


## Karma mesnetli kirişin serbest titreşim analizi Free vibration analysis of mixed supported beam

Yaşar PALA<sup>1</sup> , Semih BEYÇİMEN<sup>2\*</sup> 

<sup>1,2</sup>Makine Mühendisliği Bölümü, Mühendislik Fakültesi, Uludağ Üniversitesi, Bursa, Türkiye.  
mypala@uludag.edu.tr, semihbeycimen@uludag.edu.tr

Geliş Tarihi/Received: 10.08.2018, Kabul Tarihi/Accepted: 21.03.2019  
\* Yazışılan yazar/Corresponding author

doi: 10.5505/pajes.2019.33558  
Araştırma Makalesi/Research Article

### Öz

*Bu çalışmada iki ucunda dönme ve ötelenme yayı bulunan bir Euler-Bernoulli kirişin serbest titreşimi incelenmiştir. Farklı yay katsayılarına göre hem simetrik hem de simetrik olmayan durumlara göre frekans tabloları ve mod şekilleri oluşturulmuştur. Yay sabitleri değiştirilerek birçok durum incelenmiş ve yorumlanmıştır. Yüksek frekanslarda yay sabitlerinin frekanslar üzerine etkisinin son derece azaldığı ve iki frekans arasındaki farkın sabit bir değere yaklaştığı bulunmuştur.*

**Anahtar kelimeler:** Karma mesnetler, Yay, Kiriş, Serbest Titreşim

### Abstract

*In this study, the free vibration of a Euler-Bernoulli beam with rotating and transitional springs at both ends has been investigated. According to different spring coefficients, frequency tables and mode shapes have been created for both symmetric and non-symmetric cases. By changing spring constants, many conditions have been examined and interpreted. It has been found that the effect of spring constants on frequencies is extremely low at high frequencies and the difference between two frequencies approaches to a constant value.*

**Keywords:** Mixed supports, Spring, Beam, Free vibration

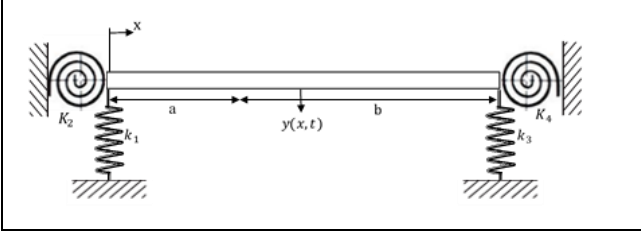
## 1 Giriş

Köprüler, otoyolları, demir yolları, pek çok taşıyıcı sistem ve bina temelleri gibi uygulamalarda elastik sınır koşullarına sahip kiriş problemi ile sıkça karşılaşılmaktadır. Elastik sınır şartlarının kirişin titreşimi üzerinde etkili olacağı muhakkaktır. Özellikle karmaşık sınır şartlarına sahip kirişlerin serbest titreşimlerinin incelenmesi ve bu haldeki frekans ve öz fonksiyonlarının bulunması zorlanmış titreşimin incelenmesi açısından da son derece önemlidir. Bu nedenle konuyla ilgili çok sayıda çalışma yapılmıştır. Araştırmacılar Euler-Bernoulli kirişlerin çeşitli mesnetlere göre serbest titreşimini incelemişlerdir. Chun, bir ucu serbest diğer ucunda dönme yayı bulunan kirişin frekans denklemini ve mod şekillerini incelemiştir [1]. Lee, bir ucunda yay diğer ucunda kütle bulunan kirişin frekans denklemini araştırmıştır [2]. Maurizi, Rossi ve Reyes bir ucunda dönme yayı diğer ucunda ötelenme yayı bulunan bir kirişin serbest titreşim problemini çalışmıştır [3]. Goel, her iki ucunda dönme yayı ve üzerinde kütle bulunan bir kirişin serbest titreşimi üzerinde çalışmıştır [4]. Passing, yakıt çubuklarının serbest frekanslarını tahmin etmeye yönelik yaptığı çalışmalarda simetrik yaylarla desteklenen bir kiriş için frekans denklemini türetmiştir [5]. Avcar, kare kesitli alüminyum kirişlerin serbest titreşimlerini çeşitli sınır şartları altında analitik olarak incelemiş ve bu sonuçları ANSYS programı ile doğrulamıştır [6]. Aynı yazar, dört farklı sınır koşullarında çeşitli geometrik özelliklere sahip prizmatik çelik kirişlerin doğal frekanslarını Yapay Sinir Ağı (YSA) tekniğini kullanarak elde etmiştir [7]. Yanık ve Yaylı, Fourier sinüs serileri ve Stoke dönüşümünü kullanarak elastik zemine oturmuş bir çubuğun eksenel titreşim analizini değişik sınır şartlarına göre titreşimini incelemişlerdir [8]. Ece, Aydoğdu ve Taşkın, üssel olarak değişen kesite sahip bir kirişin titreşimini incelemişlerdir. Kiriş titreşiminin analitik çözümleri, basitçe desteklenen, kenetlenmiş ve serbest uçlarla bağlantılı üç farklı sınır koşulu için elde edilmiş ve her bir sınır koşulu için doğal frekanslar ve mod şekilleri belirlenmiştir. [9]. Bapat CN ve

Bapat C, birden falza kütle ve ötelenme yayı taşıyan bir kirişin titreşim analizini incelemiş ve elde ettiği sonuçları farklı yay katsayılarına göre tablolar halinde sunmuştur [10]. Sundararajan, simetrik olmayan yaylarla mesnetli temel kiriş frekansları için basit bir matematiksel ifade türetmiştir [11]. Rao ve Naidu, her iki ucunda dönme yayı bulunan bir kirişin analizini sonlu elemanlar metoduyla yapmış ve doğal frekansları elde etmiştir [12]. Laura ve diğ. (1974), serbest uçta kütle taşıyan bir kirişin doğal frekanslarını ve mod şekillerini incelemişlerdir [13]. Chang (2000), merkezinde ağır bir kütle taşıyan basit mesnetli kirişin serbest titreşim özelliklerini araştırdı [14]. Banerjee (2012), dinamik sertlik yöntemi kullanarak yay kütle sistemi taşıyan bir kirişin serbest titreşimini araştırdı. Doğal frekansları ve ilk beş mod şeklini sundu [15]. Rossit ve Laura (2001), serbest uca ötelenme yayı ile bağlı bir kütleyle sahip konsol kirişin titreşimini araştırdılar. Analizde nispeten daha basit Euler-Bernoulli kiriş teorisi kullanılmıştır [16]. Winkler zemine oturan kirişlerin serbest titreşimi konusunda da çalışmalar yapılmıştır. Avcar ve Mohammed, winkler zemine oturan fonksiyonel olarak derecelendirilmiş bir kirişin serbest titreşimini Euler-Bernoulli kiriş teorisini kullanarak incelemişlerdir. Çalışmada zemin sertlik katsayısının ve kalınlık boyunca malzeme dağılımının sistem üzerindeki etkileri irdelenmiştir [17]. Ayrıca bu çalışmada sistemin öz değerleri de elde edilmiştir. Aynı yazarlar, iki parametrelilik elastik temel üzerine oturan fonksiyonel olarak derecelendirilmiş kirişlerin serbest titreşimini de başka bir çalışmalarında incelemişlerdir. Çalışmada farklı sınır koşullarına göre sonuçlar elde edilmiştir [18].

Bu çalışmalardan farklı olarak, bu makalede sıkça karşılaşılabilecek bir sistem olan simetrik olmayan ve her iki uçta da dönme yayı ve ötelenme yayı bulunan bir kirişin serbest titreşimi ele alınmaktadır. Bu sistemin fiziksel modellenmesi Şekil 1'de görüldüğü gibi yapılmıştır. Sistemin frekans denklemini ve mod şekilleri elde edilmekte ve çeşitli yay sabit değerlerine göre sonuçlar bulunmaktadır. Bu yay katsayıları çok büyük ve

çok küçük değerlerde alınıp iki ucu sabit, iki ucu serbest ve bir ucu sabit diğer ucu serbest sistemlerle kıyaslanmıştır.



Şekil 1: Karma sınır şartlarına maruz kiriş.

## 2 Analiz

Euler-Bernoulli kirişin serbest titreşimi halinde hareket denklemini şu şekilde ifade edilebilir:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

Burada  $y$  enine yer değiştirmeler,  $EI$  kirişin eğilme rijitliği,  $\rho$  kütle yoğunluğu,  $A$  kesit alanı,  $x$  kiriş uzunluk koordinatı ve  $t$  zamandır.  $c^2 = EI/\rho A$ .

Kirişin sağ ve sol uçlarındaki sınır koşulları aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$x = 0'da \quad EI \frac{\partial^3 y(0, t)}{\partial x^3} = -k_1 y(0, t) \quad (2a)$$

$$EI \frac{\partial^2 y(0, t)}{\partial x^2} = K_2 \frac{\partial y(0, t)}{\partial x} \quad (2b)$$

$$x = L'de \quad EI \frac{\partial^3 y(L, t)}{\partial x^3} = k_3 y(L, t) \quad (3a)$$

$$EI \frac{\partial^2 y(L, t)}{\partial x^2} = -K_4 \frac{\partial y(L, t)}{\partial x} \quad (3b)$$

(1) Denklemini değişkenlerine ayırıştırma yöntemi ile çözülebilir,

$$y(x, t) = W(x)T(t) \quad (4)$$

kabulü yapılır ve bu ifade hareket denkleminde yerine konarak

$$\frac{c^2}{W(x)} \frac{d^4 W(x)}{dx^4} = -\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T}{dt^2} = a = w^2 = \text{sabit} \quad (5)$$

bulunur. Buradan

$$\frac{d^4 W(x)}{dx^4} - \beta^4 W(x) = 0 \quad (6a)$$

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0 \quad (6b)$$

şeklinde iki adi diferansiyel denklem elde edilir. Burada

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \quad (7)$$

dır. Denklem (6b)'nin çözümü

$$T(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (8)$$

yapısındadır. Buradaki  $A$  ve  $B$  başlangıç şartlarından bulunacak sabitlerdir. Denklem (6a)'nın çözümü

$$W(x) = C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x + C_3 \sinh \beta x + C_4 \cosh \beta x \quad (9)$$

şeklinindedir. Burada  $C_1, C_2, C_3$  ve  $C_4$  integral sabitleri olup sınır şartlarından bulunacaktır. Kirişin doğal frekansları (7) ifadesinden aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\omega = \beta^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \text{ (rad/s)}, \quad \omega = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \beta^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \text{ (Hertz)} \quad (10)$$

(2) ve (3) sınır şartları kullanılarak  $W(x)$  üzerindeki şartlar

$$x = 0'da \quad EIW'''(0) = -k_1 W(0) \quad (11a)$$

$$EIW''(0) = K_2 W'(0) \quad (11b)$$

$$x = L'de \quad EIW'''(L) = -k_3 W(L) \quad (11c)$$

$$EIW''(L) = K_4 W'(L) \quad (11d)$$

olarak elde edilir. Bu şartları (9) denkleminde yazarak

$$EI\beta^3 C_1 - k_1 C_2 - EI\beta^3 C_3 - k_1 C_4 = 0 \quad (12a)$$

$$-K_2 C_1 - EI\beta C_2 - K_2 C_3 + EI\beta C_4 = 0 \quad (12b)$$

$$\begin{aligned} &(-EI\beta^3 \cos \beta L - k_3 \sin \beta L) C_1 \\ &+ (EI\beta^3 \sin \beta L - k_3 \cos \beta L) C_2 \\ &+ (EI\beta^3 \cosh \beta L - k_3 \sinh \beta L) C_3 \\ &+ (EI\beta^3 \sinh \beta L - k_3 \cosh \beta L) C_4 = 0 \end{aligned} \quad (12c)$$

$$\begin{aligned} &(-EI\beta \sin \beta L + K_4 \cos \beta L) C_1 \\ &+ (-EI\beta \cos \beta L - K_4 \sin \beta L) C_2 \\ &+ (EI\beta \sinh \beta L + K_4 \cosh \beta L) C_3 \\ &+ (EI\beta \cosh \beta L + K_4 \sinh \beta L) C_4 = 0 \end{aligned} \quad (12d)$$

elde edilir. Basitleştirme maksadıyla aşağıdaki kısaltmalar kullanılırsa;

$$u = \beta L, \quad a_1 = \frac{EI\beta^3}{k_1}, \quad a_2 = a_4 = -1, \quad a_3 = -\frac{EI\beta^3}{k_1}$$

$$a_5 = -1, \quad a_6 = -\frac{EI\beta}{K_2}, \quad a_7 = -1, \quad a_8 = \frac{EI\beta}{K_2}$$

$$a_9 = (-EI\beta^3 \cos \beta L - k_3 \sin \beta L)$$

$$a_{10} = (EI\beta^3 \sin \beta L - k_3 \cos \beta L)$$

$$a_{11} = (EI\beta^3 \cosh \beta L - k_3 \sinh \beta L)$$

$$a_{12} = (EI\beta^3 \sinh \beta L - k_3 \cosh \beta L)$$

$$a_{13} = (-EI\beta \sin \beta L + K_4 \cos \beta L)$$

$$a_{14} = (-EI\beta \cos \beta L - K_4 \sin \beta L)$$

$$a_{15} = (EI\beta \sinh \beta L + K_4 \cosh \beta L)$$

$$a_{16} = (EI\beta \cosh \beta L + K_4 \sinh \beta L) \quad (13)$$

(12) denklemleri (13)'te belirtilen ifadelerle birlikte matris formunda yazılarak,

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

ya da

$$[A][B] = [0] \quad (15)$$

elde edilir.  $C_1, C_2, C_3$  ve  $C_4$  sabitlerinin sıfırdan farklı çözümlerinin olabilmesi için

$$\det(A) = 0 \quad (16)$$

olmalıdır. Denklem 16'daki determinantın çözümü Matlab programı kullanılarak elde edilmektedir.

$$e_1 = \frac{k_1 L^3}{EI}, \quad e_2 = \frac{K_2 L}{EI}, \quad e_3 = \frac{k_3 L^3}{EI}, \quad e_4 = \frac{K_4 L}{EI} \quad (17)$$

şeklinde boyutsuz değişkenleri tanımlayarak  $\beta$  değerlerinin değişkenlere göre değişimi Tablo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ve Tablo 11, 12, 13'te verilmektedir. İlk 10 tabloda pratikte daha çok karşılaşılan bir hâl olarak  $k_1 = k_3$ ,  $K_2 = K_4$  alınmaktadır. Tablo 11, 12 ve 13'te  $k_1 = k_3/10$ ,  $K_2 = K_4/10$  olarak seçilmektedir.

Tablo 14'te (16) ifadesinde  $k_1, K_2, k_3$  ve  $K_4$  çok büyük bir değer alınarak elde edilen sonuçlar ile sabit-sabit bir kirişin bilinen doğal frekans değerleri kıyaslanmıştır.

Tablo 15'te (16) ifadesinde  $k_1, K_2$  değerleri çok büyük ve  $k_3, K_4$  değerleri sıfıra yakın alınarak sabit-serbest bir kirişin bilinen doğal frekans değerleri kıyaslanmıştır.

Tablo 16'da (16) ifadesinde  $k_1, K_2, k_3$  ve  $K_4$  sıfıra yakın alınarak elde edilen sonuçlar ile serbest-serbest bir kirişin bilinen doğal frekans değerleri kıyaslanmıştır.

### 3 Mod şekiller

Mod şekillerini bulmak amacıyla (9) denklemi tekrar yazılırsa,

$$W(x) = C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x + C_3 \sinh \beta x + C_4 \cosh \beta x \quad (18)$$

$C_1, C_2, C_3$  ve  $C_4$  katsayılarını tek bir bilinmeyene indirmek için (12) denklem takımı daha önce (13) No.lu denklemde belirtilen kısaltmalarla birlikte tekrar yazılırsa:

$$a_1 C_1 + a_2 C_2 + a_3 C_3 + a_4 C_4 = 0 \quad (19a)$$

$$a_5 C_1 + a_6 C_2 + a_7 C_3 + a_8 C_4 = 0 \quad (19b)$$

$$a_9 C_1 + a_{10} C_2 + a_{11} C_3 + a_{12} C_4 = 0 \quad (20a)$$

$$a_{13} C_1 + a_{14} C_2 + a_{15} C_3 + a_{16} C_4 = 0 \quad (20b)$$

Gerekli işlemler yapıldıktan sonra

$$C_2 = r_1 C_1 \quad (21a)$$

$$C_3 = r_2 C_1 \quad (21b)$$

$$C_4 = r_3 C_1 \quad (21c)$$

elde edilir. Burada

$$n = \frac{a_1 - \frac{a_4 a_{13}}{a_{16}}}{a_3 - \frac{a_4 a_{15}}{a_{16}}}, \quad m = \frac{a_2 - \frac{a_4 a_{14}}{a_{16}}}{a_3 - \frac{a_4 a_{15}}{a_{16}}} \quad (22a)$$

$$r_1 = - \frac{\left[ \left( a_9 - \frac{a_{12} a_{13}}{a_{16}} \right) - \left( a_1 - \frac{a_{12} a_{15}}{a_{16}} \right) n \right]}{\left[ \left( a_{10} - \frac{a_{12} a_{14}}{a_{16}} \right) - \left( a_{11} - \frac{a_{12} a_{15}}{a_{16}} \right) m \right]} \quad (22b)$$

$$r_2 = -(n + m r_1) \quad (22c)$$

$$r_3 = \left( -\frac{a_{13}}{a_{16}} + \frac{a_{14}}{a_{16}} r_1 - \frac{a_{15}}{a_{16}} (n + m r_1) \right) \quad (22d)$$

dır. Böylece Denklem (9) aşağıdaki şekilde tek bir değişkene bağlanmış olur.

$$W(x) = C_1 (\sin \beta x + r_1 \cos \beta x + r_2 \sinh \beta x + r_3 \cosh \beta x) \quad (23)$$

Buradan  $\rho A$  ağırlık fonksiyonuna diklik şartı kullanılarak  $C_1$  değeri elde edilebilir.

$$\int_0^L \rho A W_n^2 dx = 1 \quad (24)$$

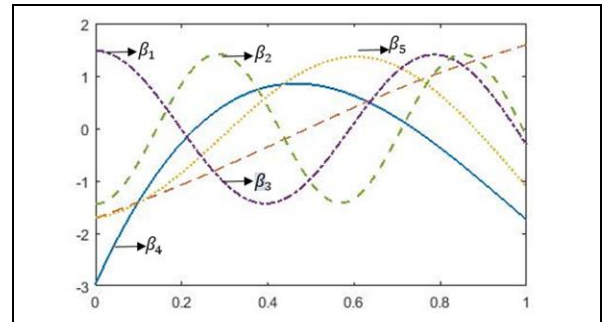
$W(x)$  fonksiyonu (24)'te yerine koyulup integrasyon işlemleri gerçekleştirilirse

$$\begin{aligned} & C_1^2 \left( \left[ \left( \frac{2\beta L - \sin(2\beta L)}{4\beta} \right) + \left( \frac{2\beta L + \sin(2\beta L)}{4\beta} \right) r_1^2 \right. \right. \\ & + \left. \left( \frac{-2\beta L + \sinh(2\beta L)}{4\beta} \right) r_2^2 + \left( \frac{2\beta L + \sinh(2\beta L)}{4\beta} \right) r_3^2 \right. \\ & + \left. \left( \frac{-\cos(2\beta L)}{2\beta} \right) r_1 \right. \\ & + \left. \left( \frac{\sin(\beta L) \cosh(\beta L) - \cos(\beta L) \sinh(\beta L)}{2\beta} \right) 2r_2 \right. \\ & + \left. \left( \frac{\sin(\beta L) \sinh(\beta L) - \cos(\beta L) \cosh(\beta L)}{2\beta} \right) 2r_3 \right. \\ & + \left. \left( \frac{\sin(\beta L) \sinh(\beta L) + \cos(\beta L) \cosh(\beta L)}{2\beta} \right) 2r_1 r_2 \right. \\ & + \left. \left( \frac{\cos(\beta L) \sinh(\beta L) + \sin(\beta L) \cosh(\beta L)}{2\beta} \right) 2r_1 r_3 \right. \\ & \left. + \left( \frac{\cosh(2\beta L)}{2\beta} \right) r_2 r_3 \right] - \left[ -\frac{r_1}{2\beta} - \frac{r_3}{\beta} + \frac{r_1 r_2}{\beta} + \frac{r_2 r_3}{2\beta} \right] \right) = \frac{1}{\rho A} \end{aligned} \quad (25)$$

elde edilir.  $C_1^2$ 'nin önündeki ifade  $Z$  ile gösterilerek

$$Z = \frac{1}{\rho A} \quad \text{ya da} \quad C_1 = \sqrt{\frac{1}{Z \rho A}} \quad (26)$$

bulunur.  $L = 1m$  değeri için ilk 5 adet  $\beta$  değerine tekabül eden  $W(x)$  mod şekilleri Şekil 2'de görülmektedir.



Şekil 2 Mod Şekilleri ( $x/L = 1$  için).

Tablo 1:  $K_2 = K_4 = 50 \text{ Nm/rad}$  değeri için doğal frekansların  $k_1 = k_3$  ile değişimi.

$k_1 = k_3$	50	100	200	500	1000	2000	5000	25000	100000
$K_2 = K_4$	50	50	50	50	50	50	50	50	50
$e_1 = e_3$	0.0952	0.1905	0.3810	0.9524	1.9048	3.8095	9.5238	47.6190	190.4762
$e_2 = e_4$	0.0952	0.0952	0.0952	0.0952	0.0952	0.0952	0.0952	0.0952	0.0952
$\beta_1$	0.657	0.782	0.918	1.162	1.384	2.012	2.315	2.38	3.01
$\beta_2$	1.294	1.355	1.457	1.676	1.918	2.756	3.243	3.998	5.211
$\beta_3$	4.769	4.771	4.475	4.785	4.803	4.937	5.096	5.511	6.756
$\beta_4$	7.878	7.878	7.878	7.881	7.885	7.915	7.955	8.074	8.659
$\beta_5$	11.013	11.013	11.014	11.015	11.016	11.027	11.041	11.084	11.312
$\beta_6$	14.150	14.15	14.15	14.151	14.151	14.155	14.164	14.184	14.289
$\beta_7$	17.289	17.29	17.29	17.291	17.291	17.293	17.297	17.308	17.365
$\beta_8$	20.43	20.43	20.43	20.432	20.432	20.433	20.434	20.441	20.475
$\beta_9$	23.57	23.57	23.57	23.57	23.57	23.571	23.573	23.577	23.6
$\beta_{10}$	26.711	26.711	26.711	26.711	26.711	26.711	26.713	26.715	26.731

Not:  $k_1 = k_3$ 'ün birimi  $N/m$ ,  $K_2 = K_4$ 'ün birimi ise  $Nm/rad$ 'dir.

Tablo 2:  $K_2 = K_4 = 100 \text{ Nm/rad}$  değeri için doğal frekansların  $k_1 = k_3$  ile değişimi.

$k_1 = k_3$	50	250	1000	5000	10000	20000	30000	50000	100000
$K_2 = K_4$	100	100	100	100	100	100	100	100	100
$e_1 = e_3$	0.0952	0.4762	1.9048	9.5238	19.0476	38.0952	57.1429	95.2381	190.4762
$e_2 = e_4$	0.1905	0.1905	0.1905	0.1905	0.1905	0.1905	0.1906	0.1905	0.1905
$\beta_1$	0.658	0.985	1.385	2.016	2.32	2.609	2.754	2.901	3.04
$\beta_2$	1.49	1.637	1.986	2.776	3.253	3.808	4.162	4.62	5.213
$\beta_3$	4.805	4.812	4.837	4.968	5.123	5.403	5.646	6.051	6.76
$\beta_4$	7.901	7.902	7.908	7.938	7.978	8.056	8.134	8.292	8.672
$\beta_5$	11.03	11.03	11.03	11.044	11.058	11.086	11.115	11.175	11.327
$\beta_6$	14.164	14.164	14.165	14.170	14.177	14.191	14.204	14.232	14.302
$\beta_7$	17.3	17.3	17.302	17.304	17.308	17.315	17.322	17.338	17.376
$\beta_8$	20.439	20.439	20.44	20.441	20.443	20.445	20.449	20.461	20.484
$\beta_9$	23.578	23.578	23.578	23.579	23.58	23.60	23.62	23.592	23.607
$\beta_{10}$	26.718	26.718	26.718	26.718	26.719	26.72	26.723	26.728	26.738

Tablo 3:  $K_2 = K_4 = 250 \text{ Nm/rad}$  değeri için doğal frekansların  $k_1 = k_3$  ile değişimi.

$k_1 = k_3$	50	250	1000	5000	10000	20000	30000	50000	100000
$K_2 = K_4$	250	250	250	250	250	250	250	250	250
$e_1 = e_3$	0.0952	0.4762	1.9048	9.5238	19.0476	38.0952	57.1429	95.2381	190.4762
$e_2 = e_4$	0.4762	0.4762	0.4762	0.4762	0.4762	0.4763	0.4764	0.4762	0.4762
$\beta_1$	0.66	0.986	1.387	2.022	2.332	2.635	2.788	2.946	3.09
$\beta_2$	1.812	1.898	2.146	2.830	3.280	3.818	4.165	4.620	5.216
$\beta_3$	4.903	4.909	4.932	5.053	5.197	5.459	5.691	6.079	6.77
$\beta_4$	7.966	7.968	7.973	8	8.040	8.116	8.192	8.343	8.71
$\beta_5$	11.078	11.078	11.080	11.091	11.106	11.135	11.162	11.221	11.369
$\beta_6$	14.202	14.202	14.203	14.208	14.215	14.229	14.242	14.269	14.339
$\beta_7$	17.332	17.332	17.333	17.336	17.339	17.347	17.354	17.369	17.406
$\beta_8$	20.466	20.466	20.466	20.468	20.47	20.474	20.483	20.488	20.511
$\beta_9$	23.601	23.601	23.601	23.602	23.604	23.607	23.613	23.616	23.630
$\beta_{10}$	26.738	26.738	26.738	26.739	26.74	26.742	26.746	26.75	26.759

Tablo 4:  $K_2 = K_4 = 500 \text{ Nm/rad}$  değeri için doğal frekansların  $k_1 = k_3$  ile değişimi.

$k_1 = k_3$	50	250	1000	5000	10000	20000	30000	50000	100000
$K_2 = K_4$	500	500	500	500	500	500	500	500	500
$e_1 = e_3$	0.0952	0.4762	1.9048	9.5238	19.0476	38.0952	57.1429	95.2381	190.4762
$e_2 = e_4$	0.9524	0.9524	0.9524	0.9524	0.9525	0.9526	0.9527	0.9524	0.9524
$\beta_1$	0.656	0.985	1.388	2.03	2.351	2.668	2.834	3.007	3.177
$\beta_2$	2.039	2.146	2.324	2.901	3.317	3.832	4.170	4.620	5.220
$\beta_3$	5.038	5.043	5.064	5.172	5.302	5.541	5.756	6.121	6.786
$\beta_4$	8.064	8.066	8.071	8.099	8.134	8.205	2.777	8.420	8.767
$\beta_5$	11.153	11.153	11.155	11.166	11.179	11.207	11.234	11.290	11.434
$\beta_6$	14.262	14.262	14.263	14.268	14.275	14.288	14.301	14.328	14.396
$\beta_7$	17.383	17.383	17.383	17.386	17.389	17.396	17.404	17.419	17.455
$\beta_8$	20.509	20.509	20.509	20.511	20.513	20.518	20.522	20.531	20.553
$\beta_9$	23.639	23.639	23.639	23.640	23.642	23.645	23.648	23.654	23.668
$\beta_{10}$	26.772	26.772	26.772	26.773	26.774	26.776	26.778	26.782	26.792

Tablo 5:  $K_2 = K_4 = 5000 \text{ Nm/rad}$  değeri için doğal frekansların  $k_1 = k_3$  ile değişimi.

$k_1 = k_3$	50	250	1000	5000	10000	20000	30000	50000	100000
$K_2 = K_4$	5000	5000	5000	5000	5000	5000	5000	5000	5000
$e_1 = e_3$	0.0952	0.4762	1.9048	9.5238	19.0476	38.0952	57.1429	95.2381	190.4762
$e_2 = e_4$	9.5238	9.5238	9.5238	9.5238	9.5238	9.5239	9.5240	9.5238	9.5238
$\beta_1$	0.66	0.987	1.393	2.062	2.425	2.818	3.051	3.33	3.645
$\beta_2$	2.881	2.900	2.964	3.25	3.520	3.914	4.203	4.622	5.252
$\beta_3$	5.824	5.827	5.837	5.889	5.954	6.08	6.201	6.429	6.907
$\beta_4$	8.812	8.813	8.816	8.833	8.854	8.896	8.938	9.024	9.235
$\beta_5$	11.834	11.834	11.836	11.844	11.853	11.871	11.890	11.928	12.024
$\beta_6$	14.881	14.881	14.882	14.886	14.891	14.900	14.910	14.931	14.981
$\beta_7$	17.946	17.946	17.947	17.949	17.952	17.958	17.964	17.975	18.004
$\beta_8$	21.024	21.024	21.024	21.027	21.028	21.032	21.036	21.043	21.062
$\beta_9$	24.113	24.113	24.113	24.115	24.116	24.118	24.212	24.126	24.139
$\beta_{10}$	27.210	27.210	27.210	27.212	27.213	27.215	27.216	27.219	27.229

Tablo 6:  $K_2 = K_4 = 10000 \text{ Nm/rad}$  değeri için doğal frekansların  $k_1 = k_3$  ile değişimi.

$k_1 = k_3$	50	250	1000	5000	10000	20000	30000	50000	100000
$K_2 = K_4$	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000
$e_1 = e_3$	0.0952	0.4762	1.9048	9.5238	19.0476	38.0952	57.1429	95.2381	190.4762
$e_2 = e_4$	19.0476	19.0477	19.0478	19.0479	19.0480	19.0481	19.0482	19.0481	19.0482
$\beta_1$	0.66	0.986	1.391	2.07	2.436	2.844	3.091	3.397	3.747
$\beta_2$	2.999	3.014	3.068	3.319	3.564	3.934	4.211	4.622	5.262
$\beta_3$	6.013	6.015	6.023	6.065	6.119	6.223	6.325	6.519	6.947
$\beta_4$	9.045	9.046	9.049	9.062	9.079	9.122	9.149	9.218	9.312
$\beta_5$	12.093	12.09	12.095	12.101	12.109	12.124	12.139	12.170	12.249
$\beta_6$	15.153	15.154	15.155	15.157	15.162	15.169	15.178	15.194	15.236
$\beta_7$	18.224	18.224	18.224	18.226	18.229	18.233	18.238	18.248	18.273
$\beta_8$	21.302	21.302	21.302	21.304	21.305	21.309	21.312	21.318	21.334
$\beta_9$	24.388	24.388	24.388	24.389	24.390	24.391	24.395	24.399	24.410
$\beta_{10}$	27.480	27.480	27.480	27.481	27.483	27.484	27.485	27.488	27.496

Tablo 7:  $K_2 = K_4 = 50000 \text{ Nm/rad}$  değeri için doğal frekansların  $k_1 = k_3$  ile değişimi.

$k_1 = k_3$	50	250	1000	5000	10000	20000	30000	50000	100000	500000
$K_2 = K_4$	50000	50000	50000	50000	50000	50000	50000	50000	50000	50000
$e_1 = e_3$	0.0952	0.4762	1.9048	9.5238	19.0476	38.0952	57.1429	95.2381	190.4762	952.381
$e_2 = e_4$	95.2381	95.2381	95.2381	95.2381	95.2381	95.2381	95.2381	95.2381	95.2381	95.2381
$\beta_1$	0.66	0.987	1.394	2.074	2.448	2.871	3.133	3.464	3.88	4.447
$\beta_2$	3.112	3.126	3.172	3.389	3.611	3.955	4.220	4.622	5.272	6.820
$\beta_3$	6.22	6.222	6.228	6.261	6.303	6.386	6.468	6.628	6.996	8.681
$\beta_4$	9.332	9.332	9.334	9.344	9.357	9.382	9.408	9.460	9.592	10.594
$\beta_5$	12.44	12.44	12.445	12.449	12.455	12.466	12.477	12.499	12.556	13.038
$\beta_6$	15.56	15.56	15.56	15.56	15.563	15.568	15.574	15.586	15.615	15.865
$\beta_7$	18.67	18.67	18.67	18.67	18.672	18.678	18.681	18.688	18.706	18.85
$\beta_8$	21.785	21.785	21.785	21.785	21.786	21.791	21.793	21.798	21.809	21.9
$\beta_9$	24.902	24.902	24.902	24.902	24.903	24.905	24.906	24.91	24.917	24.979
$\beta_{10}$	28.019	28.019	28.019	28.019	28.020	28.021	28.022	28.024	28.03	28.074

Tablo 8:  $K_2 = K_4 = 500000 \text{ Nm/rad}$  değeri için doğal frekansların  $k_1 = k_3$  ile değişimi.

$k_1 = k_3$	50	250	1000	5000	10000	20000	30000	50000	100000	500000
$K_2 = K_4$	500000	500000	500000	500000	500000	500000	500000	500000	500000	500000
$e_1 = e_3$	0.0952	0.4762	1.9048	9.5238	19.0476	38.0952	57.1429	95.2381	190.4762	952.381
$e_2 = e_4$	952.381	952.381	952.381	952.381	952.381	952.381	952.381	952.381	952.381	952.381
$\beta_1$	0.66	0.987	1.395	2.075	2.451	2.877	3.143	3.483	3.914	4.516
$\beta_2$	3.141	3.153	3.198	3.408	3.624	3.961	4.223	4.622	5.274	6.88
$\beta_3$	6.277	6.278	6.284	6.315	6.354	6.431	6.508	6.659	7.01	8.695
$\beta_4$	9.415	9.415	9.417	9.426	9.438	9.461	9.485	9.532	9.652	10.599
$\beta_5$	12.553	12.553	12.554	12.558	12.563	12.573	12.583	12.602	12.653	13.086
$\beta_6$	15.692	15.692	15.693	15.694	15.696	15.701	15.707	15.717	15.742	15.959
$\beta_7$	18.83	18.83	18.83	18.83	18.831	18.835	18.838	18.844	18.859	18.982
$\beta_8$	21.968	21.968	21.968	21.968	21.969	21.972	21.973	21.977	21.986	22.063
$\beta_9$	25.107	25.107	25.107	25.107	25.107	25.109	25.11	25.113	25.119	25.17
$\beta_{10}$	28.245	28.245	28.245	28.245	28.245	28.246	28.247	28.249	28.254	28.289

Tablo 9:  $K_2 = K_4 = 1000000 \text{ Nm/rad}$  değeri için doğal frekansların  $k_1 = k_3$  ile değişimi.

$k_1 = k_3$	50	250	1000	5000	10000	20000	30000	50000	100000	500000
$K_2 = K_4$	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000
$e_1 = e_3$	0.0952	0.4762	1.9048	9.5238	19.0476	38.0952	57.1429	95.2381	190.4762	952.381
$e_2 = e_4$	1904.76	1904.76	1904.76	1904.76	1904.76	1904.76	1904.76	1904.76	1904.76	1904.76
$\beta_1$	0.66	0.987	1.395	2.075	2.452	2.878	3.144	3.484	3.916	4.515
$\beta_2$	3.143	3.155	3.199	3.409	3.624	3.961	4.223	4.622	5.275	6.884
$\beta_3$	6.28	6.282	6.287	6.318	6.357	6.434	6.510	6.66	7.012	8.695
$\beta_4$	9.42	9.42	9.422	9.431	9.442	9.466	9.489	9.536	9.656	10.599
$\beta_5$	12.56	12.56	12.56	12.564	12.569	12.579	12.589	12.608	12.659	13.089
$\beta_6$	15.699	15.699	15.699	15.702	15.704	15.709	15.714	15.724	15.75	15.965
$\beta_7$	18.839	18.839	18.839	18.841	18.842	18.845	18.848	18.854	18.868	18.99
$\beta_8$	21.979	21.979	21.979	21.98	21.981	21.983	21.985	21.988	21.998	22.073
$\beta_9$	25.12	25.12	25.12	25.121	25.121	25.122	25.123	25.125	25.131	25.182
$\beta_{10}$	28.259	28.259	28.259	28.259	28.26	28.261	28.262	28.264	28.268	28.303

Tablo 10:  $K_2 = K_4 = 5000000 \text{ Nm/rad}$  değeri için doğal frekansların  $k_1 = k_3$  ile değişimi.

$k_1 = k_3$	50	250	1000	5000	10000	20000	30000	50000	100000	500000
$K_2 = K_4$	5000000	5000000	5000000	5000000	5000000	5000000	5000000	5000000	5000000	5000000
$e_1 = e_3$	0.0952	0.4762	1.9048	9.5238	19.0476	38.0952	57.1429	95.2381	190.4762	952.381
$e_2 = e_4$	9523.81	9523.81	9523.81	9523.81	9523.81	9523.81	9523.81	9523.81	9523.81	9523.81
$\beta_1$	0.66	0.987	1.395	2.075	2.452	2.878	3.145	3.485	3.918	4.523
$\beta_2$	3.144	3.156	3.2	3.410	3.625	3.961	4.223	4.622	5.275	6.887
$\beta_3$	6.283	6.284	6.29	6.32	6.359	6.436	6.512	6.662	7.012	8.696
$\beta_4$	9.424	9.424	9.426	9.435	9.446	9.469	9.493	9.540	9.659	10.600
$\beta_5$	12.565	12.565	12.565	12.569	12.575	12.584	12.594	12.614	12.663	13.069
$\beta_6$	15.706	15.706	15.706	15.708	15.711	15.716	15.721	15.731	15.756	15.970
$\beta_7$	18.847	18.847	18.847	18.849	18.850	18.853	18.856	18.862	18.876	18.896
$\beta_8$	21.989	21.989	21.989	21.99	21.99	21.992	21.994	21.998	22.007	22.081
$\beta_9$	25.130	25.130	25.13	25.13	25.13	25.132	25.133	25.136	25.142	25.191
$\beta_{10}$	28.271	28.271	28.271	28.271	28.271	28.273	28.273	28.275	28.280	28.314

Tablo 11:  $K_2 = K_4/10 = 1000 \text{ Nm/rad}$  değeri için doğal frekansların  $k_1 = k_3/10$  ile değişimi.

$k_1 = k_3/10$	100	500	1000	5000	10000	25000	50000	100000	250000	500000
$K_2 = K_4/10$	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
$e_1 = e_3/10$	0.1905	0.9524	1.9048	9.5238	19.0476	47.6190	95.2381	190.4762	476.190	952.381
$e_2 = e_4/10$	1.9048	1.9048	1.9048	1.9048	1.9048	1.9048	1.9048	1.9048	1.9048	1.9048
$\beta_1$	1.187	1.694	1.928	2.515	2.827	3.268	3.549	3.737	3.866	3.911
$\beta_2$	2.732	2.930	3.138	3.996	4.422	4.945	5.380	5.874	6.434	6.679
$\beta_3$	5.626	5.656	5.693	5.993	6.329	6.998	7.494	7.952	8.657	9.213
$\beta_4$	8.637	8.646	8.657	8.749	8.869	9.230	9.730	10.307	10.971	11.536
$\beta_5$	11.690	11.694	11.699	11.738	11.788	11.946	12.222	12.718	13.506	14.018
$\beta_6$	14.764	14.766	14.768	14.789	14.814	14.894	15.036	15.334	16.075	16.670
$\beta_7$	17.851	17.852	17.854	17.866	17.881	17.927	18.007	18.179	18.712	19.351
$\beta_8$	20.948	20.949	20.950	20.957	20.966	20.996	21.046	21.151	21.498	22.048
$\beta_9$	24.051	24.051	24.052	24.058	24.064	24.082	24.117	24.186	24.414	24.822
$\beta_{10}$	27.160	27.160	27.161	27.164	27.169	27.182	27.206	27.254	27.409	27.698

Tablo 12:  $K_2 = K_4/10 = 10000 \text{ Nm/rad}$  değeri için doğal frekansların  $k_1 = k_3/10$  ile değişimi.

$k_1 = k_3/10$	100	500	1000	5000	10000	25000	50000	100000	250000	500000
$K_2 = K_4/10$	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000
$e_1 = e_3/10$	0.1905	0.9524	1.9048	9.5238	19.0476	47.6190	95.2381	190.4762	476.190	952.381
$e_2 = e_4/10$	19.0476	19.0476	19.0476	19.0476	19.0476	19.0476	19.0476	19.0476	19.0476	19.0476
$\beta_1$	1.193	1.728	1.985	2.583	2.884	3.363	3.746	4.068	4.326	4.42
$\beta_2$	3.095	3.234	3.393	4.188	4.654	5.201	5.569	6.001	6.664	7.067
$\beta_3$	6.134	6.153	6.177	6.377	6.228	7.244	7.812	8.291	8.872	9.416
$\beta_4$	9.21	9.216	9.223	9.282	9.359	9.607	10.021	10.663	11.366	11.833
$\beta_5$	12.296	12.298	12.302	12.326	12.358	12.459	12.642	13.029	13.877	14.447
$\beta_6$	15.389	15.39	15.392	15.405	15.421	15.471	15.561	15.756	16.375	17.066
$\beta_7$	18.487	18.488	18.49	18.497	18.506	18.535	18.585	18.693	19.059	19.658
$\beta_8$	21.59	21.59	21.59	21.595	21.602	21.621	21.652	21.717	21.937	22.348
$\beta_9$	24.697	24.697	24.697	24.701	24.705	24.717	24.738	24.782	24.922	25.19
$\beta_{10}$	27.807	27.807	27.807	27.809	27.813	27.821	27.836	27.866	27.963	28.142

Tablo 13:  $K_2 = K_4/10 = 100000 \text{ Nm/rad}$  değeri için doğal frekansların  $k_1 = k_3/10$  ile değişimi.

$k_1 = k_3/10$	100	500	1000	5000	10000	25000	50000	100000	250000	500000
$K_2 = K_4/10$	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000
$e_1 = e_3/10$	0.1905	0.9524	1.9048	9.5238	19.0476	47.6190	95.2381	190.4762	476.190	952.381
$e_2 = e_4/10$	190.4762	190.4762	190.4762	190.4762	190.4762	190.4762	190.4762	190.4762	190.4762	190.4762
$\beta_1$	1.193	1.732	1.993	2.596	2.895	3.377	3.787	4.159	4.469	4.586
$\beta_2$	3.166	3.297	3.449	4.232	4.704	5.261	5.614	6.020	6.718	7.207
$\beta_3$	6.269	6.286	6.308	6.491	6.726	7.325	7.905	8.390	8.923	9.450
$\beta_4$	9.399	9.404	9.411	9.463	9.553	9.758	10.146	10.756	11.501	11.924
$\beta_5$	12.531	12.533	12.536	15.558	12.586	12.676	12.839	13.195	14.038	14.616
$\beta_6$	15.664	15.665	15.666	16.678	15.692	15.736	15.814	15.986	16.560	17.262
$\beta_7$	18.798	18.799	18.8	18.805	18.813	18.838	18.882	18.974	19.298	19.867
$\beta_8$	21.931	21.931	21.932	21.934	21.942	21.956	21.983	22.039	22.228	22.595
$\beta_9$	25.064	25.064	25.064	25.066	25.071	25.082	25.101	25.135	25.255	25.486
$\beta_{10}$	28.198	28.198	28.198	28.199	28.203	28.210	28.222	28.248	28.328	28.479

Tablo 14: Sabit-sabit kiriş için doğal frekanslar.

$k_1 = k_3$	$10^{20}$	Analitik
$K_2 = K_4$	$10^{20}$	Sonuçlar
$\beta_1$	4.730	4.730
$\beta_2$	7.853	7.853
$\beta_3$	10.995	10.995
$\beta_4$	14.137	14.137

Tablo 15: Sabit-serbest kiriş için doğal frekanslar.

$k_1 = K_2$	$10^{20}$	Analitik
$k_3 = K_4$	$10^{-20}$	Sonuçlar
$\beta_1$	1.875	1.875
$\beta_2$	4.694	4.694
$\beta_3$	7.854	7.854
$\beta_4$	10.995	10.995

Tablo 16: Serbest-serbest kiriş için doğal frekanslar.

$k_1 = k_3$	$10^{-20}$	Analitik
$K_2 = K_4$	$10^{-20}$	Sonuçlar
$\beta_1$	4.730	4.730
$\beta_2$	7.853	7.853
$\beta_3$	10.995	10.995
$\beta_4$	14.137	14.137

#### 4 Sayısal sonuçlar ve tartışma

$k_1, k_3, K_2, K_4$  değerlerine değerler atamak suretiyle doğal frekanslar elde edilmiştir. İlk 10 tabloda  $k_1 = k_3$  ve  $K_2 = K_4$  simetrik hali ele alınmıştır. Her bir tablo  $K_2 = K_4$ 'ün bir değerine karşılık artan  $k_1 = k_3$  değerleri için oluşturulmuştur.  $K_2 = K_4$ 'ün ilk değeri 50 ile başlatılıp 5000000'a kadar artırılmıştır. İlk değer küçük bir dönme rijitliğine tekabül etmektedir.

Tablo 1'den de görüleceği üzere ilk üç  $\beta$  değeri  $k_1 = k_3$ 'ün artan değerleriyle önemli bir artış gösterirken diğer  $\beta$  değerlerinde  $k_1 = k_3$ 'ün artan değerlerine bağlılık gittikçe azalmaktadır. Nitekim  $\beta_{10}$  değeri  $k_1 = k_3$  değerleri ile hemen hemen hiç değişmemektedir. Diğer yandan küçük  $k_1 = k_3$  değerleri halinde artan  $\beta$  değerleri arasındaki fark  $\pi$  kadar olmaktadır. Fakat  $k_1 = k_3$  değerleri arttıkça ancak daha sonraki  $\beta$  değerlerinde fark  $\pi$ 'ye doğru gitmektedir. Şu halde yeteri kadar büyük  $\beta$  değerleri için  $\beta_n - \beta_{n-1} = \pi$  olduğu söylenebilir. Tablo 9 ve Tablo 10 incelendiğinde  $\beta$ 'in ilk değeri hariç diğer değerlerinin yaklaşık olarak  $\beta_2 = \pi, \beta_3 = 2\pi, \beta_4 = 3\pi, \dots, \beta_{n+1} = n\pi$  şeklinde sıralandığı gözlemlenebilir. Sonuç olarak ilk birkaç  $\beta$  değeri hariç daha sonraki  $\beta$  değerleri  $k_1 = k_3$  ve  $K_2 = K_4$ 'den bağımsız olarak birbirlerinden  $\pi$  kadar fark eder hale gelmektedir. Yani  $\beta_n - \beta_{n-1} = \pi$  olduğu görülmektedir. Buna göre mesela  $k_1 = k_3 = 50, K_2 = K_4 = 5000000$  için  $\beta_{30}$  değeri  $\beta_{30} = \beta_{10} + 20\pi = 91.102$  şeklinde

bulunabilir. Bu ifadenin doğruluğunu denetlemek için Matlab programında  $\beta_{30}$  değeri (16) frekans denkleminde 91.097 olarak bulunmuştur. Yine  $k_1 = k_3 = 50, K_2 = K_4 = 50$  için  $\beta_{40}$  değeri  $\beta_{40} = \beta_{10} + 30\pi = 120,958$  şeklinde bulunabilir. Bu ifadeyi doğrulamak için Matlab programında  $\beta_{40}$  değeri (16) frekans denkleminde 120.947 bulunmuştur.

Tablo 11, 12 ve 13'te  $k_1 = k_3/10, K_2 = K_4/10$  alınarak  $\beta$  değerleri elde edilmiştir.

Tablo 14'te  $k_1, k_3, K_2, K_4$ 'ün çok büyük değerler aldığı hale dair  $\beta$  değerleri görülmektedir. Bu durumda elde edilen değerler iki ucu ankastre kirişin bilinen değerleri ile örtüşmelidir. Mesela  $k_1 = K_2 = k_3 = K_4 = 9000000000$  için  $\beta_1 = 4.73, \beta_2 = 7.853, \beta_3 = 10.995$  elde edilmektedir, bu değerler bilinen sonuçların aynıdır [19].

Tablo 15'te  $k_1, K_2$ 'in çok büyük,  $k_3, K_4$ 'ün çok küçük değerler aldığı hale dair  $\beta$  değerleri görülmektedir. Bu durumda elde edilen değerler bir ucu sabit diğer ucu serbest kirişin bilinen değerleri ile örtüşmelidir. Mesela  $k_1 = K_2 = 9000000000$  ve  $k_3 = K_4 = 0.0000001$  için  $\beta_1 = 1.875, \beta_2 = 4.694, \beta_3 = 7.854$  elde edilmektedir, bu değerler bilinen sonuçların aynıdır [19].

Tablo 16'da  $k_1, k_3, K_2, K_4$ 'ün çok küçük değerler aldığı hale dair  $\beta$  değerleri görülmektedir. Bu durumda elde edilen değerler iki ucu serbest kirişin bilinen değerleri ile örtüşmelidir. Mesela  $k_1 = K_2 = k_3 = K_4 = 0.0000001$  için  $\beta_1 = 4.73, \beta_2 = 7.853, \beta_3 = 10.995$  elde edilmektedir, bu değerler bilinen sonuçların

aynıdır [19]. Sabit-sabit ve serbest-serbest kiriş halinde  $\beta$  değerlerinin aynı olduğuna dikkat edilmelidir.

## 5 Sonuçlar

Bu çalışmada karma sınır şartlarına sahip Euler-Bernoulli kirişin doğal frekansları bulunmuş ve parametrelerin frekanslar üzerindeki etkileri ele alınmıştır. Tüm sonuçlar incelendiğinde  $\beta$  değerlerinin,  $K_2 = K_4$  değerlerinden  $k_1 = k_3$  değerlerine nispeten daha az etkilendiği görülmektedir. Yüksek frekans değerlerini bulmak için basit bir kural olduğu sonucu da elde edilmiştir:  $n > 10$  olmak üzere  $\beta_n = \beta_{10} + (n - 10)\pi$ . Denklem (16)'da parametreler değiştirilerek birçok sınır hal için çözümler elde edilebilir.

Sınır şartları olarak iki ucu basit mesnetli ve rijit çubuk dikkate alınarak bilinen sonuçlar ile mevcut sonuçlar mukayese edilmiş ve sonuçların örtüştüğü görülmüştür. İlaveten mod analizi gerçekleştirilmiş ve ilk 5 mod elde edilmiştir. Böylece aynı tür kirişin sabit ya da hareketli kuvvet altında zorlanmış titreşim analizi için gerekli ön çalışma tamamlanmış olmaktadır.

## 6 Kaynaklar

- [1] Chun KR. "Free vibration of a beam with one end spring-hinged and the other free". *Journal of Applied Mechanics*, 39, 1154-1155, 1972.
- [2] Lee TW. "Vibration frequencies for a uniform beam with one end spring-hinged and carrying a mass at the other free end". *Journal of Applied Mechanics*, 40, 813-815, 1973.
- [3] Maurizi MJ, Rossi RE, Reyes JA. "Vibration frequencies for a beam with one end spring-hinged and subjected to a translational restraint at the other end". *Journal of Sound and Vibration*, 48, 565-568, 1976.
- [4] Goel RP. "Free vibrations of a beam-mass system with elastically restrained ends". *Journal of Sound and Vibration*, 47, 9-14, 1976.
- [5] Passlg EG. "End slope and fundamental frequency of vibrating fuel rods". *Nuclear Engineering and Design*, 14, 198-200, 1970.
- [6] Avcar M. "Free vibration analysis of beams considering different geometric characteristics and boundary conditions". *International Journal of Mechanics and Applications*, 4(3), 94-100, 2014.
- [7] Avcar M, Saplıoğlu K. "An artificial neural network application for estimation of natural frequencies of beams". *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, 6(6), 94-102, 2015.
- [8] Yanık F, Yaylı MO. "Rijit olmayan sınır koşullarında elastik zemine oturan bir çubuğun eksenel titreşim analizi". *Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 2(1), 35-44, 2015.
- [9] Ece MC, Aydogdu M, Taskin V. "Vibration of a variable cross-section beam". *Mechanics Research Communications*, 34, 78-84, 2007.
- [10] Bapat CN, Bapat C. "Natural frequencies of a beam with non-classical boundary conditions and concentrated masses". *Journal of Sound and Vibration*, 1, 66-71, 1987
- [11] Sundararajan C. "Fundamental frequency of beams with elastic rotational restraints". *Journal of Mechanical Design*, 101, 711-712, 1979.
- [12] Rao GV, Naidu NR. "Free vibration and stability behaviour of uniform beams and columns with non-linear elastic end rotational restraints". *Journal of Sound and Vibration*, 176, 130-135, 1994.
- [13] Laura PAA, Pombo JL, Susemihl EA. "A note on the vibrations of a clamped-free beam with a mass at the free end". *Journal of Sound and Vibration*, 37(2), 161-168, 1974.
- [14] Chang CH. "Free vibration of a simply supported beam carrying a rigid mass at the middle". *Journal of Sound and Vibration*, 237(4), 733-744, 2000.
- [15] Banerjee JR. "Free vibration of beams carrying spring-mass systems-A dynamic stiffness approach". *Computers and Structures*, 104-105, 21-26, 2012.
- [16] Rossit CA, and Laura PAA, "Free vibrations of a cantilever beam with a spring-mass system attached to the free end". *Ocean Engineering*, 28, 933-939, 2001.
- [17] Avcar M, Mohammed WKM. "Winkler zemin ve fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme özelliklerinin kirişin frekans parametrelerine etkilerinin incelenmesi". *Journal of Engineering Sciences and Design*, 5(3), 573-580, 2017.
- [18] Avcar M, Mohammed WKM. "Free vibration of functionally graded beams resting on Winkler-Pasternak foundation". *Arabian Journal of Geosciences*, 11(10), 232, 2018.
- [19] Rao SS. *Mechanical Vibration*. 4<sup>nd</sup> ed. Pearson Edu. USA, New Jersey, 2004.