A Form Finding Approach With Triply Periodic Minimal Surfaces

Yusuf Reşat GÜNER[1], **Gülen ÇAĞDAŞ**[2]

[1,2] Istanbul Technical University, Graduate School of Science, Engineering, and Technology, Department of Informatics, Architectural Design Computing, Istanbul, Turkey

Computational approaches and methods has bringed new era in relationsihp between geometry and architecture. Within the scope of this study, the reflections of developments in Computational Geometry on the design will be deduced and a design developed with Triply Periodic Minimal Surfaces will be presented. In contrast to traditional physical research methods, the innovations of Computational Design Methods in Minimal Surfaces and also in design will be examined with the applications of this innovations in architectural examples and application areas.

The main aim of the study is to create an Architectural design composition which consists of interpreted Triply Periodic Minimal Surfaces, which are geometric examples derived with Computational Thinking. For a conceptual framework, a polygonal area which has divided edges according to parameters (eg number of enters and exits) will be subdivided into quadrilaterals and then Triply Periodic Minimal Surfaces modules will be derived according to these quadrilaterals.

Keywords: Architecture and Geometry, Computational Geometry, Minimal Surfaces, Design and Production of Triply Periodic Minimal Surfaces

Received: 26.12.2018
Accepted: 31.01.2019

Corresponding Author:
yrguner@gmail.com

Güner, Y.R. & Çağdaş, G. (2019). A Form Finding Approach With Triply Periodic Minimal Surfaces. JCoDe: Journal of Computational Design, 1(1), 35-54).

Üç Yönlü Periyodik Minimal Yüzeyler ile Biçim Arama Yaklaşımı

Yusuf Reşat GÜNER[1], Gülen ÇAĞDAŞ[2]

[1,2] İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Bilişim Anabilim Dalı, Mimari Tasarımda Bilişim, İstanbul, Türkiye

Mimarlığın geometri ile olan ilişkisi, hesaplamalı yaklaşımlar ve yöntemler bağlamında yeni bir boyut kazanmıştır. Bu makale kapsamında, hesaplamalı geometri alanındaki gelişmelerin tasarıma yansımaları irdelenecek ve Periyodik Minimal Yüzeyler ile geliştirilen bir tasarım ürünü sunulacaktır. Hesaplamalı tasarım yöntemlerinin, geleneksel olan fiziksel form arama yöntemlerine karşıt olarak, Minimal Yüzeyler ile tasarım alanına getirdiği yenilikler ve bu yeniliklerin Mimari tasarım süreçlerindeki uygulama alanları ve örnekler incelenecektir.

Çalışmanın temel amacı, Hesaplamalı Düşünme yöntemleriyle gelişen geometrik teorilerin bir örneği olarak Üç Yönlü Periyodik Minimal Yüzeylerin (ÜYPMY) periyodik özellikleri kullanılarak ve Hesaplamalı Tasarım yaklaşımlarıyla hedeflenen amaca göre deforme edilip, geometrik özelliklerini kaybetmeden elde edilen birleşimlerden meydana gelen bir mimari tasarım kompozisyonu oluşturmaktır. Bu amaç doğrultusunda çok kenarlı bir alanın, tüm kenarları çevre verilerine bağlı olarak (örneğin giriş-çıkış sayısı) bölümlendirilip, oluşan alt-bölümlenmelere göre (dörtgen) matematiksel teorileri var olan ÜYPMY örnekleri deforme edilip yerleştirilerek bölümler arasındaki iç ve dış mekanların kesintisiz olarak devam ettiği bir mekansal kurgu oluşturulacaktır.

Anahtar Kelimeler: Mimarlık ve geometri, Hesaplamalı geometri, Minimal yüzeyler, Periyodik minimal yüzey tasarımı ve üretimi.

Teslim Tarihi: 26.12.2018
Kabul Tarihi: 31.01.2019

Sorumlu Yazar:
yrguner@gmail.com

Güner, Y.R. & Çağdaş, G. (2019). Üç Yönlü Periyodik Minimal Yüzeyler ile Biçim Arama Yaklaşımı. JCoDe: Journal of Computational Design, 1(1), 35-54).

GEOMETRİ VE MİMARLIK

"Kainat dediğimiz kitap, yazıldığı dil ve harfler öğrenilmedikçe anlaşılamaz. O, matematik dilinde yazılmış; harfleri üçgen, daire ve diğer geometrik şekillerdir. Bu dil ve harfler olmaksızın kitabın bir tek sözcüğünü anlamaya olanak yoktur. Bunlar olmaksızın yapılan karanlık bir labirentte amaçsızca dolaşmaktır." (Galileo, URL-1)

Matematik biliminin uzamsal ilişkilerle ilgilenen bir alt bilim dalı olan Geometri, insanların tamamen soyut kavramlarla dünyadaki birçok şeyi algılayabilmek için geliştirdikleri bir disiplindir. İnsanlar fiziksel gözlemlerinin yanı sıra elde ettikleri bilgilerin sentezleri ile yeni bilgiler ortaya çıkartmıştır. Tarih boyunca Plato, Euclid, Pythagoras, Archimedes, Leonardo Da Vinci ve Descartes gibi bilim adamları geometri bilim dalına önemli katkılarda bulunmuşlardır. Somut olan bütün durumlar ve olaylar, tamamen kavramsal bir bilgi olan bu geometri bilgileriyle açıklanmaya çalışılmıştır. Geometri, insanoğlunun salt entelektüel süreçlerle fiziksel dünyanın, gözlemlere dayalı tahminlerini yapmasını sağlayan bilimsel araştırmalarının belki de en temelidir (Coxeter, 1961).

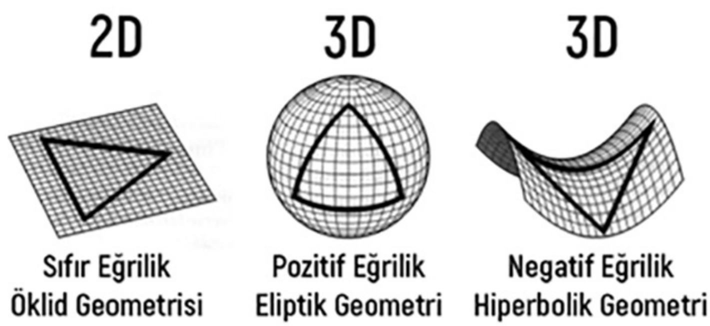
Mimarlık ürünlerinin de somut birer obje olduklarını düşünürsek, geometri mimarlığın temel yapı taşlarından biri olmuştur. Ostwald ve Williams'ın (2015a) Mimarlık ve Matematik ilişkisinin kökenlerini araştırdıkları yazılarında, 13. YY.'dan Bible Moralisee tablosunu örnek göstererek, bu tablodaki Tanrı figürünün aynı zamanda mimar ve geometri uzmanı olarak tariflenmesini önemli bir veri olarak görmektedirler. Ceccato (2010, sf:9) ise mimarlık ve geometrinin binlerce yıldır iç içe geçmiş iki olgu olduğundan bahseder.

Tamamen kavramsal gerçeklikte olan matematik ile tamamen var olan bir gerçekliğe sahip mimarlık arasında nasıl bir ilişki olabileceğini sorgulayan Salvadori (2015) mimarlar ve matematikçiler arasında belirli farklar olduğunu söylemektedir. Salvadori'ye (2015, sf:27) göre mimarlar geometrik anlamda bir üçgenin şekli ile ilgilenirlerken, matematikçileri heyecanlandıran şey üçgenin iç açılarının toplamının 180° olup olmamasıdır.

HESAPLAMALI GEOMETRI

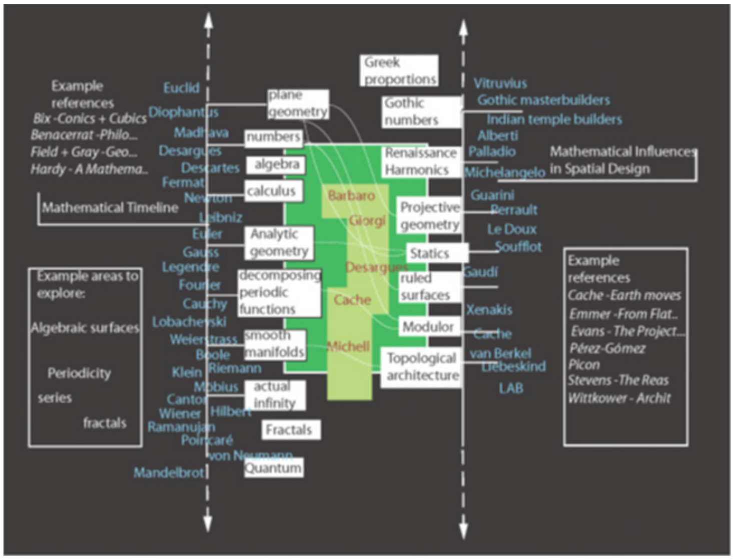
Geometrinin en önemli bilim insanlarından olan Öklid'in oluşturduğu düzlemsel geometri kuralları yüzyıllar boyunca insanların ve mimarların birçok şeyi temsil etmesinde ve üretmesinde kullanılmıştır. Tarih boyunca Öklid'in Elementleri geometrinin temel kılavuzlarından biri olmuş ve hatta tüm bilim alanlarında çalışmak için temel seviyede Öklid bilgisi gerekmiştir (Hartshorne, 2000, sf:460). Günümüzde ise hem Öklid dışı anlayış ile ortaya çıkan yeni geometriler hem de gelişen hesaplamalı tasarım yöntemleri ve araçları, mimarları farklı geometrilerin kullanımına yönlendirmiştir. Öklid'in "bir doğruya dışındaki bir noktadan yalnızca tek bir paralel çizilebilir." dediği beşinci aksiyomu 19.YY. başlarında matematikçiler arasında büyük tartışma kaynağı olmuş ve yeni geometrilerin kurulmasına ilham vermiştir (URL-2). Öklid'in beşinci aksiyomunu sağlamayan ama diğer aksiyomlarını sağlayan geometrilere Öklidyen olmayan geometriler denir. Topolojik geometri, cebirsel geometri, fraktal geometri, diferansiyel geometri gibi uzmanlık gerektiren geometri çalışmaları hesaplamalı tasarım araçları sayesinde mimarların tasarım yaparken kullanabilecekleri yöntemler olmuştur. Mimarlar hem bu yöntemleri kullanmakta, hem de bu geometri yöntemlerinin gelişmesi için yeni problemler tanımlamaktadır.

Salvadori (2015, sf:26) Öklid'in bahsettiği sonsuz doğrunun gerçek dünyada var olmadığını ve dünya üzerinde bir çizgi çizmeye başladığımızda bir çember tanımlayacağımızı söylemektedir. Öklid'in tanımladıkları ise aslında tamamen soyut matematik ve geometrinin ürünleri olmuşlardır. Benzer şekilde bir Öklidyen tanımla bir üçgenin iç açıları toplamı 180°'dir. Fakat uzay geometrisinde bir gezegen üzerinde çizilecek bir üçgenin iç açıları toplamı 180°'den büyük olabilir (Şekil 1). Modern geometrinin gelişimini sağlayan Öklidyen olmayan geometriler, uzaysal mekanın eğrisel ve çok boyutlu oluşları ana fikirleri üzerinde gelişen geometrilerdir (Kolarevic, 2003).



Şekil 1: Geometri çeşitleri (URL-3)

Bilgisayar bilimlerinin bir dalı olarak kabul edilen hesaplamalı geometri, geometri terimleriyle açıklanan algoritmaların çalışılmasına ve çözümlenmesine adanmış bir çalışma alanıdır. Günümüzde saf geometrik problemlerin bazıları hesaplamalı geometri algoritmalarındaki çalışmalardan doğmuştur (URL-4). Hesaplamalı geometri başta bilgisayar destekli tasarım, bilgisayar grafikleri, robotik gibi birçok çalışma alanında çalışılan bir konu haline gelmiştir (Preparata ve Shamos, 1985). Hesaplamalı mimarlık alanındaki araştırmalar da hesaplamalı geometri yöntemleri ile iç içe geçen ve onun üzerine gelişen bir mimari araştırma alanı olmuştur. Formun kendisinin bir geçmiş ve bellek olduğunu ve dolayısıyla formun mimarlık pratiğinin tarihsel sürecinin temellerinden biri olduğunu belirten Leyton (2006, sf:8) geometride ortaya çıkan yeni buluşların, aynı şekilde mimarlıkta da yeni buluşlar anlamına geldiğini söylemektedir. Pottmann ve diğ. (2007, sf:213) ise bu düşünceye paralel şekilde, mimarlıktan elde edilmiş geometrik problemlerin geometri işlemede, bilgisayar destekli geometrik tasarımda ve ayrık diferansiyel geometride ilginç araştırmalara öncülük edebilir nitelikte olduğunu belirtmektedirler. Yani geometri ve mimarlık iki taraflı bir şekilde birbirlerinden beslenen, birbirlerini besleyen iki çalışma alanıdır (Şekil 2).



Şekil 2: Geometri ve Mimarlık arasındaki etkileşim diyagramı (Burry, 2011, sf:26)

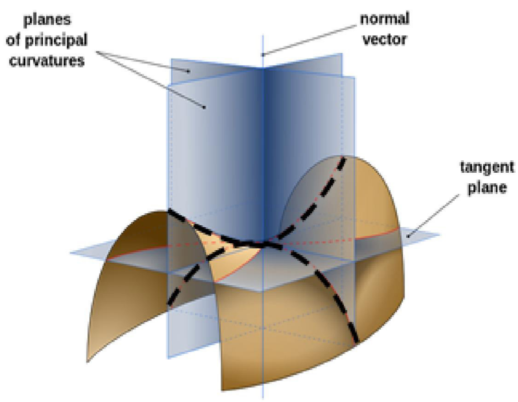
Öklid döneminde mimarlık ve matematiğin birbirlerine uzak olduğunu belirten Hırvat matematikçi ve tarihçi Nagy (2001, sf:11), ilerleyen zamanlarda birbirlerine yaklaşmış olsalar da bilgisayar destekli mimari tasarımın bu ikili ilişkide yeni bir dönem açtığını söylemektedir. Mimarların hem ihtiyaç duydukları yazılımları geliştirebiliyor olması hem de bunları kullanmak için gereken matematik bilgileri arttırmaları ile bu ilişki anlam kazanmaktadır. Bilgisayarın yaptığı işler bu kadar önem kazanmaya başlamışken, akla ilk gelen sorulardan biri bilgisayarın mimarların ve matematikçilerin yaptıkları işlerin yerine geçip geçmeyeceğidir. Nagy (2001, sf:12) bu soruya değindiği çalışmasında, bilgisayarın alternatif üretmede ve bir fonksiyonun integralini hesaplamada hızlı olduğunu; yine de yeni algoritmalar ve metodolojiler geliştiren kişilere, bunları yaratıcı bir şekilde kullanarak yeni araştırma konuları çıkarabilecek kişilere ihtiyaç duyulduğunu söylemektedir. Bu amaçla matematikçiler ve mimarlar arasında birbirini besleyen bir ortaklık kurulabilir. Hesaplamalı Düşünme yöntemleri ile kurulmaya başlanan bu ortaklık sayesinde mimarlar artık daha karmaşık geometrileri kendi çalışmalarında kullanmaya başlamışlardır. Mimarlar, Hesaplamalı Düşünme yöntemleri ile farklı geometri bilgilerini kullanabilir olmaya ve bu bilgiler doğrultusunda tasarımlar yapabilmeye başlamışlardır. Bu yöntemler mekanların sadece Öklidyen geometri bilgileriyle şekillenen tasarımlar olduğu düşüncesini değiştirmeye başlamıştır. Ceccato (2010, sf:12) mimarlık firmalarının kompleks geometrilere olan ilgilerinin artmasının nedeninin, daha önceleri karşılanması mümkün olmayan ve zahmetli estetik ve performans kriterlerinin bu tarz geometrilerle ulaşılabilir hale gelmesinden dolayı olduğunu söylemektedir. Foster and Partners'taki "Specialist Modeling Group" ya da Zaha Hadid Architects'teki "CODE" gibi mimarlık ofislerinin kendi bünyesinde geometri bilgisine ve hesaplamalı tasarım bilgisine hakim mimarlardan oluşan uzman gruplar bu nedenlerle ortaya çıkmışlar ve çalışmalarını ortaya koymaya başlamışlardır. Mimarlar artık düzlemsel geometriler dışında topolojik geometri, cebirsel geometril, fraktal geometri, diferansiyel geometri gibi bilgilerle farklı geometrileri de tasarımlarında kullanmaya başlamıştır.

MİNİMAL YÜZEYLER

Diferansiyel geometrinin uğraş alanlarından biri olan minimal yüzeyler, yüzeyin en küçük parçasında kendisini sınırlandıran çerçeve için en küçük alanlı yüzeyi oluşturan yüzeylerdir. Minimal yüzeyler barındırdıkları fiziksel birçok avantajın yanında oluşturdukları karmaşık şekiller ile mimarların ilgisini çeken bir konu olmuştur. İlk önceleri minimal yüzeyleri çalışan bilim adamları ve mimarlar, sabun yüzeyleri gibi fiziksel girdilerle yaptıkları deneyler sonucu bu yüzeylerin şekillerini ve geometrik açıklamalarını oluşturmuşlardır. Minimal yüzeylerin en temel özelliği yüzeyin bütün noktalarındaki ana eğriliklerin ortalamasının hesaplanması ve bu ortalamalarının toplamının sıfır olmasıdır. Şekil 3'te kalın kesik çizgilerle temsil edilen o noktadaki ana eğrilere K1 ve K2 eğrileri dersek ortalama eğrilik (H):

$$H = 1/2\,(K_1+K_2)$$

olur (URL-5). Minimal yüzeylerde ise ortalama eğrilik değeri yüzeyin her noktasında daima sıfıra eşittir.



Şekil 3: Bir yüzeyin temel eğrileri (URL-6)

Minimal yüzeyler iki ana grup altında sınıflandırılmışlardır. Bunların ilki birbirlerine eklemlenince periyodik özelliklerini devam ettiremeyen aperiyodik yüzeylerdir. İkincisi ise tek yönde, çift yönde veya üç yönde olmak üzere periyodik olan ve birbirlerine eklendiklerinde minimal yüzey özelliklerini devam ettirebilen periyodik minimal yüzeylerdir. Bütün minimal yüzeylerde ortalama eğrilik değerinin sıfır olması sayesinde herhangi bir içbükey bölge oluşmamaktadır ve bundan dolayı da yüzeyde su birikmez. Bu yüzden mimarlar minimal yüzeyleri, prensip olarak membran kullanımlarında oldukça fazla tercih etmektedir.

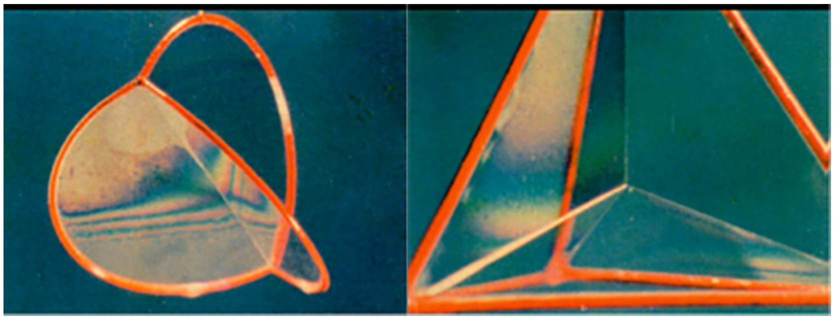
Minimal yüzeylerin temelleri 1873 yılında Antoine Ferdinand Plateau tarafından "Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires" adlı çalışmada atılmıştır (Özsöylev, 1998, sf:46). Plateau'nun sabun yüzeyleri ile yaptığı gözlemlere göre:

1– Bir sabun zarı (sabun köpüğünden elde edilen zar) düzgün parçacıklar topluluğundan oluşur.

2- Her bir düzgün parçanın ortalama eğriliği (yani yüzeylerinin ortalama eğimi) sabittir

3- Üç sabun baloncuğunun yüzeyleri, birleştikleri yerde düzgün bir eğri meydana getirir ve 120°'lik bir açıyla her bir yüzeyi böler (Şekil 4.1a).

4- Ortaya çıkan altı eğri birbirlerine yaklaştıkları yerde bir nokta oluştururlar ve bu noktada her çift eğri arasındaki açı eşittir (yaklaşık 109,28°) (Şekil 4).

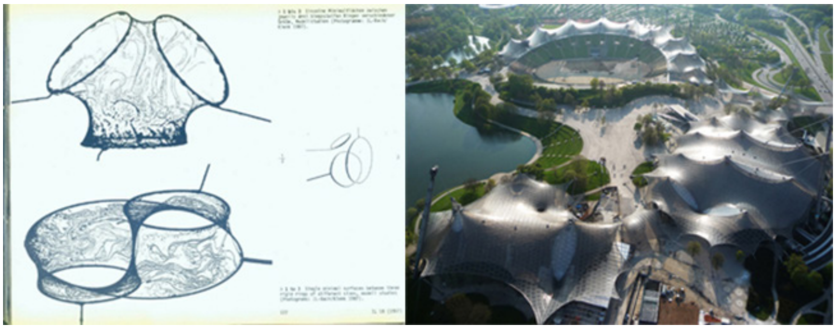


Şekil 4: Plateau'nun 3. (a) ve 4. (b) kuralı (Emmer, 2009)

Sabun baloncukları ile ilgili araştırmalar matematik alanında deneysel matematik diye adlandırılan yeni çalışma disiplinini ortaya çıkartmıştır. Bu araştırmalarla birlikte matematikçiler de deney yaparak üretim yapan bilim adamlarının arasında yer almıştır. Scientific American yazarlarından John Horgan "İspatın Ölümü" adlı makalesinde, baloncuklarla uğraşan Jean Taylor'dan deneysel matematikçi diye bahsetmiştir (Özsöylev, 1998, sf:46).

Minimal yüzeylerin mimarlıkta kullanılması ise özellikle Alman mimar Frei Otto'nun deneysel mimarlık çalışmalarıyla araştırdığı ve tasarladığı yapılarla birlikte önem kazanmıştır. Babası ve büyük babası heykeltıraş olan Otto, tasarımlarının çıkış noktası olarak yaptığı deneyleri çok önemli görmektedir. Juan María Songel'in 2004 yılında Otto ile yaptığı söyleşi, Otto'nun "gerçekleştirilecek sınırsız keşifler" düşüncesi ile başlamaktadır. Otto'ya göre "İnşa etme yetisi için mimari ve yapı formlarının ve bu formların gelişiminin bilgisi gereklidir. İnşa etmek bu süreci ilerletmek, araştırmak ve yapmak demektir. Yapı geliştirmeleri on bin yıl önce başlamış ve oldukça yüksek sınırlara ulaşmıştır, fakat yine de bitmiş bir süreç değildir. Hala önümüzde gerçekleştirilmeyi bekleyen sınırsız sayıda açık olasılıklar ve sınırsız keşifler vardır." (Otto ve Songel, 2010).

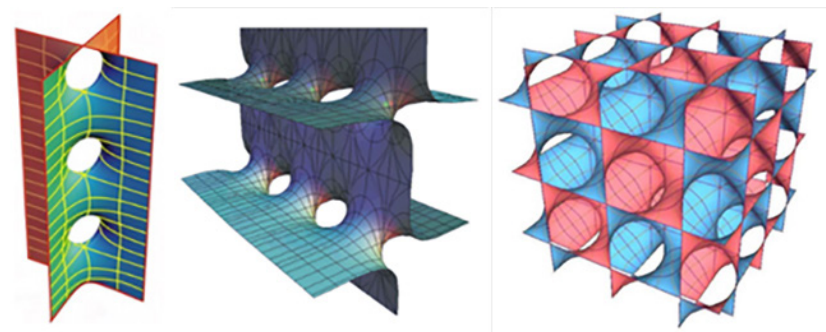
Otto'nun yapıtlarının başarısının temellerinde bu keşiflerle elde ettiği özgünlükler vardır. Minimal yüzeylerin matematik dünyasında oluşturduğu yeni deneysel matematik anlayışıyla, Frei Otto'nun deneysel mimari anlayışı da ortak konuları paylaşan ve ortak söylemleri olan konular olmuşlardır. Otto, 1961 yılında sabun köpükleri ile bir dizi deney yapmaya başladı. Deneylerinde teller ile oluşturduğu dikdörtgen çerçeveyi, sabunlu suya daldırıp çıkartarak bu çerçeve ile sınırlandırılmış ince bir film halinde sabun köpüğü tabakası oluşturdu. Frei Otto'nun bu deneylerinde elde ettiği minimal yüzeylerle oluşan formlar onun birçok tasarımına ilham kaynağı olmuştur (Şekil 5).



Şekil 5: Frei Otto'nun sabun köpükleri ile keşfettiği formlar (URL-7) ve bu deneylerden elde ettiği prensiplere 1972 Yaz Olimpiyatları için tasarlanan Münih Olimpik Parkı (URL-8)

1965 yılından itibaren yaptığı bütün tasarım ve yapıların bilgisayarlarla hesaplandığını ve bunun sorgulanmaması gereken doğal bir günlük pratik olduğunu söyleyen Otto yine de bilgisayarlar için yeni form bulmakta faydalı olmayacağını düşünmektedir. Otto'ya göre "bilgisayar zaten içinde var olan kavramları tasarlamaya yarar; bilgisayar ile sadece aradığınızı bulabilirsiniz. Ancak deney ile aradığınız şeyin ötesini de keşfedebilirsiniz" (Otto ve Songel, 2010). Otto'nun bu söylemine karşın, ilerleyen yıllarda yapılan çalışmalarda, bu çalışmanın da peşine düştüğü soru olan, Hesaplamalı Düşünme yöntemleri ile fiziksel olarak elde edilemeyecek yeni minimal yüzeyli geometriler elde edilebileceği görülmüştür.

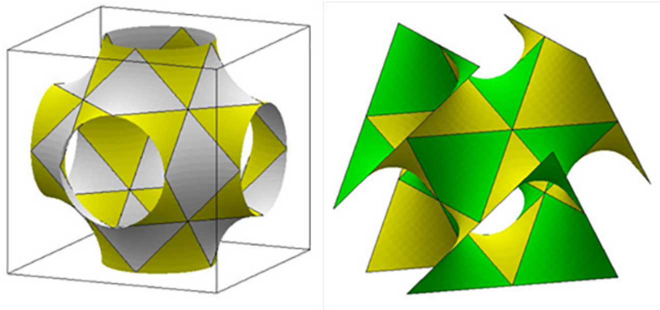
Minimal yüzeylerin süreklilik prensibini kullanan periyodik minimal yüzeyler ise geometri haricinde birçok alanda araştırmaları ve uygulamaları yapılan bir konu olmuştur. Özellikle moleküler bilimlerdeki çalışmalarda periyodiklik özellikler üzerinde çok sayıda araştırma yapılmıştır. Schwarz'ın yansıma kanunları ile birlikte bu periyodik özellikleri minimal yüzeylerde sonsuzda türeyen bir geometri sistemi haline getirmiştir. Minimal yüzeylerin bu periyodiklikleri genellikle bir küp çerçeve içerisinde bulunan minimal yüzeylerin tek yönde, iki yönde veya üç yönde kendilerini tekrar ederek, bütün yüzeyin her noktasında minimal yüzey özelliklerini korumaları ile sağlanmaktadır (Şekil 6).



Şekil 6: Tek yönlü, iki yönlü ve üç yönlü periyodik minimal yüzeylere örnekler (Meeks III, 2005)

Üç Yönlü Periyodik Minimal Yüzeylerin (ÜYPMY) ilk örnekleri Alman matematikçi Hermann Schwarz tarafından 1865 yılında bulunmuştur. Schwarz, bir dört yüzlünün altı kenarının dört tanesinden oluşan çerçevede sabun zarı yüzeyi üretildiğinde oluşan birimlerin kenar kenara birleştirilmesiyle sabun yüzeylerinin devamlılık sağladığını fark etmiştir.

Burada yüzeylerin birleştikleri kenarlar sonuçta oluşan sınırsız objenin iki taraflı simetri akslarını oluşturur. Schwarz bu deneyleri ile ilk iki ÜYPMY'ler olan Schwarz'ın D(Diamond) ve Schwarz'ın P(Primitive) yüzeylerini bulmuştur. Ayrıca Schwarz'ın yansıma prensipleri diye adlandırılan kuralları ortaya çıkarmıştır (Sierra ve Rodriguez, 2014, sf:162), (Şekil 7).



Şekil 7: Schwarz's P(a) ve Schwarz's D(b) yüzeyleri (URL-9)

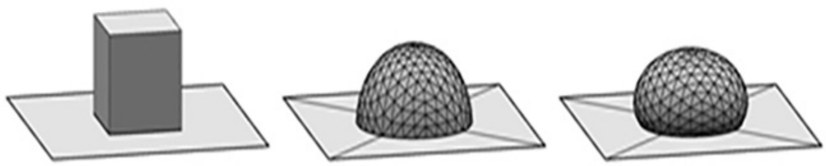
Schwarz ve onun öğrencisi Neouvius'un bulgularının dışında ÜYPMY'lerin var olup olmadığı ispatlanmamış olmasına rağmen, Schwarz bu konuda ortaya koyduğu kurallar ve öngörülerle başka minimal yüzeylerin var olup olmadığı ile ilgili ilk tartışmaları başlatmıştır. Fakat aradan neredeyse bir asır geçmesine rağmen yeni bir ÜYPMY örneği bulunamamıştır. Buna neden olan en büyük etkenlerden biri bu yüzeylerin fiziksel deneylerle bulunup incelenememesidir.

Schwarz'ın yeni minimal yüzeylerin türeyebilmesi için önerdiği algoritmalar ve bilgisayar teknolojisinin devreye girmesi ile beraber ÜYPMY tekrar matematikçilerin ilgi alanına girmiştir. Hesaplamalı yöntemlerin gelişmesiyle birlikte matematikte en çok ilerleme sağlayan konulardan biri minimal yüzeyler olmuştur (Piker, 2009). Bilgisayarların bu yüzeyleri üretebilme ve görselleştirebilme yetisi birçok yeni örneğin keşfedilmesini sağlamıştır. Piker'e göre bu örneklerin oluşması, doluluk/boşluk ikiliğinde yeni etkileyici hislere sebep olabilir.

Hesaplamalı yöntemlerle tekrar araştırmalara konu olan ÜYPMY'lere ilk katkı 1960'lı yıllarda Schoen tarafından yapılmıştır. Bu çalışmalarını bir raporda toplayan Schoen (1970) Bonnet'in çalışmalarında yaptığı transformasyon algoritmaları ile Kummer ve Schwarz'ın örnek üzerindeki çalışmalarını da kullanarak deneysel ve hesaplamalı çalışmalar yapmıştır. Schoen, yazdığı bu rapor ve kod ile birlikte 12 adet yeni ÜYPMY örneğini hem sayısal hem de fiziksel ortamda üreterek sunmuştur. 1988 yılında ise Schoen bu araştırmalarına ek olarak Schwarz'ın yansıma prensiplerine bağlı olarak 8 adet daha ÜYPMY örneği bulmuştur (Şekil 8) (Krivoshapko ve Ivanov, 2015, sf:427).

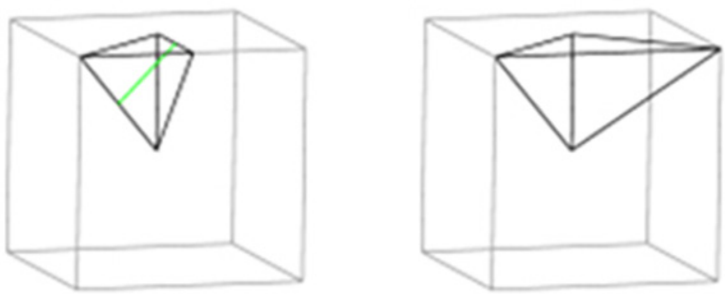
Şekil 8: Schoen'in bulduğu bazı ÜYPMY örnekleri (I-WP, F-RD, CWP) (URL-10)

Schoen'in bulduğu yüzeylerden sonra Werner Fisch ve Elke Koch gibi çok sayıda bilim insanı yeni ÜYPMY örnekleri ortaya çıkarmışlardır. Schoen'in araştırmalarından sonra yeni ÜYPMY örnekleri bulmak için özelleşmiş yazılımlar geliştirilmeye çalışılmıştır. Bu programlardan en yaygın olarak kullanılanı Ken Brakke'nin geliştirdiği Surface Evolver programı olmuştur (Sierra ve Rodriguez, 2014, sf:162). Brakke'nin (1992) Experimental Mathematics dergisinde yayımladığı yazı ile birlikte sunduğu Surface Evolver programı, verilen bir yüzeye ve kısıtlara dayalı olarak o yüzeyin enerjisini en aza indirgemeye çalışan bir programdır (Şekil 9).

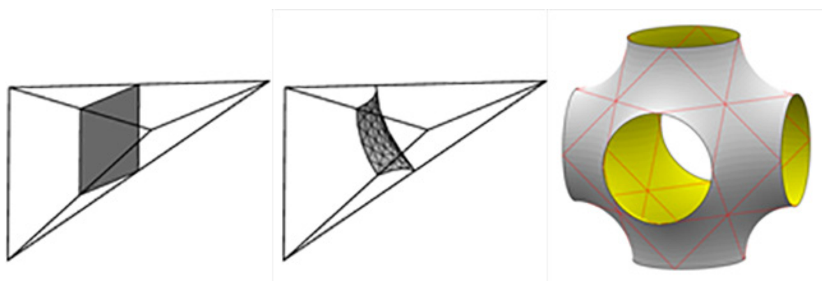


Şekil 9: Yer çekimi ve yüzey kesişim enerjilerine bağlı olarak bir düzleme damlacık bırakılması (URL-11)

Brakke'nin araştırmaları sabun zarları araştırmaları ile paralel bir araştırma olduğu için Brakke 1999 yılından itibaren Schoen ile çalışmaya başlayarak Surface Evolver programı ile ÜYPMY üzerinde araştırmalara başlamıştır. Brakke bir küpün bölünmüş parçaları olarak Coxeter'in kaleydoskop hücrelerinde (Şekil 10) bir minimal yüzey oluşturup, daha sonra Schwarz'ın yansıma prensipleri ile bu hücreleri tam bir küpe türeterek ÜYPMY'leri üretmeyi başarmış ve hem var olan örnekleri tekrar üretmiş hem de kendisi yeni örnekler ortaya çıkarmıştır (Şekil 12).



Şekil 10: Bir kübün 1/48'lik ve 1/24'lük kaleydoskop hücreleri (URL-10)



Şekil 11: 1/48'lik hücresinin Schoen's P yüzeyini oluşturması (URL-10)

ÜYPMY'ler hem tekil olarak geometrileri ile hem de sistematik olarak türeyebilme avantajları dolayısıyla heykeltıraşlar ve mimarların ilgisini çeken şekiller olmuşlardır. Mimaride de özellikle Üç Yönlü Periyodik Minimal Yüzeyler ile yapılan tasarımlar ve çalışmalar bulunmaktadır.

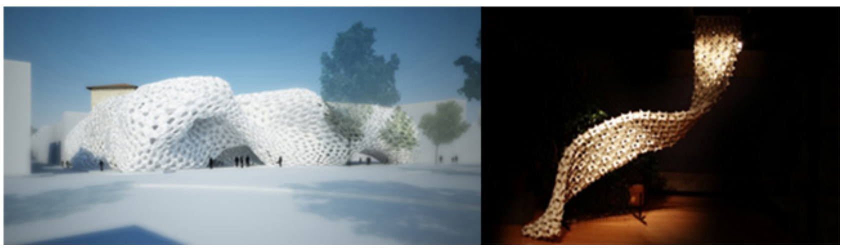
Mimarlar ÜYPMY'leri 1970'li yıllardan itibaren yapı tasarımında kullanmaya başlamışlardır (Piker, 2009). ÜYPMY'lerin birleşimleriyle elde edilen çift labirentler (iç ve dış labirent) mimari açıdan bu geometrilerin ilgi çekici bir diğer özelliği olmuştur. Sierra ve Rodriguez (2014, sf:163) ÜYPMY'lerin bu özelliklerinin ışık difüzyonu, ses emilimi, akustik kontrolü ve ısı kontrolü gibi amaçlarla bir mimari öğe tasarlanmasında oldukça faydalı olacağını belirtmektedir. Ayrıca minimal bir yüzey tarafından ayrılan bu iç ve dış bölgelerin sürekliliklerinin olması da mekansal açıdan zenginlik olarak nitelendirilmektedir. Böylece iç bölgede oluşturulan mekanların akışkanlığı mimari açıdan zengin mekansal ilişkiler kurulmasına olanak sağlayacaktır.

ÜYPMY'lerin kısıtlara bağlı olarak en az alanı kaplayan yüzey olmaları mimari açıdan bir diğer avantajlı durumu oluşturur. Velimirovic ve diğ. (2008, sf:89) minimal alanlı bu yüzeylerin ağırlık ve kullanılan malzemeyi minimuma indirmesinden dolayı mimaride uygulanması için çok uygun geometriler olduklarını düşünmektedirler. Yapılan literatür araştırmasında ÜYPMY'lerin mimari kullanımı üç kategori altında incelenmiştir.

Bunlardan ilki, ÜYPMY'lerin en önemli özelliklerinden birisi sınırsız olarak birbirlerine eklemlenebilmeleri olmasına rağmen bu geometrilerin tekil olarak kullanıldığı örneklerdir. Bu tarz yüzeylerin özgün geometriler oluşturması mimarların tek başlarına dahi bu yüzeyleri mimari çalışmalarda değerlendirmelerine neden olmuştur. Bu tarz çalışmalarda daha çok matematik biliminde araştırmaları yapılmış ÜYPMY'ler kullanılarak hem bu geometrilerin oluşturduğu kullanıcı deneyimleri hem de üretim yöntemleri araştırılmıştır (Şekil 12).

Şekil 12: Gyroid Climber (URL-12) ve Minimal Complexity Projeleri (Tenu, 2011b)

ÜYPMY'lerin mimaride kullanıldığı ikinci tür örnekler ise, bu şekillerin yan yana türeyebilme özelliklerini kullanıp yapılar için yüzeyler oluşturduğu örneklerdir. Bu tarz örneklerde ÜYPMY'lerin iki yönde birbirlerine eklemlenerek yüzeyler oluşturduğu görülmektedir (Şekil 13).



Şekil 13: Biodigital Processes in Architecture – New Library in Florence (URL-13) ve tetraMIN (URL-14)

ÜYPMY'lerin mimaride kullanıldığı son örnek tarzları ise, bu tarz yüzeylerin doluluk boşluk ilişkilerini irdeleyerek mekan oluşturmaya çalışan örneklerdir (Şekil 14).

Şekil 14: Taichung Metropolitan Opera (URL-15) ve 4.4.3.3 Kowloon Wholesale Fruit market in Hong Kong (URL-16)

Piker (2009) ÜYPMY'lerin mimaride kullanılmasının bazı nedenlerden dolayı kendini geliştiremediğini söylemektedir. Bu nedenlerden biri geliştirilen matematiğin göz korkutuculuğudur. Parametrik modellemenin artan uygulanabilirliği ile mimarlar artık x, y ve z'yi, u ve v olarak veren basit fonksiyonlarla oluşturulan yüzeylere alışmış olmalarına rağmen, minimal yüzeylerin matematiğinde kullanılan Weierstrass eliptik fonksiyonlar gibi ileri seviye fonksiyonlarla pek karşılaşmamaktadırlar. Bir başka neden ise ÜYPMY'lerin birbirinin aynı olarak kullanılmasıdır. Bilinen minimal yüzeylerin çoğu ya yalnız bozulamaz girdilerden ya da sonsuza kadar tekrar eden birbirinin aynı birimlerden oluşmaktadır. Mimaride kullanılması için ise bir geometrik sistemin esneklik seviyesine ve farklı girdilere uyum sağlama yeteneğine sahip olması gerekmektedir (Piker, 2009). Piker'e göre uygulanabilecek bir yaklaşım, matematiksel saflığı bir kenara bırakıp bazı teknikleri ele alıp, bu teknikleri serbest-biçim üslubunda eğri yüzeyler üretmek üzere kullanmaktır. Ama eğer bir mimar kullandığı araçlar üzerinde gerçek bir kontrole sahip değilse, çalışması bir kolaja veya imitasyona dönüşebilir; ayrıca bu çalışmanın matematiksel işbirliğini bir kenara bırakması, tasarımı strüktürel performans ve inşa edilebilme gibi zorluklarla karşı karşıya getirir.

Geometriyi anlayabiliyor olmanın yeni dijital tekniklerin kullanılmasında önemli bir rol oynadığını söyleyen Wallisser (2009, sf:91) bu durumda önemli olanın matematiksel formülasyonu tamamıyla anlamak değil, konseptleri mimari modellere aktarmak olduğunu söylemektedir. Wallisser'e göre geometrik prensiplerin kendileri mimari tasarımlara ilham kaynağı olabilir; fakat parametrik modelleme ve tasarımlarda önemli olan geometrik ilişkileri daha iyi anlayabilmek ve yorumlamaktır.

MİNİMAL YÜZEYLER İLE OLUŞTURULAN BİR TASARIM ÖNERİSİ

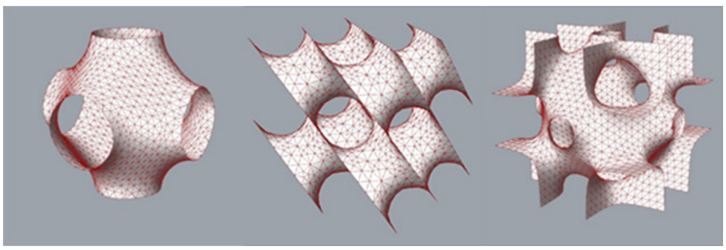
Çalışmanın bu bölümünde bir sergi mekanı için tasarım önerisi geliştirilmiştir. Bu amaçla ele alınan ÜYPMY'ler matematiksel olarak bir küp dahilinde üretilmiş ve periyodikliği sağlanmış yüzeylerdir. Bu çalışma kapsamında ÜYPMY'ler geometrik tanımlarında oldukları gibi sabit bir sınır şeklin içinde değil, bu sınır şeklin deformasyonu ve türetimleri ile yorumlanarak, bir mekan tasarımında kullanılmıştır. Bu doğrultuda yapılan Rhino-Grasshopper modeli ile sınırları belirli çokgen alanda, kullanım verilerine göre belirlenen kenar bölümlenme parametrelerine bağlı olarak oluşturulacak sınır şekiller içerisinde ÜYPMY'ler türetilerek bu tarz geometrilere mimari bir yorum katılarak bir tasarım önerisi sunulacaktır.

Matematiksel altyapı ve hesaplamalı tasarım yöntemlerini kullanan bu yöntemle tasarımcı, verilen alanda dörtgen alt-bölümleri oluşturup ÜYPMY'leri deforme ederek, ÜYPMY'leri tasarımda sadece geometri modellerindeki halleriyle değil sınır-şekilleri deforme ederek de kullanabilecektir (Şekil 15).

Şekil 15: Çalışmada ÜYPMY'lerin ele alınma öngörüsü

ADIM 1 – TEKİL ÜYPMY OLUŞTURULMASI

ÜYPMY'lerin bir tanesinin elde edilmesi tasarım probleminin ilk girdisi olmuştur. ÜYPMY'leri iki şekilde elde etmek mümkündür: ilki Ken Brakke'nin yöntemiyle enerjiyi minimize edip yansımalar ve döndürmelerle küp içerisini doldurmak; diğeri ise yaklaşık cebirsel temsilleri kullanmak. Rhino-Grasshopper programı ile iki yöntemin uygulamasını da yapabilmek mümkündür. Brakke'nin yöntemi için kaleydoskop hücreleri ile üretilecek minimal yüzeye göre verilecek kısıtlar Kangaroo eklentisi aracılığıyla minimum alanlı ve minimum enerjili yüzeylere çevrilerek bu kaleydoskop hücresinin türetilmesi ile ÜYPMY elde edilebilir. Cebirsel tanımı ile istenilen ÜYPMY'lerin yaklaşık cebirsel formüllerinin Milipede eklentisinin Isosurface bileşeninde değerler olarak kullanılmasıyla model elde etmek mümkündür. Ayrıca Surface Evolver programı ile matematiksel modelleri görselleştiren ve manipüle edilmesini sağlayan k3dsurf gibi programlarla oluşturulacak modeller de Rhino programı içerisine alınabilir (Şekil 16).



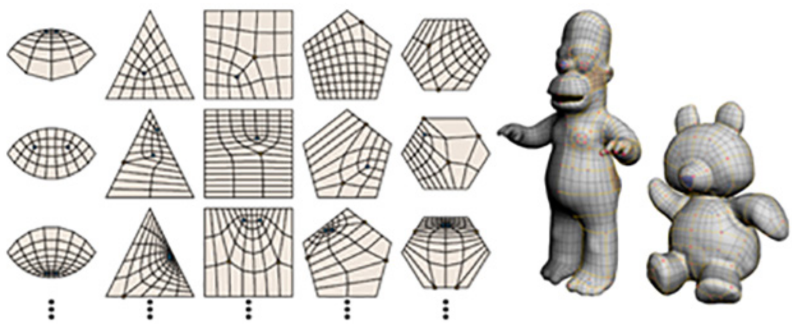
Şekil 16: Grasshopper ile oluşturulan ÜYPMY örnekleri: (a) Primitive (b) Diamond; (c) PW Hybrid

ADIM 2 – ALT BÖLÜMLERİN OLUŞTURULMASI

Çalışma kapsamında kullanılan ÜYPMY'ler dörtkenarlı sınırlara sahip olduğu için, yöntemin ilk aşaması, sınırlarıyla belirli çokgen bir alanın dörtgen alt-bölümlerini oluşturmaktır. Alt bölümlere ayırma işlemi bilgisayar grafikleri konusunda çalışanlar için temel araştırma konularından biridir. Mimarlıkta ise alt bölümlendirme, bilgisayar destekli tasarım araçlarıyla birlikte sayısal ortamda tasarlanan karmaşık yüzeylerin, üretiminde karşılaşılan boyutlandırma kısıtları ve üretimin düzlemsel geometri metotlarıyla üretilecek olmasından dolayı karşılaşılan problemleri giderebilmek için çalışılan konulardan biri olmuştur (Pottmann, Schiftner ve diğ., 2008).

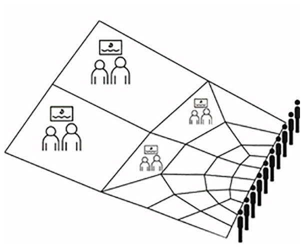
Çalışma kapsamında ise alt-bölümlere ayırma işlemi, tasarımın son halinin üretimine yardımcı olması amacıyla değil, tasarımın başında bir hesaplamalı tasarım aracı olarak kullanıcı parametrelerini değerlendirmek üzere kullanılacaktır.

Bu kapsamda yapılan literatür araştırmasında ETH Zurich'teki Interactive Geometry Lab (IGL)'ın yaptığı çalışmalar, dörtgenlenmiş alt-bölümlerin oluşturulması için araştırmaya dahil edilerek uyarlanmıştır. Ekibin 2014 yılında sundukları çalışmada, Takayama ve diğ. (2014a) sınırları parçalanmış çok kenarlı bir 'mesh' parçasını dörtgenlemek için bir algoritma geliştirmiştir (Şekil 17). Ekibin geliştirdikleri algoritmada amaç, alt-bölümler oluşturulduğunda elde edilen düğüm noktalarının düzensiz olanlarının (irregular vertex) sayısının minimum olmasıdır. Ekibin oluşturduğu program C++ dilinde yazılmıştır ve web sayfalarından indirilebilmektedir (URL-17).



Şekil 17: Takayama ve diğ. (2014a) tarafından geliştirilen 2 ≤ N ≤ 6 kenarlı parçaların örüntüye bağlı olarak dörtgenlenmesi

Kenarların alt-bölümlere ayrılması bir parametreye göre belirlenebilir. Tasarım konusu olarak bir sergi mekanı düşünüldüğü için bir kenarı giriş kısmı olarak değerlendirilip çok sayıda parçalanmayla, diğer kenarlar büyük sergi mekanları olarak değerlendirilebilir; az sayıda parçalanmalar yapıldığında tüm alanın alt-bölümlenmesi bu parametrelere bağlı olarak oluşturulur (Şekil 18) ve böylece bütün ÜYPMY birimleri arasında mekânsal süreklilik sağlanmış olur.

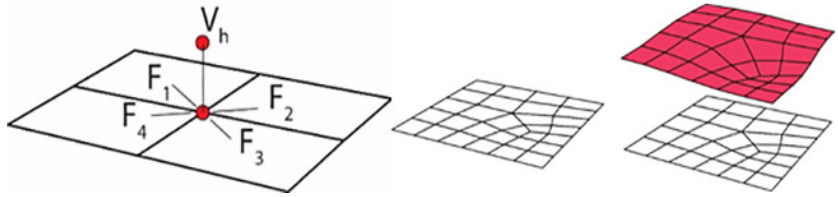


Şekil 18: Dört kenarlı bir alanda 10 girişli 2 ana sergili bir mekanın alt-bölümleri

ADIM 3 – ALT BÖLÜMLERDEN ÜYPMY İÇIN SINIR ŞEKİLLERİ OLUŞTURULMASI

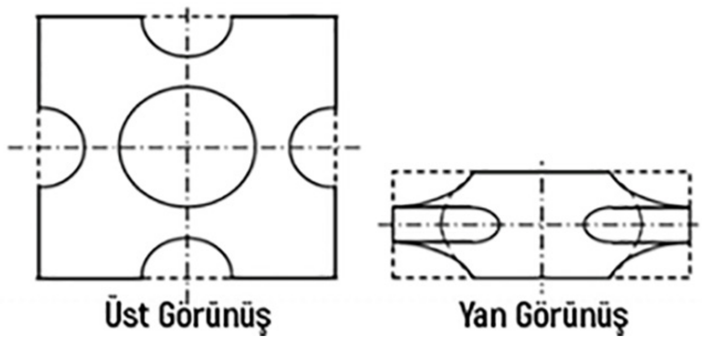
Çalışma kapsamında sergi mekanlarının bütünüyle eş alanlardan oluşmayacağı öngörüldüğü için, önerilen modelde ÜYPMY'lerin sınır şekilleri olan küpler deforme edilerek farklılaşmış birimlere sahip bir tasarım yöntemi sunulmak istenmiştir. Alanın alt-bölümlenmeleri yapılınca plan düzleminde konumları belirlenen ÜYMPY'lerin sınır şekillerinin üçüncü boyuttaki şekillenmelerinin yapılması gerekmektedir.

Rhino-Grasshopper ortamında geliştirilen algoritma ile alanın alt-bölümlenmelerinden elde edilen düğüm noktaları ilişkili oldukları alt-bölümlerin alanlarının büyüklüklerine göre yükseklik (Vh) kazanmaktadır (Şekil 19). Önerilen modelde mimari mekanlar olarak çok yüksek veya basık mekanlar oluşması istenmediği için, sınır şekilleri oranlı olarak deforme edebilmek için düğüm noktaları, bağlantılı olduğu dört alt-bölümün (F1-F4) alanına göre oluşabilecek her bir küpün yükseklik değerleri ortalaması alınarak yükseltilmiştir (Şekil 21).



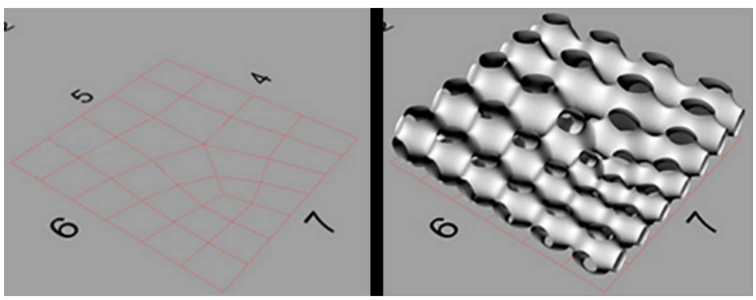
Şekil 19: Yükseklik verme algoritmasının bir uygulama örneği

Burada yapılması gereken kontrol, ÜYPMY'lerin sınır şekilleri üzerinde yapılacak basit deformasyonlar ile oluşan yüzeylerin minimal yüzey özelliklerinin değişip değişmediğidir. Şekil 20'de Schoen'in bir küboid içinde 16 eşit yüzey parçası ile oluşturduğu ÜYPMY hücresi görülmektedir. Bu küboidin yüksekliğini değiştirerek minimal yüzeylerin bir parametrik ailesini geliştirmek mümkündür (Krivoshapko ve Ivanov, 2015). Yani verilen sınır şekil (küp) deformasyona uğratıldığında başlangıç yüzeyi ÜYPMY olarak geometrik özelliklerini devam ettirecektir.



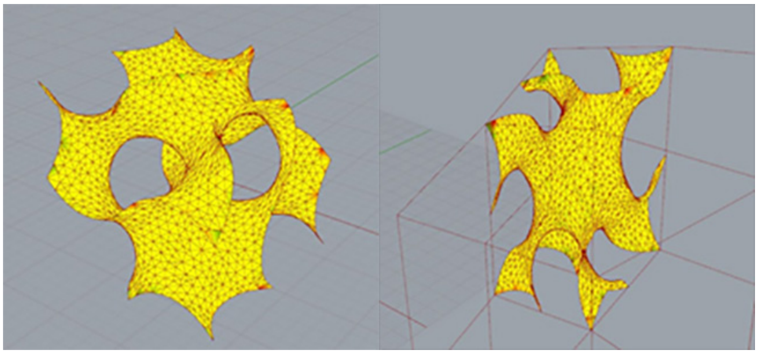
Şekil 20: Sınır şeklinin yüksekliği değiştirilmiş bir ÜYPMY (Krivoshapko ve Ivanov, 2015)

Çalışma kapsamında önerilen ÜYPMY'ler mekanı oluşturan hacimsel modüller olarak değerlendirilmiştir. Bu modüller önceki aşamada oluşturulan sınır şekiller doğrultusunda oluşturulan ÜYPMY'den oluşmaktadır. Birden fazla ÜYPMY ile oluşturulan tasarım önerisinde tüm modüller arası süreklilik gösteren bir mekan oluşturmak istenilmiştir.



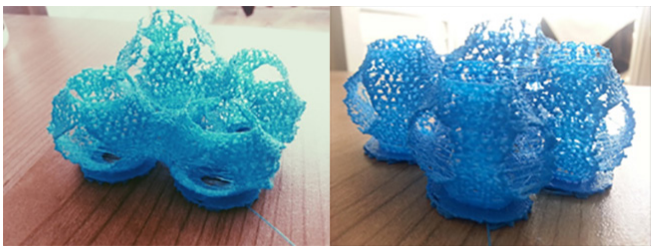
Şekil 21: Önerilen modelle dört kenarlı (4-5-6-7) parametreli bir alanda 1. Adımda elde edilen Primitive yüzeyin uygulanması

Çalışmanın sonraki aşamasında ilk başta ÜYPMY'e en yakın geometri olarak verilen cebirsel modelin ortalama eğrilik analizlileri ile deformasyon sonrası oluşan ortalama eğrilik analizleri karşılaştırılmıştır. Cebirsel modelin ayrık parçalardan oluşan ve minimal yüzeye en yakın model olmasından dolayı ortalama eğrilik değeri sıfıra eşit değildir. Yapılan analizde (Şekil 22) yaklaşık 8.5m.'lik ayrıtlara sahip bir küp sınır şeklinde üretilen Schwarz Primitive yüzeyinde, oluşturulan düğüm noktalarındaki ortalama eğrilik değerlerinin ortalaması alındığında 0,002745 (yaklaşık 2mm) gibi çok küçük bir değer çıktığı gözlemlenmiştir. Üretilen modeldeki deforme edilmiş bir sınır şekil üzerindeki Shcwarz Primitive yüzeyi ele alındığında ise, ortalama eğriliklerin ortalaması 0,001475'e kadar düştüğü gözlemlenmiştir. Burada belirtilmelidir ki eğer elimizdeki model bir mesh modeli değil de yüzey modeli olsaydı iki değer de sıfır çıkacaktı.

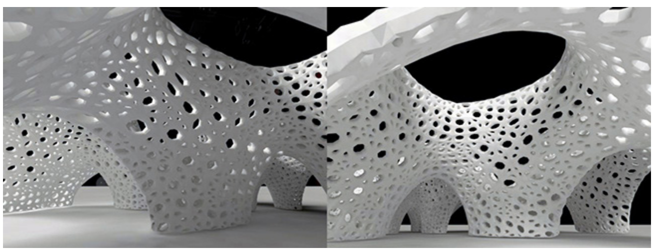


Şekil 22: Analizi yapılan örnek ÜYPMY ve deforme edilmiş hali

Çalışmanın son aşamasında Rhino-Grasshopper ortamında tasarlanan sayısal modelin, sayısal üretim yöntemleriyle fiziksel bir modeli üretilmiştir (Şekil 23).



Şekil 23: Schwarz P yüzeyinin deformasyonu ile yapılmış bir üç boyutlu prototip



Şekil 24: Yarım Schwarz P yüzeyi ile oluşturulmuş bir alanın iç alan perspektifi

Şekil 25: Yarım Schwarz P yüzeyi ile oluşturulmuş bir alanın farklı doğrultularda kesitleri

Minimal yüzeyin gerilmeleri en aza indirgeme özelliği, 3B baskıda bile üretiminin zor olacağı öngörülebilecek kısımları, destek malzemesi konulmadan basılmasına olanak vermiştir. Fakat ana eğriliklerin sıfıra yakınsadığı (düzlemselliğe yakın) yatay kısımlar oluştuğunda destek malzemesine ihtiyaç duyulmaktadır.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Yapılan araştırmalar göstermiştir ki geometri ve mimarlık arasındaki etkileşim tarih boyunca mimari çalışmalarda önemli bir yer tutmuştur. Son yıllarda bilgisayar teknolojisi yardımıyla mimarların, matematiğin derin hesaplarıyla uğraşmadan karmaşık geometrilerin sonuç ürünlerine ulaşabilmesi oldukça kolaylaşmıştır. Burada belirtilmelidir ki mimarlık her zaman geometri bilimini takip etmek ondan sonra ilerlemek zorunda değildir. Mimari projelerde ortaya çıkan sorunlar geometri alanı için araştırma konusu olmaya yatkın problemler olabilmektedir. Hesaplamalı tasarım araçları ve bu tarz geometrilerin kullanımının kolaylaşması, yaratıcı tasarımlar yapmaya çalışan mimarların geometride yeni durumlar ve buluşlar ortaya çıkartmasını sağlayabilir. Mimarların geometrinin formüllerinden çok mantığıyla ilgili yapacağı deneysel tasarımlar, geometride yeni araştırmalara neden olabilir. Bu yüzden hesaplamalı tasarım yöntemlerini kullanan mimarlar, hem temel geometri bilgilerini geliştirmeli hem de geometricilerle beraber çalışabilen ve ortak dili konuşabilen uzmanlar olmalıdır.

Çalışmada özel konu olarak incelenen ÜYPMY'ler özgün geometrileri ve türeyebilme avantajları açısından hesaplamalı tasarım araştırmalarında önemli potansiyele sahip bir konudur. Yapılabilecek araştırmalarda ÜYPMY'ler teorik olarak oluşturuldukları şekilleriyle kullanılabileceği gibi, hesaplamalı tasarım araçlarıyla oluşturulma mantıkları yorumlanarak yeni ÜYPMY'ler de üretilebilir. Kaleydeskop hücresi ve içerisinde minimal bir yüzey oluşturmayla başlayarak, mimarlar Schwarz'ın yansıma kurallarını da kullanarak bugünkü hesaplamalı tasarım araçlarıyla yeni geometriler oluşturabilirler. Ayrıca Peter Pearce'in temellerini atmış olduğu 'saddle polyhedron' ile sonsuzda türeyebilen farklı çok yüzlülerin sınır şekillerininden oluşacak miminal yüzeyler konusuyla ilgili bir araştırma yapılabilir. Böylelikle tasarımda kullanılacak minimal yüzeyler tek bir sınır şekilden türemeyip, farklı çokyüzlüler ile türetilip zengin alternatifler oluşturabilir.

Kaynakça

Brakke, K. A. (1992). The Surface Evolver. Experimental Mathematics, 1(2), 141–165. http://doi.org/10.1080/10586458.1992.10504253

Burry, J. (2011). Logic and intuition inarchitectural modelling: Philosophy of mathematics for computational design (Doktora Tezi). RMIT, Melbourne.

Ceccato, C. (2010). The Master-Builder-Geometer. İçinde Advances in Architectural Geometry (ss. 9–14).

Coxeter, H. (1961). Introduction to geometry. New York: Wiley.

Emmer, M. (2013). Minimal Surfaces and Architecture: New Forms. Nexus Network Journal, 15(2), 227–239. http://doi.org/10.1007/s00004-013-0147-7

Hartshorne, R. (2000). Teaching geometry according to Euclid. Notices of the AMS, 47(4), 460–465.

Kolarevic, B. (2003). Architecture in the Digital Age: Design and Manufacturing. Architecture in the Digital Age: Design and Manufacturing. http://doi.org/10.1007/s00004-004-0025-4

Krivoshapko, S., ve Ivanov, V. N. (2015). Encyclopedia of Analytical Surfaces. Springer International Publishing.

Leyton, M. (2006). Shape as Memory. A Geometric Theory of Architecture. Book.

Meeks III, W. H. (2005). Classical examples of minimal surfaces. [PowerPoint sunumu]. Erişim adresi http://people.math.umass.edu/~bill/papers/ Alındığı tarih: 08.05.2016.

Nagy, D. (2001). Architecture and Mathematics : From an Odd Couple to a New Partnership. Nexus Network Journal, II, 11–12.

Ostwald, M. J., ve Williams, K. (2015a). Mathematics in, of and for Architecture: A Framework of Types. İçinde Architecture and Mathematics from Antiquity to the Future. : Volume I: Antiquity to the 1500s (ss. 31–57).

Otto, F., ve Songel, J. M. (2010). Conversation with Frei Otto. New York, US: Princeton Architectural Press.

Özsöylev, H. N. (1998). Sabun Baloncuklarıyla Deneysel Matematik. Bilim ve Teknik, (06), 44–48.

Piker, D. (2009). Rheotomic Surfaces. [Web blog]. Erişim adresi https://spacesymmetrystructure.wordpress.com/rheotomic-surfaces/ Alındığı tarih: 08.05.2016.

Pottmann, H., Brell-Cokcan, S., ve Wallner, J. (2007). Discrete Surfaces for Architectural Design. Design, 213–234.

Pottmann, H., Schiftner, A., ve Wallner, J. (2008). Geometry of Architectural Freeform Structures. Int. Math. Nachr., 209(209), 15–28. http://doi.org/10.1145/1364901.1364903

Preparata, F. P., ve Shamos, M. I. (1985). Computational Geometry. New York: Springer.

Salvadori, M. (2015). Can There Be Any Relationships Between Mathematics and Architecture? İçinde Architecture and Mathematics from Antiquity to the Future. : Volume I: Antiquity to the 1500s (ss. 25–29).

Schoen, A. H. (1970). Infinite periodic minimal surfaces without self-intersections. Nasa Technical Reports Server. Erişim adresi http://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=19700020472

Sierra, F., ve Rodriguez, C. M. (2014). Architectural Envelope Systems Based on T riply Periodic Minimal Surfaces. International Journal of Space Structures, 29(4), 161–170.

Takayama, K., Panozzo, D., ve Sorkine-Hornung, O. (2014a). Pattern-Based Quadrangulation for N-Sided Patches. İçinde Eurographics Symposium on Geometry Processing. Cardiff, UK.

Tenu, V. (2011b). Minimal Surfaces As Architectural Prototypes. [Web blog]. Erişim adresi http://www.vladtenu.com/2011/minimal-surfaces-as-architectural-prototypes/ Alındığı tarih: 06.05.2016.

Velimirovic, L., Radivojevic, G., Stankovic, M., ve Kostic, D. (2008). Minimal surfaces for architectural constructions. Architecture and Civil Engineering, 6(1), 89–96. http://doi.org/10.2298/FUACE0801089V

Wallisser, T. (2009). Other geometries in architecture: bubbles, knots and minimal surfaces. İçinde Mathknow: Mathematics, Applied Sciences and Real Life (ss. 91–111).

Url-1<http://web.deu.edu.tr/mate-matik/m9_b2.html>, Alındığı tarih: 17.04.2016.

Url-2<http://www.matematikciyiz.biz/Arast%C4%B1rmalardan_Secmeler/oklit_disi_geometriler.htm>, Alındığı tarih: 25.04.2016.

Url-3<http://abyss.uoregon.edu/~js/cosmo/lectures/lec15.html>, Alındığı tarih: 26.01.2019.

Url-4<https://en.wikipedia.org/wiki/Computational_geometry>, Alındığı tarih: 08.05.2016.

Url-5<http://mathworld.wolfram.com/MeanCurvature.html>, Alındığı tarih: 21.04.2016.

Url-6<https://en.wikipedia.org/wiki/Principal_curvature>, Alındığı tarih: 21.04.2016.

Url-7<https://iam.tugraz.at/workshop14s/2014/03/25/soap-bubbles-and-minimal-surfaces/>, Alındığı tarih: 12.05.2016.

Url-8<http://www.pritzkerprize.com/laureates/2015>, Alındığı tarih: 12.05.2016.

Url-9<http://met.iisc.ernet.in/~lord/webfiles/tpms.html>, Alındığı tarih: 24.04.2016.

Url-10<http://facstaff.susqu.edu/brakke/evolver/examples/periodic/periodic.html>, Alındığı tarih: 21.04.2016.

Url-11<http://facstaff.susqu.edu/brakke/evolver/examples/examples.htm>, Alındığı tarih: 01.05.2016.

Url-12 <https://www.youtube.com/watch?v=0p4QS6sGSZ8>, Alındığı tarih: 11.07.2016.

Url-13<http://www.evolo.us/architecture/biodigital-processes-in-architecture-new-library-in-florence/>, Alındığı tarih: 08.05.2016.

Url-14<http://i-m-a-d-e.org/?p=2698>, Alındığı tarih: 08.05.2016.

Url-15<http://www.designboom.com/architecture/tai-chung-metropolitan-opera-house-by-toyo-ito-under-construction/>, Alındığı tarih: 11.07.2016.

Url-16<http://projectsreview2011.aaschool.ac.uk/students/jihyun-heo>, Alındığı tarih: 11.07.2016.

Url-17<http://igl.ethz.ch/projects/patch-quad/>, Alındığı tarih: 23.05.2016