

t TESTİ, HOTELLING T², ANOVA VE MANOVA KULLANIM ALANLARI VE BİR UYGULAMA

Dr. Münevver TURANLI¹ -Dicle DEMİRHAN²

¹ M.Ü. İ.İ.B.F. Ekonometri Bölümü, Profesör

² M.Ü. İ.İ.B.F. Ekonometri Bölümü, Araştırma Görevlisi

ABSTRACT : *As statistical inference procedures, both the univariate techniques (t test and ANOVA) and MANOVA are used to assess the statistical significance of differences between groups. The univariate procedures include the t test for two group situations and analysis of variance for situations with three or more groups defined by two or more independent variables.*

İLGİRİŞ

İstatistik bilimini önemle üzerinde durduğu konulardan birisi grupların birbirleriyle karşılaştırılmalarıdır. İki ya da daha fazla grubun birbiriyle karşılaştırılabilirliği için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Bunların en basiti Gosset tarafından 20.yy'ın başlarında geliştirilen Student-t dağılımıdır[1]. Student-t dağılımında iki grubun tek bir değişken ortalamalarının $n < 30$ olması durumunda karşılaştırılabilirliği mümkün olmaktadır. Student-t testinin ikiden fazla grup ya da fazla değişken olduğu durumlarda uygulanması oldukça zorlaşmaktadır. Örneğin beş grubu karşılaştırmak için on ayrı t değeri hesaplamak gerekmektedir. Bir diğer önemli sakınca; testlerde kullanılan anlamlılık düzeyinin grubun tamamı için geçerli olmayacağıdır. Çünkü bütün örneklerin aynı anakütleden çekildikleri durumda bile t ve Z değerlerinin ortalama olarak %5 kritik değerinin dışında bulunacaklardır. Bunlara ek olarak sadece test edilen iki grup ile ilgili değerlerin kullanılması halinde varyansın tahmini yeterince sağlıklı olmayacaktır[2].

Bu sakıncalardan ötürü ikiden fazla grubun test edilmesini sağlayan metodlara topluca Varyans Analizi denilmektedir. İki değişkeni olan iki grup söz konusu ise bu durumda MANOVA'nın özel bir durumu olan Hotelling-T² kullanılmaktadır[3]. İkiden daha fazla grup ve tek bir değişken söz konusu olduğunda tek yönlü varyans analizini, çok değişken söz konusu olduğunda ise MANOVA kullanılmaktadır. Bu çalışmada bu yöntemlere kısaca değinildikten sonra aralarındaki farkın kolayca anlaşılabilirliği için bir örnek kullanılacaktır.

II.GENEL BİLGİLER

II.1. t Testi

Bağımsız iki rasgele örneklemin karşılaştırılması istendiğinde geniş örneklem için Z testi uygulanabilirken küçük örneklem için t testi uygulanabilmektedir. $H_0 : \mu_1 -$

$\mu_2 = 0$ biçiminde kurulurken $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0$ ($H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$) tek yönlü ya da $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ iki yönlü hipotezleri kurmak mümkündür. Standart normal dağılıma yaklaştırılarak hesaplanan t değeri

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{s_p^2 (1/n_1 + 1/n_2)}}$$

şeklinde hesaplanmakta ve $v = n_1 + n_2 - 2$ serbestlik derecesinde α anlamlılık düzeyindeki tablo değeri ile karşılaştırılmaktadır. Hesaplanan t değeri tablo değerinden büyük çıkarsa gruplar arasında fark olduğu; küçük çıkarsa gruplar arasında fark olmadığı kararına varılmaktadır[4]. $\sigma_1 \neq \sigma_2$ durumu söz konusu ise kullanılan formülde aşağıdaki gibi bir değişiklik söz konusu olacaktır

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Burada geçerli olan varsayımlar; her iki örneklemin normal dağılım göstermeler, varyanslarının eşit olması ve örneklem birimlerinin bağımsız olmalarıdır[5].

II.2. ANOVA

t testinin sakıncalı tarafı ikiden fazla grup olduğunda grupların ikili olarak karşılaştırılmasının yapılmasının zorunluluğudur. t testinin tekrar edilmesi birinci tip hatanın yükselmesine sebep olacaktır. ANOVA tekniğinde, birinci tip hata etkilenmeden, grupları ortalamalarının karşılaştırılması yapılarak, grupların aynı anakütleden gelip gelmedikleri test edilebilmektedir. Diğer taraftan bu teknik ile örneklem ortalamaları arasındaki farkın yalnızca arnekleme hatalarından olup olmadığı araştırılmaktadır. ANOVA'da iki bağımsız varyans tahmini kullanılarak bağımlı değişkenler için karşılaştırma yapılmaktadır. Bunlar:[3]

bilgilerine göre kalabalık nüfuslu iller ve daha az nüfuslu iller olarak ikiye ayrılmıştır. Özellikle İstanbul'un nüfusu diğerlerine göre çok büyük fark göstermektedir. Dolayısıyla tüm illerin nüfusu dikkate alındığında min. ve max. değer arasında ki fark oldukça yüksek çıkmaktadır. Bu durumda illeri nüfusları açısından ikiye ayırmak için dağılım aralığının kullanılması yerine, kümülatif toplamlardan yararlanarak her iki grupta da yaklaşık eşit sayıda il bulundurmaya dikkat edilmiştir. Böylece, nüfusu 557000'den fazla olan iller büyük nüfuslu iller, diğerleri az nüfuslu iller olarak ayrılmıştır. Daha sonraki aşamalarda illerin 3 gruba ayrılmaları istendiğinden, aynı mantık ile hareket edilmiş, nüfusu 376000'den az olan iller az nüfuslu iller, 376000 ile 795000 arasında olan iller orta nüfuslu iller ve 795000'den fazla nüfuslu iller de büyük nüfuslu iller olarak gruplandırılmıştır.

İllerin bu gruplandırılmaları yapıldıktan sonra illere göre boşanma rakamları incelenmiştir. 20-24 yaşlarında boşanmalar (gençlerde ve evliliğin ilk yıllarındaki boşanmalar olarak düşünülmüştür) ve 40-44 yaşlarındaki boşanmalar (orta yaşlılarda ve oturmuş evliliklerdeki boşanmalar olarak düşünülmüştür) dikkate alınmıştır. İllerin nüfusları arttıkça, başanan kişi sayısının da yüksek olması beklenmektedir. Bundan dolayı direk olarak belli yaşlardaki boşanma sayılarını kullanmak sağlıklı olmayacaktır. İllere göre bu rakamlar elde edildikten daha iyi bir gösterge olacağı düşünülerek bu değerlerin il nüfusundaki payları hesaplanmıştır. Kullanacağımız dört test türünde de Normal dağılım varsayımı olduğundan öncelikle, elde ettiğimiz bu pay değerlerinin her bir grup için Normal Dağılım gösterip göstermediği test edilmiştir. SPSS Paket Programından elde edilen Kolmogrov-Simirnov Testi sonuçlarına göre her bir grup için bu pay değerlerinin Normal dağılım gösterdiği gözlenmiştir.

III.2. t Testi Sonuçları

Uygulamada büyük nüfuslu iller ile daha az nüfuslu iller arasında gençlerde (20-24 yaşları) boşanma rakamları arasında farklılık olup olmadığı araştırılmak istenmektedir. Bunun için kullanılacak olan test iki grubun tek bir değişken üzerinden karşılaştırılmasını sağlayacak olan test olacaktır. Dolayısıyla hipotezler,

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

şeklinde olacaktır. t testi için kullanılan veriler Tablo-1'de verilmiştir. SPSS programından elde edilen sonuçlara göre,

$$t_k = 1.14 \text{ ve serbestlik derecesi } v=71$$

olarak bulunmuştur. Bu değer yaklaşık 2 olan tablo değeri ile 0.05 anlam düzeyinde karşılaştırılması sonucu iki grup arasında farklılık olmadığı söylenilebilmektedir.

III.3. Hotelling T² Sonuçları

Çalışmada büyük nüfuslu ve az nüfuslu şehirler arasında gençleri boşanma sayıları açısından bir farklılık göstermediği t testi ile ortaya çıkmıştır. Ancak burada her iki grup şehir arasında gençler ve orta yaşlılar daki boşanmalar beraber dikkate alındığında sonucun ne olacağı araştırılmak istenseydi, t testi yeterli bilgiyi sağlayamayacaktı. Bu durumda en uygun test Hotelling T² olacaktır. Bu test için kullanılan veriler Tablo-2'de verilmiştir.

$$T^2 = \frac{S + n(x - \mu_0)(x - \mu_0)'}{|S|}$$

eşitliği kullanılarak elde edilen T² değeri 92,62 olarak bulunmuştur. Bu değeri F tablo değerine dönüştürüldüğünde,

$$F = \frac{n-p-1}{p(n-2)} \times T^2 = \frac{73-2-1}{2(73-2)} \times 92,62 = 45,657$$

olarak bulunmuştur. Bu değer F(2;73-2-1;0.05) ile karşılaştırıldığında, hesaplanan değer daha büyük olduğu bulunmuştur ve il grupları arasında 20-24 ve 40-44 yaşlarındaki boşanmalar dikkate alındığında gruplar arasında önemli bir farklılık olduğu söylenebilir.

III.3. ANOVA Sonuçları

Uygulamada iller 3 gruba ayrılıp tekrar yalnızca gençlerin boşanmaları dikkate alındığında arada bir farklılık çıkıp çıkmayacağı kontrol edilmek istendiğinde Hotelling T² ve t testlerinin yetersiz kalacağı önceden belirtilmişti. Bu durumda kullanılacak yöntem Tek Yönlü Varyans Analizi olacaktır. Bu analiz için gerekli veriler Tablo-3'de verilmiştir. SPSS programına göre varyans analizi sonuçları aşağıdaki gibidir.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_j$$

Varyans Analizi Tablosu

Kaynaklar	s.d.	KT	KO	F
Gruplar arası	2	0.4122	0.2061	
Grup içi	70	24.6475	0.3521	0.5854
Toplam	72	25.0597		

Analiz sonucunda elde edilen F değeri F(2;70;0.05)=3.1 ile karşılaştırıldığında deneme etkilerinin olmadığı yani gruplandırılmış iller arasında

gençlerin boşanmaları açısından bir fark olmadığı söylenilebilir.

III.4. MANOVA Sonuçları

Nüfuslarına göre gruplandırılmış iller arasında gençlerin ve orta yaşlıların boşanmaları dikkate alındığında ve bu gruplar arasında bir farklılık olup olmadığı araştırılmak istendiğinde Çok Değişkenli Varyans analizi yani MANOVA kullanılabilir. Bu analiz için kullanılacak veriler Tablo-4' de gösterilmiş ve analizde hesaplanacak olan verilmiştir. Wilks'in Λ 'sı kullanılarak elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

$$\bar{X}_1 = \begin{bmatrix} 1.017 \\ 0.415 \end{bmatrix} \quad \bar{X}_2 = \begin{bmatrix} 1.211 \\ 0.28 \end{bmatrix} \quad \bar{X}_3 = \begin{bmatrix} 0.835 \\ 1.126 \end{bmatrix}$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0.240 & 0.828 \\ 0.828 & 0.094 \end{bmatrix} \quad S_2 = \begin{bmatrix} 0.339 & 0.808 \\ 0.808 & 0.033 \end{bmatrix} \quad S_3 = \begin{bmatrix} 0.462 & 0.783 \\ 0.783 & 0.039 \end{bmatrix}$$

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_j$$

Hipotezlerini test etmek için hesaplanacak olan

$$\Lambda = \frac{|W|}{|W+B|}$$

için,

$$B_{p \times p} = \sum n_j (\bar{X}_j - \bar{X}) (\bar{X}_j - \bar{X})' = \begin{bmatrix} 1.803 & -4.013 \\ -4.013 & 10.324 \end{bmatrix}$$

ve

$$W_{p \times p} = \sum \sum (X_{ij} - \bar{X}_j) (X_{ij} - \bar{X}_j)' = \begin{bmatrix} 24.603 & 56.38 \\ 56.271 & 3.735 \end{bmatrix}$$

olarak bulunmuş ve

$$\Lambda = \frac{|W|}{|W+B|} = \frac{-3080.655}{-2365.378} = 1.302$$

şeklinde hesaplanmıştır. Wilks'in Λ değerini χ Tablo değeriyle karşılaştırabilmek için,

$$L = -(n-1-(q+k)/2) \log \Lambda = -(73-1-(2+3)/2) \log 1.302 = 7.965$$

değeri hesaplanmıştır. 4 serbestlik derecesinde 0.05 anlam düzeyinde χ Tablo değeri 9.48 olarak bulunmuştur. Buna göre gruplar arasında farklılık olmadığı 0.05 hata

payında söylenebilir. Hata payını 0.10'a çıkardığımızda ise gruplar arasında farklılık olduğu ortaya çıkmaktadır.

IV-SONUÇ

Örneklemelerin karşılaştırılmaları sırasında kullanılan grup sayısı ve değişken sayısı itibariyle değişik istatistiksel yöntemlerin kullanılmalrı gerekmektedir. Bu kullanımı farklılıklarını ortaya çıkartmak için yapılan basit uygulamada değişik düzenlemelere göre farklı sonuçların ortaya çıkabileceği görülmektedir. İllerin nüfuslarına göre iki yada üç gruba ayrılmasıyla, 20-24 yaşlarında yani genç nüfusun boşanmaları açısından gerek t testinde gerekse Varyans analizinde bir farklılık olmadığı gözlenmiştir. Ancak 40-44 yaşlarında yani orta yaşlıların boşanmaları açısından ikili ve üçlü gruplarda Hotelling T^2 ve MANOVA testlerinde farklılık olduğu ortaya çıkmıştır. MANOVA testi için farklılığı yaratan grubun ortaya çıkarılması değişik yöntemlerle mümkündür. Ancak bu çalışmada bu konuya değinilmemiştir.

Sonuç olarak değişik veri düzenlemelerinde t testi, ANOVA, Hotelling T^2 ve MANOVA uygulanarak aralarındaki farklılık basit bir örnekle ortaya konulmaya çalışılmıştır.

Yararlanılan Kaynaklar

- [1]- AYTAÇ, Mustafa; Matematiksel İstatistik, Uludağ Üniversitesi basımevi, Bursa, 1994.
- [2]- ALOBA, Bilge; İstatistiksel Analiz Metodları; Çağlayan Kitabevi; 4. baskı İstanbul, 1995.
- [3]- HAIR, Joseph, ANDERSON, Rolph, TATHAM, Ronald and BLOCK, William; Multivariate Data Analysis With Readings, Prentice Hall International Editions, USA, 1995, s.259.
- [4]- TURANLI, Münevver; Pazarlama Tekniklerinde Karar Alma, İstanbul, 1988.
- [5]- SINCICH, Terry; Business Statistics By Exemple, Prentice Hall International Editions, USA, 1996, s.533.
- [6]- HICK, Charles; Deney Düzenlemede İstatistiksel Yöntemler; çevirenler: MÜLKÜ, Z., TOKTAMIŞ, Ö., KURT, S., KARAAĞAÇOĞLU, E., Akademi matbaası, Ankara, 1985, s.22.
- [7]- Hand Book of Statistics 1 "Analysis of Variance"; Edited by P.R.KRISHNAIAH, North Holland, USA, 1984.
- [8]- TATLIDİL, Hüseyin; Uygulamalı Çok Değişkenli İstatistiksel Analiz Yöntemleri; Ankara, 1992, s.111.

Tablo1: t testi için veriler
(1/10000)

BÜYÜK NÜF: ŞEH. 20-24yaş	KÜÇÜK NÜF: ŞEH: 20-24yaş
0,52	0,45
1,52	0,27
1,18	1,06
1,38	0,7
1,49	1,14
1,72	0,08
0,49	0
1,56	1,02
1,42	1,84
0,14	1,62
0,34	0,72
1,67	1,11
1,34	0,64
0,66	0,8
1,37	1,64
1,35	0,77
1,9	0
0,26	1,96
1,25	0,66
0,75	1,13
1,35	2,06
0,83	0,13
0,6	0,05
1,37	1,55
0,76	0,69
1,62	0,29
0,9	0,21
1,67	1,24
0,95	1,26
0,69	0,53
0,78	2,41
0,54	1,29
0,17	0
0,08	1,43
0,93	0,77
0,99	0,09
	0,08

Tablo2:HotelligT için veriler
(1/10000)

BÜYÜK NÜFUS ŞEHİR 20-24yaş	40-44yaş	KÜÇÜK NÜFUS ŞEHİR 20-24yaş	40-44yaş
0,52	0,3	0,45	0,25
1,52	0,22	0,27	0
1,18	0,7	1,06	0,14
1,38	0,65	0,7	0,09
1,49	0,59	1,14	0,06
1,72	0,49	0,08	0,12
0,49	0,12	0	0
1,56	0,28	1,02	0,47
1,42	0,32	1,84	0,27
0,14	0	1,62	0,58
0,34	0,02	0,72	0,04
1,67	0,28	1,11	0,32
1,34	0,3	0,64	0,22
0,66	0,24	0,8	0,17
1,37	0,63	1,64	0,28
1,35	0,78	0,77	0,12
1,9	1,38	0	0
0,26	0	1,96	0,58
1,25	0,33	0,66	0,31
0,75	0,36	1,13	0,45
1,35	0,43	2,06	0,62
0,83	0,17	0,13	0,05
0,6	0,31	0,05	0,05
1,37	0,48	1,55	0,21
0,76	0,27	0,69	0,29
1,62	0,64	0,29	0,06
0,9	0,16	0,21	0
1,67	0,41	1,24	0,26
0,95	0,35	1,26	0,34
0,69	0,25	0,53	0,45
0,78	0,15	2,41	0,69
0,54	0,24	1,29	0,34
0,17	0,05	0	0,09
0,08	0,05	1,43	0,41
0,93	0,21	0,77	0,31
0,99	0,41	0,09	0
		0,08	0

Tablo-3: ANOVA için veriler
(1/10000)

büyük 20-24yaş	orta 20-24yaş	küçük 20-24yaş
0,52	0,45	1,06
1,18	1,52	0,7
1,38	0,27	1,14
1,49	1,02	0,08
1,72	1,62	0
0,49	1,56	1,84
0,14	1,42	0,72
0,34	1,11	0,8
1,34	0,64	0,77
0,66	1,67	0
1,37	1,64	1,13
1,35	1,96	2,06
1,9	0,26	1,55
1,25	0,66	0,69
0,75	0,83	0,29
1,35	0,6	0,21
1,37	0,13	1,24
0,76	1,62	0,53
0,9	0,05	2,41
0,95	1,67	1,29
0,17	0,69	0
0,99	1,26	1,43
	0,78	0,77
	0,54	0,09
	0,08	0,08
	0,93	

Tablo4: MANOVA için veriler
(1/10000)

Büyük nüfus. şehir		Orta nüfuslu şehir		küçük nüfuslu şehi	
20-24yaş	40-44yaş	20-24yaş	40-44yaş	20-24yaş	40-44yaş
0,52	0,3	0,45	0,25	1,06	0,14
1,18	0,7	1,52	0,22	0,7	0,09
1,38	0,65	0,27	0	1,14	0,06
1,49	0,59	1,02	0,47	0,08	0,12
1,72	0,49	1,62	0,58	0	0
0,49	0,12	1,56	0,28	1,84	0,27
0,14	0	1,42	0,32	0,72	0,04
0,34	0,02	1,11	0,32	0,8	0,17
1,34	0,38	0,64	0,22	0,77	0,12
0,66	0,24	1,67	0,58	0	0
1,37	0,63	1,64	0,28	1,13	0,45
1,35	0,78	1,96	0,58	2,06	0,62
1,9	1,38	0,26	0	1,55	0,21
1,25	0,33	0,66	0,31	0,69	0,29
0,75	0,36	0,83	0,17	0,29	0,06
1,35	0,43	0,6	0,31	0,21	0
1,37	0,48	0,13	0,05	1,24	0,26
0,76	0,27	1,62	0,64	0,53	0,45
0,9	0,16	0,05	0,05	2,41	0,69
0,95	0,35	1,67	0,41	1,29	0,34
0,17	0,05	0,69	0,25	0	0,09
0,99	0,41	1,26	0,34	1,43	0,41
		0,78	0,15	0,77	0,31
		0,54	0,24	0,09	0
		0,08	0,05	0,08	0
		0,93	0,21		