Erzincan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
2020, 13(ÖZEL SAYI-I), 76-82

Erzincan University
Journal of Science and Technology
2020, 13(SPECIAL ISSUE-I), 76-82

ISSN: 1307-9085, e-ISSN: 2149-4584

DOI: 10.18185/erzifbed.619098

e-Tümlenmiş Modüllerin Torsiyon Teorisine Göre Genelleştirilmiş Bir Versiyonu

Esra ÖZTÜRK SÖZEN[1*]

[1]Sinop Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Geliş / Received: 12/09/2019, Kabul / Accepted: 21/02/2020

Öz

Bu çalışmanın amacı e-tümlenmiş modüllerin torsiyon-teorik bir genelleştirmesini elde etmektir. Bunun için öncelikle bir modülün τ_e-küçük alt modülleri tanımlanarak temel özelliklerine değinildi. Ardından τ_e-tümlenmiş modül ve τ_e-oyuk modül kavramlarına yer verilerek bunlara ilişkin temel teorik özellikler irdelendi.

Anahtar Kelimeler: Kalıtsal torsiyon teorisi, τ_e-küçük alt modül, τ_e-tümlenmiş modül, τ_e-oyuk modül

A Generalized Version of e-Supplemented Modules Relative to a Torsion Theory

Abstract

The objective of this aim to obtain a torsion theoretic analogue of e-supplemented modules. For this, firstly we define τ_e-submodule of a module and give basic properties of this concept. After that, τ_e-supplemented modules and τ_e-hollow modules are introduced and investigated some fundamental properties of these modules.

Keywords: Hereditary torsion theory, τ_e-small submodule, τ_e-supplemented module, τ_e-hollow module.

1. Giriş

Öncelikli olarak belirtelim ki, Bu çalışmada R, M ve τ notasyonları ile sırasıyla birimli bir halka, üniter bir R-modül ve kalıtsal bir torsiyon teorisi temsil ediliyor olacaktır. M modülünün N (öz) alt modülü (‘$N < M$’) ‘$N \leq M$’ ile gösterilir. Bir M modülünün N alt modülü için $N + K = M$ koşulu yalnızca $K = M$ olduğunda sağlanıyorsa N ye M nin bir küçük alt modülü denir ve ‘$N \ll M$’ ile gösterilir. Buna karşılık, N alt modülünün M nin $\{0\}$ alt modülü haricindeki diğer tüm alt modülleri ile arakesiti sıfırdan farklı ise N ye M nin büyük alt modülü denir ve ‘$N \trianglelefteq M$’ ile gösterilir.

Son yıllarda, küçük alt modül kavramının genelleştirmesini içeren kaydadeğer çalışmaların varlığı dikkatleri çekmektedir (Zhou, 2000; Zhou and Zhang, 2011). Bu kavramlardan en göze çarpanlarını δ-küçük alt modüller ve e-küçük alt modüller (Koşar vd. (2015) bu kavramı literatüre g-küçük alt modül olarak atfetmiştir.) olarak belirtebiliriz.

*Sorumlu Yazar: esozen@sinop.edu.tr

Tümlenmiş modül, projektif örtü ve dolayısıyla yarı mükemmel modül kavramlarının verilmesinde anahtar rolü oynayan küçük alt modüller bu yönüyle modül ve halka teorinin her sürecinde merkezi bir konuma sahiptir. Dolayısıyla bunların biraz önce değindiğimiz genelleştirilmiş versiyonları ise torsiyon teorisine göre yeni varyasyonlarına erişmek için oldukça değerlidir.

$N \leq M$ ve $K \trianglelefteq M$ olmak üzere $N + K = M$ ifadesi yalnızca $K = M$ olduğunda gerçekleniyor ise N ye M nin e-küçük alt modülü denir ve '$N \ll_e M$' ile gösterilir (Zhou ve Zhang, 2011). $N \leq M$ için $N + K = M$ ve $N \cap K \ll_{(e)} K$ olacak şekilde bir $K \leq M$ alt modülü var ise K ya N nin M de bir (e-) tümleyeni denir. M modülünün her alt modülü M de bir tümleyene sahip ise M ye (e-) tümlenmiş modül denir. (Burada bahsi geçen (e-) tümleyen ve (e-) tümlenmiş modül kavramlarını Koşar vd. (2015) sırasıyla (g-) tümleyen ve (g-) tümlenmiş modül olarak irdelemiştir. Küçük alt modül, büyük alt modül, δ-küçük alt modül, e-küçük alt modül gibi temel bilgilerin detaylarına erişmek için sırasıyla Clark vd. (2006), Zhou (2000), Quynh vd. (2013) tarafından yapılan çalışmalar okuyucuya refere edilebilir.

Bu çalışmanın amacı e-tümlenmiş modüller için bilinen kavramların ve sonuçların torsiyon teorik versiyonlarını elde etmektir. Buna geçmeden önce Materyal ve metod bölümünde torsiyon teorisinde kullanılan τ-torsiyon modül, τ-torsiyon serbest modül, τ-yoğun, τ-pür ve τ-büyük alt modül gibi bilinmesi gereken temel kavramlara yer verilmiştir. Ayrıca çalışma içerisinde τ_e-oyuk modüller tanımlanarak temel özellikleri irdelenmiştir. Bu çalışmanın sonunda e-tümlenmiş modüllerden daha genel olan τ_e-tümlenmiş modüller literatüre kazandırılmıştır. Bununla birlikte, e-tümlenmiş (g- tümlenmiş) modüllerin bilinen tüm genelleştirilmiş versiyonlarının torsiyon teorik olarak irdelenmesini sağlayabilecek çalışmaların zemini oluşturulmuştur.

Sonuç olarak aşağıdaki hiyerarşiden bahsetmek mümkündür:

tümlenmiş modül → δ-tümlenmiş modül → e-tümlenmiş modül → τ-e-tümlenmiş modül

2. Materyal ve Metot

Tanım 2.1: R-mod da bir τ-torsiyon teorisi aşağıdaki koşulları gerçekleyen $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ sınıflarının ikilisidir.

1. $\mathcal{T} \cap \mathcal{F} = \{0\}$.
2. $T \longrightarrow M \longrightarrow 0$ dizisi tam ve $T \in \mathcal{T}$ ise $M \in \mathcal{T}$ dir.
3. $0 \longrightarrow M \longrightarrow F$ dizisi tam ve $F \in \mathcal{F}$ ise $M \in \mathcal{F}$ dir.
4. Her M modülü için $0 \longrightarrow T \longrightarrow M \longrightarrow F \longrightarrow 0$ dizisi tam olacak şekilde $T \in \mathcal{T}$ ve $F \in \mathcal{F}$ modülleri vardır (Bland, 1998).

Tanım 2.2: $M \in \mathcal{T}$ ise M ye τ-torsiyon modül; $M \in \mathcal{F}$ ise M ye τ-serbest torsiyon modül denir (Bland, 1998).

Tanım 2.3: $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ τ-torsiyon teorisinde $\tau(M) = \sum\{N \leq M |\, N \in \tau\}$ olmak üzere

$\mathcal{T} = \{M \in R - mod |\, \tau(M) = M\}$;
τ-torsiyon modüllerin sınıfıdır.

$\mathcal{F} = \{M \in R - mod |\, \tau(M) = 0\}$;
τ-serbest torsiyon modüllerin sınıfıdır (Bland, 1998).

Tanım 2.4: $\mathcal{T}$ sınıfı alt modüller altında kapalı ise yani içerdiği τ-torsiyon modüllerin her alt modülü de τ-torsiyon ise τ ya kalıtsal torsiyon teorisi denir (Bland, 1998).

Tanım 2.5: $\mathcal{F}$ sınıfı homomorfik görüntüler altında kapalı ise τ ya eşkalıtsal torsiyon teorisi denir (Bland, 1998).

Önerme 2.6: $\mathcal{T}$ sınıfı homomorfik görüntüler, direkt toplamlar ve genişlemeler altında kapalıdır (Bland, 1998).

Önerme 2.7: $\mathcal{F}$ sınıfı alt modüller, direkt çarpımlar ve genişlemeler altında kapalıdır (Bland, 1998).

Tanım 2.8: M bir modül ve $N \leq M$ olsun. $M/_N$ bölüm modülü τ-torsiyon ise N ye M nin τ-yoğun alt modülü denir ve $''N \leq_{\tau-d} M''$ ile gösterilir (Bland, 1998).

Tanım 2.9: M bir modül ve $N \leq M$ olsun. $M/_N$ bölüm modülü τ-serbest torsiyon ise N ye M nin τ-pür alt modülü denir ve $''N \leq_{\tau-p} M''$ ile gösterilir. Ayrıca M modülünün tüm τ-yoğun alt modüllerinin kümesi $''\mathcal{D}_\tau(M)''$; tüm τ-pür alt modüllerinin kümesi $''\mathcal{P}_\tau(M)''$ ile gösterilir. Buna göre M, $\tau(M) \in \mathcal{P}_\tau(M)$ olduğu kolaylıkla görülebilir (Bland, 1998).

Tanım 2.10: M bir modül ve $N \leq M$ olsun. $N \trianglelefteq M$ ve $N \leq_{\tau-d} M$ ise N ye M nin τ-büyük alt modülü denir ve $''N \trianglelefteq_\tau M''$ ile gösterilir (Bland, 1998).

Her τ-büyük alt modülün büyük alt modül olduğu açıktır. Ve tanımları gereği τ-büyük alt modülün büyük alt modülün bir genelleştirilmiş versiyonu değil özelleştirilmişi olduğuna ulaşılabilir.

Bu bölümde verilen tüm tanım ve diğer bilgilerin detaylı formu için Bland (1998) a ait kaynak incelenebilir.

3. Bulgular

Tanım 3.1: M bir modül ve $N \leq M$ olsun. $K \trianglelefteq_\tau M$ için $N + K = M$ ifadesi yalnızca $K = M$ olduğunda gerçekleniyorsa N ye M nin τ_e-küçük alt modül denir ve $''N \ll_{\tau_e} M''$ ile gösterilir.

Bir modülün her e-küçük alt modülü τ_e-küçüktür. τ-torsiyon modüller için tersi de söylenebilir.

Şimdi τ_e-küçük alt modüllerin özelliklerini aşağıdaki önerme ile verelim.

Önerme 3.2: M bir modül olsun.

1. $K, L, N \leq M$ ve K$\leq N$ olsun.
   a) $N \ll_{\tau_e} M$ ise $K \ll_{\tau_e} M$ ve $N/_K \ll_{\tau_e} M/_K$ dır.
   b) $N + L \ll_{\tau_e} M \Leftrightarrow N \ll_{\tau_e} M$ ve $L \ll_{\tau_e} M$ dir.

2. τ_e-küçük alt modüllerin homomorfik görüntüsü de τ_e-küçük alt modüldür.

3. $K_1 \leq M_1 \leq M, K_2 \leq M_2 \leq M$ ve $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Bu durumda, $K_1 \oplus K_2 \ll_{\tau_e} M_1 \oplus M_2 \Leftrightarrow K_1 \ll_{\tau_e} M_1$ ve $K_2 \ll_{\tau_e} M_2$ dir.

4. $K \leq N \leq M$, $K \ll_{\tau_e} M$ ve N, M nin direkt toplam terimi ise $K \ll_{\tau_e} N$ dir.

Tanım 3.3: M bir modül ve $U, V \leq M$ olsun. $M = U + V$ ve bir $T \trianglelefteq_\tau V$ için $M = U + T$ olması $T = V$ olmasını gerektiriyorsa V ye U nun M de τ_e-tümleyeni denir. Eğer M nin her alt modülü τ_e-tümleyene sahipse M ye τ_e-tümlenmiş modül denir.

E-tümlenmiş her modül τ_e-tümlenmiştir.

Lemma 3.4: M bir modül ve $U, V \leq M$ olsun. U alt modülünün M de bir V τ_e-tümleyene sahip olması için gerek ve yeter koşul $U + V = M$ ve $U \cap V \ll_{\tau_e} V$ olmasıdır.

İspat: ($\Longrightarrow$): V, U nun M de τ_e-tümleyeni olsun. Bu durumda $U + V = M$ olduğu açıktır. $U \cap V \ll_{\tau_e} V$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bir $T \trianglelefteq_\tau V$ için $U \cap V + T = V$ olsun. Buradan $M = U + V = U + T$ olup hipotez gereği $T \trianglelefteq_\tau V$ için $T = V$ bulunur.

($\Longleftarrow$): $U + V = M$ ve $U \cap V \ll_{\tau_e} V$ olsun. $T \trianglelefteq_\tau V$ için $M = U + T$ ise modüler kuralından $V = (U + T) \cap V = T + (U \cap V)$ olup $U \cap V \ll_{\tau_e} V$ ve $T \trianglelefteq_\tau V$ olduğundan $T = V$ bulunur.

Lemma 3.5: M bir modül ve $M_1, U \leq M$ olsun. M_1 τ_e-tümlenmiş ve $M_1 + U, M$ de bir τ_e-tümleyenine sahip ise U da M de bir τ_e-tümleyenine sahiptir.

İspat: $X, M_1 + U$ nun M de bir τ_e-tümleyeni olsun. Bu durumda $(M_1 + U) + X = M$ ve $(M_1 + U) \cap X \ll_{\tau_e} X$ dir. M_1 τ_e-tümlenmiş olduğundan $M_1 \cap (U + X), M_1$ de bir Y τ_e-tümleyeni sahiptir. Bu durumda $[M_1 \cap (U + X)] + Y = M_1$ ve $[M_1 \cap (U + X)] \cap Y \ll_{\tau_e} Y$ dir. Buradan $M = (M_1 + U) + X = [M_1 \cap (U + X)] + Y + U + X = U + X + Y$ ve $U \cap (X + Y) \leq [X \cap (U + Y)] + [Y \cap (U + X)] \leq [X \cap (M_1 + U)] + [(Y \cap M_1) \cap (U + X)] \ll_{\tau_e} X + Y$

elde edilir. Böylece $X + Y$ nin U nun M de bir τ_e-tümleyeni olduğu görülür.

Yukarıdaki Lemma kullanılarak sonlu sayıda τ_e-tümlenmiş modülün toplamının da τ_e-tümlenmiş olduğu söylenebilir.

Teorem 3.6: M_1 ve M_2 τ_e-tümlenmiş modüller ise $M_1 + M_2$ de τ_e-tümlenmiştir.

İspat: Yukarıdaki Lemma gereği açıktır.

Sonuç 3.7: Sonlu sayıda τ_e-tümlenmiş modülün toplamı da τ_e-tümlenmiştir.

Lemma 3.8: M bir modül ve $X \leq U \leq M$ olsun. V, U nun M de τ_e-tümleyeni ise $(V + X)/X$ de U/X in M/X de bir τ_e-tümleyenidir.

İspat: V, U nun M de τ_e-tümleyeni olduğundan $U + V = M$ ve $U \cap V \ll_{\tau_e} V$ yazılabilir. Bu durumda $[(U \cap V) + X]/X \ll_{\tau_e} (V + X)/X$ dir. Ayrıca $M = U + V$ olduğundan $M/X = (U + V)/X = U/X + (V + X)/X$ ve $U/X \cap \left((V + X)/X\right) = [(U \cap V) + X]/X \ll_{\tau_e} (V + X)/X$ olduğundan $(V + X)/X$, U/X in M/X de bir τ_e-tümleyenidir.

Teorem 3.9: M τ_e-tümlenmiş bir modül ise her faktör modülü de τ_e-tümlenmiştir.

Sonuç 3.10: τ_e-tümlenmiş her modülün homomorfik görüntüsü de τ_e-tümlenmiştir.

Tanım 3.11: Bir M modülü için $Rad_{\tau_e}(M) = \cap\{N \leq_{max} M \mid N \trianglelefteq_\tau M\}$ dir.

Lemma 3.12: Bir M modülü için $Rad_{\tau_e}(M) = \sum_{L \ll_{\tau_e} M} L$ dir.

İspat: L, M nin herhangi bir τ_e-küçük alt modülü olsun. L nin maksimal ve aynı zamanda τ-büyük olan M nin her alt modülü tarafından kapsandığı gösterilmelidir. Bunun için aksine, M nin bir T maksimal, τ-büyük alt modülü için $L \nsubseteq T$ olduğu kabul edilirse T nin maksimalliği gereği $L + T = M$ olur. $L \ll_{\tau_e} M$ ve $T \trianglelefteq_\tau M$ olduğundan $T = M$ çelişkisi elde edilir. Öyleyse, L, M nin her maksimal τ-büyük alt modülünde kapsanır.

Yani $\sum_{L \ll_{\tau_e} M} L \subseteq Rad_{\tau_e}(M)$ dir. Tersine her $x \in Rad_{\tau_e}(M)$ için $Rx \ll_{\tau_e} M$ olduğu gösterilirse $Rx \subseteq \sum_{L \ll_{\tau_e} M} L$ olacağından $Rad_{\tau_e}(M) \subseteq \sum_{L \ll_{\tau_e} M} L$ elde edilir. Bunun için, $Rx \ll_{\tau_e} M$ olmadığı varsayılırsa $\emptyset \neq \Omega = \{T \trianglelefteq_{\tau} M \mid x \notin T, Rx + T = M\}$ kümesinin her zincirinin kapsama bağıntısına göre bir en küçük üst sınırı mevcuttur. Öyleyse Zorn Lemması gereği bir $K \in \Omega$ maksimal elemanı mevcuttur. Dolayısıyla K, M nin τ-büyük maksimal bir alt modülü olup $Rad_{\tau_e}(M) \subseteq K$ olup $x \notin K$ olduğundan $x \notin Rad_{\tau_e}(M)$ çelişkisi elde edilir. Bu durumda, her $x \in Rad_{\tau_e}(M)$ için $Rx \ll_{\tau_e} M$dir. Buradan $x \in Rx \subseteq \sum_{L \ll_{\tau_e} M} L$ olup $Rad_{\tau_e}(M) \subseteq \sum_{L \ll_{\tau_e} M} L$ bulunur.

Sonuç 3.13: Bir M modülü için $Rad(M) \subseteq \delta(M) \subseteq Rad_e(M) \subseteq Rad_{\tau_e}(M)$ dir.

Lemma 3.14: Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler sağlanır.

1. Her $m \in Rad_{\tau_e}(M)$ için $Rm \ll_{\tau_e} M$ dir.
2. $N \leq M$ ise $Rad_{\tau_e}(N) \leq Rad_{\tau_e}(M)$ dir.
3. $f: M \longrightarrow N$ modül homomorfizması olmak üzere $f(Rad_{\tau_e}(M)) \leq Rad_{\tau_e}(N)$ dir.
4. $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ ise $Rad_{\tau_e}(M) = \bigoplus_{i \in I} Rad(M_i)$ dir.

İspat: Kaynak (Wisbauer 1991, Bölüm 21.6) incelenerek benzer şekilde ispat yapılabilir.

Tanım 3.15: Bir M modülünün her öz alt modülü τ_e-küçük ise M ye τ_e-oyuk modül denir. Bir R halkası R-modül olarak τ_e-oyuk ise R ye τ_e-oyuk halka denir.

Yarı basit modüllerin ve e-oyuk modüllerin τ_e-oyuk olduğu açıktır. Ayrıca τ-torsiyon bir modülün her τ_e-oyuk alt modülünün de e-oyuk olduğu açıktır. Diğer taraftan $\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}$-modülü τ_e-oyuk olup oyuk olmayan bir modül örneğidir.

Önerme 3.16: Bir M modülünün τ_e-oyuk olması için gerek ve yeter koşul M nin her öz τ-büyük alt modülünün M de küçük olmasıdır.

İspat: ($\Longrightarrow$): N, M nin öz τ-büyük alt modülü olmak üzere N nin M de küçük olmadığını kabul edelim. Bu durumda Bir $W < M$ öz alt modülü için $W + N = M$ dir. $N \trianglelefteq_{\tau} M$ ve M τ_e-oyuk olduğundan $W \ll_{\tau_e} M$ olup $N = M$ çelişkisi elde edilir. M τ_e-oyuk iken her öz τ-büyük alt modülü M de küçüktür.

($\Longleftarrow$): M nin her öz τ-büyük alt modülünün M de küçük olsun. N, M nin herhangi bir öz alt modülü olmak üzere $W \trianglelefteq_{\tau} M$ için $N + W = M$ olsun. $W \neq M$ ise hipotez gereği $W \ll M$ olduğundan $N = M$ çelişkisi elde edilir. Bu durumda $W = M$ olup $N \ll_{\tau_e} M$ dir.

Önerme 3.17: Bir M modülü için $Rad_{\tau_e}(M) \neq M$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

1. M modülü τ_e-oyuktur.

2. M modülü lokaldir.

3. M modülü oyuktur.

İspat: ($1 \Longrightarrow 2$): M modülü τ_e-oyuk ve T de M nin herhangi bir öz alt modülü olsun. Bu durumda $T \ll_{\tau_e} M$ olduğundan $T \leq Rad_{\tau_e}(M)$ dir. Hipotez gereği $Rad_{\tau_e}(M) \neq M$ olduğundan, $Rad_{\tau_e}(M), M$ nin her öz alt modülünü içeren en büyük öz alt modülü olur. Öyleyse M modülü lokaldir.

($2 \Longrightarrow 3$) ve ($3 \Longrightarrow 1$) önermelerinin doğruluğu açıktır.

Önerme 3.18: τ_e-oyuk modüller τ_e-tümlenmiştir.

İspat: τ_e-oyuk modül tanımı gereği M modülünün kendisi her alt modülünün τ_e-tümleyeni olur. Böylelikle iddia doğrulanır.

Önerme 3.19: M bir öz τ-büyük alt modüle sahip sonlu üretilmiş bir modül olsun. Bu durumda M nin her öz τ-büyük alt modülünü içeren bir maksimal τ-büyük alt modülü vardır.

İspat: K, M nin herhangi bir öz τ-büyük alt modülü olsun. M sonlu üretilmiş olduğundan her öz alt modülü içeren bir maksimal alt modül mevcuttur. Özel olarak K yı da içeren bir $P < M$ maksimal alt modülü vardır. $K \leq P < M$ ve $K \trianglelefteq_\tau M$ olduğundan $P \trianglelefteq_\tau M$ olup istenen elde edilir.

Önerme 3.20: M, $Rad_{\tau_e}(M) \neq M$ olacak şekilde bir modül olsun. M nin her öz τ-büyük alt modülü M nin bir maksimal τ-büyük alt modülün tarafından kapsanırsa $Rad_{\tau_e}(M) \ll_{\tau_e} M$ dir.

4. Sonuç

Sonuç ve Tartışma: Modül ve halka teoride bilinen kavramların genellemelerinin ve torsiyon teorik kurgulamalarının yapılmasının temeli, bir modülün belli bir özelliğini tüm alt modülleri üzerinde araştırmak yerine, onun τ-yoğun ya da τ-pür alt modüllerine kendimizi kısıtlayarak araştırmaktır. Bu amaçla çalışmamızda bir modülün τ-büyük alt modüllerinden (ki aynı zamanda τ-yoğun alt modüllerdir) faydalanarak tanımladığımız τ_e-tümlenmiş modüller ile e-tümlenmiş modüllerin yeni bir genelleştirmesi elde edilmiş ve temel özellikleri irdelenmiştir.

Öneriler: Bu çalışma ile birlikte e-tümlenmiş modüllerin kalıtsal bir torsiyon teorisine göre yeni bir genelleştirilmesi elde edilmiştir. Bu yönüyle aslında bilinen tüm diğer tümlenmiş modül çeşitlendirmelerinin, üzerinde modellenebileceği yeni bir modül türü okuyucuya sunulmuştur. Bu bağlamda τ_e-tümlenmiş modüllerin genelleştirilmesi başlığı altında pek çok varyasyonel çalışma hazırlanabilir.

Teşekkür: Bu çalışmanın değerlendirilmesi ve geliştirilmesi aşamasında değerli katkılarını esirgemeyen hakem hocalarımıza teşekkürü bir borç bilirim.

5. Kaynaklar

Bland, P. E. 1998. ‘Topics in Torsion Theory’, Mathematical Research, 103, Wiley-VCH, Berlin.

Charalambides, S. and Clark, J. 2007. ‘CS Modules Relative to a Torsion Theory, Mediterr. J. Math., 4, 291-308.

Clark, J., Lomp, C., Vanaja, N., and Wisbauer, R. 2006. Lifting modules: Supplements and Projectivity in Module Theory, *Birkhauser,* Verlag, Basel.

Koşan M.T. 2007. δ-lifting and δ-supplemented Modules, Algebra Colloqium, 14(1), 53 - 60.

Koşar, B., Nebiyev, C. and Sökmez, N. 2015. ‘G-supplemented Modules’, Ukrainian Mathematical Journal, 67(6): 861-864.

Quynh, T. C. and Tin, P. H. 2013. ‘Some Properties of e-supplemented and e-lifting Modules’, Vietnam Journal of Mathematics, 41(3), 303-312.

Wisbauer, R. 1991. Foundations of Module and Ring Theory, Gordon and Breach.

Zhou, Y. 2000. Generalizations of Perfect, Semiperfect, and semiregular rings, Algebra Colloq., 7(3), 305-318.

Zhou, D. X. and Zhang, X. R. 2011. 'Small-essential submodules and Morita duality' Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 35(6), 1051-1062.