Matematik / *Mathematics* **DOI: 10.21597/jist.696719**
Araştırma Makalesi / *Research Article*
Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 10(3): 1975-1983, 2020
Journal of the Institute of Science and Technology, 10(3): 1975-1983, 2020
ISSN: 2146-0574, eISSN: 2536-4618

Ortak Bertrand-B İsogeodezik Eğriye Sahip Yüzey Aileleri

Kebire Hilal AYVACI[1], Gülnur ŞAFFAK ATALAY[2*]

ÖZET: Bu çalışmada 3-boyutlu Öklid uzayında parametrik denklemi ile verilen yüzey üzerinde eğriliği sıfırdan farklı olan bir eğrinin Bertrand B-çiftinin bu yüzey üzerinde isogeodezik olması için gerekli ve yeterli şartlar elde edilerek, ortak Bertrand-B isogeodezik eğrili yüzey aileleri problemi ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: Bertrand-B eğri, Bishop-2 çatısı, isogeodezik eğri, parametrik yüzey.

Surface Family With A Common Bertrand-B Isogeodesic Curve

ABSTRACT: In this paper, we construct a surface family possessing a Bertrand B pair of a given curve as an geodesic curve. Using the Bishop-2 frame frame of the given Bertrand B curves, we present the surface as a linear combination of this frame and analyse the necessary and sufficient condition for a given curve such that its Bertrand B pairs is both parametric and geodesic on a parametric surface. Finally, we present some interesting examples to show the validity of this study.

Keywords: Bertrand B-curves, Bishop-2 Frame, isogeodesic curve, parametric surface.

[1] Kebire Hilal AYVACI (**Orcid ID:** 0000-0002-5114-5475), Şehit Metehan Atmaca Anadolu Lisesi, Milli Eğitim Bakanlığı, Suluova-Amasya, Türkiye
[2] Gülnur ŞAFFAK ATALAY (**Orcid ID:** 0000-0003-4168-1642), Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi Bölümü, Samsun, Türkiye

*Sorumlu Yazar/Corresponding Author: Gülnur ŞAFFAK ATALAY, e-mail: gulnur.saffak@omu.edu.tr

Makale 31 Ağustos-3 Eylül 2019 tarihlerinde Samsun'da düzenlenen "32. Ulusal Matematik Sempozyumu'nda" sözlü sunum olarak sunulmuştur.

Geliş tarihi / *Received:* 01-03-2020
Kabul tarihi / *Accepted:* 12-05-2020

GİRİŞ

Bağlantılı eğriler karşılıklı noktalarında bir eğrinin Frenet vektörlerinden biri ile diğer eğrinin Frenet vektörlerinden birinin denk olduğu eğrilerdir. Böyle eğrilerin iyi bilinen iki örneği evolüt-involüt eğriler ve Bertrand eğrileridir. 1668 yılında C. Huygens daha kusursuz bir saat yapmaya çalışırken involütleri keşfetmiştir. ∀s∈I için α ve $\tilde{\alpha}$ eğrilerinin karşılıklı noktalarındaki teğetleri ortogonal ise (α, $\tilde{\alpha}$) ikilisine ise evolüt-involüt çifti denir (Millman ve Parker, 1977). Diferansiyel geometride önemli bir yeri olan diğer eğri 1850 yılında J.Bertrand tarafından bulunan Bertrand eğrilerdir. Bertrand eğrisinin her noktasındaki asli normal vektörü Bertrand çifti denilen diğer bir eğrinin asli normal vektörüdür. Yerlikaya ve Aydemir (2016) ,Öklid uzayında Bertrand-B eğri çiftini ise ilk tanımlayarak Bertrand-B eğrilerinin özeliklerini ve bazı karakterizasyonlarını elde etmişlerdir.

Geodezik eğrili yüzey ailesinin bulunma problemi ilk kez 2003 yılında ortaya konulmuş ve Wang ve ark. (2004) tarafından ortak geodezik eğriye sahip yüzey ailelerinin parametrik temsili incelenmiştir. Kasap ve ark. (2008) ortak geodezik eğriye sahip yüzey aileleri ile ilgili genellemelere yer vermiştir. Bayram ve Kasap (2014) ortak geodezik eğriye sahip hiperyüzeyleri incelemiştir. Ergün ve Bayram (2016) tabii liftin geodezik olması için gerekli ve yeterli koşulları vermiştir. Son zamanlarda ise Atalay (2018), E^3 üç boyutlu Öklid uzayında ortak Mannheim isogeodezik ve isoasimptotik eğriye sahip yüzey ailelerinin bulunması problemini ve Ayvacı (2019) ortak Mannheim B-isogeodezik ve isoasimptotik eğriye sahip yüzey ailelerinin bulunması problemini incelemiştir ve konuyu regle yüzeylere de taşımıştır. Özel olarak bu regle yüzey içerisinden açılabilir olması için gerekli ve yeterli şartları vermiştir.

L. Bishop 1975 yılında alternatif paralel çatı olarak adlandırdığımız Bishop çatısını tanımlamıştır. Bishop' un çalışmasına göre bu çatının kurulabilmesi için eğrinin C^2 sınıfından olması yeterlidir (Bishop, 1975). Bu ise eğrinin Frenet çatısının kurulamadığı noktalar da dahil olmak üzere eğri boyunca Bishop çatısının kurulabileceğini göstermektedir. 2010 yılında ise Yılmaz ve Turgut Serret-Frenet çatısı ile bağlantılı olan B binormal vektör alanını kullanarak Bishop-2 çatısını tanımlamıştır.

Bu çalışmada, 3-boyutlu Öklid uzayında parametrik denklemi ile verilen yüzey üzerinde eğriliği sıfırdan farklı olan bir eğrinin Bertrand-B çiftinin bu yüzey üzerinde isogeodezik olması için gerekli ve yeterli şartlar elde edilerek, ortak Bertrand-B isogeodezik eğriye sahip yüzey aileleri problemi ele alınmıştır ve çalışmayı destekleyen çeşitli örnekler verilmiştir.

MATERYAL VE YÖNTEM

Bu kısımda ilk olarak çalışma ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilecektir.

Tanım 1: $\alpha: I \subseteq IR \to E^3$ birim hızlı bir eğri ve $K > 0$ olsun. α eğrisinin her noktasında T, N, B vektör alanları ikişer ikişer birbirine diktir ve α eğrisinin *Frenet çatı alanları* olarak adlandırılır (O'neill, 1966).

Tanım 2: $\alpha: I \subseteq IR \to E^3$ birim hızlı bir eğri ve ∀s∈I için $\alpha''(s) \neq 0$ olsun. ∀s∈I için $B'(s) = -\tau(s)N(s)$ olarak tanımlı τ reel değerli fonksiyonuna α eğrisinin *burulma fonksiyonu*, herhangi bir $s \in I$ için $\tau(s)$ değerine de α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki *burulması* denir (O'neill, 1966).

Tanım 3: $\alpha: I \subseteq IR \to E^3$ birim hızlı bir eğri ve $K > 0$ ise Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K & 0 \\ -K & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad \textbf{(1)}$$

şeklindedir (O'neill, 1966).

Tanım 4: $M \subseteq E^3$ bir yüzey ve α bu yüzey üzerinde bir eğri olsun. α'' vektörü $\forall p \in M$ noktası için M ye dik ise α ya M üzerinde bir *geodezik eğri* denir (O'neill,1966).

Tanım 5: $\alpha: I \subseteq IR \to E^3$ birim hızlı bir eğri ve α eğrisi boyunca Gram-Schmidt yöntemi ile ortonormalleştirilmiş iki paralel normal vektör alanı N_1 ve N_2 olsun. Bu durumda $\{T, N_1, N_2\}$ çatısına α eğrisinin *Bishop çatısı* denir. Bu çatı için türev formülleri,

$$\begin{bmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

şeklindedir. Burada k_1 ve k_2, α eğrisinin *Bishop eğrilikleri* olarak adlandırılır ve

$K(s) = \sqrt{{k_1}^2(s) + {k_2}^2(s)}$, $\measuredangle(N_1, N) = \gamma$ olmak üzere

$$\begin{cases} \theta(s) = arctan\dfrac{k_2}{k_1}, \\ \tau(s) = -\dfrac{d\gamma(s)}{ds}, \\ k_1(s) = Kcos\gamma(s), \\ k_2(s) = Ksin\gamma(s) \end{cases}$$

dır (Bishop, 1975).

Tanım 6: Birim hızlı bir α eğrisinin Frenet ve Bishop elemanları $\{T, N, B, K, \tau\}$ ve $\{T, N_1, N_2, k_1, k_2\}$ olsun. Frenet ve Bishop çatısı arasındaki ilişki

$$\begin{cases} T = \alpha', \\ N = cos\theta N_1 + sin\theta N_2, \\ B = -sin\theta N_1 + cos\theta N_2 \end{cases} \tag{3}$$

şeklindedir (Bishop, 1975).

Tanım 7: α, 3-boyutlu Öklid uzayında verilen birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin Bishop-2 çatısı $\{\xi_1, \xi_2, B\}$ olmak üzere türev formülleri

$$\begin{bmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\epsilon_1 \\ 0 & 0 & -\epsilon_2 \\ \epsilon_1 & \epsilon_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ B \end{bmatrix} \tag{4}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada ϵ_1, ϵ_2 Bishop-2 eğrilikleri olarak adlandırılır (Yılmaz ve Turgut, 2010).

Tanım 8: $\alpha: I \subseteq IR \to E^3$ birim hızlı bir eğri ve α eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$, Bishop-2 çatısı $\{\xi_1, \xi_2, B\}$ olmak üzere α eğrisinin Frenet ve Bishop-2 çatısı arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta(s) & -\cos\theta(s) & 0 \\ \cos\theta(s) & \sin\theta(s) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ B \end{bmatrix} \tag{5}$$

şeklindedir. Burada

$$K = \theta'(s), \quad \tau = \sqrt{{\epsilon_1}^2(s) + {\epsilon_2}^2(s)} \tag{6}$$

olmak üzere,

$$\theta(s) = \arctan\left(\frac{\epsilon_2(s)}{\epsilon_1(s)}\right),$$

$$\begin{cases} \epsilon_1\,(s) = -\tau(s)\cos\theta(s), \\ \epsilon_2\,(s) = -\tau(s)\sin\theta(s) \end{cases}$$

şeklindedir (Yılmaz ve Turgut, 2010).

Tanım 9: $\varphi: D \subseteq E^2 \to E^3$

$$(u, v) \to \varphi(u, v)$$

ile tanımlanan $\varphi(D) \subseteq E^3$ yüzeyi verilsin. Yüzey üzerinde

$$v = v_0 = sabit\ için\ \varphi(u, v_0) = \alpha(u),$$

$$u = u_0 = sabit\ için\ \varphi(u_0, v) = \beta(v)$$

eğrilerine sırasıyla *u-parametre eğrisi* ve *v-parametre eğrisi* denir (O'neill,1966). E^3 de $\varphi = \varphi(u, v)$ yüzeyi üzerinde isoparametrik bir eğri sabit u veya v parametre değerlerine sahip olan eğrilerdir. Diğer bir deyişle u_0 veya v_0 öyle parametrelerdir ki $\varphi(u_0, v) = \beta(v)$ veya $\varphi(u, v_0) = \alpha(u)$dır.

E^3 de $\varphi = \varphi(u, v)$ yüzeyi üzerinde $\alpha(u)$ eğrisinin *isogeodezik* olması demek hem geodezik hem de parametrik eğri olması demektir (Kasap ve ark., 2008).

Tanım 10: α ve α^* birim hızlı eğriler olmak üzere α ve α^* eğrilerinin yay uzunluğu parametreleri sırasıyla s ve s^*, Bishop-2 çatısı $\{\zeta_1, \zeta_2, B\}$ ve $\{\zeta_1{}^*, \zeta_2{}^*, B^*\}$ olsun. Eğer α ve α^* eğrilerinin B Bishop-2 vektörü ile B^* Bishop-2 vektörü lineer bağımlıysa α^* eğrisine, α eğrisinin *Bertrand-B çifti*;

(α,α^*) eğri çiftine ise *Bertrand-B çifti* denir.

Buradan hareketle (α,α^*) *Bertrand -B çifti* arasında

$$\alpha^*(s^*) = \alpha\,(s) + \lambda(s)B(s) \tag{7}$$

bağıntısı yazılır (Yerlikaya ve Aydemir, 2016).

Tanım 11: α eğrisinin Bishop-2 çatısı $\{\zeta_1, \zeta_2, B\}$, α^* eğrisinin Bishop-2 çatısı $\{\zeta_1{}^*, \zeta_2{}^*, B^*\}$ olmak üzere bu çatılar arasındaki ilişki

$$\begin{cases} \zeta_1{}^* = \cos\mu\zeta_1 + \sin\mu\zeta_2\,, \\ \zeta_2{}^* = -\sin\mu\zeta_1 + \cos\mu\zeta_2 \end{cases} \tag{8}$$

şeklindedir. Burada μ, α ve α^* ın karşılıklı noktalarında ζ_1 ve $\zeta_1{}^*$ arasındaki açıdır (Yerlikaya ve Aydemir, 2016).

BULGULAR VE TARTIŞMA

$\alpha = \alpha(s)$, $\varphi(s, v)$ yüzeyi üzerinde $\{\zeta_1, \zeta_2, B\}$ Bishop-2 çatısı ile verilen birim hızlı bir eğri olsun. $\|\alpha''(s)\| \neq 0$ olarak alalım. α nın Bertrand-B eğri çifti olan α^* eğrisinin $\varphi(s, v)$ yüzeyi üzerinde isogeodezik olma şartları incelenecektir.

α^* eğrisinin Bishop-2 çatısı $\{\zeta_1{}^*, \zeta_2{}^*, B^*\}$ olmak üzere $\varphi(s, v)$ yüzeyi,

$$\varphi(s, v) = \alpha^*(s) + [x(s, v)\zeta_1{}^* + y(s, v)\zeta_2{}^* + z(s, v)B^*] \tag{9}$$

şeklinde yazılır.

α^*, α nın Bertrand B-eğri çifti olduğundan

$$\alpha^*(s^*) = \alpha(s) + \lambda(s)B(s) \tag{10}$$

olup burada λ sıfırdan farklı bir sabittir.

Eşitlik 7. , Eşitlik 8. ve Eşitlik 10. kullanıldığında, (9) denklemi

$$\varphi(s,v) = \alpha(s) + \big(\lambda + z(s,v)\big)B(s) + (x(s,v)\cos\mu(s) - y(s,v)\sin\mu(s))\,\xi_1(s)$$
$$+(x(s,v)\sin\mu(s) + y(s,v)\cos\mu(s))\,\xi_2(s)) \tag{11}$$

şeklinde elde edilir. Buradan Eşitlik 5. ve Frenet ve Bishop çatısı arasındaki ilişki kullanıldığında,

$$\varphi(s,v) = \alpha(s) + (x(s,v)\sin(\theta-\mu)(s) - y(s,v)\cos(\theta-\mu)(s))T(s)$$
$$+(x(s,v)\cos(\theta-\mu)(s) + y(s,v)\sin(\theta-\mu)(s))N(s) + (\lambda + z(s,v))B(s) \tag{12}$$

elde edilir.

Şimdi α nın Bertrand B-eğri çifti olan α^* eğrisinin $\varphi(s,v)$ yüzeyi üzerinde isogeodezik olma şartlarını inceleyelim:

İlk olarak bu Bertrand-B eğri çiftinin parametrik olması gerektiğinden $v = v_0$ için $v_0 \in [K_1, K_2]$;

$$x(s,v_0) = y(s,v_0) \equiv 0, \quad z(s,v_0) = -\lambda, \quad L_1 \le s \le L_2, \tag{13}$$

olmalıdır. İkinci olarak α eğrisinin Bertrand-B çiftinin $\varphi(s,v)$ yüzeyi üzerinde geodezik olması için $v_0 \in [K_1, K_2]$ olmak üzere, $n(s,v_0)//N(s)$ olmalıdır. Burada n, $\varphi = \varphi(s,v)$ yüzeyinin normali ve N, $\alpha(s)$ eğrisinin asli normalidir. $\varphi = \varphi(s,v)$ yüzeyinin normal vektörü

$$n(s,v) = \frac{\partial\varphi(s,v)}{\partial s} \times \frac{\partial\varphi(s,v)}{\partial v} \tag{14}$$

ile tanımlı olup Eşitlik 6. ve Eşitlik 12. kullanılarak $v = v_0$ için α^* eğrisi boyunca normal vektörü

$$n(s,v_0) = \emptyset_1(s,v_0)T(s) + \emptyset_2(s,v_0)N(s) + \emptyset_3(s,v_0)B(s) \tag{15}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{cases} \emptyset_1(s,v_0) = -\lambda\tau\dfrac{\partial z(s,v_0)}{\partial v}, \\ \emptyset_2(s,v_0) = -\dfrac{\partial z(s,v_0)}{\partial v}, \\ \emptyset_3(s,v_0) = \dfrac{\partial x(s,v_0)}{\partial v}\cos(\theta-\mu)(s) + \dfrac{\partial y(s,v_0)}{\partial v}\sin(\theta-\mu)(s) \\ \quad +\lambda\tau\dfrac{\partial x(s,v_0)}{\partial v}\sin(\theta-\mu)(s) - \lambda\tau\dfrac{\partial y(s,v_0)}{\partial v}\cos(\theta-\mu)(s) \end{cases} \tag{16}$$

olup geodeziklik şartından

$$\tau = 0, \qquad \frac{\partial z(s,v_0)}{\partial v} \neq 0$$

ve

$$\frac{\partial x(s,v_0)}{\partial v}\cos(\theta-\mu)(s)+\frac{\partial y(s,v_0)}{\partial v}\sin(\theta-\mu)\,(s)=0$$

elde edilir. Buradan $\beta(s)\neq 0$ olmak üzere,

$$\begin{cases} x(s,v)=(v-v_0)\beta(s)\sin(\theta-\mu)\,(s), \\ y(s,v)=-(v-v_0)\beta(s)\cos(\theta-\mu)(s) \end{cases} \quad (17)$$

elde edilir.

Böylece aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

Teorem : $\alpha=\alpha(s)$, $L_1\leq s\leq L_2$ aralığında eğriliği sıfırdan farklı bir eğri ve $\alpha^*(s)$, $L_1\leq s\leq L_2$ aralığında α nın Bertrand-B çifti olsun. α^* eğrisi yüzey üzerinde isogeodeziktir ancak ve ancak

$$\begin{cases} x(s,v_0)=y(s,v_0)\equiv 0, \quad z(s,v_0)=-\lambda, \quad \lambda\neq 0, \\ x(s,v_0)=(v-v_0)\beta(s)\sin(\theta-\mu)\,(s), \\ y(s,v)=-(v-v_0)\beta(s)\cos(\theta-\mu)(s), \quad \beta(s)\neq 0, \\ \tau=0, \quad \frac{\partial z(s,v_0)}{\partial v}\neq 0 \end{cases} \quad (18)$$

dır. Burada $K_1\leq v,\quad v_0\leq K_2$ ($v_0=$ sabit) olup θ,α eğrisinin T ve ξ_1 vektörü arasındaki açıdır. μ ise α eğrisinin ξ_1 ve ξ_2 vektörleri arasındaki açıdır.

Eşitlik 13. ve Eşitlik 17. durumları birleştirildiğinde φ yüzeyi üzerinde α eğrisinin Bertrand-B eğri çiftinin isogeodezik olması için gerekli ve yeterli şartlar elde edilmiş olur. Burada $x(s,v),y(s,v),z(s,v)$ sapma fonksiyonlarını şartları sağlayacak şekilde her farklı seçilişinde aynı Bertrand-B isogeodezik eğrisine sahip yüzey ailesinin bir üyesi elde edilir.

Örnek 1: $\alpha(s)=(\cos s,\sin s,0)$ birim hızlı eğrisini alalım. $\tau(s)=0$, $K(s)=1$ dir. Ayrıca Eşitlik 6. dan c sabit olmak üzere,

$K(s)=\frac{d\theta}{ds}=1$ olup buradan $\theta(s)=s+c$

elde edilir.

$\alpha=\alpha(s)$ eğrisinin Frenet çatısı

$$\begin{cases} T(s)=(-\sin s,\cos s,0), \\ N(s)=(-\cos s,-\sin s,0), \\ B(s)=(0,0,1) \end{cases}$$

şeklindedir.

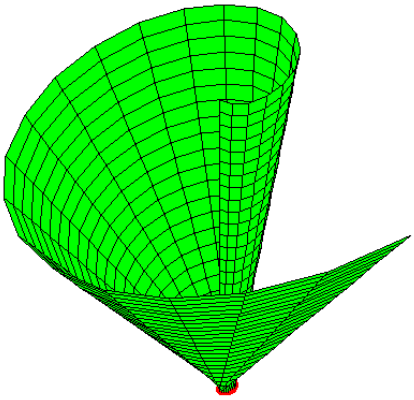
a) Eğer sapma fonksiyonları

$x(s,v)=0$, $y(s,v)=0$, $z(s,v)=-\lambda+v$ ve $v_0=0$, $\beta(s)=1$, $\mu=1$ olarak seçilirse isogeodeziklik şartı sağlanmış olur.

Dolayısıyla ortak Bertrand-B isogeodezikli yüzey ailesinin bir üyesi

$\varphi_1(s,v)=(\cos s-v\sin s\,,\sin s+v\cos s\,,v)$

olup bu yüzeyin grafiği $0\leq s\leq 2\pi \quad ve \quad 0\leq v\leq 2\pi$ alınarak Şekil 1. ile verilir.

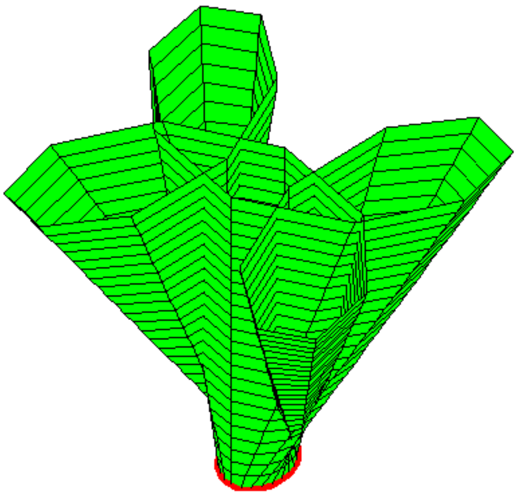


Şekil 1. Ortak Bertrand B-isogeodezikli yüzey ailesinin bir üyesi.

b) Eğer sapma fonksiyonları $x(s,v) = v\sin(2s)\sin s$, $y(s,v) = -v\sin(2s)\cos s$, $z(s,v) = -\lambda + v$ ve $v_0 = 0$, $\beta(s) = \sin(2s)$, $\mu = 0$ olarak seçilirse isogeodeziklik şartı sağlanmış olur. Dolayısıyla ortak Bertrand-B isogeodezikli yüzey ailesinin bir başka üyesi

$\varphi_2(s,v) = (\cos s - v\sin s\sin(2s), \sin s + v\cos s\sin(2s), v)$

şeklinde elde edilir. $0 \leq s \leq 2\pi$ ve $0 \leq v \leq 2\pi$ için bu yüzeyin grafiği de Şekil 2. deki gibidir.

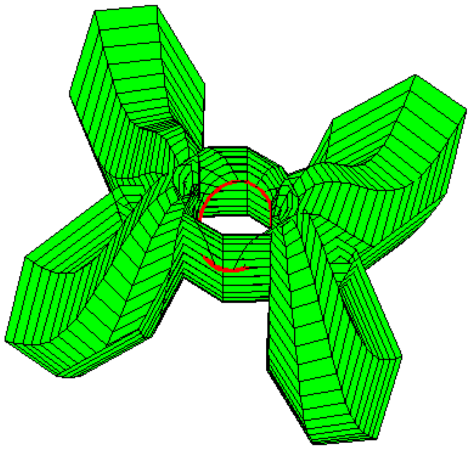


Şekil 2. Ortak Bertrand B- isogeodezikli yüzey ailesinin bir üyesi.

c) Eğer sapma fonksiyonları $x(s,v) = v\sin(2s)\sin s$, $y(s,v) = -v\sin(2s)\cos s$, $z(s,v) = -\lambda + \sin v$ ve $v_0 = 0$, $\beta(s) = \sin(2s)$, $\mu = 0$ olarak seçilirse isogeodeziklik şartı sağlanmış olur. Dolayısıyla ortak Bertrand-B isogeodezikli yüzey ailesinin bir başka üyesi

$\varphi_3(s,v) = (\cos s - v\sin s\sin(2s), \sin s + v\cos s\sin(2s), sinv)$

şeklinde olup $0 \leq s \leq 2\pi$ ve $0 \leq v \leq 2\pi$ için bu yüzeyin grafiği Şekil 3. ile verilmiştir.



Şekil 3. Ortak Bertrand B- isogeodezikli yüzey ailesinin bir üyesi.

SONUÇ

3-boyutlu Öklid uzayında parametrik denklemi ile verilen yüzey üzerinde eğriliği sıfırdan farklı olan bir eğrinin Bertrand-B çiftinin bu yüzey üzerinde isogeodezik olması için gerekli ve yeterli şartlar elde edilerek ortak Bertrand-B isogeodezik eğrili yüzey aileleri problemi elde edildi. 3 boyutlu Öklid uzayında herhangi bir yüzey için elde edilen bu şartlar yüzeyin regle yüzey olması durumu da araştırılarak bu regle yüzey içerisinden açılabilir olanları da ayrıca incelenenen çalışmalarımız arasındadır. Ayrıca bu çalışmada elde edilen sonuçların karşılıkları 3-boyutlu Minkowski uzayında ya da yüksek boyutlu çeşitli uzaylarda araştırılabilir.

KAYNAKLAR

Atalay GŞ, Kasap E, 2016. Surfaces family with common Smarandache geodesic curve according to Bishop frame in Euclidean space, Mathematical Science and Applications E-Notes., 4 , 1.

Atalay GŞ, E. Kasap, 2017. Surfaces family with common Smarandache geodesic curve, Journal of Science and Arts (JOSA), 4, 41.

Atalay GŞ, 2018. Surfaces family with a common Mannheim geodesic curve. Journal of Applied Mathematics and Computation, 2(4),155-165.

Atalay GŞ, 2018. Surfaces family with a common Mannheim asymptotic curve. Journal of Applied Mathematics and Computation, 2(4),145-154.

Ayvacı KH, 2019. Ortak Mannheim-B İsogeodezikli ve İsoasimptotikli Yüzey Ailesi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi (Basılmış).

Bayram E, Kasap E, 2014. Hypersurface family with a common isogeodesic, Studies and Research Series Mathematics and Informatics, 24, 2, 12.

Bertrand J, 1850. Mémoire sur la théorie des courbes à double courbure, Comptes Rendus 36, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 15, 332–350.

Bishop RL, 1975. There is more than one way to Frame a curve. The American Mathematical Monthly, 82(3), 246.

Ergün E, Bayram E, 2016. Surface family with a common natural geodesic lift, Int. J. Math. Combin., 1, 2.

Kasap E, Akyildiz FT, Orbay K, 2008. A generalization of surfaces family with common spatial geodesic, Applied Mathematics and Computation, 201, 781-789.

Millman RS, George DP, 1977. Elements of Differential Geometry, Prentice-Hall.

O'Neill B, 1966. Elementary Differential Geometry, Academic Press Inc., New York.

Wang GJ, Tang K, Tai CL, 2004. Parametric representation of a surface pencil with a common spatial geodesic, Comput. Aided Des. 36 (5), 447-459.

Yerlikaya F, Karaahmetoğlu S, Aydemir İ, 2016. On the Bertrand B-Pair Curve in 3-Dimensional Euclidean Space, Journal of Science and Arts, 3(36), 215-224.

Yılmaz S, Turgut M, 2010. A new version of Bishop frame and an application to spherical images, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 371(2), 764-776.