



FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ GÖZENEKLİ KİRİŞLERİN SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

Vedat TAŞKIN ^{1,*}, Pınar Aydan DEMİRHAN ²

¹ Makine Mühendisliği Bölümü, Mühendislik Fakültesi, Trakya Üniversitesi, Edirne, Türkiye, vedataskin@trakya.edu.tr

² Makine Mühendisliği Bölümü, Mühendislik Fakültesi, Trakya Üniversitesi, Edirne, Türkiye, pinard@trakya.edu.tr

ÖZET

Malzeme özelliklerinde kesit boyunca sürekliliği sağlayan fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler tabakalı kompozitlerin yerini almaya başlamıştır. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin üretimi esnasında malzeme içinde bir miktar gözenek hapsediği görülmektedir. Bu çalışmada gözenekli fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin serbest titreşim analizi gerçekleştirilmiştir. Malzeme özelliklerinin kesit boyunca değişimi karışımlar kuralı yoluyla tanımlanırken, gözeneklilik oranı bir katsayı ile ilave edilmiştir. Gözenekli fonksiyonel derecelendirilmiş kiriş denklemi Hamilton prensibi ile elde edilmiş, basit destekli kiriş için Navier yaklaşımı kullanılarak çözüm elde edilmiştir. Doğal frekans değerlerinin kiriş kalınlığı, hacimsel değişim üsteli, gözeneklilik dağılımı ve oranı ile değişimi incelenmiştir. Elde edilen değerlerin literatürle uyumlu olduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Fonksiyonel derecelendirilmiş Malzemeler, Gözenekli yapılar, Kiriş, Serbest titreşim, Doğal frekans

FREE VIBRATION ANALYSIS OF FUNCTIONALLY GRADED POROUS BEAM

ABSTRACT

Functionally graded materials providing continuity throughout the cross-section of material properties have begun to replace laminated composites. It is seen that during the production of functionally graded materials, a number of pores are trapped in the material. In this study, the free vibration analysis of porous functionally graded beams is performed. The variation of material properties across the cross-section is defined by the rule of mixtures with a porosity coefficient. The equation of functionally graded porous beam is obtained by the Hamilton principle. For a simply supported beam, the solution is obtained by using the Navier's approach. Variation of natural frequencies with respect to beam thickness, power-law coefficient, porosity distribution, and rate are investigated. The obtained results are compatible with the literature.

Keywords: Functionally graded materials, Porous structures, Beam, Free vibration, Natural frequency

1. GİRİŞ

İki veya daha fazla malzemenin makroskopik ölçekte bir araya getirilmesi ile oluşan kompozit malzemeler yüksek sıcaklık, yüksek dayanım ve düşük ağırlık gibi çeşitli özellikleri bir arada sunabilen, farklı malzeme kombinasyonları ile farklı ihtiyaçlara cevap verebilecek şekilde tasarlanabilen malzemelerdir [1]. Günümüzde yaygın olarak kullanılan tabakalı kompozit malzemeler farklı özellikteki malzemelerin katmanlar halinde bir araya getirilmesi ile oluşturulmakta, farklı malzemelerden veya dizilimlerden oluşan bu katmanlar nedeniyle malzeme içerisinde sıcaklık ve gerilme dağılımında süreksizlikler meydana gelmektedir. Bu süreksizliklerin doğurduğu istenmeyen sonuçlardan kaçınmak için malzeme özelliklerinin bir fonksiyona bağlı olarak değiştiği fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler kavramı ortaya atılmıştır [2]. Malzeme özelliklerindeki bu kademeli geçiş sayesinde bir yüzeyden diğerine geçerken sürekli ve düzgün bir değişim görülür ve bu ara yüzey problemlerini yok ederken, gerilme yığılmalarının azalmasını sağlamaktadır [3]. Yüksek sıcaklık uygulamaları için tasarlanan termal bariyer plakalarda metal ve seramik malzemeler bir arada kullanılmaktadır. Bu

*Sorumlu Yazar: vedataskin@trakya.edu.tr

Geliş: 12.03.2019 Yayın: 28.02.2020

malzemeler arasında kademeli bir geçiş sağlanarak oluşan gerilme yığılmalarının önüne geçilir ve yapının dayanıklılığı artırılmış olur. Bu uygulamalarda yapının bir yüzeyinde seramik malzeme zengin iken diğer yüzeyinde metal malzeme zengin olmakta ve bu iki malzemenin hacimsel dağılımı bir yüzeyden diğerine kesit boyunca belirlenen bir fonksiyon doğrultusunda değişim göstermektedir [3].

Fonksiyonel derecelendirilmiş yapıların yük altında eğilme davranışlarının ve serbest titreşim frekanslarının bilinmesi oldukça önemlidir. İnce plak ve kirişler için hassas sonuçlar üreten klasik teori kompozit plak ve kirişlerin analizinde kayma deformasyonlarının etkisini göz ardı ederek yeterli hassasiyete ulaşamamaktadır [4]. Dikine kayma genlemelerinin dağılımını lineer kabul ederek hesaba katan Birinci Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi, plak alt ve üst sınırlarında kayma gerilmesinin sıfır olması koşulunu sağlayamadığı için bir düzeltme katsayısına ihtiyaç duyar. Kayma gerilmelerinin dağılımını daha gerçekçi bir şekilde ele alan çeşitli yüksek mertebe teoriler ortaya atılmıştır. Ancak bu teoriler seri açılımlarının yüksek mertebe terimlerini içerdikleri için hesaplamaları oldukça karmaşıktır. Shimpi [5] dikine yerdeğiştirmeyi hesaplarken kayma ve eğilme etkilerini birbirinden ayıran iki değişkenli kayma deformasyon teorisini öne sürmüştür. Kayma ve eğilme etkilerinin birbirinden ayrılması hesaplamayı kolaylaştırmıştır. Bu teoride yönetici denklemler, sınır koşulları ve moment ifadeleri klasik plak teorisine çok benzemekle birlikte kayma düzeltme katsayısı kullanımını gerektirmemesi teoriyi cazip hale getirmektedir. Teori Shimpi ve Patel [6] tarafından ortotropik plaklar için, Kim vd. [7] tarafından tabakalı kompozitler için, Mechab vd.[8] tarafından fonksiyonel derecelendirilmiş plakların eğilme analizi için kullanılmıştır. Demirhan ve Taşkın [9, 10, 11] teoriyi sandviç plakların eğilme analizinde ve gözenekli fonksiyonel derecelendirilmiş plakların eğilme ve titreşim analizinde kullanmıştır. İşlem kolaylığı ve yüksek mertebe teorilere yakın hassasiyette sonuçlar üretebilmesi sayesinde iki değişkenli kayma deformasyon teorisi pek çok çalışmada kullanılmıştır [12-17].

Literatürde fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin statik ve dinamik analizi için pek çok çalışma yer almaktadır. Bu çalışmaların büyük çoğunluğu yapısında gözenek bulundurmeyen fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler ile ilgilidir ancak literatürde yer alan fonksiyonel derecelendirilmiş yapı üretimi ile ilgili çalışmaların sonuçlarından anlaşıldığı üzere üretim yöntemlerinden kaynaklanan sebeplerden dolayı fonksiyonel derecelendirilmiş yapı içinde gözenekler oluşmaktadır. Gözenek oluşumunun sebepleri arasında karıştırma ve döküm sırasında matris içine hava girmesi, katılaşma sürecinde ortaya çıkan su buharının matris içinde hapsolmesi veya sinterleme prosesinde sinterleme ile katılaşma süreçleri arasındaki sıcaklık farkının yüksek olması sayılabilir [18-21]. Zhu vd.[22] yaptıkları çalışmada ZrO_2-NiCr fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeyi toz metalürjisi yöntemi ile üretmişler ve malzeme içinde dağılmış gözeneklerin bulunduğunu ve gözeneklilik oranının kimi durumlar için %20'lere ulaşabildiğini görmüşlerdir. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme üretiminde ortaya çıkan bu gözenekliliğin önüne geçmek için çeşitli çalışmalar yapılmakla birlikte, gözenekli fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin davranışlarının tahmini de önemli bir araştırma konusu olmaktadır. Literatürde gözenekli fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerle ilgili çalışmalar son yıllarda hız kazanmıştır ancak hala bu malzemeler ile ilgili çalışılmamış konular bulunmaktadır. Chen vd. [23] gözenekli fonksiyonel derecelendirilmiş sandviç kirişlerin nonlineer serbest titreşim davranışını incelemiştir. Hadji vd. [24] gözenek içeren fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin serbest titreşim ve eğilme analizi için bir analitik çözüm sunmuştur. Tang vd. [25] mikro ve nano ölçekli gözenekli kirişlerin eğilme analizinde bağlaşım etkisini incelemiştir. Kitipornchai vd. [26] grafen yaprak takviyeli gözenekli fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin serbest titreşim ve elastik burkulma analizini Timoshenko kiriş teorisini kullanarak Ritz metoduyla elde etmiştir. Al Rjoub ve Hamad [27] transfer matris metodunu kullanarak fonksiyonel derecelendirilmiş gözenekli kirişin serbest titreşimini incelemiştir. Ebrahimi vd. [28] gözenek içeren fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin titreşiminde termal etkileri analiz etmiştir. Akbaş [29] fonksiyonel derecelendirilmiş gözenekli kalın kirişlerin zorlanmış titreşim analizini sonlu elemanlar yöntemi ile yapmıştır. Ebrahimi ve Jafari [30] gözenekli fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin termo-mekanik titreşim analizini yapmıştır. Ulusal ve uluslararası literatürde gözenek içeren fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin titreşim analizini sunan çalışma sayısı sınırlıdır. Bu çalışmalar arasında kayma ve eğilme etkilerini ayrı ayrı hesaba katan iki

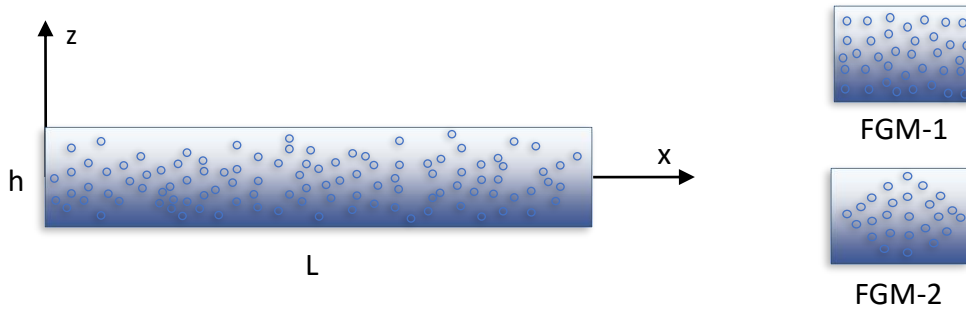
değişkenli kayma deformasyon teorisinin kullanıldığı çalışmaya rastlanmamıştır. Bu motivasyonla, bu çalışmada iki değişkenli plak teorisi kullanılarak gözenek içeren fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin titreşim analizi yapılmıştır. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin etkin özelliklerinin değişimi karışımlar kuralı yardımıyla tanımlanmıştır. Malzeme içerisindeki gözenek dağılımı homojen ve homojen olmayan dağılım olarak ele alınmıştır. Bu dağılım ve gözeneklilik oranı bir katsayı ile belirtilmiştir. Gözenekli fonksiyonel derecelendirilmiş kirişin hareket denklemi Hamilton prensibiyle elde edilmiştir. Navier çözüm yaklaşımı ile analitik çözüm elde edilmiştir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Farklı fazlar içeren malzemelerin özelliklerinin tanımlanması için çeşitli karışım kuralları ortaya atılmıştır. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin etkin özelliklerinin değişiminin tanımlanmasında da bu yaklaşımlardan yararlanılmaktadır. Bu yaklaşımlardan biri olan Voigt tipi karışımlar kuralında (Denklem 1) malzeme özelliklerinin kesit boyunca hacimsel değişimi istenen bir fonksiyona bağlı olarak tanımlanmaktadır [1]. $P(z)$ kesit boyunca malzeme özelliklerinden birini temsil etmektedir. P_1 ve P_2 sırasıyla alt ve üst yüzey özellikleridir. $V(z)$ kesit boyunca malzeme özelliklerinin hacimsel olarak değişimini veren hacimsel değişim fonksiyonudur. Hacimsel değişim fonksiyonu için farklı fonksiyonlar tercih edilebilir. Bu çalışmada en yaygın kullanılan hacimsel değişim fonksiyonlarından biri olan üstel fonksiyon kullanılmıştır (Denklem 2). Burada k hacimsel değişim üsteli olarak adlandırılmaktadır. k 'nın sıfır değeri için malzeme kesit boyunca homojen olmakta, artan k değeri ile malzeme özellikleri kesit boyunca fonksiyonel olarak değişmektedir.

$$P(z) = P_1 + (P_2 - P_1)V(z) \quad (1)$$

$$V(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k \quad (2)$$



Şekil 1. Gözenekli fonksiyonel derecelendirilmiş kiriş

Uzunluğu L , yüksekliği h olan fonksiyonel derecelendirilmiş gözenekli bir kiriş (Şekil 1) düşünülmüştür. Gözenekli fonksiyonel derecelendirilmiş kirişin elastiklik modülünün kalınlıkla değişimi $E(z)$, yoğunluk değişimi $\rho(z)$ fonksiyonu ile tanımlanmıştır. Literatürde gözenekli fonksiyonel derecelendirilmiş yapılarla ilgili çalışmalarda kesit boyunca gözenek dağılımı tanımlamak üzere çeşitli modeller geliştirilmiştir. Bu modellerden ilki kesit içinde gözeneklerin homojen dağılımını kabul eder. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme üretim yöntemleri üzerine yapılan çalışmalarda gözenek dağılımının çoğu durumda homojen olmadığı gözlenmiştir [22]. Gözenekliliğin kesitin orta bölgesinde arttığı, yüzeylere yaklaştıkça lineer olarak azaldığı gözlenmiş ve buna uygun bir model geliştirilmiştir [13]. Bu çalışmada homojen gözenek dağılımı (FGM-1) ve gözeneklerin orta kesitte yoğunlaştığı homojen olmayan gözenek dağılımı (FGM-2) modelleri ele alınmıştır.

$$\text{FGM-1} \quad E(z) = E_m + (E_s - E_m) \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^k - \frac{e}{2}(E_s - E_m) \quad (3)$$

$$\rho(z) = \rho_m + (\rho_s - \rho_m) \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^k - \frac{e}{2}(\rho_s - \rho_m) \quad (4)$$

$$\text{FGM-2} \quad E(z) = E_m + (E_s - E_m) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^k - \frac{e}{2} (E_s - E_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad (5)$$

$$\rho(z) = \rho_m + (\rho_s - \rho_m) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^k - \frac{e}{2} (\rho_s - \rho_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad (6)$$

Burada E_m ve E_s sırasıyla metal ve seramik malzemenin elastiklik modülünü, ρ_m ve ρ_s sırasıyla metal ve seramik malzemenin yoğunluğunu, k hacimsel değişim üstelini ve e malzemenin gözeneklilik oranını temsil etmektedir. Gözeneklilik oranı e 'nin sıfır olması durumu gözenek içermeyen fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeyi temsil etmektedir. e 'nin değeri arttıkça malzeme içindeki gözenek oranı artmakta ve elastiklik modülü azalmaktadır. Hacimsel değişim üsteli k 'nın sıfır olması malzemenin seramik olduğu durumu temsil ederken, k değeri arttıkça malzemenin metalik özelliği artmaktadır. k 'nın sıfırdan farklı değerleri için fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin alt yüzeyi metal iken üst yüzeye doğru seramik özellik artmakta ve üst yüzey tamamen seramik özellik göstermektedir.

İki değişkenli kayma deformasyon teorisinde z yönündeki yer değiştirme ifadesi eğilme (w_b) ve kayma (w_s) bileşenlerine ayrılmıştır. Yer değiştirme alanı Denklem 7 ve 8'deki gibi tanımlanmıştır.

$$u = u_0(x) - z \frac{dw_b}{dx} - f(z) \frac{dw_s}{dx} \quad (7)$$

$$w = w_b(x) + w_s(x) \quad (8)$$

Yerdeğiştirme ifadelerinin tanımlanmasında Denklem 9'da verilen sinüsoidal şekil fonksiyonu [31] kullanılmıştır.

$$f(z) = z - \frac{h}{\pi} \sin \frac{\pi z}{h} \quad (9)$$

Genleme yerdeğiştirme ilişkileri Denklem 10-11'de verilmiştir.

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} - z \frac{d^2w_b}{dx^2} - f(z) \frac{d^2w_s}{dx^2} \quad (10)$$

$$\gamma_{xz} = \left(1 - \frac{df(z)}{dz} \right) \frac{dw_s}{dx} \quad (11)$$

Gerilme genleme ilişkileri Denklem 12-13'de verilmiştir.

$$\sigma_x = Q_{11}(z) \varepsilon_x = \frac{E(z)}{(1-\nu^2)} \left[\frac{du}{dx} - z \frac{d^2w_b}{dx^2} - f(z) \frac{d^2w_s}{dx^2} \right] \quad (12)$$

$$\tau_{xz} = Q_{55}(z) \gamma_{xz} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \left[\left(1 - \frac{df(z)}{dz} \right) \frac{dw_s}{dx} \right] \quad (13)$$

Katılık matrisi elemanları Denklem 14-15'de verilmiştir.

$$Q_{11}(z) = \frac{E(z)}{(1-\nu^2)} \quad (14)$$

$$Q_{55}(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (15)$$

Hareket denklemlerinin elde edilmesinde Hamilton prensibinden yararlanılmıştır. δU , δV ve δK sırasıyla genleme enerjisi, dış kuvvet tarafından yapılan iş ve kinetik enerjinin varyasyonel ifadesidir.

$$\int (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0 \quad (16)$$

$$\delta U = \int_0^L \int_A (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dx = \int_0^L \left(N \frac{d\delta u}{dx} - M_b \frac{d^2 \delta w_b}{dx^2} - M_s \frac{d^2 \delta w_s}{dx^2} + Q \frac{d\delta w_s}{dx} \right) dx \quad (17)$$

$$\delta V = \int_0^L q \delta w dx = \int_0^L q \delta (w_b + w_s) dx \quad (18)$$

$$\delta K = \int_0^L \int_A \rho(z)(\dot{u}\delta\dot{u} + \dot{w}\delta\dot{w}) dA dx = \int_0^L \left\{ I_0 [\dot{u}\delta\dot{u} + (\dot{w}_b + \dot{w}_s)\delta(\dot{w}_b + \dot{w}_s)] - I_1 \left[\dot{u} \frac{d\delta\dot{w}_b}{dx} + \delta\dot{u} \frac{d\dot{w}_b}{dx} \right] + I_2 \left[\frac{d\dot{w}_b}{dx} \frac{d\delta\dot{w}_b}{dx} \right] - J_1 \left[\dot{u} \frac{d\delta\dot{w}_s}{dx} + \delta\dot{u} \frac{d\dot{w}_s}{dx} \right] + K_2 \left[\frac{d\dot{w}_s}{dx} \frac{d\delta\dot{w}_s}{dx} \right] + J_2 \left[\frac{d\dot{w}_b}{dx} \frac{d\delta\dot{w}_s}{dx} + \frac{d\delta\dot{w}_b}{dx} \frac{d\dot{w}_s}{dx} \right] \right\} dx \quad (19)$$

Denklem 17, 18 ve 19 Denklem 16’de yerine yazılır. İntegraller alındıktan sonra δu , δw_b ve δw_s ’nin katsayıları bir araya toplandığında Denklem 20-22 elde edilir.

$$\delta u: \frac{dN}{dx} = I_0 \ddot{u} - I_1 \frac{d\ddot{w}_b}{dx} - J_1 \frac{d\ddot{w}_s}{dx} \quad (20)$$

$$\delta w_b: \frac{d^2 M_b}{dx^2} + q = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - I_1 \frac{d\ddot{u}}{dx} - I_2 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} - J_2 \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} \quad (21)$$

$$\delta w_s: \frac{d^2 M_s}{dx^2} - \frac{dQ}{dx} + q = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - J_1 \frac{d\ddot{u}}{dx} - J_2 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} - K_2 \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} \quad (22)$$

Eksenel kuvvet, eğilme momentinin eğilme ve kayma bileşenleri, kesme kuvveti Denklem 23-26’de sırasıyla verilmiştir.

$$N = \int_A \sigma_x dA = \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\frac{E(z)}{(1-\nu^2)} \left(\frac{du}{dx} - z \frac{d^2 w_b}{dx^2} - f(z) \frac{d^2 w_s}{dx^2} \right) \right] dz dx \quad (23)$$

$$M_b = \int_A z \sigma_x dA = \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[z \frac{E(z)}{(1-\nu^2)} \left(\frac{du}{dx} - z \frac{d^2 w_b}{dx^2} - f(z) \frac{d^2 w_s}{dx^2} \right) \right] dz dx \quad (24)$$

$$M_s = \int_A f \sigma_x dA = \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[f \frac{E(z)}{(1-\nu^2)} \left(\frac{du}{dx} - z \frac{d^2 w_b}{dx^2} - f(z) \frac{d^2 w_s}{dx^2} \right) \right] dz dx \quad (25)$$

$$Q = \int_A \left(1 - \frac{df(z)}{dz} \right) \tau_{xz} dA = \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[g(z) \frac{E(z)}{(1-\nu^2)} \left(\frac{du}{dx} - z \frac{d^2 w_b}{dx^2} - f(z) \frac{d^2 w_s}{dx^2} \right) \right] dz dx \quad (26)$$

Atalet ifadeleri Denklem 27’deki gibi tanımlanmıştır.

$$(I_0, I_1, I_2, J_1, J_2, K_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, z^2, f, zf, f^2) \rho(z) dz \quad (27)$$

Kuvvet ve moment bileşenleri Denklem 28-29’da verilmiştir.

$$\begin{bmatrix} N \\ M_b \\ M_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B_s \\ B & D & D_s \\ B_s & D_s & H_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{du}{dx} \\ -\frac{d^2 w_b}{dx^2} \\ -\frac{d^2 w_s}{dx^2} \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$[Q] = [A_s] \left[\left(1 - \frac{df(z)}{dz} \right) \frac{dw_s}{dx} \right] \quad (29)$$

Sertlik matrisi katsayıları Denklem 30-31’de tanımlanmıştır.

$$\{A, B, B_s, D, D_s, H_s\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ 1, \left(1 - \frac{df(z)}{dz} \right)^2, z, f, z^2, zf, f^2 \right\} Q_{11} dz \quad (30)$$

$$A_s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[1 - \frac{df(z)}{dz} \right]^2 Q_{55} dz \quad (31)$$

Kuvvet ve moment bileşenleri Denklem 20-22’de yerlerine yazılarak sistemin hareket denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$A \frac{d^2 u}{dx^2} - B \frac{d^3 w_b}{dx^3} - B_s \frac{d^3 w_s}{dx^3} = I_0 \ddot{u} - I_1 \frac{d\ddot{w}_b}{dx} - J_1 \frac{d\ddot{w}_s}{dx} \quad (32)$$

$$B \frac{d^3 u}{dx^3} - D \frac{d^4 w_b}{dx^4} - D_s \frac{d^4 w_s}{dx^4} + q = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - I_1 \frac{d\ddot{u}}{dx} - I_2 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} - J_2 \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} \quad (33)$$

$$B_s \frac{d^3 u}{dx^3} - D_s \frac{d^4 w_b}{dx^4} - H_s \frac{d^4 w_s}{dx^4} + A_s \frac{d^2 w_s}{dx^2} + q = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - J_1 \frac{d\dot{u}}{dx} - J_2 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} - K_2 \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} \quad (34)$$

Gözenekli fonksiyonel derecelendirilmiş kirişin serbest titreşim analizinde Navier tipi çözüm yaklaşımı kullanılmıştır. U_n , W_{bn} ve W_{sn} bilinmeyen sabitler ve ω doğal frekans olmak üzere yerdeğiştirme bileşenleri seriye açılarak Denklem 35-37'deki gibi tanımlanmıştır. Burada $\alpha = \frac{n\pi}{L}$ dir.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n e^{i\omega t} \cos(\alpha x) \quad (35)$$

$$w_b(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_{bn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \quad (36)$$

$$w_s(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_{sn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \quad (37)$$

Yerdeğiştirme bileşenleri hareket denklemlerinde yerlerine yazılarak türevler alınmış ve denklemler Denklem 38'deki şekli almıştır. Özdeğer problemi çözülerek doğal frekanslar elde edilmiştir.

$$\left(\begin{bmatrix} A\alpha^2 & -B\alpha^3 & -B_s\alpha^3 \\ -B\alpha^3 & D\alpha^4 & D_s\alpha^4 \\ -B_s\alpha^3 & D_s\alpha^4 & H_s\alpha^4 + A_s\alpha^2 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} I_0 & -I_1\alpha & -J_1\alpha \\ -I_1\alpha & I_0 + I_2\alpha^2 & I_0 + J_2\alpha^2 \\ -J_1\alpha & I_0 + J_2\alpha^2 & I_0 + K_2\alpha^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} U_n \\ W_{bn} \\ W_{sn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

3. SONUÇLAR

Bu çalışmada iki farklı gözenek dağılımına sahip gözenekli fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin serbest titreşim analizi gerçekleştirilmiştir. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme tanımlanırken literatürdeki çalışmalarla karşılaştırma yapabilmek için Tablo 1'de verilen malzeme özellikleri kullanılmıştır.

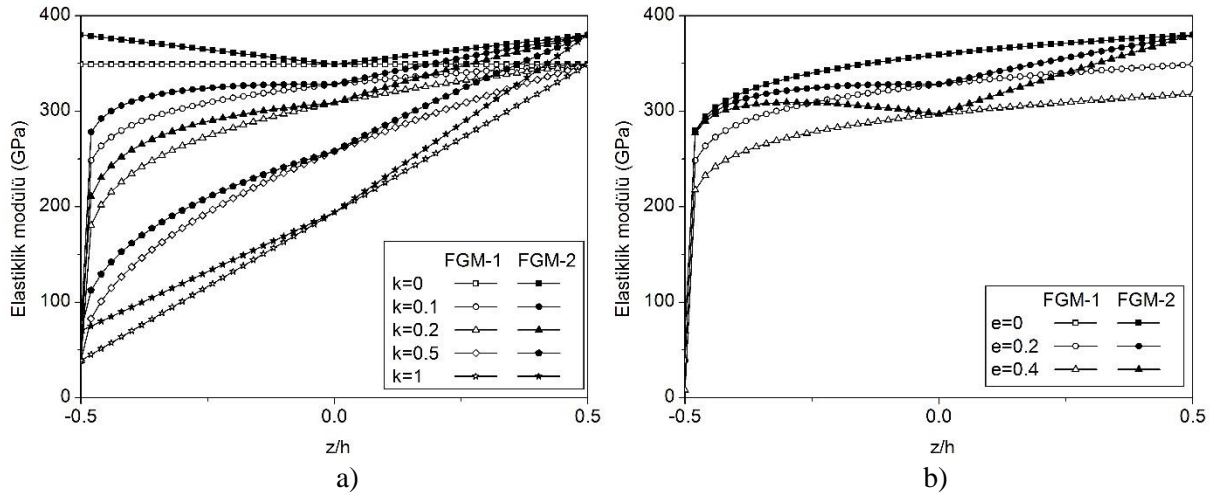
Tablo 1. Malzeme özellikleri

	Metal (Al)	Seramik (Al_2O_3)
Elastiklik Modülü	70 GPa	380 GPa
Yoğunluk	2702 kg/m ³	3960 kg/m ³

Literatürde yer alan diğer çalışmalarla karşılaştırma yapabilmek için doğal frekans değerleri aşağıdaki boyutsuzlaştırma katsayısı kullanılarak verilmiştir.

$$\bar{\omega}_n = h \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \omega_n \quad (39)$$

Fonksiyonel derecelendirilmiş gözenekli kirişin elastiklik modülünün kalınlık boyunca değişimi Şekil 2a ve 2b'de verilmiştir. Şekil 2a'da iki tip FGM için gözeneklilik oranı sabit tutularak hacimsel değişim üstelinin farklı değerleri ($k=0,0.1,0.2,0.5$ ve 1) için elastik modülünün değişimi verilmiştir. $k=0$ değeri için her iki FGM'de de seramik özellik yoğunken, k değeri arttıkça metalik özelliğin arttığı görülmektedir. İki tip FGM'nin kirişin orta noktalarında aynı elastiklik modülü değerine sahip olduğu görülmektedir. FGM-2 tipinin orta nokta dışında her noktada elastiklik modülü değerinin FGM-1 tipinden daha yüksek olduğu görülmektedir. Şekil 2b'de hacimsel değişim üsteli ($k=0.1$) sabit tutularak farklı gözeneklilik oranı değerleri ($e=0, 0.2$ ve 0.4) için elastiklik modülünün değişimi verilmiştir. Gözenek içermeyen ($e=0$) FGM kirişte iki tip için de elastiklik modülü aynı değerlere sahipken, gözeneklilik oranındaki artışla birlikte her iki tip FGM için de elastiklik modülünün azaldığı görülmektedir. FGM-1 tipinde gözeneklilik oranının değişimi ile birlikte kiriş alt ve üst yüzeylerindeki elastiklik modülü değerinin değiştiği görülürken FGM-2 tipi kirişin alt ve üst yüzeylerindeki elastik modülü değeri gözeneklilik oranı ile değişmemektedir.



Şekil 2. Gözenekli fonksiyonel derecelendirilmiş kirişin elastiklik modülünün kalınlık boyunca değişimi, a) Gözeneklilik oranı $e=0.2$ ve farklı hacimsel değişim üsteli k değerleri için, b) Hacimsel değişim üsteli $k=0.1$ ve farklı gözeneklilik oranı e değerleri için

Analizden elde edilen sonuçların karşılaştırılması için literatürde yer alan çalışmalar araştırılmıştır. Bu konuda yapılmış çalışmalarda kullanılan elastiklik modülü ve gözenek dağılımı dikkate alındığında karşılaştırma yapılabilecek nitelikte tek bir çalışmaya rastlanmıştır. Hadji vd.[24] tarafından yapılan çalışmada çeşitli gözenek dağılımları için serbest titreşim analizi yapılmıştır. Tablo 2’de gözenek içeren ve içermeyen fonksiyonel derecelendirilmiş kirişler için farklı uzunluk/ kalınlık oranları için boyutsuz doğal frekans değerleri verilmiştir. Hacimsel değişim üsteli $k=2$ değeri için tüm uzunluk/kalınlık oranları için her iki tip FGM’de de artan gözeneklilik ile birlikte boyutsuz doğal frekans değerinin azaldığı görülmektedir. Artan uzunluk/kalınlık oranıyla boyutsuz doğal frekans değerleri artmaktadır. Sonuçlar incelendiğinde sunulan değerlerin referans çalışma ile oldukça uyumlu olduğu görülmektedir.

Tablo 2. Gözenek içeren ve içermeyen fonksiyonel derecelendirilmiş kirişler için boyutsuz doğal frekans değerleri ($k=2$)

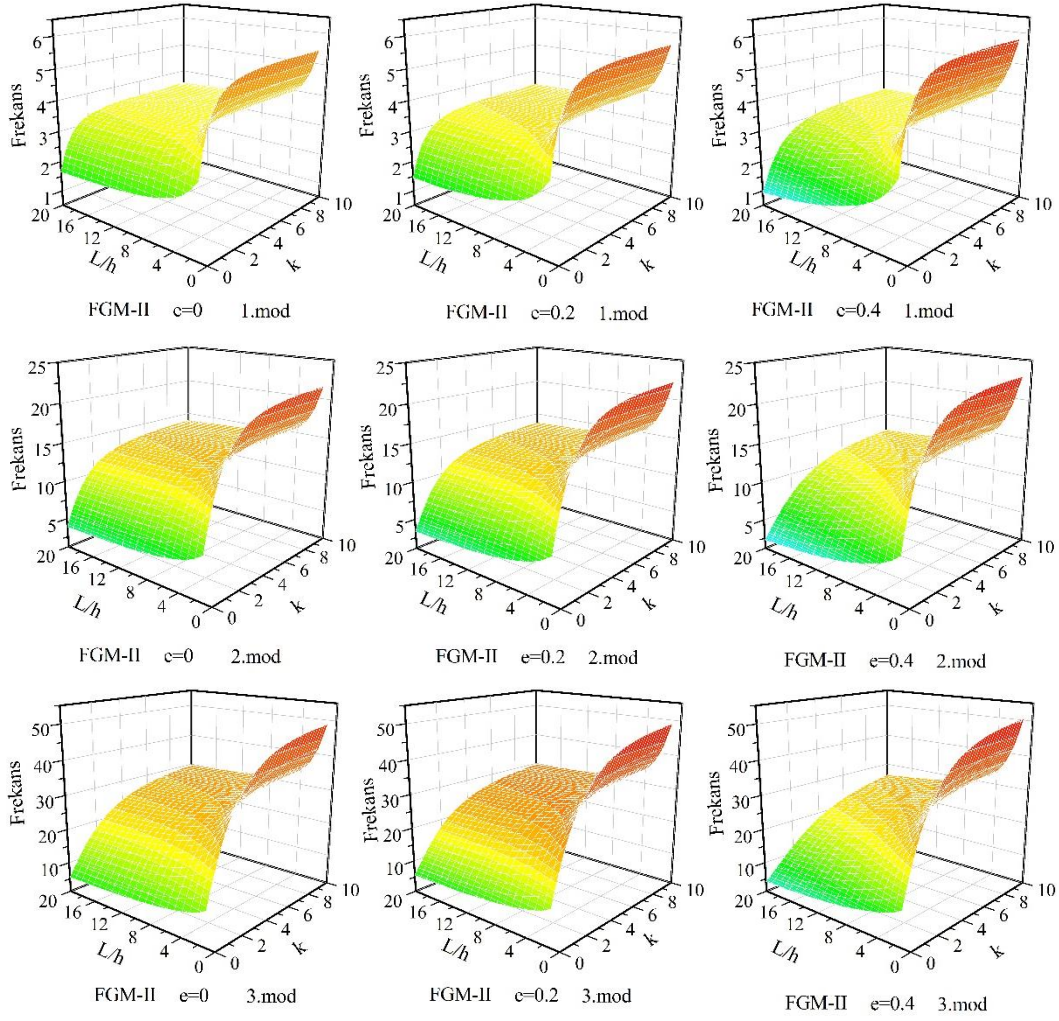
L/h	Referans	FGM 1			FGM 2		
		e= 0	e= 0.1	e= 0.2	e= 0	e= 0.1	e= 0.2
5	Hadji vd. [24]	3.6264	3.4418	3.1489	3.6264	3.6069	3.5785
	Sunulan	3.6263	3.4417	3.1488	3.6263	3.6066	3.5781
10	Sunulan	3.7904	3.5917	3.2769	3.7904	3.7754	3.7515
20	Hadji vd. [24]	3.8361	3.6335	3.3123	3.8361	3.8226	3.8004
	Sunulan	3.8361	3.6334	3.3123	3.8361	3.8225	3.8002

Tablo 3’te $L/h=5, 10$ ve 20 değerleri ve hacimsel değişim üsteli $k=0-1$ arası değerler için gözenek içeren ($e=0.2$ ve $e=0.4$) ve gözenek içermeyen ($e=0$) fonksiyonel derecelendirilmiş kirişin boyutsuz doğal frekans değerleri verilmiştir. Boyutsuz doğal frekans değerleri $k=0, 0.1$ ve 0.2 değerleri için gözeneklilik oranındaki artışla birlikte artarken, kiriş kalınlığındaki artışla birlikte azalmaktadır. $k=0.5$ değerinden itibaren doğal frekansın gözeneklilik ile ilişkisi tersine dönmektedir, artan gözeneklilik ile birlikte boyutsuz doğal frekans değerlerinin azaldığı görülmektedir. Hacimsel değişim üsteli k ’nın 0.2 ile 0.5 değerleri arasında gözeneklilik ile doğal frekans ilişkisinin değiştiği anlaşılmaktadır.

Tablo 3. Gözenekli ve gözeneksiz fonksiyonel derecelendirilmiş kirişin farklı uzunluk/kalınlık oranları ve hacimsel değişim üsteli için boyutsuz doğal frekansları

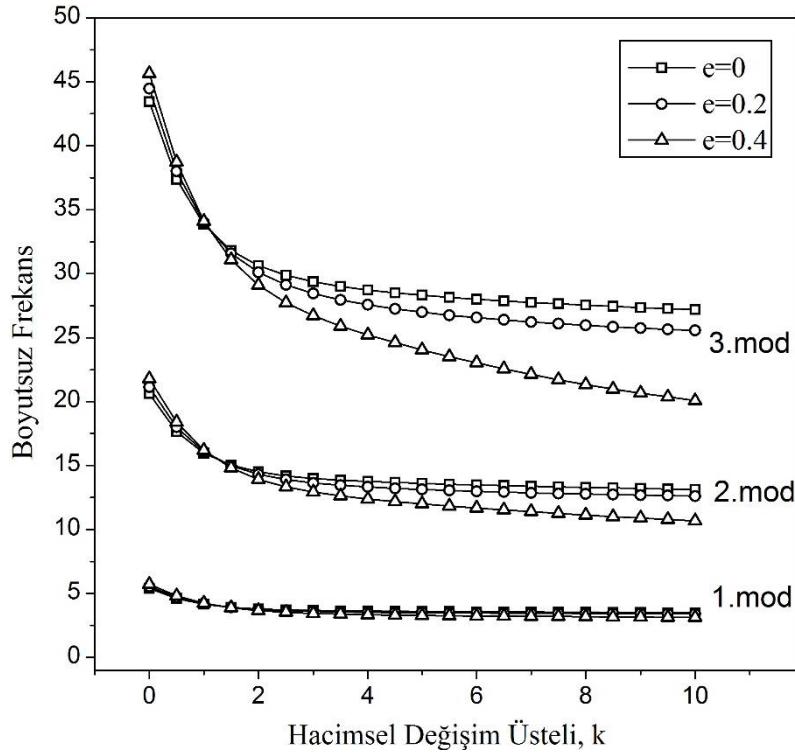
<i>k</i>	<i>e</i>	<i>L/h=20</i>		<i>L/h=10</i>		<i>L/h=5</i>	
		FGM-1	FGM-2	FGM-1	FGM-2	FGM-1	FGM-2
0	0	5.46036	5.46036	5.39341	5.39341	5.15316	5.15316
	0.2	5.62156	5.61930	5.55260	5.54705	5.30520	5.28889
	0.4	5.85595	5.80448	5.78414	5.72564	5.52647	5.44567
0.1	0	5.26104	5.26104	5.19822	5.19822	4.97228	4.97228
	0.2	5.39061	5.41164	5.32652	5.34376	5.09598	5.10077
	0.4	5.58217	5.58806	5.51626	5.51390	5.27892	5.24989
0.2	0	5.08157	5.08157	5.02228	5.02228	4.80843	4.80843
	0.2	5.17558	5.22214	5.11575	5.15804	4.89993	4.92795
	0.4	5.31438	5.38747	5.25392	5.31728	5.03532	5.06710
0.5	0	4.65120	4.65120	4.59914	4.59914	4.41097	4.41097
	0.2	4.62547	4.75612	4.57527	4.70003	4.39312	4.49813
	0.4	4.55729	4.87862	4.51029	4.81737	4.33933	4.59830
1	0	4.20512	4.20512	4.15870	4.15870	3.99070	3.99070
	0.2	3.97761	4.25001	3.93645	4.20036	3.78674	4.02164
	0.4	3.43418	4.29196	3.40377	4.23827	3.29193	4.04664

Şekil 3’te gözenek içeren ve içermeyen fonksiyonel derecelendirilmiş FGM-2 tipi kirişin ilk üç serbest titreşim modu için boyutsuz doğal frekanslarının kiriş kalınlığına ve hacimsel değişim üsteline bağlı olarak değişimi verilmiştir. Boyutsuz doğal frekansın tüm gözeneklilik oranları için ilk üç titreşim modunda aynı formda olduğu görülmüştür. Kiriş kalınlığı arttıkça yani L/h oranı ile küçüldükçe doğal frekans değerinin artan k ile birlikte arttığı görülmektedir. Özellikle küçük L/h oranları için doğal frekans değerlerindeki bu artışın çok daha fazla olduğu, kiriş kalınlığının doğal frekansın değişimi üzerindeki etkisini göstermiştir.



Şekil 3. Gözenek içeren ($e=0.2$ ve $e=0.4$) ve içermeyen ($e=0$) FGM-2 tipi kirişin 1, 2 ve 3. serbest titreşim modları için boyutsuz doğal frekanslarının uzunluk-kalınlık oranı L/h ve hacimsel değişim üsteli k ile değişimi

Şekil 4'te gözenek içeren ($e=0.2$ ve $e=0.4$) ve içermeyen ($e=0$) FGM-2 tipi fonksiyonel derecelendirilmiş kirişin boyutsuz doğal frekansının hacimsel değişim üsteli k ile değişimi ilk üç titreşim modu için verilmiştir. Her üç titreşim modunda da k 'nın belli bir değerinin altında ($k=1$ civarı) gözeneklilik oranı fazla olan ($e=0.4$) kirişin doğal frekans değerleri en yüksek iken bu değerlerin üzerindeki k değerleri için durum tersine dönmektedir. k 'nın büyük değerleri için özellikle 3.modda gözenekliliğin artmasıyla boyutsuz doğal frekans değerindeki düşüşün çok daha belirgin olduğu görülmektedir. Bunun sebebi olarak k 'nın küçük değerleri için gözenekliliğin artmasıyla atalettaki azalmanın dayanımdaki azalmadan fazla olması, k 'nın belli bir değeri aşıldığında dayanımdaki azalmanın atalettaki azalmayı aştığı ve bunun sonucunda doğal frekans değerlerinin düştüğü söylenebilir.



Şekil 4. Gözenek içeren ($e=0.2$ ve $e=0.4$) ve içermeyen ($e=0$) FGM-2 tipi fonksiyonel derecelendirilmiş kirişin boyutsuz doğal frekansının hacimsel değişim üsteli k ile değişimi (uzunluk-kalınlık oranı $L/h=10$ için)

4. TARTIŞMA VE DEĞERLENDİRME

Bu çalışmada gözenekli fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin serbest titreşim analizi iki değişkenli kayma deformasyon teorisi kullanılarak yapılmıştır. Doğal frekansın değişiminde gözeneklilik dağılımının ve oranının, kiriş uzunluk/kalınlık oranının ve hacimsel değişim üstelinin etkisi incelenmiştir. Hacimsel değişim üstelinin artmasıyla birlikte kirişin metalik özelliği artmakta, elastiklik modülü azalmaktadır. Bu nedenle hacimsel değişim üsteli arttıkça doğal frekans değerleri azalmaktadır. Gözeneklilik oranındaki artışla birlikte tüm kesitin elastiklik modülü azalmaktadır, bunun sonucu olarak artan gözeneklilik ile birlikte doğal frekans değerleri azalmaktadır. Ancak hacimsel değişim üstelinin küçük değerleri için gözeneklilik oranındaki artışla birlikte doğal frekansın az miktarda arttığı görülmüştür. Kirişin uzunluk/kalınlık oranının doğal frekans üzerinde etkisi incelenmiş ve beklenen şekilde kiriş incelidikçe doğal frekansta artış olduğu görülmüştür. Bu çalışmanın gözenekli fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerle ilgili yeni çalışmalara öncülük edeceği düşünülmektedir. İleriki çalışmalarda farklı sınır koşulları için genişletilebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Chen L, Goto T. Handbook Of Advanced Ceramics. Chapter 16: Functionally Graded Materials. 445-464, 2003.
- [2] Jones RM. Mechanics of Composite Materials. Taylor and Francis, 1999.
- [3] Reddy JN. Analysis of functionally graded plates. Int J Numer Meth Engng 2000; 47: 663-684.
- [4] Demirhan PA. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Sandviç Kiriş ve Plakların Dört Değişkenli Kayma Deformasyon Teorisi ile Eğilme ve Titreşim Analizi. Doktora Tezi, Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Edirne, Türkiye, 2016.

- [5] Shimpi RP. Refined Plate Theory and Its Variants. *AIAA Journal*. 2002; 40:1.
- [6] Shimpi RP, Patel HG. A two variable refined plate theory for orthotropic plate analysis. *Int J Solids Struct*. 2006; 43: 6783–6799.
- [7] S.E. Kim, H.T. Thai, J. Lee, A two variable refined plate theory for laminated composite plates, *Compos Struct*. 89, 197–205, 2009
- [8] Mechab I, Atmane HA, Tounsi A, Belhadj HA, Bedia EAA. A two variable refined plate theory for the bending analysis of functionally graded plates. *Acta Mech Sin*. 2010; 26: 941–949.
- [9] Demirhan PA, Taskin V. Levy solution for bending analysis of functionally graded sandwich plates based on four variable plate theory. *Compos Struct* 2017; 177: 80–95.
- [10] Demirhan PA, Taskin V. Static analysis of simply supported functionally graded sandwich plates by using four variable plate theory. *Teknik Dergi*. 2019; 8987-9007.
- [11] Demirhan PA, Taskin V. Bending and free vibration analysis of Levy-type porous functionally graded plate using state space approach. *Compos B Eng*. 2019; 160:661-676.
- [12] Thai HT, Vo TP. Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories. *Int J Mech Sci*. 2012; 62:57–66.
- [13] Rezaei AS, Saidi AR, Abrishamdari M, Pour Mohammadi MH. Natural frequencies of functionally graded plates with porosities via a simple four variable plate theory: An analytical approach. *Thin-Walled Struct*. 2017; 120:366–77.
- [14] Ebrahimi F, Jafari A. A four-variable refined shear-deformation beam theory for thermo-mechanical vibration analysis of temperature-dependent FGM beams with porosities. *Mechanics of Mech Adv Mater Struct*. 2018; 25:212-224.
- [15] Zenkour AM. Bending analysis of functionally graded sandwich plates using a simple four-unknown shear and normal deformations theory. *J Sandw Struct Mater* 2013; 1–28.
- [16] Thai CH, Zenkour AM, Wahab MA, Nguyen-Xuan H. A simple four-unknown shear and normal deformations theory for functionally graded isotropic and sandwich plates based on isogeometric analysis, *Compos Struct*. 2016; 139: 77–95.
- [17] Thai HT, Kim SE. A simple higher-order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of functionally graded plates. *Compos Struct*. 2013; 96: 165–173.
- [18] Eltaher MA, Fouda N, Tawfik El-midany, Sadoun AM. Modified porosity model in analysis of functionally graded porous nanobeams. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. 2018; 40:141.
- [19] Aqida S, Ghazali M, Hashim J. Effects of porosity on mechanical properties of metal matrix composite: an overview. *J Teknol*. 2004;40(1):17–32.
- [20] Kumar TS, Kumar KK, Shalini S, Subramanian R. Synthesis And Characterization Of Functionally Graded Al-6Cr-Y2O3 Composites. *Arch. Metall. Mater*. 2018;63:1649-1655.

- [21] Misra N, Kapusetti G, Pattanayak DK, Kumar A. Fabrication and characterization of epoxy/silicafunctionally graded composite material. *Indian J. Phys.* 2011;85:1393-1404.
- [22] Zhu J, Lai Z, Yin Z, Jeon J, Lee S. Fabrication of ZrO₂-NiCr functionally graded material by powder metallurgy. *Mater Chem Phys* 2001; 68: 130-5.
- [23] Chen D, Kitipornchai S, Yang J. Nonlinear free vibration of shear deformable sandwich beam with a functionally graded porous core. *Thin-Walled Struct* 2016; 107: 39-48.
- [24] Hadji L, Zouatnia N, Bernard F. An analytical solution for bending and free vibration responses of functionally graded beams with porosities: Effect of the micromechanical models. *Struct Eng Mech.* 2019; 69: 231-241.
- [25] Tang H, Li L, Hu Y. Coupling effect of thickness and shear deformation on size-dependent bending of micro/nano-scale porous beams. *Appl. Math. Model.* 2019; 66: 527-547.
- [26] Kitipornchai S, Chen D, Yang J. Free vibration and elastic buckling of functionally graded porous beams reinforced by graphene platelets. *Mater Des.* 2017; 116: 656-665.
- [27] Al Rjoub YS, Hamad AG. Free vibration of functionally Euler-Bernoulli and Timoshenko graded porous beams using the transfer matrix method. *KSCE J Civ Eng.* 2017; 21: 792.
- [28] Ebrahimi F, Ghasemi F, Salari E. Investigating thermal effects on vibration behavior of temperature dependent compositionally graded Euler beams with porosities. *Meccanica.* 2016: 51; 223.
- [29] Akbaş ŞD. Forced vibration analysis of functionally graded porous deep beams. *Compos Struct* 2018; 186: 293-302.
- [30] Ebrahimi F, Jafari A. Thermo-mechanical vibration analysis of temperature-dependent porous FG beams based on Timoshenko beam theory. *Struct Eng Mech.* 2016: 59; 343-371.
- [31] Touratier M. An efficient standard plate theory. *Int J Eng Sci.* 1991; 29: 901-16.