ESKİŞEHİR TEKNİK ÜNİVERSİTESİ BİLİM VE TEKNOLOJİ DERGİSİ
B- TEORİK BİLİMLER

Eskişehir Technical University Journal of Science and Technology B- Theoretical Sciences

2020, 8(1), syf. 1 - 13, DOI: 10.20290/estubtdb.522740

ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİN HOMOLOJİLERİ ÜZERİNE HESAPLAMALAR

Ahmet Faruk ASLAN*

Matematik-Bilgisayar Bölümü, Fen Edebiyat Fakültesi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir, Türkiye

ÖZET

Bu çalışmada GAP kullanılarak belirli koşullar altında çaprazlanmış modüllerin sınıflandırılması yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Çaprazlanmış Modüller, Homoloji, GAP.

CALCULATIONS ON THE HOMOLOGY OF CROSSED MODULES

ABSTRACT

We get an classification of crossed modules under certain conditions by using GAP.

Keywords: Crossed Modules, Homology, GAP.

1. GİRİŞ

Çaprazlanmış modül kavramı, J.H.L.Whitehead tarafından [17] de tanımlanmıştır. Whitehead, özellikle relatif homotopi gruplarının cebirsel yapıları üzerine yaptığı çalışmasında çaprazlanmış modüllere yer vermiştir. O zamandan itibaren çaprazlanmış modül kavramı diğer alanlarda da önemli bir yer tutmuştur. Çaprazlanmış modüller, temel cebirsel yapılardan biri olarak incelenebilir. Çaprazlanmış modüllerin homotopi teorisinin, gruplar üzerinde homoloji ve kohomoloji, cebirsel K-teori, devirli (cyclic) homoloji, kombinatör grup teori ve diferensiyel geometri dahil olmak üzere matematiğin birçok alanında önemli rolü vardır. Değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modüllerle ilgili önemli sonuçlar Arvasi ve Porter [1, 2] ile Arvasi ve Ulualan [3, 4, 5] çalışmalarında elde edilmiştir.

Wensley vd. [16] da çaprazlanmış modül grup teorisini, programlama dili olan GAP (Group, Algorithm and Programming) [10] ile bilgisayar ortamına XMod paketi adı altında aktarmıştır. Gruplar üzerinde herhangi bir mertebeden bütün çaprazlanmış modüllerin ve bunların izomorfizm sınıflarının belirlenmesi Odabaş vd. [13] çalışmasında yapılmıştır. Cebirler üzerinde çaprazlanmış modüllerin bilgisayar ortamına aktarılması ise Arvasi ve Odabaş [6, 7, 12] çalışmalarında gerçekleştirilmiştir. Çaprazlanmış modül yapısına kategoriksel denk olan 1-parçalanmış simplisel cebirler GAP ortamına Odabaş tarafından aktarılmıştır [14]. Bu çalışmada GAP programı kullanılarak gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüllerin birinci homolojisi hesaplanmış ve faithful çaprazlanmış modüller, çaprazlanmış modüllerin aspherical ve simply connected özellikleri incelenmiştir. Ayrıca [28, 28] mertebeden çaprazlanmış modüllerin sınıflandırılması yapılarak birinci homoloji çaprazlanmış modüllerinin yapılarını içeren tablo sunulmuştur.

*Sorumlu Yazar: afaslan@ogu.edu.tr
Geliş: 05.02.2019 Yayın: 28.02.2020

2. ÇAPRAZLANMIŞ MODÜL KAVRAMI

Çaprazlanmış modül kavramı ilk olarak Whitehead [17] tarafından verilmiştir. Bu kavram homotopi teoride önemli bir yer tutmuştur. Cebirsel olarak çaprazlanmış modüller, grup kavramının iki boyutlu bir genelleştirmesi olarak açıklanabilir. Norrie [11] çalışmasında grup teorideki temel kavramları çaprazlanmış modüller bakış açısıyla ele almıştır. Daha sonra çaprazlanmış modül kavramı, değişmeli cebirler Porter [15] çalışmasında, Hopf cebirler Woronowicz [18] çalışmasında, Lie cebirler ve Leibniz cebirler Casas [8, 9] çalışmalarında tanımlanmıştır.

C ve G iki grup ve $\partial: C \longrightarrow G$ bir grup homomorfizmi G nin C üzerine etkisi olmak üzere $G \longrightarrow Aut(C)$ homomorfizmi

(*i*) C, G-equivariant
(*ii*) Peiffer özdeşliği

özelliklerini sağlıyorsa (C, G, ∂) üçlüsü bir çaprazlanmış modül olarak adlandırılır.

Her $c \in C$ ve $g \in G$ için G nin C üzerine etkisi ${}^{g}c$ olmak üzere

$$\partial\,({}^{g}c) = g\,\partial\,(c)\,g^{-1}$$

eşitliğinin sağlanması C nin G-equivariant olmasının gerek ve yeter şartıdır. Ayrıca her $c, c' \in C$ için

$${}^{\partial c}c' = c\,c'\,c^{-1}$$

olması Peiffer özdeşliği olarak adlandırılır. Aşağıdaki teorem çaprazlanmış modül aksiyomlarının doğal bir sonucu olarak verilebilir.

2.1. Teorem

(C, G, ∂) bir çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda,

(i) $\ker\partial$, C nin merkezinin $(Z(C))$ bir alt grubudur.

(ii) ∂C, G nin bir normal alt grubudur ve buradan coker ∂, yani $G/\partial C$ bölüm grubu elde edilir.

Örnekler

(1) N , G grubunun normal alt grubu olmak üzere inclusion (içine) homomorfizmi ve

$$i: G \times N \longrightarrow N$$
$$(g, n) \longmapsto {}^{g}n = g\,n g^{-1}$$

G nin N üzerine etkisi ile birlikte (N, G, i) çaprazlanmış modülü elde edilir.

(2) G bir grup olmak üzere $\mathbb{Z}G$ ile gösterilen tam grup halkanın elemanları, G grubunun elemanlarının sonlu lineer kombinasyonları ile $\mathbb{Z}$ nin elemanlarının katsayı olarak kullanılmasıyla oluşur. $\lambda x \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\mathbb{Z}G$ halkasının herhangi bir elemanı

$$\sum_{x\in G} \lambda_x x$$

biçimindedir.

Bir $\mathbb{Z}G$-modül ise abelyan M grupla birlikte, $\mathbb{Z}G$ den M nin endomorfizmlerin halkasına bir homomorfizmden oluşur.

M , bir $\mathbb{Z}G$-modül olmak üzere aşikar (trivial) homomorfizmi ve

$$\begin{aligned} G \times M &\longrightarrow M \\ (g, m) &\longmapsto g_m = gm \end{aligned}$$

etkisiyle birlikte $(M, G, 1)$ çaprazlanmış modülü elde edilir.

(3) K bir grup ve $G = \{ f_k : f_k : K \longrightarrow K : f_k(k^l) = kk^l k^{-1} \}$ şeklinde K nın iç otomorfizmlerinin grubu olmak üzere,

$$\begin{aligned} \partial : K &\longrightarrow G \\ k &\longmapsto f_k \end{aligned}$$

homomorfizmi

$$\begin{aligned} G \times K &\longrightarrow K \\ (g, k) &\longmapsto (f_k)k^l = kk^l k^{-1} \end{aligned}$$

etkisiyle birlikte (K, G, ∂) çaprazlanmış modülü elde edilir.

(4) G ve H iki grup ve $G \otimes H$ tensör çarpımı olmak üzere,

$$\begin{aligned} \partial : G \otimes H &\longrightarrow G \\ (g \otimes h) &\longmapsto g^h g^{-1} = ghg^{-1}h^{-1} \end{aligned}$$

homomorfizmi ve

$$\begin{aligned} G \times (G \otimes H) &\longrightarrow G \otimes H \\ (g^l, g \otimes h) &\longmapsto {}^{g^l}g \otimes h = {}^{g^l}g \otimes {}^{g^l}h \end{aligned}$$

etkisiyle birlikte $(G \otimes H, G, \partial)$ çaprazlanmış modülü elde edilir.

Herhangi bir (C, G, ∂) çaprazlanmış modülü için etki yardımıyla

$$\begin{aligned} C^G &= \{c \in C : g_c = c, \text{ her } g \in G\} \\ st_G(C) &= \{g \in G : g_c = c, \text{ her } c \in C \} \end{aligned}$$

kümeleri tanımlanır. C^G kümesinin $Z(C)$ nin bir alt grubu olduğu kolayca gösterilebilir. Buradan C^G, C nin bir normal alt grubudur. $st_G(C)$ stabilizer alt grubu ise G nin bir normal alt grubudur.

2.2 Tanım

(C , G, ∂) çaprazlanmış modülü

(i) $st_G(C) = \{1_G\}$ özelliğini sağlarsa faithful çaprazlanmış modül,

(ii) $\ker \partial = \{1_C\}$ özelliğini sağlarsa aspherical çaprazlanmış modül,

(iii) $\operatorname{coker} \partial = \{1_{G/\partial C}\}$ özelliğini sağlarsa simply connected (basit bağlantılı) çaprazlanmış modül

olarak adlandırılır.

2.3 Tanım

G bir grup ve K bir abelyan grup olsun.

$$1 \longrightarrow K \xrightarrow{i} L \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

kısa tam dizisi, i nin görüntüsü L nin merkezinde kalacak şekilde varsa L grubuna G nin K ile merkezsel genişlemesi denir.

2.4 Tanım

$f : A \rightarrow B$ bir grup homomorfizmi olmak üzere $g \circ f = 1_A$ olacak şekilde $g: B \rightarrow A$ grup homomorfizmi varsa f ye kesit denir.

Örnekler

(1) C bir grup olmak üzere $\partial : C \rightarrow Aut(C)$ çaprazlanmış modülü faithful özelliğini sağlar.

(2) $N \trianglelefteq G$ için $i : N \longrightarrow G$ çaprazlanmış modülü aspherical özelliğini sağlar.

(3) Herhangi

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow L \xrightarrow{\partial} G \longrightarrow 1$$

bir merkezsel genişleme verildiğinde

$$\begin{aligned} \partial : L &\longrightarrow G \\ l &\longmapsto \partial(l) \end{aligned}$$

grup homomorfizmi ve kesit homomorfizmiyle tanımlanan etkiyle birlikte (L, G, ∂) bir çaprazlanmış modüldür. Ayrıca $\partial : L \longrightarrow G$ tam olduğundan $\partial(G) = Q$ ve $Q / \partial(G) = Q / Q \cong \{e\}$ olup (G, Q, ∂) bir simply connected çaprazlanmış modüldür.

Şimdi, herhangi iki çaprazlanmış modül arasındaki ilişkiyi kuracak morfizm kavramını tanımlayalım.

(C, G, ∂) ve (C', G', ∂') iki çaprazlanmış modül olmak üzere her $c \in C$ ve $g \in G$ için

$$\alpha({}^{g}c) = {}^{\beta(g)}\alpha(c)$$

ve

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\partial"'] & C' \arrow[d, "\partial'"] \\ G \arrow[r, "\beta"'] & G' \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli, yani

$$\beta (\partial (c) = \partial' (\alpha (c))$$

olacak şekilde $\alpha : C \to C'$, $\beta : G \to G'$ homomorfizmleri varsa

$$(\alpha, \beta) : (C , G, \partial) \to (C' , G' , \partial')$$

morfizmine çaprazlanmış modüller arasındaki morfizm denir. Böylelikle **XMod** kategorisi tanımlanır.

(C, G, ∂) çaprazlanmış modülünün kendi üzerine olan tüm çaprazlanmış modül morfizimleri bir endomorfizm kümesi oluşturur ve $End(C, G, \partial)$ ile gösterilir.

$$(\alpha, \beta) : (C , G, \partial) \to (C' , G' , \partial')$$

çaprazlanmış modül morfizmi için α ve β izomorfizm ise (α, β) bir çaprazlanmış modül izomorfizmi olarak adlandırılır. (C , G, ∂) ve (C' , G' , ∂') çaprazlanmış modülleri izomorfiktir denir ve $(C , G, \partial) \cong (C' , G' , \partial')$ ile gösterilir.

(C , G, ∂) bir çaprazlanmış modülü verildiğinde

(i) $S \leq C$ ve $H \leq G$,

(ii) $\partial' = \partial |_S$, ∂ nin S ye kısıtlanmışı,

(iii) H nın S üzerine etkisi G nin C üzerine etkisinin indirgenmesiyle verildiğinde (S, H, ∂') bir çaprazlanmış modül oluyorsa bu çaprazlanmış modüle (C, G, ∂) çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülü denir.

Bununla birlikte (C , G, ∂) nin bir (S, H, ∂') alt çaprazlanmış modülü;

(i) $H \trianglelefteq G$,

(ii) her $g \in G$, $s \in S$ için, ${}^{g}s \in S$,

(iii) her $h \in H$, $c \in C$ için, ${}^{h}c\,c^{-1} \in S$

özelliklerini sağlıyor ise (S, H, ∂') ye (C , G, ∂) çaprazlanmış modülünün bir normal alt çaprazlanmış modülü denir.

Bir çaprazlanmış modülün (1, 1, 1) aşikar çaprazlanmış modülü ve kendisinden başka normal alt çaprazlanmış modülü yoksa basit çaprazlanmış modül olarak adlandırılır.

Herhangi bir

$$(\alpha, \beta) : (C , G, \partial) \to (C', G', \partial')$$

çaprazlanmış modül morfizmi verildiğinde ker(α, β) = (ker α, ker β, ∂) çaprazlanmış modülüne (α, β) nın çekirdeği denir. ker(α, β), (C, G, ∂) çaprazlanmış modülünün bir normal alt çaprazlanmış modülüdür. Benzer şekilde Im(α, β) = ($\alpha(C)$, β (G), ∂') çaprazlanmış modülüne (α, β) nın görüntüsü denir. Im(α, β), (C', G', ∂') çaprazlanmış modülünün bir alt çaprazlanmış modülüdür.

$$1 \longrightarrow (R, M, \mu) \xrightarrow{(\alpha_1, \beta_1)} (C, G, \partial) \xrightarrow{(\alpha_2, \beta_2)} (U, Q, \omega) \longrightarrow 1$$

çaprazlanmış modül morfizmi dizisi;

(i) (α_1, β_1) monomorfizm,

(ii) (α_2, β_2) epimorfizm,

(iii) Im(α_1, β_1) = ker(α_2, β_2) şartlarını sağlıyor ise kısa tam dizi olarak adlandırılır.

2.5 Teorem (1. İzomorfizm Teoremi)

$(\alpha, \beta) : (C , G, \partial) \longrightarrow (C', G', \partial')$ bir çaprazlanmış modül morfizmi olsun. Bu durumda

$$\mathrm{Im}(\alpha, \beta) \cong (C , G, \partial) \,/\, \ker(\alpha, \beta)$$

dır.

(C, G, ∂) bir çaprazlanmış modül,

$$[G, C] = \langle \{ {}^{g}c\, c^{-1} : c \in C \text{ ve } g \in G\} \rangle$$

C nin displacement alt grubu ve $G' = [G, G]$ komutatör alt grup olmak üzere

$$(C, G, \partial)' = [(C , G, \partial), (C , G, \partial)] = ([G, C], G', \partial)$$

şeklinde tanımlanır.

Örnekler

(1) $N \trianglelefteq G$ için $i : N \longrightarrow G$ çaprazlanmış modülünün komutatör alt çaprazlanmış modülü $(N, G, i)' = ([G, N], G', i)$ dir.

(2) M bir G-modül ve $I \trianglelefteq G$ agümentasyon ideali, yani $\{g\text{-}1 : g \in G\}$ kümesi tarafından üretilen bir ideali olsun. Bu durumda $(M, G, 0)' = (M \cdot I, G', 0)$ dır.

Bir (C, G, ∂) bir çaprazlanmış modülünün merkezi;

$$Z(C, G, \partial) = (C^G, Z(G) \cap st_G(C), \partial)$$

şeklinde tanımlanır. $(C, G, \partial) = Z(C, G, \partial)$ oluyor ise çaprazlanmış modül abelyandır denir.

3. ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER VE HOMOLOJİ

Abelyan çaprazlanmış modüller kategorisi **AbXMod** olmak üzere

$$Ab : \mathbf{XMod} \rightarrow \mathbf{AbXMod}$$

abelyanlaştırma funktoru gereğince her $\partial : C \longrightarrow G$ çaprazlanmış modülünden abelyan çaprazlanmış modül elde edilebilir. Şöyle ki;

$$(C, G, \partial) / (C, G, \partial)' = (C / [G, C], G / G', \partial)$$

şeklindedir. Ab funktoru $U : \mathbf{AbXMod} \longrightarrow \mathbf{XMod}$ inclusion funktorunun bir sol ekidir [11]. Buradan hareketle (C, G, ∂) çaprazlanmış modülünün birinci homoloji çaprazlanmış modülü

$$H_1(C, G, \partial) = (C / [G, C], G / [G, G], \bar{\partial})$$

olarak tanımlanır.

Örnekler

(1) $N \trianglelefteq G$ için

$$H_1(N, G, i) = (N / [G, N], H_1(G), \bar{i})$$

dir.

(2) M bir G-modül için

$$H_1(M, G, 0) = (H_0(G, M), H_1(G), 0)$$

dır.

3.1 Tanım

(C, G, ∂) nin birinci homoloji çaprazlanmış modülü aşikar çaprazlanmış modül ise (C, G, ∂) ye mükemmel (perfect) çaprazlanmış modül denir.

Örnekler

(1) G mükemmel grup ise $(G, G, 1)$ ve $(1, G, i)$ mükemmel (perfect) çaprazlanmış modüldür. Bu ifadenin tersi de doğrudur.

(2) M bir G-modül, G mükemmel grup ve

$$N = \langle \{g_m - 2m : m, \in M \text{ ve } g \in G\} \rangle$$

ise (M / N , G, 0) bir mükemmel (perfect) çaprazlanmış modüldür.

4. GAP UYGULAMALARI

GAP (Group, Algorithm and Programming) cebirin bilgisayar aracılığı ile hesaplanması için geliştirilen bir bilgisayar paket programıdır. GAP programı açık kaynak kodludur ve kullanıcıları tarafından geliştirilmektedir. Bu amaçla yazılan ortak paketler, yazılan kullanım kılavuzu ile birlikte St. Andrews'deki GAP merkezine gönderilir. Buradaki hakemlerin değerlendirmesi neticesinde uygun bulunan paketler, program kütüphanesine eklenerek bütün kullanıcılara internet üzerinden ücretsiz olarak dağıtılır.

Arvasi ve Odabaş XModAlg paketinde ve [7] makalesinde grup cebirlerin bu özelliklerini kullanarak çaprazlanmış modüller ile bu yapıya kategoriksel denk olan cat^1-cebirlerini bilgisayar ortamına aktarmıştır. Bu makalede gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüllerin birinci homolojisi GAP programı aracılığıyla bilgisayar ortamına aktarılmıştır. Ayrıca [28, 28] mertebeden çaprazlanmış modüller için aspherical, simply connected ve faithful özelliklerini inceleyen bir tablo verilmiştir.

Bu kapsamda ilk **FirstHomologyOfXMod** fonksiyonunu yazdık. Daha sonra bu fonksiyonu kullanarak bir çaprazlanmış modülün mükemmel olup olmadığını test edecek **IsPerfectXMod** fonksiyonunu yazdık. Aşağıdaki GAP oturumunda 60. mertebeden A_5 alterne ve 120. mertebeden $SL(2, 5)$ özel lineer grubu kullanılarak $(SL(2, 5), A_5, \partial)$ çaprazlanmış modülü elde edilmiştir. Daha sonra bu çaprazlanmış modülün birinci homoloji çaprazlanmış modülü oluşturulmuştur. Daha sonra $(SL(2, 5), A_5, \partial)$ çaprazlanmış modülünün mükemmel çaprazlanmış modül olduğu görülmüştür.

```
gap> A5 := AlternatingGroup(5);
Alt( [ 1 .. 5 ] )
gap> SL2_5 := SmallGroup(120,5);
Group([ (1,2,4,8)(3,6,9,5)(7,12,13,17)(10,14,11,15)(16,20,21,24)
(18,22,19,23), (1,3,7)(2,5,10)(4,9,13)(6,11,8)(12,16,20)(14,18,22)
(15,19,23)(17,21,24) ])
gap> StructureDescription(SL2_5);
"SL(2,5)"
gap> XMler := AllXMods(SL2_5,A5);
gap> Length(XMler);
120
gap> XM := XMler[23];
[Group( [ ( 1, 2, 4, 8)( 3, 6, 9, 5)( 7,12,13,17)(10,14,11,15)
(16,20,21,24)(18,22,19,23), ( 1, 3, 7)( 2, 5,10)( 4, 9,13)
( 6,11, 8)(12,16,20)(14,18,22)(15,19,23)(17,21,24)
] )->AlternatingGroup( [ 1 .. 5 ] )]
gap> StructureDescription(XM);
[ "SL(2,5)", "A5" ]
gap> FirstHomologyOfXMod(XM);
[Group( () )->Group( () )]
gap> IsPerfectXMod(XM);
true
```

Aşağıdaki tabloda mertebesi [28, 28] olan çaprazlanmış modüllerin izomorfizm altında sınıflandırmaları ve bu sınıflandırmanın bazı özellikleri verilmiştir.

Tablo 1.

Aile No	XMod Sayısı	Aspherical	Simply Connected	FaithFull	Homoloji XMod
1	84	true	true	false	["C4", "C4"]
2	84	false	true	false	["C4", "C2 x C2"]
3	84	false	true	true	["C2", "C2 x C2"]
4	1	false	true	false	["C28", "C4"]
5	1	false	true	false	["C14", "C4"]
6	1	false	true	false	["C2", "C4"]
7	1	false	true	false	["C4", "C4"]
8	1	false	true	false	["C28", "C4"]
9	1	false	true	false	["C14", "C4"]
10	1	false	true	false	["C2", "C4"]
11	1	false	true	false	["C4", "C4"]
12	6	false	true	false	["C2", "C4"]
13	6	false	true	false	["C4", "C4"]
14	6	false	true	false	["C2", "C4"]
15	6	false	true	false	["C4", "C4"]
16	1	false	true	false	["C28", "C28"]
17	1	false	true	false	["C14", "C28"]
18	1	false	true	false	["C2", "C28"]
19	1	false	true	false	["C4", "C28"]
20	2	false	true	false	["C28", "C28"]
21	6	false	true	false	["C28", "C28"]
22	6	false	true	false	["C14", "C28"]
23	1	false	true	false	["C28", "C28"]
24	1	false	true	false	["C14", "C28"]
25	1	false	true	false	["C2", "C28"]
26	1	false	true	false	["C4", "C28"]
27	12	true	true	false	["C28", "C28"]
28	6	false	true	false	["C28", "C28"]
29	6	false	true	false	["C14", "C28"]
30	1	false	true	false	["C28", "C2 x C2"]
31	2	false	true	false	["C14", "C2 x C2"]
32	2	false	true	false	["C2", "C2 x C2"]
33	2	false	true	false	["C4", "C2 x C2"]
34	1	false	true	false	["C14", "C2 x C2"]
35	2	false	true	false	["C2", "C2 x C2"]
36	2	false	true	false	["C2", "C2 x C2"]
37	1	false	true	false	["C2", "C2 x C2"]
38	2	false	true	false	["C2", "C2 x C2"]
39	1	false	true	false	["C4", "C2 x C2"]
40	1	false	true	false	["C28", "C2 x C2"]
41	1	false	true	false	["C14", "C2 x C2"]
42	1	false	true	false	["C2", "C2 x C2"]
43	1	false	true	false	["C4", "C2 x C2"]
44	6	false	true	false	["C2", "C2 x C2"]
45	12	false	true	false	["C2", "C2 x C2"]
46	6	false	true	false	["C2", "C2 x C2"]
47	6	false	true	false	["C2", "C2 x C2"]
48	6	false	true	false	["C4", "C2 x C2"]
49	1	false	true	false	["C28", "C14 x C2"]

50	3	false	true	false	["C14", "C14 x C2"]
51	3	false	true	false	["C2", "C14 x C2"]
52	3	false	true	false	["C4", "C14 x C2"]
53	6	false	true	false	["C2", "C14 x C2"]
54	3	false	true	false	["C28", "C14 x C2"]
55	3	false	true	false	["C14", "C14 x C2"]
56	3	false	true	false	["C2", "C14 x C2"]
57	3	false	true	false	["C4", "C14 x C2"]
58	6	false	true	false	["C28", "C14 x C2"]
59	18	false	true	false	["C14", "C14 x C2"]
60	18	false	true	false	["C28", "C14 x C2"]
61	18	false	true	false	["C14", "C14 x C2"]
62	84	false	true	false	["C2 x C2", "C2 x C2"]
63	84	false	true	true	["C2", "C2 x C2"]
64	84	true	true	false	["C2 x C2", "C2 x C2"]
65	1	false	true	false	["C14 x C2", "C4"]
66	3	false	true	false	["C14", "C4"]
67	3	false	true	false	["C2", "C4"]
68	1	false	true	false	["C2 x C2", "C4"]
69	3	false	true	false	["C14 x C2", "C4"]
70	3	false	true	false	["C14", "C4"]
71	3	false	true	false	["C2", "C4"]
72	3	false	true	false	["C2 x C2", "C4"]
73	18	false	true	false	["C2", "C4"]
74	6	false	true	false	["C2 x C2", "C4"]
75	18	false	true	false	["C2", "C4"]
76	18	false	true	false	["C2 x C2", "C4"]
77	1	false	true	false	["C14 x C2", "C28"]
78	3	false	true	false	["C14", "C28"]
79	3	false	true	false	["C2", "C28"]
80	1	false	true	false	["C2 x C2", "C28"]
81	6	false	true	false	["C14 x C2", "C28"]
82	18	false	true	false	["C14", "C28"]
83	3	false	true	false	["C14 x C2", "C28"]
84	3	false	true	false	["C14", "C28"]
85	3	false	true	false	["C2", "C28"]
86	3	false	true	false	["C2 x C2", "C28"]
87	18	false	true	false	["C14 x C2", "C28"]
88	18	false	true	false	["C14", "C28"]
89	1	false	true	false	["C14 x C2", "C2 x C2"]
90	6	false	true	false	["C14", "C2 x C2"]
91	6	false	true	false	["C2", "C2 x C2"]
92	2	false	true	false	["C2 x C2", "C2 x C2"]
93	3	false	true	false	["C14", "C2 x C2"]
94	6	false	true	false	["C2", "C2 x C2"]
95	6	false	true	false	["C2", "C2 x C2"]
96	3	false	true	false	["C2", "C2 x C2"]
97	6	false	true	false	["C2", "C2 x C2"]
98	1	false	true	false	["C2 x C2", "C2 x C2"]
99	3	false	true	false	["C14 x C2", "C2 x C2"]
100	3	false	true	false	["C14", "C2 x C2"]
101	3	false	true	false	["C2", "C2 x C2"]

102	3	false	true	false	["C2 x C2", "C2 x C2"]
103	18	false	true	false	["C2", "C2 x C2"]
104	36	false	true	false	["C2", "C2 x C2"]
105	6	false	true	false	["C2 x C2", "C2 x C2"]
106	18	false	true	false	["C2", "C2 x C2"]
107	18	false	true	false	["C2 x C2", "C2 x C2"]
108	1	false	true	false	["C14 x C2", "C14 x C2"]
109	9	false	true	false	["C14", "C14 x C2"]
110	9	false	true	false	["C2", "C14 x C2"]
111	3	false	true	false	["C2 x C2", "C14 x C2"]
112	18	false	true	false	["C2", "C14 x C2"]
113	9	false	true	false	["C14 x C2", "C14 x C2"]
114	9	false	true	false	["C14", "C14 x C2"]
115	9	false	true	false	["C2", "C14 x C2"]
116	9	false	true	false	["C2 x C2", "C14 x C2"]
117	6	false	true	false	["C14 x C2", "C14 x C2"]
118	54	false	true	false	["C14", "C14 x C2"]
119	54	false	true	false	["C14 x C2", "C14 x C2"]
120	54	false	true	false	["C14", "C14 x C2"]
121	6	false	true	false	["C14 x C2", "C14 x C2"]
122	36	true	true	false	["C14 x C2", "C14 x C2"]

Tablo 1 de yer alan sütunlarla ilgili aşağıdaki bilgiler verilebilir;

1. İzomorfizm ailesi sırası; 1320 adet [28, 28] mertebeden çaprazlanmış modül olup bunlar için 122 adet izomorfizm ailesi oluşmuştur.

2. Herbir izomorfizm ailesinde yer alan çaprazlanmış modül sayısı; bir ailede en fazla 84 en az 1 çaprazlanmış modül bulunmaktadır.

3. İzomorfizm ailesinde yer alan çaprazlanmış modüllerin aspherical olup olmadıkları; bu özellikteki aile sayısı 4 dür.

4. İzomorfizm ailesinde yer alan çaprazlanmış modüllerin simply connected olup olmadıkları; tüm aileler bu özelliktedir.

5. İzomorfizm ailesinde yer alan çaprazlanmış modüllerin faithful olup olmadıkları; yalnızca 2 aile bu özelliktedir.

6. İzomorfizm ailesinde yer alan çaprazlanmış modüllerin 1. homoloji çaprazlanmış modüllerin yapısı verilmiştir.

REFERANSLAR

[1] Arvasi Z, Porter T. Simplicial and Crossed Resolutions of Commutative Algebras. Journal of Algebras 1996; 181: 426-448.

[2] Arvasi Z, Porter T. Freness Conditions for 2-Crossed Modules of Commutative Algebras. Applied Categorical Structures 1998; 6: 455-471.

[3] Arvasi Z, Ulualan E. On Algebraic Models for Homotopy 3 Types. Journal of Homotopy and Related Structures 2006; 1, 1: 1-27.

[4] Aravsi Z, Ulualan E. Quadratic and 2 Crossed Modules of Algebras. Algebra Colloquilum 2007; 14, 4: 669-686.

[5] Arvasi Z, Ulualan E. Homotopical Aspects of Commutative Algebras I Freeness Conditions for Crossed Squares. Journal of Homotopy and Related Structures 2015; 10, 3: 495-518.

[6] Arvasi Z, Odabaş A. Crossed Modules of Commutative Algebras and Cat[1]- Algebras in GAP. Manual for the XModAlg share package for GAP4 Version 1.16. (http://www.gap-system.org/Packages/xmodalg.html) 2018.

[7] Arvasi Z, Odabaş A. Computing 2-Dimensional Algebras: Crossed Modules and Cat1-Algebras. Journal of Algebra and Its Applications 2016; 15, 10: 1650185-0.

[8] Casas JM. Invariantes de Módulos Cruzados en Álgebras de Lie. Ph.D. Thesis, University of Santiago, Spain, 1991.

[9] Casas JM, Ladra M. Colimits in the Crossed Modules Category in Lie Algebras. Georgian Mathematical Journal 1999; 7, 3: 461-474.

[10] GAP - Groups, Algotihms and Programming Version 4. Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen Germany and School of Mathematical and Computational Sciences. U. St. Andrews, Scotland, 1997.

[11] Norrie KJ. Crossed Modules and Analogues of Group Theorems. Ph.D. Thesis, King's College, University of London, Lndon, United Kingdom, 1987.

[12] Odabaş A. Crossed Modules of Algebras with GAP. Ph.D. Thesis, Osmangazi University, Eskişehir, Türkiye, 2009.

[13] Odabaş A, Igaz E, Uslu EO. Isoclinism of Crossed Modules. Journal of Symbolic Computation 2016; 74: 408-424.

[14] Odabaş A. Classification of Finite Simplicial Algebras. Anadolu University Journal of Science and Technology A-Applied Sciences and Engineering 2017; 18, 1:22-30.

[15] Porter T. Some Categorical Results in the Category of Crossed Modules in Commutative Algebra. Journal of Algebra 1987; 109: 415-429.

[16] Wensley CD, Alp M, Odabaş A, Uslu EO. Crossed Modules and Cat[1] - Groups in GAP. Manual for the XMod share package for GAP4 Version 2.64. (http://www.gap-system.org/Packages/xmod.html) 2017.

[17] Whitehead JHC. Combinatorial Homotopy II. Bulletin of the American Mathematical Society 1949; 55: 453-496.

[18] Woronowicz SL. Differential Calculus on Compact Matrix Pseudogroups (quantum groups). Communications in Mathematical Physics 1989; 122: 125-170.