Öneri, C.2, S.12.
Haziran 1999, ss.225-233.

TEK-YÖNLÜ VE İKİ-YÖNLÜ VARYANS ANALİZİNDE KULLANILAN PARAMETRİK OLMAYAN YÖNTEMLER

Dr. Filiz ÇAKIR

M.Ü., S.B.M.Y.O., Öğretim Görevlisi

ABSTARACT:

Non-parametric tests are done according to the hypothesis that the distribution of the population is normal. In the cases that the parametric variance analysis can't be applied, by the help of these tests more than two samples can be tested and it can be considered whether they come from the same population or not. Kruskal-Wallis one way variance analysis test, which is used in testing more than two samples at the same time, is one of the tests delt in this article. Besides the other test is also used to test more than two samples but in randomized blocks design. This is called Friedman test.

I. GİRİŞ

Bilindiği gibi istatistiksel karar problemlerinde ana kütlenin tahmini için kullanılan testler, testin amacına ve ana kütlenin dağılım şekline göre, parametrik ve parametrik olmayan testler olmak üzere iki grupta ele alınmaktadır. Herhangi istatistiksel bir tez için yapılması gereken işlemler sırasıyla şöyledir; H_0 hipotezini belirleme, uygun istatistiksel testin seçimi, H_0 hipotezi altında örnekleme dağılımının belirlenmesi, red bölgesinin saptanması ve karar verme. Parametrik testler, ana kütleye ait dağılım ve parametrelere ilişkin varsayımlar altında yapılmaktadır. Bu anlamda, ana kütlenin dağılımının normal bir dağılım olduğuna ya da parametrelere ilişkin herhangi bir varsayım bulunmadığında parametrik testler uygulanamamaktadır. Bu anlamda, ana kütlenin normal dağıldığı varsayımı altında, ana kütleye ait parametrelerinin tahmin edilmesi için yapılan testler, parametrik testler olarak adlandırılmaktadır. Parametrik olmayan testlerde ise dağılım hakkında bilgi sahibi olmaya gerek yoktur. Sadece örneklerin bağımsız ve tesadüfi olarak seçildiği varsayılmaktadır. Verilerin sınıflandırılması açısından ise, her iki gruptaki testler farklılık arz etmektedir. Genel olarak, parametrik olmayan testlerde gözlem değerleri sıralamaya tabii tutulmakta ve daha çok sıralayıcı, sınıflandırıcı ve aralıklı ölçeklemeler kullanılmaktadır. Aynı zamanda örnekler daha küçük hacimlidir (1; s.431).

Karar problemlerinde belirlenen hipotezler de parametrik ve parametrik olmayan hipotezler şeklinde ikiye ayrılmaktadır. Parametrik hipotezlerde, tahmin edilen ana kütle parametresinin belli bir değere eşit, büyük ya da küçük olduğu ileri sürülmekte, buna karşılık parametrik olmayan hipotezlerde parametrelerle ilgilenilmeyip, olasılık fonksiyonunun belli bir şekle sahip olup olmadığı veya belli bir özellik taşıyıp taşımadığı ele alınmaktadır. Başka bir ifade ile, parametrik olmayan testlerde, ana kütle dağılımı ile ilgili herhangi bir parametre tahminine ilişkin hipotez kurulmamaktadır. Parametrik olmayan testlerde, sıralı veriler kullanıldığında, parametrik hipotez testlerindeki aynı ortalama veya beklenen değerler ile ilgili hipotezler kurulmamakta, bunun yerine, sıra numaralarının beklenen değerlerinin aynı olup olmadığına dair hipotezler oluşturulmaktadır. Bu anlamda, parametrik olmayan hipotez testleri, Ri , i. örnekteki sıra numaralarını ifade etmek üzere,

$$H_0 : E(\overline{R}_1) = E(\overline{R}_2) = \ldots = E(\overline{R}_i)$$
$$H_1 : E(\overline{R}_1) \neq E(\overline{R}_2) \neq \ldots \neq E(\overline{R}_i)$$

şeklinde kurulmaktadır(2;s.4).

Varyans analizi, sürekli değişkenlere uygulanan, aynı ana kütleden veya aynı varyansa sahip farklı ana kütlelerden alınan iki veya daha fazla sayıdaki örneğin test edilerek ana kütle tahminin yapılması olarak ifade edilebilmektedir. Varyans analizinde kullanılan F testi ise, gruplar arasındaki farklılığının incelenmesi için yapılan bir testtir. K sayıdaki örneğin birarada test edilmesi için yapılan F testinin genel formülü,

$$F = \frac{\frac{1}{K-1}\sum_{k=1,\ldots,K} n_k\left(X_k - X\right)^2}{\frac{1}{N-K}\sum_{k=1,\ldots,K}\sum_{i=1} ni\left(X_{ik} - X_k\right)^2}$$

şeklinde ifade edilmektedir. Parametrik varyans analizi için gerekli varsayımların geçerli olmadığı durumlarda, F testi, parametrik olmayan yöntemlere de uygulanabilmektedir (3; s.348).

Bu makalede, tek yönlü ve iki yönlü varyans analizi ve F testinin parametrik olmayan testlere uygulanışı incelenmektedir. Her iki grupta en yaygın şekilde kullanılan iki test ele alınmış ve bu testlerin işleyişi anlatılmıştır. Tek yönlü varyans analizinde kullanılan parametrik olmayan testler içinde, Kruskal-Wallis testi, iki yönlü varyans analizinde kullanılan parametrik olmayan testler içinde ise, Friedman testi incelenecektir. Her iki grupta da yer alan testlerin genel özelliği, parametrik olmayan testlerin bir özelliği olarak, analize verilerin sıralanması ile başlanması ve varyans analizinin genel işleyişinin kullanılmasıdır.

Makalenin amacı, varyans analizinde kullanılan parametrik olmayan yaklaşımların incelenmesi ve bu testlerin uygulanış şeklinin açıklanmasıdır. Bu amaçla öncelikle testlerin genel işleyişi ve birer örnek ile uygulanışı verilmekte, daha sonra ise bu testler genel olarak karşılaştırılmaktadır. Son kısımda ise genel bir değerlendirme yapılmaktadır.

II. DAĞILIM ŞEKLİ VE SIRA NUMARALARININ BEKLENEN DEĞER VE VARYANSI

Parametrik olmayan testlerde ,örnek sayısının ikiden fazla olduğu durumlarda, sıfır hipotezi altında, test istatistiğinin dağılım şekli, k-1 serbestlik derecesi ile X^2 dağılımına yaklaşmaktadır (4;457). Başka bir ifade ile,

$k=3$	$n_i \geq 6$	$i=1,2,3$
$k>3$	$ni \geq 5$	$i=1,2,..,k$

durumunda, test istatistiğinin yaklaşık olarak, k-1 serbestlik derecesi ile X^2 dağılımı olarak dağıldığı varsayılmaktadır (5;623). Bilindiği gibi, X^2 dağılımı,

$$X^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_k^2 = \sum_{k=1,\ldots,K} \frac{\left(\hat{\theta} - \theta_0\right)^2}{\sigma^2_{\hat{\theta}_k}}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. İfadede yer alan Z_1 değeri, birinci örneği, Z_k değeri ise, k. örneği göstermektedir. Bu durumda parametrik olmayan testler için X^2 dağılımı,

$$X^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_k^2 = \sum_{k=1,\ldots,K} \frac{\left(\overline{R}_k - \overline{R}\right)^2}{\mathrm{Var}\left(\overline{R}_k\right)}$$

olarak ifade edilecektir (2; s.300). R_k değeri, k. örnek için sıra numaralarının ortalamasını, R ise tüm gözlem değerlerinin sıra numaralarının ortalamasını ifade etmektedir.

r_{ik}, N toplam eleman sayısı olmak üzere, X_{ik} gözlemlerinin sıra numaralarını göstermektedir. H_0 hipotezi doğru olduğunda r_{ik} değerleri için test istatistiğinin hesaplanmasında kullanılacak beklenen değer ve varyans ile ilgili istatistiksel ölçümler,

$$E\left(R_{ij}\right) = \frac{N+1}{2}$$

$$\mathrm{Var}\left(R_{ij}\right) = \frac{N^2-1}{12}$$

şeklinde tanımlanmaktadır (2; s.275).

III. KRUSKAL-WALLİS TESTİ : PARAMETRİK OLMAYAN TEK YÖNLÜ VARYANS ANALİZİ

Tek değişkenli ya da tek-yönlü varyans analizinde k sayıdaki örnek ortalamalarını karşılaştırmak için kurulan istatistiksel model, $X_{ij} = \mu + \alpha_i + \epsilon_{ij}$ şeklinde açıklanmaktadır. Burada yer alan i indisi, 1'den k'ya kadar değerler alırken, j indisi ise 1'den n_i'ye kadar değer almaktadır. Klasik varyans analizinde modelde yer alan ϵ_{ij} hata terimlerinin sıfır ortalama ve σ^2 varyans ile normal dağıldığı varsayılmaktadır. Kruskal-Wallis testi, varyans analizinde kullanılan F testi için parametrik olmayan bir alternatiftir. Başka bir ifade ile, test sıralanmış veriler ile yapılan tek yönlü varyans analizidir ve örnek gözlemleri için, F testinin uygulanmasının mümkün olmadığı durumlarda kullanılmaktadır (6;s.885) . Burada sadece, hata terimlerinin i= 1,2,. .,k için aynı sürekli dağılıma sahip olması yeterli görülmektedir[7,s.824].

III.1. Testin Amacı

K sayıdaki örneğin aynı anda test edilmesi için kullanılan parametrik olmayan testlerden biri olan Kruskal-Wallis testinin amacı, K sayıda ve tesadüfi olarak seçilen örneklerin aynı ana kütle veya dağılımlardan alınıp alınmadığının belirlenmesidir. İkiden daha fazla sayıdaki örnek dağılımlarının karşılaştırılması için kullanılan test, aynı zamanda tek yönlü varyans analizi niteliğindedir. Makalede ele alınan her iki test , örnek değerlerinden ziyade, örneklerin birden başlayarak N sayıda sıralanması ve her bir değer için sıra numaraları verilmesi suretiyle işlemlere başlamaktadır. $N = \sum_{k=1,2,\ldots,K} n_k$, toplam gözlem sayısını ifade ettiğinde, N sayıdaki gözlemlerin en küçükten en büyüğe doğru sıralanması, en küçük gözlem sırası 1, sonraki 2 ve en büyük gözlem sırası N olmak üzere yapılmaktadır. Friedman testinden farklı olarak, Kruskal-Wallis testinde, tüm gözlem değerlerinin sayısı gözönüne alınarak sıra numaraları verilmektedir.

Veriler, K sayıdaki davranış şekillerinin ya da örneklerin varlığı altında düzenlenmektedir. Her bir davranış şeklinin sahip olduğu eleman sayısı n_i ile ifade edildiğinde, toplam eleman sayısı N olacaktır. Bu şekilde elde edilen veri topluluğu içinde, tüm gözlem değerleri hangi davranış şeklinden geldiğine bakılmaksızın küçükten büyüğe doğru sıralanmak suretiyle tek bir seri elde edilmektedir. Böylece her bir sütun için verilen sıra numaralarının toplamı bulunmaktadır. Bu değerler, r_{ik} şeklinde tanımlanmaktadır. R_{ik} , başka bir ifade ile k. örnekteki sıra numaralarının toplamını göstermektedir (8; s.229).

III.2. Hipotezlerin Belirlenmesi

Testin amacına göre kurulan H_0 hipotezi, N sayıdaki gözlemin aynı dağılımdan geldiğini ve k sayıdaki örnek içinde yer alan tüm gözlemlerin birbirlerine benzediğini ifade etmektedir. Bu durumda $H_0 : E(\overline{R}_1) = E(\overline{R}_2) = \ldots = E(\overline{R}_k)$ hipotezi doğru ise, tüm gözlemlerin aynı dağılıma sahip olduğu kabul edilecektir. Buna karşılık hipotez red edilirse, o zaman bazı örnekler küçük sıra numaralarına sahip gözlemlerden ibaret iken, bazı örneklerin de daha büyük sıra numaralarına sahip gözlemlerden oluştuğu düşünülecektir (9;s.184).

Kruskal-Wallis testinde kurulan H_0 hipotezi, örnekler arasında bir farklılık olmadığını ileri sürerken, alternatif hipotez H_1 ise, örneklerin aynı ana kütleden gelmedikleri ya da en azından birinin diğerlerinden farklı olduğu şeklinde kurulmaktadır. H_0 hipotezinin olasılığı ise,

$$P_{H_0}\left[R_{11} = r_{11}, \ldots, R_{1n_1} = r_{1n_1}, \ldots, R_{kn_1} = r_{kn_i}\right]$$

$$= \frac{n_1! \ldots n_k!}{N!}$$

şeklinde ifade edilmektedir (10;s.270).

III.3. İstatistiksel Ölçümler

Kruskal-Wallis test istatistiği, gözlemlenmiş sıra numaraları ortalamalarının, bunların beklenen değerlerinden farklı olup olmadığını ölçmektedir. Eğer bu farklılık büyük ise, test istatistiğinin değeri de büyük çıkacak ve bu duruma H_0 hipotezi red edilecektir. Sıfır hipotezi doğru olduğunda, k.örnek için sıra numaralarının beklenen değeri,

$$E(\overline{R}_k) = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1,\ldots,n_k} n_k E(r_{ik})$$

$$= \frac{N+1}{2}$$

varyansı ise,

$$Var(\overline{R}_k) = Var(r_{ik}) / n_k \ [\ N-n_k \ / \ N-1\ ]$$

$$= 1/n_k\ [\ N^2-1 \ / \ 12\ ]\ [\ N-n_k / N-1\ ]$$

$$= (N+1)\,(N-n_k) / 12\, n_k$$

şeklinde ifade edilmektedir[2; s.300].

III.4. Test İstatistiği

Kruskal-Wallis testi için hesaplanan test istatistiğini tanımlamadan önce formülde adı geçen değerlerin ne olduğunu göstermekte fayda vardır. Aşağıda bu değerlerin karşılığı verilmiştir (10; s.271).

Her bir k sütununda yer alan gözlem değerlerine ait sıra numaraları,

$$R_k = \Sigma_{\,k=1,\ldots,nk}\ r_{ik}$$

Bu sıra numaralarının ortalamaları,

$$\overline{R}_k = r_{ik} \ / \ n_k$$

Tüm gözlem değerlerinin sıra numaraları,

$$R = \Sigma_{\,k=1,\ldots,K}\ R_k$$

Bu sıra numaralarının ortalamaları,

$$\overline{R} = R_k \ / \ N = N+1 \ /2$$

Bu tanımlamalara göre Kruskal-Wallis test istatistiği,

$$H = \Sigma_{\,k=1\ldots K}\ [\ N-n_k \ / \ N\ ]\ (\overline{R}_k - \overline{R})^2 / Var(\overline{R}_k)$$

$$= \Sigma_{\,k=1\ldots K}\ [\ N-n_k \ / \ N\ ]\ 12\, n_k / (N+1)\,(N-n_k)\,(\overline{R}_k - \overline{R})^2$$

$$= 12 / N(N+1) \quad \Sigma_{\,k=1\ldots K}\ n_k\,(\ R_k - N+1/2\ )^2$$

şeklinde ifade edilmektedir(2; s.300). H test istatistiği bu eşitlik doğrultusunda, başka ifadeler ile de gösterilmektedir. Eşitlik aynı zamanda,

$$H = 12 / N(N+1)\ \Sigma_{k=1,..,K} (n_k \overline{R}_k^{\,2} - 2 n_k \overline{R}_k N+1/2 + n_k (N+1/2)^2)$$

$$= 12 / N(N+1)\ \Sigma_{k=1,..,K} n_k R_k^2 / n_k^2 - 2 \Sigma_{k=1,..,K} n_k R_k / n_k N+1/2 + N (N+1)^2 /4)$$

$$= 12 / N(N+1)\ \Sigma_{k=1,..,K} R_k^2 / n_k - 2\ N(N+1)^2 / 4 + N (N+1)^2 /4)$$

$$= 12 / N(N+1)\ [\Sigma_{k=1,..,K} R_k^2 / n_k - N (N+1)^2 /4]$$

ya da,

$$H = 12 / N(N+1)\ \Sigma_{k=1,..,K} R_k^2 / n_k - 12/N(N+1)\ N(N+1)^2 /4$$

$$= 12 / N(N+1)\ (\Sigma_{k=1,..,K} R_k^2 / n_k) - 3(N+1)$$

şeklinde de ifade edilebilmektedir. İfadelerde yer alan n_k, k.örnekteki gözlem sayısını, N ise toplam gözlem sayısını göstermektedir.

Gözlem değerleri içinde aynı değerden birden fazla var ise, bu durumda sıra numaraları, bu numaraların ortalaması alınarak bulunmaktadır. Bu durumda test istatistiği ise,

$$H^* = H / C$$

şeklinde ifade edilmektedir. Formülde yer alan C değerinin eşiti ise,

$$C = 1 - 1 / N^3 - N\ \Sigma_{s=1,..,d} (t_s^3 - t_s)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. (2; s.300) . Bu eşitlikte yer alan t_s değeri, tekrar eden gözlemlerin sayısını ifade etmektedir. Tekrar eden gözlem sayısı az ise o zaman yukarıda açıklanan H test istatistiği değerleri arasında büyük bir fark oluşmamaktadır.

Kruskal-Wallis testinin de genel yaklaşımı olan gözlem değerlerinin küçükten büyüğe doğru sıralanması işlemi, *sıra dönüşümü* olarak ifade edilmektedir. Test içinde gözlem değerleri yerine bunların sıra numaralarının F testi ile incelenmesi durumunda test istatistiği olarak,

$$F_0 = H / (k-1)\ /\ (N-1-H) / (N-k)$$

değeri kullanılmaktadır. H değerinin küçük veya büyük olması, bu değerin de küçük veya büyük olması sonucunu doğuracaktır. F_0 dağılımı, F dağılımına yaklaştığından, Kruskal-Wallis testinin, sıra numaralarının genel varyans analizine uygulanabilmesi için kullanılması uygun olacaktır (7; s.827).

III.5. Red Bölgesi

Test istatistiğinin hesaplanmasından sonra, bulunan bu değer, X^2 dağılımına ilişkin tablo değeri ile karşılaştırılarak, sıfır hipotezinin kabul veya red edilmesine karar verilecektir. Buna göre, hesaplanan H değeri, $X^2\ \alpha$ tablo değerinden büyük çıktığında sıfır hipotezi red edilmektedir. Yani, örneklerin aynı anakütleden gelmeikleri veya aynı dağılıma sahip olmadıkları kabul edilmektedir.

IV. FRİEDMAN TESTİ : PARAMETRİK OLMAYAN İKİ YÖNLÜ VARYANS ANALİZİ

Kruskal-Wallis testi gibi, Friedman testi de parametrik varyans analizinin uygulanamadığı durumlarda ele alınan bir testtir. Genel olarak, F testi altında, iki yönlü varyans analizinde kullanılan parametrik olmayan bir test olarak tanımlanabilmektedir. Kruskal-Wallis testinden farklı olarak, Friedman testinde, örnekler bağımlı olup, denemeler tesadüf blokları tasarımı altında yapılmaktadır (3; s.350) .

IV.1. Testin Amacı

Testin amacı, yukarıda anlatılan Kruskal-Wallis testinin amacı ile aynı olmakla beraber, kullanılan veriler ve bu verilerin düzenlenmesi bakımından farklılık arzetmektedir. Buradaki amaç da, K sayıdaki örneklerin aynı ana kütleden veya aynı dağılımdan gelip gelmediklerinin belirlenmesi olup, kurulan sıfır ve alternatif hipotezler de aynı amaca yöneliktir. Kruskal-Wallis testinden farklı olarak, burada k sayıdaki örnek ya da davranış şekli yanında, *blok* olarak ifade edilen b sayıda farklı durum söz konusudur. Böylece gözlem değerleri, k sütunları, b ise satırları göstermek üzere iki yönlü bir tabloda düzenlenmektedir.

Gözlem değerlerinin sıralanması işlemi ise, diğer testten farklı olarak, her bir satır içinde büyükten küçüğe doğru yapılmakta ve bu sıralama işleminin ardından, sütunlara ait sıra numaraları toplamının analizi amaçlanmaktadır. Dolayısıyla, gözlem değerleri her bir blokta, diğerinden bağımsız olarak sıralanmaktadır. Bu işlemde testler arasında farklılık görülmesine rağmen, sütun sıra numaralarının toplamı ve ortalamasının alınması işlemi aynı şekilde yapılmaktadır (10;s.288-6;s.896).

IV.2. Hipotezlerin Belirlenmesi

H_0 hipotezi, Kruskal-Wallis testinde olduğu gibi, b sayıdaki blok içinde yer alan, k sayıdaki davranış şeklinin birbirine eşit olduğu, yani aynı dağılım veya ana kütleden geldiğini ifade etmektedir. Alternatif hipotez ise, k sayıdaki davranış şeklinin, en az birisinin diğerlerinden farklı olduğu varsayımı altında kurulmaktadır. Buna göre hipotezler,

$$H_0 : E(\overline{R}_1) = E(\overline{R}_2) = \ldots = E(\overline{R}_i)$$

$$H_1 : E(\overline{R}_i) \neq E(\overline{R}_j)$$

şeklinde ifade edilecektir.

IV.3. İstatistiksel Ölçümler

r_{ik} = k. sütunda i.bloğa ait sıra numaralarını, R_k = k davranış şeklindeki toplam sıra numaralarını ifade etmek üzere (burada k indisi, 1'den K'ya kadar değerler alırken, i indisi, 1'den b'ye kadar değerler almaktadır), sıra numaralarına ait beklenen değer ve varyans ile ilgili istatistiksel ölçümler,

$$E(r_{ik}) = K+1 / 2$$

$$Var(r_{ik}) = K^2-1 / 12$$

$$E(R_k) = b \ (K+1 / 2)$$

$$Var(R_k) = [\ \Sigma_{k=1,..,K} R_k\ ]$$

$$= K [\ b\ (K^2-1) / 12\ ] + K(K-1)\ \rho\ [\ b\ (K^2-1) / 12\ ]$$

$$= Kb\ [\ K^2-1 / 12\ ]\ (1 + (K-1)\ \rho)$$

şeklinde ifade edilmektedir (2; s.359, 4; s.456). Son formülde yer alan ρ, korelasyon katsayısı olup,

$$\rho = -1 / (K-1)$$

değerine eşittir.

IV.4. Test İstatistiği

Yine test istatistiğini tanımlamadan önce, kullanılan değerlerin ne olduğunu ve eşitini göstermekde fayda vardır. Aşağıda bu değerler verilmiştir.

Her bir k sütununda yer alan gözlem değerlerine ait sıra numaraları,

$$R_k = \Sigma_{\ k=1,..,K}\ r_{ik}$$

Bu sıra numaralarının ortalaması,

$$R_k = R_k / b$$

K sütun ve b satır içinde yer alan tüm gözlem değerlerinin sıra numaraları,

$$R = \Sigma_{\ i=1,..b} \Sigma_{\ k=1,..,K} R_{ik}$$

$$= bK(K+1) / 2$$

Bu sıra numaralarının ortalamaları,

$$R = bK\ (K+1) / 2\ .\ 1/bK$$

$$= K+1 / 2$$

Örnekler birbirleri ile bağımlı olduğundan, Friedman testi için X^2 dağılımı,

$$X^2 = 1 / 1-\rho\ \ U_0$$

şeklinde ifade edilmektedir. Formülde yer alan U0 değeri,

$$U_0 = \Sigma_{k=1,..,K} [\ (\ R_k - E(R_k)\ )^2\ \ /\ Var(R_k)\ ]$$

şeklinde tanımlanmaktadır(2;s.360). Buna göre, Friedman testinin test istatistiği,

$$F = K\text{-}1/K\ [\Sigma_{k=1,..,K}\ (R_k - (b/2)(K+1))^2\ /\ b.\ K^2\text{-}1\ /\ 12\quad]$$

$$= K\text{-}1\ /\ K\quad 12\ /\ b(K\text{-}1)(K+1)\ [\Sigma_{k=1,...K}\ (R_k - (b/2)(K+1))^2\ ]$$

$$= 12\ /\ bK(K+1)[\Sigma_{k=1,...K}\ (R_k^2 - 2\ R_k\ b/2\ \ K+1/2\ \ +(\ b(K+1)\ /\ 2\ )^2\ ]$$

$$= 12\ /\ bK(K+1)\ \Sigma_{k=1,..,K}\ \ R_k\text{-}\ \ 2(b(K+1)\ /\ 2\ )^2\ +\ (b(K+1)\ /2\ )^2$$

$$= 12\ /\ bK(K+1)\ (\ \Sigma_{k=1,...K}\ \ R_k\text{-}\ \ (\ b(K+1)\ /\ 2\ )^2\ )$$

$$= 12\ /\ bK(K+1)\ \Sigma_{k=1,..,K}\ \ R_k\text{-}\ 12\ /\ bK(K+1)\ \ (b(K+1)\ )^2\ \ /\ 4$$

$$= 12\ /\ bK(K+1)\ \ \Sigma_{k=1,..,K}\ \ R_k\text{-}\ \ 3\ bK(K+1)$$

şeklinde ifade edilmektedir.(11;s.948-12;s.468-13;s.463)

IV.5. Red Bölgesi

Sıfır hipotezi altında b sayısının sonsuza yaklaştığı durumlarda, test istatistiği k-1 serbestlik derecesi ile, Kruskal-Wallis testinde olduğu gibi X^2 dağılımına yaklaşmaktadır (14;s.538-15;s.749). Hesaplanan test istatistiği, k sayıdaki davranış şekli ya da örnek arasındaki farklar büyük olduğunda, doğru orantılı olarak büyük çıkacaktır. Bu durumda dolayısıyla, sıfır hipotezi red edilecektir. Başka bir ifade ile, hesaplanan F değeri, $X2\alpha$ değerinden büyük çıktığında, sıfır hipotezi kabul edilmeyecektir, yani örnekler arasında dağılım şekli veya ana kütle açısından bir benzerliğin olmadığı kabul edilecektir.

V. SAYISAL ÖRNEKLER

Bu bölümde, yukarıda anlatılan her iki test için sayısal bir örnek üzerinde, testlerin işleyişi anlatılmaktadır. Ele alınan örnekler, sadece testlerin kullanımını göstermek amacıyla incelenmiş, hipotetik örneklerdir.

V.1. Kruskal-Wallis Testinin Sayısal Bir Örneğe Uygulanışı

Tek yönlü varyans analizi yöntemi ile Kruskal-Wallis testinin örnek üzerinde uygulanışını göstermek için aşağıdaki tablo düzenlenmiştir. Tablodaki bilgilere göre, test istatistiği şu şekilde açıklanmaktadır.

TABLO 1
GÖZLEM DEĞERLERİ VE SIRA NUMARALARI

A		B		C	
Gözlem Değerleri	Sıra Numaraları	Gözlem Değerleri	Sıra Numaraları	Gözlem Değerleri	Sıra Numaraları
6	7	21	25,5	14	15,5
11	11,5	22	28	11	11,5
20	22,5	6	7	3	3
24	29	18	20,5	21	25,5
21	25,5	16	19	4	4
18	20,5	21	25,5	6	7
14	15,5	14	15,5	15	18
10	10	12	13	14	15,5
8	9	2	2	1	1
20	22,5	25	30	5	5
	R_1=173		R_2=186		R_3=106

$H = 12 / 30(31) \; [\, 173^2 + 186^2 + 106^2 \; / \; 10 \,] \; - \; 3(11)$

$= 4{,}7561$

Gözlem değerleri içinde tekrar eden değerler bulunduğundan, C değerinin de hesaplanması gerekmektedir. Buna göre, C değeri ,

TABLO 2
TEKRAR EDEN GÖZLEMLERİN FREKANSLARI

s	Tekrar eden Gözlemler	Frekanslar
1	6	3
2	11	2
3	14	4
4	18	2
5	20	2
6	21	4

$C = 1 - 1 / 10^3 - 10 \; [\,(3^3\text{-}3) + (\,2^3\text{-}2) + \ldots\ldots + (4^3\text{-}4)\,]$

$= 0{,}8363$

değerine eşittir. Bu hesaplamalara göre, H test istatistiği,

$H^* = 4{,}7561 / 0{,}8363$

$= 5{,}6866$

5.2. FRİEDMAN TESTİNİN SAYISAL BİR ÖRNEĞE UYGULANIŞI

Friedman testinin test istatistiğini hesaplamak için, 10 kişiye ait farklı dönemlerdeki hata sayılarına ilişkin bir tablo kullanılacaktır. Tablo ve hesaplamalar aşağıda verilmiştir.

TABLO 3

4 DÖNEM İÇİN 10 KİŞİYE AİT GÖZLEM DEĞERLERİ VE SIRA NUMARALARI

	GÖZLEM DEĞERLERİ				SIRA NUMARALARI			
	1.Dönem	2.Dönem	3.Dönem	4.Dönem				
1	35	30	12	6	1	2	3	4
2	32	30	8	7	1	2	3	4
3	37	32	14	12	1	2	3	4
4	35	45	25	34	2	1	4	3
5	30	36	22	21	2	1	3	4
6	38	21	5	1	1	2	3	4
7	23	8	11	7	1	3	2	4
8	47	31	36	34	1	4	2	3
9	40	44	43	41	4	1	2	3
10	45	40	27	8	1	2	3	4
					R_1=15	**R_2=20**	**R_3=28**	**R_4=37**

$F = 12 / 10\,4(5) \; [\, 15^2 + 20^2 + 28^2 + 37^2 \,] \; - (3)(10)(5)$

$= 16{,}68$

VI. TESTLERİN KARŞILAŞTIRILMASI

Her iki testin genel işleyiş şekillerini açıkladıktan sonra, testler arasındaki benzerlik ve farklılıkların açıklanması bu testlere ilişkin özellikleri toplu halde görmek açısından yararlı olacaktır.Bu benzerlik veya farklılıklar aşağıda belli başlıklar altında ele alınmıştır.

Testin özelliği açısından : Her iki test de varyans analizinde kullanılan ve parametrik olmayan testlerdir. Kruskal-Wallis testi, tek yönlü varyans analizinde kullanılmasına karşın, Friedman testi iki yönlü varyans analizinde incelenmektedir.

Amaç bakımından : Her iki testin de amacı, K sayıdaki örneğin aynı ana kütleden veya aynı dağılımdan gelip gelmediğini test etmektir.

Kullanılan gözlem değerleri açısından : Her iki testte de, parametrik olmayan testlerin bir özelliği olarak, gözlem değerleri yerine bu gözlem değerlerinin sıralanması ile oluşturulan sıra numaraları kullanılmaktadır.

Gözlem değerlerinin sıralanması açısından: Kruskal-Wallis testinde, hangi örnekten geldiğine bakılmaksızın tüm gözlem değerleri en küçükten en büyüğe doğru sıralanmakta iken, Friedman testinde sıralama işlemi her bir blokta diğerinden bağımsız olarak , büyükten küçüğe doğru yapılmaktadır.

Örneklerin bağımsız olması açısından : Kruskal-Wallis testinde, k sayıdaki örnek birbirinden bağımsız iken, Friedman testinde örnekler bağımlıdır.

Dağılım şekli bakımından : Her iki test de örnek büyüklükleri fazla olduğunda k-1 serbestlik derecesi ile X^2 dağılımına yaklaşmaktadır.

Red bölgesi bakımından : Her iki test için de, bulunan test istatistiği, $X^2\alpha$ tablo değerinden büyük ise, sıfır hipotezi red edilmektedir.

VII. DEĞERLENDİRME

Günlük hayatta ve bilimsel araştırmalarda, herhangi bir konu ile ilgili karar verme aşamasına gelme, çok sık karşılaşılan bir durumdur. Bu gibi durumlarda, kişiler farklı davranış şekilleri ile karşı karşıya gelebildikleri gibi, bir konu ile ilgili farklı veriler karşısında bunların birbirleri ile olan ilişkilerini ya da benzerliklerini anlamak için değişik yöntemlere başvurabilmektedirler. Bu yöntemler bilimsel olabileceği gibi, kişinin kendi tahmin ya da görüşleri ya da tecrübelerine göre ele alınabilmektedir. Özellikle bilimsel yöntemlerde, gözlemlenmiş değerler arasındaki ilişkinin test edilerek, bulunan sonuçların yorumlanması daha gerçekçi bilgiler vermektedir. Bu amaçla, istatistiksel alanda yapılan testler veri şekline, veri ile ilgili bilgilere göre parametrik ve parametrik olmayan testler olarak iki grupta ele alınmaktadır. Her iki grupta da yaygın şekilde kullanılan bir çok test mevcuttur. Parametrik testler, dağılım şekli ve parametre tahmini ile ilgilenirken, parametrik olmayan testler alternatif olarak, bu bilgileri gözardı ederek, sadece örneklerin bağımsız ve tesadüfi olarak seçilmiş olması üzerinde durularak yapılmaktadır. Uygulanışı daha kolay, zaman açısından daha kısa süreli olması, dağılım şeklinin bilinmesine gerek olmaması gibi konular parametrik olmayan testlerin avantajları içinde yer almaktadır.

Bu makalede ele alınan testlerin ortak özelliği de, klasik varyans analizi yönteminin gerekli kıldığı varsayımların elde edilemediği durumlarda kullanılabilmeleri ve yapılan hesaplamaların gerçeğe yakın olması açısından tercih edilebilir testler olma özelliği taşımalarıdır.

İkiden daha fazla sayıdaki örneklerin karşılaştırılmasında kullanılan Kruskal-Wallis testi, K sayıdaki örnek içinde gözlemlenen değerlerin aynı ana kütleden gelip gelmediğini test emektedir. Bu teste her bir k örnek içinde farklı sayıda gözlem değerinin bulunması testin amacını değiştirmemektedir. Çünkü, gözlem değerleri örnekler göz ardı edilerek, tek bir seri şeklinde düşünülmekte ve sıralama işlemleri hangi örnekten geldiğine bakılmaksızın yapılmaktadır.

Friedman testinde gözlem değerleri ise, örneklerin bağımlı olması altında, K sayıda örnek, b sayıdaki blok içinde belirlenmektedir. Dolayısıyla, her bir blok ya da satır için sıralama işlemi kendi içinde diğerlerinden bağımsız olarak yapılmaktadır. Gözlem değerleri, sıralı ölçekte ise, bu testin kullanılması yerinde olacaktır.

KAYNAKLAR

1. Lincoln L.CHAO , *Statistics: Methods and Analyses,* International Student Edition. 1969

2. Leonard A.MARASCULİO – Maryellen MCSWEENEY. *Nonparametric and Distribution-free Methods for the Social Sciences,* Brooks/Cole Publishing Company, 1977

3. Fikret İKİZ-Halis PÜSKÜLCÜ-Şaban EREN. *İstatistiğe Giriş,* Bilgisayar Örnekleri ile Genişletilmiş 4.Baskı, Barış Yayınları, İzmir, 1996

4. James L.KEPNER-David H.ROBINSON. *Nonparametric Methods for Detecting Treatment Effects in Repeated Measures Design,* Journal of the American Statistical Association. June 1988. Vol 83. No 402

5. Jay L.DEVORE, *Probability and Statistics for Engineery and the Sciences,* 2.Edition. 1987

6. MENDENHALL-REİNMUTH-BEAVER. *Statistical for Management and Economics.* Seventh Edition, Duxbury Press. 1993

7. Doglas C.MONTGOMERY-George C.RUNGER, *Applied Statistical and Probability for Engineers,* 1994

8. Marion Gross SOBOL-Martın K.STARR, *Statistics for Business and Economics An Action Learning Approach,* McGraw-Hill Book Company. 1983

9. Sidney SİEGEL, *Nonparametric Statistics for the Behavioral Sciences,* International Student Edition, 1956

10. Edward B.MANOUKİAN, *Mathematical Nonparametric Statistics,* Gordon and Breach Science Publisher, 1986

11. Gregory A.MACK- John H.SKILLINGS, *A Friedman Type Rank Test for Main Effects in a Two-Factor ANOVA,* Journal of the American Statistical Association, December 1980, Vol 75, No 372

12. D.R.JENSEN-Y.V.HUİ, *Effiency of Friedman's X^2_r Test under Dependence,* Journal of the American Statistical Association, June 1982, Vol 77, No 378

13. Stephen C.HORA- Ronald L.IMAN. *Asymptotic Relative Effiencies of the Rank-Transformation Procedure in Randomized Complete Block Design*. Journal of the American Statistical Association. June 1988. Vol 83. No 402

14. S.SCHACH. *An Alternative to the Friedman test with Certain Optimality Properties*. The Annals of Statistics. 1979. Vol 7. No 3

15. Taka-Aki SHİRAİSHİ. *An Asymptotic Acceptance of Aligned Rank Tests under Alternatives of Contaminated Distributions in a Randomized-Blocks Design*. Journal of the American Statistical Association. September 1985. Vol 80. No 39.