinin verdiği yanıtları incelemiştir. Araştırmaya katılan öğrencilerden 8 kişi fonksiyonun $x = 3$ noktasındaki değerinin 0’ a eşit olduğunu, 9 öğrenci fonksiyonun grafiğinin $x = 3$’ te sürekli olduğunu, 15 öğrenci $x = 3$’ te limitinin var olmadığını ve 9 katılımcı ise fonksiyonun $x = 3$' teki değerinin 2 veya 3' e eşit olacağını belirtmiştir. Bu durumda öğrencilerin limit konusunda belirsizlik durumu ile karşılaştıklarında anlamlandıramadıkları işlemler yaptıkları görülmüştür.

Öğretmen adaylarının limit kavramı ile ilgili işlemsel bilgilerinin araştırılmasının limit kavramının öğrenme süreçlerinin belirlenmesine katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Bu araştırmanın amacı öğretmen adaylarının tek değişkenli fonksiyonun limiti ile ilgili öğretmen adaylarının işlemsel bilgilerinin incelenmesi üzerinedir.

Yöntem

Çalışmanın bu bölümünde araştırma modeli, katılımcılar, veri toplama aracı ve verilerin analizine yönelik bilgilere yer verilmiştir.

Araştırmanın Modeli

Tek değişkenli fonksiyonlarda ilköğretim matematik öğretmenliği adaylarının işlemsel bilgilerini incelemeyi amaçlayan bu araştırmada elde edilen verilerin toplanması, analizi ve yorumlanması için eğitim araştırmalarında genellikle kullanılan temel nitel araştırma yaklaşımı benimsenmiştir.

Araştırmanın Katılımcıları

Bu çalışmada amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Bu çalışmada öğretmen adaylarının Genel Matematik ve Soyut Matematik dersini almış ve başarmış olmaları ve Analiz I dersini de alıyor olmaları ölçüt olarak belirlenmiştir. Araştırmanın katılımcılarını, bir devlet üniversitesinde İlköğretim Bölümü İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programı 2017-2018 öğretim yılında güz döneminde açılan Analiz 1 dersini alan 30 öğretmen adayı oluşturmuştur.

Araştırmanın Veri Toplama Aracı

Analiz 1 dersi kapsamında tek değişkenli fonksiyonlarda limit konusu ayrıntılı bir biçimde işlenmiştir. İlgili ders işlendikten sonra öğretmen adaylarının konuyu işlemsel açıdan nasıl yapılandırdıklarını ele almak için açık uçlu sorular sorulmuştur ve açık uçlu sorulara verdikleri cevaplar incelenmiştir. Analiz 1 dersinin temel konularından biri olan limite yönelik işlemsel bilginin incelenmesi ve değerlendirmesi açısından açık uçlu sorulara yer verilmiştir. Açık uçlu sorulardan elde edilen başarı puanlarına göre öğretmen adaylarının yanıtları tam yapanlar, kısmen yapanlar ve yanlış yapanlar şeklinde gruplara ayrılmıştır. Araştırmada kullanılan açık uçlu sorular aşağıda verilmiştir:

Aşağıdaki fonksiyonların limitlerini bulunuz.

1) $\lim_{x\to 0} [\![cos x]\!]$

2) $\lim_{x\to \infty} \sqrt{x^2+x}-x$

3) $\lim_{x\to 3^-} \frac{[\![2x-[\![x+3]\!]]\!]}{x-3}$

4) $\lim_{x\to 3} \frac{3x^2-12}{x^3-3x-2}$

Bu araştırma için, Anadolu Üniversitesinden 09.04.2018 tarih ve 41452 sayı ile etik kurul izni alınmıştır.

Verilerin Analizi

Bu çalışmada, elde edilen bulguların yorumlanmasında içerik analizi tekniği benimsenmiştir. İçerik analizinin temel amacı, toplanan verileri açıklayabilen kavramlara ve ilişkilere ulaşmaktır. İçerik analizinde temelde yapılan işlem, benzer bulguları belirli kavramlar ve olgular kapsamında bir araya getirmek ve bunları okuyucuya anlaşılır bir şekilde organize ederek sunmaktır (Yıldırım ve Şimşek, 2006).

Araştırmanın güvenirliğini artırmak amacıyla, öğretmen adaylarının açık uçlu sorulara verdiği yanıtlar araştırmacı ve 1 matematik doktoralı ve 2 matematik eğitimi doktoralı olan üç alan uzmanı tarafından incelenerek "Görüş Birliği" ve "Görüş Ayrılığı" olan maddeler belirlenmiştir. Araştırmanın güvenirliği için

Güvenirlik = [(Görüş Birliği) / (Görüş Birliği) + (Görüş Ayrılığı)] x 100

formülü kullanılmıştır. Bu hesaplama sonucunda %81 değeri bulunmuş ve araştırma güvenilir kabul edilmiştir.

Araştırma sorularının her biri 10'ar puanlık sorulardır. Sorulara verilen yanıtlar tam doğru yanıt, kısmen doğru yanıt ve yanlış yanıt biçiminde üç kategoriye ayrılarak sınıflandırılmıştır. Bu sınıflandırılmada temel alınan bileşenler aşağıdaki gibidir:

Tam Doğru Yanıt: Cevabın tüm bileşenlerini içeren,

Kısmen Doğru Yanıt: Cevabın tüm bileşenlerini içermeyen,

Yanlış Yanıt: Cevapla ilgisi olmayan ya da yanlış bilgi içeren, kavram yanılgısı içeren veya mantıksız cevap.

1-3 arası puan alan öğretmen adayları yanlış yanıt kategorisinde; 4-7 arası puan alan öğretmen adayları kısmen doğru yanıt kategorisinde, 8-10 arası puan alan öğretmen adayları tam doğru yanıt kategorisinde değerlendirilmiştir. Örnek olarak "$\lim_{x\to 0} [\![cosx]\!] =?$" sorusu aşağıdaki gibi kategorilere ayrılarak değerlendirilmiştir:

Doğrudan 0 noktasını kosinüs fonksiyonunda yerine yazıp $cos0 = 1$ ve 1 noktasının tam değeri 1 sayısına eşittir diyenler ve dolayısıyla limiti 1 bulanlar yanlış kategorisinde değerlendirilmiştir. Birim çemberi çizip 0 noktasının solunda ve sağında kosinüs fonksiyonunun değerlerine göre tam değerini belirleyip ve limitini hesaplayanlar tam doğru kategorisinde değerlendirilmiştir. Birim çemberi çizmeden $[\![cosx]\!]$ fonksiyonun $x = 0$ noktasında sol ve sağ limitlerini doğru hesaplayanlar tam doğru kategorisinde değerlendirilmiştir. $x = 0$ noktasında $[\![cosx]\!]$ fonksiyonun sol ve sağ limitlerini hesaplarken işlem hatası yapanlar kısmen doğru kategorisinde değerlendirilmiştir.

Bulgular

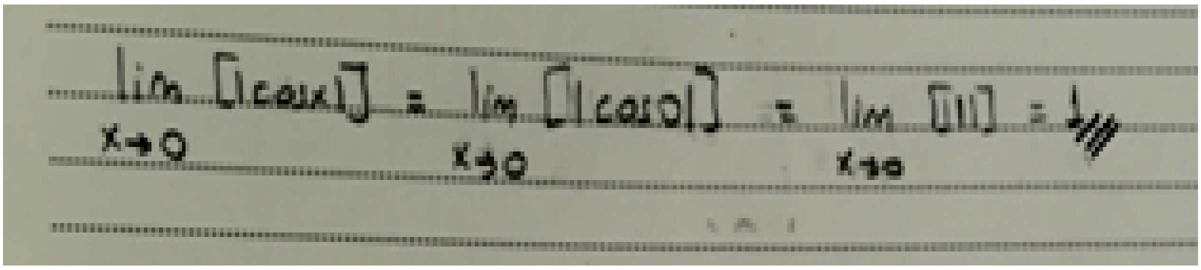
Bu araştırmada öğretmen adaylarının sadece limit kavramı ile ilgili sadece işlemsel bilgileri ele alınmıştır. Araştırma sorularının birincisi "$\lim_{x\to 0}[\![cosx]\!] =?$" biçimindedir. İşlemsel olan bu sorunun amacı tam değer fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki limitinin incelenmesidir. Cevapların frekans ve yüzde dağılımları Tablo1'de yer almaktadır.

Tablo 1

1. Soruya Ait Cevapların Frekans ve Yüzde Dağılımları

	Frekans	Yüzde (%)
Tam Doğru Yanıt	10	33
Kısmen Doğru Yanıt	4	13
Yanlış Yanıt	16	54
Genel Toplam	30	%100

Tablo 1'e göre öğretmen adaylarının %33'ünün başarı gösterdiği, %54'ünün ise başarısız olduğu görülmüştür. %13'ü ise kısmen doğru yapanlar grubunda yer almıştır. İşlemsel sorudaki bu düşük başarı oranının nedeni limiti alınması istenen fonksiyonun hem tam değer fonksiyonu hem de kosinüs fonksiyonu olmasıdır. Elde edilen sonuçlarda öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu limit alma işleminde kosinüs fonksiyonda x değişkeni yerine 0 noktasını yazarak limit almışlardır. Bu durum öğretmen adaylarının lise eğitiminde edindikleri ezbere dayalı olan bir yaklaşımdır. Lisede limit tanımının öğretiminde, limit bulma işlemlerinin üzerinde limit kavramının anlaşılmasından daha çok durulmaktadır.



Görsel 1. Yanlış yanıt kategorisinde yer alan öğretmen adayı örneği

Bu soruda Şekil 1'de görüldüğü gibi öğretmen adaylarının birçoğu limit araştırması yapılan noktayı fonksiyonda yerine yazmayı tercih etmiştir. Frekans dağılım tablosu "Tablo 1" 16 öğretmen adayının bu soruyu yanlış yanıtladığını göstermiştir. Yanlış yanıtların çoğu "fonksiyonda limiti alınan noktayı yerine yazma" olarak belirlenmiştir. Şekil 1'deki örnek bu durumu göstermektedir. Diğer yandan bu sorudaki başarının düşük olmasının nedeninin adayların tam değer fonksiyonuna yönelik bilgilerinin eksik olması ile ilgili olduğu düşünülmektedir. İşlemsel olan bu sorunun çözümünde öğretmen adaylarından beklenen 0 noktasının sol komşuluğunda ve sağ komşuluğunda kosinüs fonksiyonunun aldığı değerlere göre limiti hesaplamasıdır. Şekil 1' deki örnekte öğrenci doğrudan noktayı fonksiyonda yerine yazıp limiti bulmuştur. Sadece iki öğretmen adayı birim çemberi kullanarak $x = 0$ noktasında fonksiyonun limitini incelemiştir.

İşlemsel bilginin ölçüldüğü 2. soruda öğretmen adaylarından $x \to \infty$ için fonksiyonun limitini incelemeleri istenmektedir. Öğretmen adaylarına yöneltilen bu sorusunun amacı $\infty - \infty$ belirsizliği durumunda öğretmen adaylarının işlemsel bilgilerini incelemektir. 2. Soru "$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - x$=?" biçiminde verilmiştir. Bu soruya adayların verdiği cevapların frekans ve yüzde dağılımları Tablo 2' de yer almaktadır.

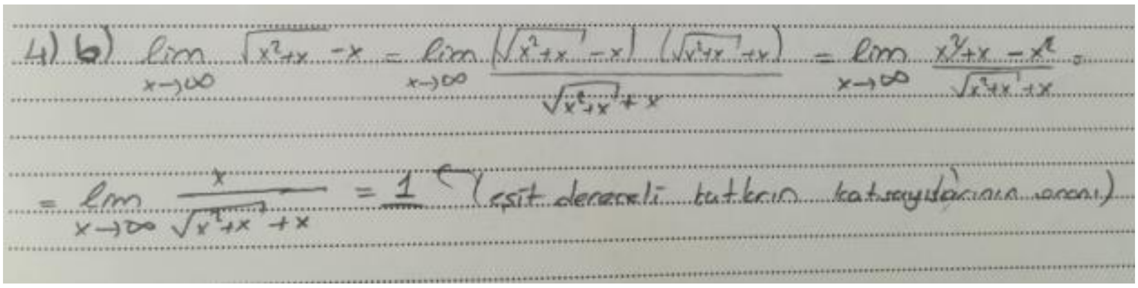
AJESI - Anadolu Journal of Educational Sciences International, 2020; 10(1): 54-73
DOI: 10.18039/ajesi.681924

Tablo 2

2. Soruya Ait Frekans ve Yüzde Dağılımları

	Frekans	Yüzde (%)
Tam doğru yanıt	20	67
Kısmen doğru yanıt	6	20
Yanlış yanıt	4	13
Genel Toplam	30	%100

Öğretmen adaylarının %67’si bu belirsizlik sorusunu tam doğru olarak cevaplarken,%13’ü yanlış olarak cevaplamıştır. %20’ si ise yarım yapanlar kategorisinde yer almıştır. Çoğunlukla işlemsel bilgi kullanılarak çözüm gerçekleştirilmiştir. Belirsizlik durumunda limitin nasıl araştırıldığının belirlenmesi amaçlanmıştır.



Görsel 2. Tam doğru kategorisinde yer alan öğretmen adayının yanıtı

Şekil 2’de öğretmen adayı soruyu eşleniği ile çarpıp bölerek cevaplamıştır. Belirsizlik veya tanımsızlık durumlarında öğrencilerin çoğu fonksiyonların limitini hesaplarken cebirsel gösterimi tercih etmiştir. Öğrenciler limit tanımına yönelik kavramsal bilgiyi öğrenmeden limit ile ilgili soruları doğru çözebilmektedir. Bazı öğrenciler limiti kavramsal bilgiye başvurmadan çözdüklerinde sanki limiti anladıkları yanlışına kapılmaktadırlar. Bu durum onların bir fonksiyonun bir noktadaki limitini alırken işlemsel bilgiyi daha çok tercih etmelerine ve kavramsal bilgiye başvurmamalarına neden olmaktadır. Bu durum kavramsal yapının oluşmasında engel teşkil etmektedir. Soruda $\infty - \infty$ belirsizliğinin ortadan kaldırılması için öğrenciler cebirsel olarak çarpanlara ayırma yoluna gittikleri görülmüştür.

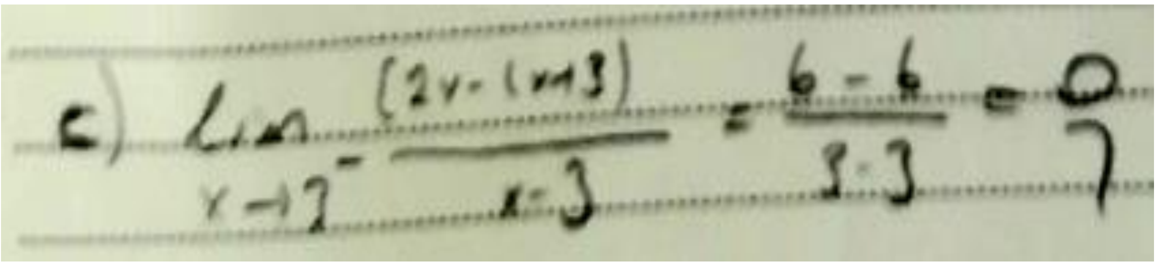
Araştırmadaki 3.soru “ $\lim_{x \to 3^-} \frac{[\![2x - [\![x+3]\!]]\!]}{x-3}$ =?” biçiminde verilmiştir. Bu sorunun amacı tam değer fonksiyonunun soldan limitini incelemektir. Yani tam değer fonksiyonunu içeren rasyonel fonksiyonun $x \to 3^-$ için limitine adayların verdikleri cevaplar incelenmiştir. İşlemsel bilgiye yönelik bu soruda adayların verdiği cevapların frekans ve yüzde dağılımları Tablo 3'te yer almaktadır.

Tablo 3

3.Soruya Ait Cevapların Frekans ve Yüzde Dağılımları

	Frekans	Yüzde (%)
Tam doğru yanıt	1	3
Kısmen doğru yanıt	17	57
Yanlış yanıt	12	40
Genel Toplam	30	%100

Öğretmen adaylarının %3'ü işlemsel limit sorusunu tam doğru olarak cevaplarken, %40’ı yanlış olarak cevaplamıştır. %57’si ise kısmen doğru yapanlar kategorisinde yer almıştır. Öğretmen adaylarının tam değer fonksiyonu konusunda eksiklikleri bulunmaktadır. Sadece 1 öğretmen adayı bu soruyu tam doğru olarak yanıtlamıştır. Tam değer fonksiyonunun bir noktadaki limiti araştırılırken sağ ve sol limitlerine göre limit alma işlemi uygulanmalıdır. Birçok öğrenci bu koşulu dikkate almadan doğrudan noktayı fonksiyonda yerine yazmayı tercih etmiştir. Şekil 3 bu duruma bir örnektir. Kısmen doğru yanıt kategorisinde yer alan öğretmen adaylarının çoğu sağ ve sol limitlere göre limit alma işlemini uygulamışlardır. Hataların çoğu tam değer fonksiyonu ile ilgilidir. Bu kategoride görülen hatalar tam değer fonksiyonu ile ilgili adayların kavram yanılgılarıdır. Tam değer fonksiyonu öğrencilerin en çok kavram bilgi eksikliğine sahip olduğu bir fonksiyon çeşididir. Bu görüş araştırmacının yaklaşık 20 senedir analiz grubu derslerini yürütüyor olmasına dayanmaktadır.



Görsel 3. Yanlış yapanlar kategorisinde yer alan öğretmen adayının yanıtı

Şekil 3'te öğretmen adayının yanıtı incelendiğinde tam değer fonksiyonunda noktaları yerine yazdığı ve sonucu 0 bulduğu görülmektedir. Dahası bu aday tam değer fonksiyonunun gösterimini de kullanmamıştır. Öğretmen adayının işlemleri incelendiğinde hatalı işlemler yaptığı ve $\frac{0}{0}$ belirsizliğini 0 reel sayısına eşit olarak bulduğu gözlemlenmiştir.

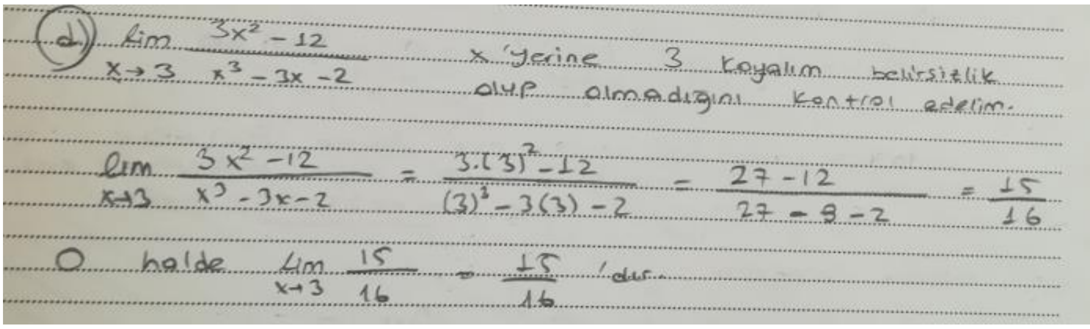
Araştırmanın 4. sorusu "$\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x^2-12}{x^3-3x-2}$=?" biçiminde verilmiştir. Bu sorunun amacı öğretmen adaylarından verilen rasyonel fonksiyonun istenen noktadaki limitini bulması ve işlemsel bilgilerinin incelenmesine yöneliktir. Bu soruda adayların verdiği cevapların frekans ve yüzde dağılımları Tablo 4' te yer almaktadır.

Tablo 4

4. Soruya Ait Cevapların Frekans ve Yüzde Dağılımları

	Frekans	Yüzde (%)
Tam doğru yanıt	24	80
Kısmen doğru yanıt	3	10
Yanlış yanıt	3	10
Genel Toplam	30	100

Öğretmen adayları, işlemsel bilgiyi ölçmeye yönelik olan bu soruda %80 oranında doğru cevap vermiştir. Bu soru en yüksek oranda tam doğru kategorisinde cevaplanan işlemsel bir sorudur. Bu soruyu 3 kişi yanlış olarak cevaplamıştır. 3 kişi de kısmen doğru yanıt kategorisinde yer almıştır. Öğretmen adaylarının işlemsel olan limit sorularında en çok rasyonel fonksiyonların limit alma işlemlerinde başarılı oldukları sonucuna ulaşılmıştır.



Görsel 4. Doğru yanıt kategorisinde yer alan örnek

Öğretmen adaylarının bazıları x yerine 3 yazarak cevaba ulaşma seçeneğini tercih etmişlerdir. Bir fonksiyonun limiti alınırken öğrenciler genellikle fonksiyonun limiti alınan noktadaki değerini dikkate almaktadır. Öğretmen adaylarının işlemsel olan dört sorudaki en yüksek başarı oranı dördüncü soruya aittir. Dördüncü soru rasyonel fonksiyonun $x = 3$ noktasındaki limitini bulma sorusudur. Adaylar $x = 3$ noktasını fonksiyonda yerine yazarak sonuca ulaşmışlardır. Belirsizlik durumunun olmaması bu sorunun başarı oranını yükseltmiştir.Bu durumların oluşması işlemsel bilgi ağırlıklı öğretimin öncelikli kılınması sonucu kavram yanılgıları oluşmasına neden olmuştur.

Bir fonksiyonun bir noktadaki limiti alınırken öğrenciler literatürdeki sonuçlara benzer olarak fonksiyonun limiti alınan noktadaki değerini dikkate almaktadır. Öğretmen adaylarının tam değer fonksiyonların bir noktadaki limitini alırken rasyonel fonksiyonlara oranla daha başarısız oldukları görülmektedir. Bunun nedeni öğrencilerin tam değer fonksiyonu ile ilgili kavramsal anlamalarının eksikliğine dayanmaktadır.

Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Öğretmen adaylarının tek değişkenli fonksiyonunun limit kavramına yönelik olarak işlemsel bilgilerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Bu nedenle üç uzman görüşü de alınarak öğretmen adaylarının "$\lim_{x \to 0} [\![cos x]\!] =?$", "$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2+x} - x =?$", "$\lim_{x \to 3^-} \frac{[\![2x - [\![x+3]\!]]\!]}{x-3} =?, \lim_{x \to 3} \frac{3x^2-12}{x^3-3x-2} =?$"sorularını yanıtlamaları istenmiştir. Adaylar genellikle fonksiyonun bir noktadaki limitini bulurken istenen noktayı fonksiyonda yerine yazmıştır, eşlenik kullanma ve cebirsel işlemler ile sonuca ulaşmayı tercih etmişlerdir. Öğretmen adaylarının tam değer fonksiyonlarının bir noktadaki limitini alırken rasyonel fonksiyonlara oranla daha başarısız oldukları görülmektedir. Tam değer fonksiyonu ile ilgili olan iki soruda da öğretmen adaylarının sağ limit ve sol limit yardımıyla bu soruları çözmeleri gerekliydi. Fakat çoğu adayın noktayı fonksiyonda yerine yazarak çözüme ulaşmaya çalıştığı görülmüştür. Öğretmen adaylarının bu durumları, limit ile yerine koyma yönteminin eşdeğer olduğu yanılgısına sahip olduklarını desteklemektedir (Ferrini-Mundy ve Graham, 1994; Williams, 1991). Öğrencilere limit alınan noktanın fonksiyondaki değerine eşit olmadığı örnekler verildiğinde, onlar bu durumun istisna olduğunu ifade etmekte ya da bu durumları limit tanımının her zaman çalışmadığı durumlar olarak değerlendirmektedirler (Williams, 1991). Öğretmen adaylarının tam değer fonksiyonu ile ilgili kavramsal bilgilerinin zayıflığı dikkat çekicidir. Bu durumların oluşması işlemsel bilgi ağırlıklı öğretimin öncelikli kılınması sonucu kavram yanılgıları oluşmasına neden olmuştur. Öğrenciler limit tanımına yönelik kavramsal bilgiyi oluşturmadan limit ile ilgili soruları çözebilmekte ve doğru yanıtlar verebilmektedir (Brown, 2004). Böyle durumlarda bazı öğrenciler limiti kavramsal açıdan yapılandıramasalar da limiti anladıkları yanılgısına düşmektedirler. Dolayısıyla öğrenciler limit konusuyla ilgili pratik ve kolay çözüm yöntemlerine yönelmekte, soruların çözümünde

DOI: 10.18039/ajesi.681924

yeterli olduğunu gördüğünden kavramsal bilgiye başvurmamaktadır (Williams, 1991). Bundan dolayı öğrenciler işlemsel bilgiyi tercih etmektedir.

Bu durum Williams (1991) bir araştırmasında öğrencilerin basit ve pratik limit modellerini limitin formal tanımından daha önemli gördüklerini, sınıf ortamında kullanılan bu basit ve pratik limit modellerinin sınavda başarılı olmak için yeterli görüldüğünü ve öğrencilerin formal bilgilerinin (sürekli fonkiyonlarda yerine yazma, çarpanlara ayırma, sadeleştirme, eşlenik kullanma ve L' Hospital's yöntemini kullanma) kavramsal bilgilerinden oldukça ayrık olduğunu ifade etmektedir. Bu durum araştırmadan elde edilen bulgularla uygunluk göstermektedir. Bu araştırma, Soylu ve Aydın (2006) çalışması ile desteklenmektedir. İşlemsel bilgilerin ölçüldüğü sorularda adayların doğru cevaplama oranlarının yüksek olduğu ifade edilmektedir. Gray ve Tall (1991)'in araştırmasında öğrencilerin limite yaklaşma işlemini ve limit değeri kavramını ifadelerinin ikisi de $\lim_{x \to x_0} f(x)$ sembolüyle gösterildiğinden, limitin sadece işlem anlamı olduğunu düşünebildiklerine değinmişlerdir. Tek değişkenli fonksiyonlarda adayların sağ limit ve sol limit almada ve cebirsel işlemleri kullanarak bir fonksiyonun bir noktadaki limit değerini bulmada başarılı oldukları gözlenmiştir. Limit, fonksiyonun limit alınan noktadaki değeri ile ilişkilendirilmese de bu yaklaşım şekli limitin o nokta civarında alacağı değer için çıkarımda bulunulmasını sağlar (Özmantar ve Yeşildere, 2008). Oysaki limit, fonksiyonun limit alınan noktadaki değeri ile ilişkilendirilirse ezbere çözümler elde edilir. Limit, fonksiyonun limit alınan noktanın civarındaki davranışı ile ilişkilendirilmelidir. Öğrencilere limit alınan noktanın fonksiyondaki değerine eşit olmadığı örnekler verildiğinde, onlar bu durumun istisna olduğunu ifade etmekte ya da bu durumları limit tanımının her zaman çalışmadığı durumlar olarak değerlendirmektedirler (Williams, 1991). Limit kavramının öğretilmesi esnasında genellikle öğrencilerin bu kavramla ilk kez karşılaştığı durumlarda, limit ve fonksiyonun limiti alınan noktadaki almış olduğu değerin aynı olması ve limitin hesaplanması için o noktanın verilen fonksiyonda yerine yazılması birçok durumda sonuca ulaştırmaktadır. Öğrencilerin bu örneklerle karşılaşmaları sonucu oluşan algıları, eksikliklerine rağmen limitin yerine koyma yöntemi ile eşdeğer olduğu yanılgısını desteklemektedir (Ferrini-Mundy ve Graham, 1994; Williams, 1991). Bu araştırmanın geneli Ferrini-Mundy ve Graham ve Williams'ın çalışmalarıyla uygunluk göstermektedir.

Sonsuz kavramının anlaşılması oldukça zor iken tanımsızlık veya belirsizlik durumlarına karar verilmesi öğrenciler için anlaşılması güç noktalardan birini oluşturmaktadır. Bu farka dikkat çekilirken belirsizliğin farklı olası sonuçlardan geçerli olanın bilinmediği durumlarda ya da farklı yaklaşımlarla farklı sonuçlara ulaşılmasından dolayı ortaya çıktığının belirtilmesi kavramın anlaşılması açısından faydalı olabilir (Özmantar ve Yeşildere, 2008). Bu yüzden belirsizliğin olduğu durumlarda limit ve sürekliliğin nasıl araştırıldığının ifade edilmesi, ∞ ifadesinin limitte nasıl kullanıldığını ve işlemsel olarak bu belirsizliğin nasıl giderildiğini açıklamak bilgilerin kavramsal ve işlemsel açıdan yapılandırılabilmesi için önemlidir.

Matematikte yer alan limit kavramının ve içerisinde yer alan niceleyicilerin anlamlarının tam anlamıyla bilinmesi, komşuluk kavramının zihinsel şemada yer bulabilmesi limitin kavramsal ve işlemsel bilgilerinin dengelenmesi açısından önem arz etmektedir. Öğretimde kavramsal ve işlemsel bilgi arasındaki ilişki kurulmalı ve öğrencilerin ezbere yöntemler yerine matematiksel düşünmesinin gelişimini sağlayacak kavramsal öğrenmeye dikkat çekilmelidir. Eğitim Fakültelerinde 2018-2019 öğretim yılında uygulanmaya başlanan yeni Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programındaki analiz dersleri 2 ders saati olarak belirlenmiştir. Bu yeni program ile öğretmen adaylarının kavramsal öğrenmelerinin yapılandırılması mümkün gözükmemektedir. Bu yeni programların matematik dersleri açısından tekrar düzenlenmesi gerekmektedir. Kavramsal ve işlemsel bilginin dengeli olduğu eğitim-öğretim ortamının sağlanması için ezberlemeyi öğreten bir matematik öğretimi yerine analiz etmeyi, yorumlamayı, kendi çözümlerini üretmeyi ve yaratıcı düşünmeyi destekleyen matematik öğretimi yapılmalıdır.

Kaynakça

Baki, A. & Kartal, T. (2004). Kavramsal ve işlemsel bilgi bağlamında lise öğrencilerinin cebir bilgilerinin değerlendirilmesi. *Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, 2 (1). 27-50.

Baykul, Y. (1993). *İlköğretimde matematik öğretimi*. Ankara: Pegem.

Baykul, Y. (2005). *İlköğretimde matematik öğretimi (1-5 sınıflar için).* Ankara: Pegem.

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L. & Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice. The case of limits of functions in Spanish High Schools. *Educational Studies in Mathematics*, 59, 235-268.

Brown, A. (2004). *Learner conceptions of the limits concept*. (Yayınlanmamış doktora tezi). Alberta: University of Calgary,

Cobb, P. (1986). Context, goals, beliefs, and learning mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 6(2), 2-9.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 153-166). Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Elo, S. & Kyngas, H. (2008). The qualitative content analysis process. *Journal of Advanced Nursing*, 62(1), 107-115.

Ferrini-Mundy, J. & Graham, K. G. (1994). Research in calculus learning: Understanding of limits, derivatives and integrals. J.J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research ıssues in mathematics learning: Preliminary analyses and results*. Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics, 33, 29-45.

Gülbahar, Y. & Alper, A. (2009). Öğretim teknolojileri alanında yapılan araştırmalar. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi, 42*(2), 93-111.

Gürbüz, R., Toprak, Z., Yapıcı, H. & Doğan, S.(2011). Ortaöğretim matematik müfredatında zor olarak algılanan konular ve bunların nedenleri. *University of Gaziantep Journal of Social Sciences*, *10*(4).

Gray, E.M. & Tall, D. (1991). Duality, ambiguity and flexibility in successful mathematical thinking, *Proceedings of PME XV,* Italy: Assisi.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hofe, R. V. (1997). Problems with the limit concept-on a case study of a calculus lesson within a computer-based learning environment. http://www.fmd.uniosnabrueck. de/ebooks/gdm/PapersPdf1997/vom Hofe. pdf. (20.05.2018).

Jordaan, T. (2005). *Misconceptions of limit concept in mathematics course for engineering students.* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Pretoria: University of South Africa, İnstitute of Education Sciences.

Özmantar, M. F. & Yeşildere, S. (2008). Limit ve süreklilik konularında kavram yanılgıları çözüm arayışları. M. F. Özmantar, E. Bingölbali ve H. Akkoç (Eds.), *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri içinde* (s. 181-218). Ankara: Pegem.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* New York: Academic Press.

Skemp, R. R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Soylu, Y. & Aydın, S. (2006). Matematik derslerinde kavramsal ve işlemsel öğrenmenin dengelemesinin önemi üzerine bir çalışma. *Erzincan Eğitim Fakültesi Dergisi*, 8(2), 83-95.

Star, J. R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(2), 132-135.

Van de Walle J. A.(2004). *Elementary and middle school mathematics. teaching developmentally*. (5th ed.). Boston: Allyn &Bacon.

Williams, S. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education*. 22(3), 219-236.

Yıldırım, A. & Şimşek, H. (2006). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Extended Abstract

Operational information is defined as symbols, rules and mathematical operations in mathematics (Baykul, 2005).Each symbol in the formal language of mathematics makes sense with appropriate concepts (Schoenfeld, 1985). The process information is handled with two separate parts that make up it. The first part of the process information consists of the part of the mathematics representing symbols and language, the second part of the rules, relations used in solving mathematical problems, operations on concrete objects, visual diagrams, mental dreams or other non-standard objects formed by the mathematical system (Hiebert and Lefevre, 1986).Since process information is acquired by memorizing only the rule dimension without addressing the cause and why of the subject, procedural information is generally given priority in teaching as well. When the procedural learning dimension is taken into consideration, mathematics accepts a system that can transfer information directly to the student, and the teacher sees the rules and methods as an authority that enables the transfer to the student (Cobb, 1986). Operational information is handled as information including process steps and algorithms used in problem solving (Star, 2005).Unlike conceptual information, it is emphasized in the literature that an individual can have without understanding operational information (Skemp, 1987).Although the students can use the concept of limit to a certain level, the problems that the students may have in forming the concept of limit as a result of the researches indicating that they have difficulties in the high level stages of the concept formation:

1. Calculate the limit of the function at a point,
2. To show the existence of the limit of the function at a point,
3. To establish the relationship between function and limit, (Barbé, Bosch, Espinoza and Gascón, 2005; Çıldır, 2012; Gürbüz et al. 2011; Hofe, 1997)

In this study, it is aimed to examine the prospective teachers' operational knowledge about the limit concept of univariate functions. For this purpose, a test consisting of open-ended questions was applied to prospective teachers. It is assumed that unwanted variables are not effective enough to alter the result. For the validity of the measurement instruments used in the research, it was assumed that the expert opinions were sufficient. The research is limited to the data obtained from thirty prospective teachers who took the second year Analysis 1 course of the Elementary Mathematics Teaching Program of a public university Department of Elementary Education in the 2017- 2018 academic year. In terms of content, it is limited to the limit subject of univariate functions. In this study, which aims to examine the computational knowledge of pre-service mathematics teacher candidates in univariate functions, the basic qualitative research approach which is generally used in educational research for collecting, analyzing and interpreting the data obtained is discussed (Merriam, 2009). When the data obtained from the research is examined, it is seen that the candidates usually write the desired point in the function instead of finding the limit of the function at a point, they prefer to reach the result by multiplying the conjugate and performing algebraic operations. This result is consistent with Soylu and Aydın (2006) study. In cases of uncertainty or undefined, most students preferred algebraic representation when calculating the limit of functions. This situation constitutes an obstacle for the formation of the conceptual structure. In order to eliminate the ∞-∞ uncertainty, it was observed that the students were algebraically factorized. It was concluded that the candidates were generally successful in operational questions about the limit.