

Parçalı Ters Dönüşüm Yöntemi ile Sürekli Dağılımlardan Tasadüfi Sayı Üretilmesi

Seval Şahin Elhatisarı ^{*1,2}, Fahrettin Özbey ³

*1Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı, BİTLİS

²Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü, ELAZIĞ

³Bitlis Eren Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü, BİTLİS

(Alınış / Received: 03.03.2020, Kabul / Accepted: 05.10.2021, Online Yayınlanma / Published Online: 30.12.2021)

Anahtar Kelimeler

Tasadüfi Sayılar,
Ters Dönüşüm Yöntemi,
En Çok Olabilirlik Yöntemi

Öz: Birçok istatistiksel çalışmada dağılımlardan elde edilen tesadüfi sayılar kullanılır. Bir dağılımdan ters dönüşüm yöntemiyle tesadüfi sayı üretilmesi, dağılım fonksiyonunun tersinin var olduğu durumlarda sıklıkla kullanılan bir yöntemdir. Bu çalışmada ters dönüşüm yönteminden faydalanılarak parçalı ters dönüşüm yöntemi önerilmiştir. Ters dönüşüm ve parçalı ters dönüşüm yöntemiyle üretilen sayıların ilgili teorik dağılımla uyumları incelenmiştir. Ayrıca her iki yöntemle üretilen tesadüfi sayıların parametre tahminine etkileri sayısal yaklaşımlarla araştırılmıştır. Üstel ve Pareto dağılımlarından ters dönüşüm ve parçalı ters dönüşüm yöntemiyle farklı parametre değerleri için farklı büyüklükteki tesadüfi sayılar elde edilmiştir. Elde edilen bu tesadüfi sayılar kullanılarak üstel ve Pareto dağılımlarının en çok olabilirlik tahmin edicilerinin tahmin hatası karşılaştırılmıştır.

Generating Random Number from a Continuous Distribution Using the Piecewise Inverse Transform Method

Keywords

Random Numbers,
Inverse Transform Method,
Maximum Likelihood
Estimation

Abstract: In most of statistical studies, the random numbers obtained by the distribution are used. Generating random numbers from a distribution using the inverse transform method is a method frequently used in cases that includes the inverse of the distribution function. Using the inverse transformation method, the piecewise inverse transform method has been proposed in this study. The compatibility of the random numbers generated by the inverse transform and the piecewise inverse transform method with the relevant theoretical distribution has been examined. Furthermore, numerical approaches were used to explore the effect of random numbers generated by both methods on parameter estimation. The inverse transform and piecewise inverse transform methods from the exponential and Pareto distributions were used to generate random numbers of various sizes for various parameter values. By using these random numbers, the estimation error of the maximum likelihood estimators of the exponential and Pareto distributions have been compared.

*İlgili yazar, e-mail: sevalsahin89@gmail.com

1. Giriş

Birçok istatistiksel yöntem tesadüfi örneklerle dayandığından, uygulamalı istatistikçiler genellikle "tesadüfi sayılar" kaynağına ihtiyaç duyarlar. Daha eski referans kitapları, numunelerin seçilmesinde veya bir deney için tasarım hazırlanmasında kullanılması amaçlanan tesadüfi sayılar tablolarını içerirdi ve istatistiksel uygulamalarda bu tesadüfi sayı tabloları kullanılırdı. Günümüzde tesadüfi sayıların basılmış tablolarının kullanımının yerini neredeyse tamamen bilgisayardan üretilen tesadüfi sayılar almaktadır [1].

Tesadüfi sayı üreteçleri, bilgisayar simülasyonlarında, Monte Carlo yönteminde, çok-boyutlu integral hesaplamalarında, dışbükey olmayan genel optimizasyonlarda, bilimsel hesaplamalarda, elektronik kumar ekipmanlarında (çevrimiçi kumar dahil) ve diğer çeşitli alanlarda kullanılmaktadır [2]. Ayrıca, tesadüfi sayı üreteçleri, şifreleme sistemlerin en önemli yapı taşlarından biridir. Hassas verilerin korunması için öngörülemeyen gizli şifreler üretmek için tesadüfi sayı üreteçleri kullanılır ve tesadüfi sayı üreteçleri, güçlü güvenlik ve gizlilik önlemleri için şifrelemede önemli bir rol oynar [3].

Tesadüfi sayılar anket örnekleme, sayısal analiz, bilgisayar programlama, deneysel fizik ve tesadüfi olayların önemli rol oynadığı birçok uygulama alanında kullanılmaktadır. Belirli bir dağılımdan tesadüfi sayılar dizisini oluşturmanın birçok yolu vardır [4]. Bunlardan bazıları ters dönüşüm yöntemi, kabul-red yöntemi ve ayrışım yöntemleridir. Son yıllarda tesadüfi sayı üretmek için yeni yöntemler geliştirilmiştir. [5-13].

Bir dağılımdan ters dönüşüm yöntemiyle tesadüfi sayı üretilmesi, dağılım fonksiyonun tersinin var olduğu durumlarda sıklıkla kullanılan bir yöntemdir. Ters dönüşüm yönteminde $(0,1)$ aralığından düzgün dağılım ile uyumlu n birimlik bir örneklem seçilmesi hedeflenir ve bu örneklemin dağılım fonksiyonun tersi altındaki görüntü kümesi üretilen tesadüfi sayıları verir. Fakat buradaki temel problem $(0,1)$ aralığından üretilen n tane tesadüfi sayının düzgün dağılım ile uyumlu olup olmamasıdır. Çok nadirde olsa, $(0,1)$ aralığından üretilen örneklemin düzgün dağılım ile uyumsuzluğu olasıdır. $(0,1)$ aralığından üretilen örneklemin düzgün dağılım ile uyumsuzluğu, örneklemin dağılım fonksiyonun tersi altındaki görüntü kümesi ile üretilen tesadüfi sayıların ilgili dağılıma uyumsuzluğu problemini ortaya çıkaracaktır. Bu problemin meydana gelmemesi için, bu çalışmada parçalı ters dönüşüm yöntemi önerilmiştir.

Bu çalışmada öncelikle literatürde var olan ters dönüşüm yöntemine yer verilmiştir, daha sonra ters dönüşüm yönteminden faydalanılarak parçalı ters dönüşüm yöntemi önerilmiştir. Ters dönüşüm ve parçalı ters dönüşüm yöntemiyle üretilen tesadüfi sayıların uyum iyilikleri ve parametre tahminine etkileri sayısal yaklaşımlarla analiz edilmiştir. Bu çalışmadaki sayısal hesaplamalar R programı kullanılarak gerçekleştirilmiştir.

2. Materyal ve Metot

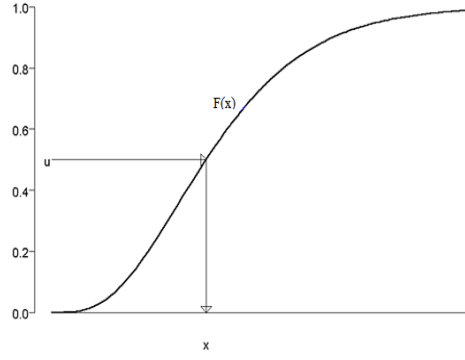
2.1. Ters Dönüşüm Yöntemi

F dağılım fonksiyonuna ait bir X tesadüfi değişkenin dağılımından sayı üretebilmek için en sık kullanılan metotlardan biri, F dağılım fonksiyonunun genelleştirilmiş tersi olan

$$F^{-1} : (0,1) \rightarrow R$$

$$u \rightarrow F^{-1}(u) = \inf \{x : F(x) \geq u\} \quad (1)$$

fonksiyonuna dayalı $X = F^{-1}(U)$ dönüşümünü kullanmaktır. U tesadüfi değişkeni $(0,1)$ aralığı üzerindeki düzgün dağılıma sahiptir. Şekil 1'de görüldüğü gibi $F^{-1}(U)$ tesadüfi değişkeninin dağılım fonksiyonu F olmak üzere $F^{-1}(U)$ dönüşümü ile ortaya çıkan tesadüfi değişken X tesadüfi değişkeninin kendisidir. Böylelikle $X = F^{-1}(U)$ dönüşümü integral dönüşümü olarak bilinmektedir. U $(0,1)$ düzgün dağılımdan üretilen sayılar integral dönüşümü yapılarak X tesadüfi değişkenin dağılımından üretilmiş sayılar olup ve herhangi bir X tesadüfi değişkenin dağılımından sayı üretme işlemi çözülmüş gibi görünmektedir. Fakat buradaki problem bazı dağılımlar için F^{-1} genelleştirilmiş ters fonksiyonunun açık bir şekilde ifade edilememesidir.



Şekil 1. Dağılım Fonksiyonu

X sürekli bir tesadüfi değişken olduğunda dağılımın destek kümesi F artan bir fonksiyon olup yukarıdaki dönüşüm $X = F^{-1}(U)$ biçimini alır. Bu durumda, $X = F^{-1}(U)$ tesadüfi değişkenin dağılım fonksiyonu,

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= P[F^{-1}(U) \leq x] = P[F(F^{-1}(U)) \leq F(x)] \\ &= P[U \leq F(x)] = F(x) \end{aligned} \quad (2)$$

dır. F dağılım fonksiyonunun F^{-1} ters fonksiyonunun değerlerinin hesaplanabilir olması durumunda sürekli bir X tesadüfi değişkeninin dağılımından sayı üretmek için kullanılan algoritma

1. $U(0,1)$ dağılımından U üretilir.
2. $X = F^{-1}(U)$ hesaplanır.

şeklinde ifade edilir [14].

2.2. Parçalı Ters Dönüşüm Yöntemi

Ters dağılım fonksiyonu elde edilebilen herhangi bir sürekli dağılımdan n tane tesadüfi sayı üretmek için aşağıdaki yöntem önerilmiştir.

X sürekli tesadüfi değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ ve dağılım fonksiyonu $F(x)$ olsun. $U \in (0,1)$ olmak üzere dağılım fonksiyonunun tersi $F^{-1}(u)$ ile gösterilsin.

Ters dönüşüm yönteminde $(0,1)$ aralığından n tane tesadüfi sayı üretilir ve bu sayıların $F^{-1}(u)$ fonksiyonu altındaki görüntü kümesi, üretilen tesadüfi sayıları verir. $(0,1)$ aralığından düzgün dağılım ile uyumlu bir örneklem seçilebilmesi için; $(0,1)$ aralığı k tane eşit aralığa (parçaya) bölüldüğünde her aralıktan n/k tane tesadüfi sayı bulunması beklenir [14]. $(0,1)$ aralığı n tane eşit aralığa bölüldüğünde ise her aralıktan bir tane tesadüfi sayı seçilmesi beklenir. Bu bakışa açıyla $(0,1)$ aralığından düzgün dağılım ile uyumlu bir örneklem seçilebilmesi için aşağıdaki yöntem önerilmiştir.

Parçalı ters dönüşüm yönteminde $(0,1)$ aralığı n tane ($n \geq 2$) eşit aralığa bölünür. Her aralıktan bir tane tesadüfi sayı seçilir. Dolayısıyla her aralıkta gözlenen frekans ile beklenen frekans sayısı birbirine eşit olur ve $(0,1)$ aralığından düzgün dağılım ile uyumlu bir örneklem seçilebilmesi garanti altına alınmış olur. Ayrıca her aralıktan tesadüfi olarak sayı seçildiğinden seçilen örneklemin tesadüfliliği bozulmaz. Bu örneklemin $F^{-1}(u)$ fonksiyonu altındaki görüntü kümesi, parçalı ters dönüşüm yöntemi ile üretilen tesadüfi sayıları verir.

$h = 1/n$ olacak şekilde aralık genişliği h ($0 < h < 1$) belirlenir. $x_1 = 0$, $x_{n+1} = 1$ ve $x_{i+1} = x_i + h$, olmak üzere n tane eşit aralık

$$D_i = (x_i, x_{i+1}) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

şeklinde ifade edilir.

3. Bulgular

Bu bölümde öncelikle Üstel ve Pareto dağılımlarının olasılık yoğunluk fonksiyonlarına, dağılım fonksiyonlarına ve ters dağılım fonksiyonlarına yer verilmiştir, daha sonra ters dönüşüm ve parçalı ters dönüşüm yöntemleri kullanılarak üretilen tesadüfi sayıların ilgili teorik dağılım ile uyumlu olup olmadığı araştırılmıştır.

Tahmin teorisinde yapılan çalışmalar incelendiğinde; genellikle yeni tahmin metotları geliştirilip bu tahmin edicinin özellikleri incelenir ve diğer tahmin edicilerle karşılaştırılarak yeni tahmin edicinin daha iyi sonuçlar verdiği iddia edilir. Farklı tahmin edicilerin performansları karşılaştırılırken, parametre tahmini için aynı örneklem kullanılır. Esasında aynı örneklemin kullanılması farklı tahmin edicilerin benzer şartlar altında çalışmasını test etmek için gereklidir. Fakat seçilen örneklemin parametre tahmininin nasıl etkilediği göz ardı edilir. Söz konusu bu etki bu bölümde, ters dönüşüm ve parçalı ters dönüşüm yöntemiyle üretilen tesadüfi sayılar için parametre tahminleri yapılarak araştırılmıştır. Bunun için Üstel ve Pareto dağılımlarından ters dönüşüm ve parçalı ters dönüşüm yöntemiyle tesadüfi sayılar üretilerek ve bu sayılar en çok olabilirlik yönteminde (Maximum Likelihood Estimation MLE) kullanılarak parametre tahminleri elde edilmiştir. Ayrıca, örneklem seçiminin parametre tahmin hatalarına etkileri 100000 tekrar ile yapılan benzetim (simülasyon) sonuçlarına göre tartışılmıştır.

3.1. Üstel Dağılım

Üstel dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu, dağılım fonksiyonu ve ters dağılım fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad x \geq 0, \theta > 0, \quad (4)$$

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\theta}} \quad (5)$$

$$F^{-1}(u) = -\theta \ln(1-u) \quad (6)$$

Üstel dağılımından elde edilen tesadüfi sayılar (x_1, x_2, \dots, x_n) olmak üzere en çok olabilirlik yöntemiyle elde edilen parametre tahmin edicisi

$$\hat{\theta} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (7)$$

şeklindedir [15].

3.2. Pareto Dağılımı

Pareto dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu, dağılım fonksiyonu ve ters dağılım fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$f(x) = v\lambda^v x^{-(v+1)}, \quad x \geq \lambda, v > 0 \quad (8)$$

$$F(x) = 1 - \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-v} \quad (9)$$

$$F^{-1}(u) = \frac{\lambda}{\sqrt[v]{1-u}} \quad (10)$$

Pareto dağılımından elde edilen tesadüfi sayılar (x_1, x_2, \dots, x_n) olmak üzere en çok olabilirlik yöntemiyle elde edilen parametre tahmin edicileri

$$\hat{v} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{\lambda}} \quad (11)$$

$$\hat{\lambda} = \min(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (12)$$

şeklindedir [16].

3.3. Üstel ve Pareto Dağılımlarından Üretilen Tesadüfi Sayılar için Uyum İyiliği Testi

Uyum iyiliği testleri verilerin teorik bir dağılım ile uyumluluğuna karar verirken kullanılır. Bu alt bölümde ters dönüşüm ve parçalı ters dönüşüm yöntemleri kullanılarak üretilen tesadüfi sayıların ilgili teorik dağılım ile uyumlu olup olmadığı, Vasicek [17] ve Song [18] tarafından geliştirilen Vasicek-Song uyum iyiliği testi ile araştırılacaktır.

Ters dönüşüm ve parçalı ters dönüşüm yöntemleri kullanılarak Üstel ve Pareto dağılımlarından n büyüklüğünde tesadüfi sayılar üretilmiştir. Parçalı ters dönüşüm yöntemi için R program kodları ekler bölümünde verilmiştir (Ek A, B). N defa tekrarlar üretilen örneklemelerin Vasicek-Song uyum iyiliği testi sonuçlarının başarı yüzdeleri Tablo 1'de verilmiştir. Parçalı ters dönüşüm yöntemiyle elde edilen tesadüfi sayıların ilgili teorik dağılım ile uyumlu oldukları Tablo 1'de görülebilir. Vasicek-Song uyum iyiliği testi için kullanılan R program kodları ekler bölümünde verilmiştir (Ek C, D).

Tablo 1. N tekrar için Vasicek-Song uyum iyiliği testini başarı ile geçen örneklem yüzdeleri

Tekrar sayısı (N)	Tesadüfi sayı üretmek için kullanılan yöntem	$\theta=3$ parametre değeri için Üstel dağılımdan elde edilen tesadüfi sayılar					$\lambda=3, \nu=5$ parametre değerleri için Pareto dağılımdan elde edilen tesadüfi sayılar				
		n					n				
		100	500	1000	5000	10000	100	500	1000	5000	10000
100	TD	%90,00	%90,00	%92,00	%93,00	%95,00	%95,00	%95,00	%96,00	%96,00	%97,00
	PTD	%100	%100	%100	%100	%100	%100	%100	%100	%100	%100
500	TD	%91,40	%93,00	%94,00	%95,00	%95,60	%95,20	%96,00	%96,00	%96,60	%97,10
	PTD	%100	%100	%100	%100	%100	%100	%100	%100	%100	%100
1000	TD	%92,20	%93,50	%94,40	%95,20	%95,40	%96,00	%96,30	%96,50	%97,00	%97,40
	PTD	%100	%100	%100	%100	%100	%100	%100	%100	%100	%100
5000	TD	%92,36	%93,54	%94,88	%95,82	%95,98	%96,44	%96,57	%96,72	%97,09	%97,40
	PTD	%100	%100	%100	%100	%100	%100	%100	%100	%100	%100
10000	TD	%92,44	%94,16	%94,97	%95,98	%96,15	%96,50	%96,64	%97,08	%97,18	%97,50
	PTD	%100	%100	%100	%100	%100	%100	%100	%100	%100	%100

TD: Ters Dönüşüm Yöntemi, PTD: Parçalı Ters Dönüşüm Yöntemi.

3.4. Üstel ve Pareto Dağılımları için Tahmin Hataları

Üstel ve Pareto dağılımlardan ters dönüşüm ve parçalı ters dönüşüm yöntemiyle tesadüfi sayılar üretilerek ve bu sayılar en çok olabilirlik yönteminde kullanılarak parametre tahminleri elde edilmiştir (Tablo 2-3). Parçalı ters dönüşüm yöntemiyle elde edilen tesadüfi sayılarla yapılan parametre tahmin değerlerinin ilgili parametreye yakın olduğu Tablo 2 ve 3'de görülebilir.

Tahmin hatalarını belirlemek için hata kareler ortalaması (Mean Square Error (MSE)) ve yan (Bias) sıklıkla kullanılan ifadelerdir. Herhangi bir dağılımın parametresi α olsun. Bu dağılımdan elde edilen örneklemle yapılan parametre tahmini $\hat{\alpha}$ olmak üzere bu işlemin N defa tekrarlanmasıyla elde edilen parametre tahminleri $(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_N)$ olsun. Bu durumda Bias ve MSE değerleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\alpha - \hat{\alpha}_j)^2 \quad (13)$$

$$Bias = \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \hat{\alpha}_j \right) - \alpha \quad (14)$$

Üstel ve Pareto dağılımlarından ters dönüşüm ve parçalı ters dönüşüm yöntemiyle farklı parametre değerleri için elde edilen farklı büyüklükteki tesadüfi sayılar kullanılarak MLE yöntemiyle elde edilen parametre tahminlerinin tahmin hataları Tablo 4' de verilmiştir. Tablo 4' deki MSE ve Bias değerlerinin hesaplanması için $N = 100000$ alınmıştır. Parçalı ters dönüşüm yöntemiyle üretilen tesadüfi sayılarla elde edilen parametre tahmin hatalarının düşük olduğu Tablo 4' de görülebilir.

Tablo 2. Üstel dağılımından üretilen tesadüfi sayılarla parametre tahmini (MLE)

n	Tesadüfi sayı üretmek için kullanılan parametreler		Tesadüfi sayı üretmek için kullanılan yöntem	
	θ		Ters dönüşüm yöntemi	Parçalı ters dönüşüm yöntemi
	$\hat{\theta}$		$\hat{\theta}$	$\hat{\theta}$
10	0,2		0,135421	0,187969
50			0,153780	0,195997
100			0,175468	0,199157
1000			0,188099	0,200534
10000			0,202628	0,200016
10			5	
50	4,311213	4,886172		
100	4,691717	4,936796		
1000	4,786572	5,001553		
10000	4,977142	5,000673		

Tablo 3. Pareto dağılımından üretilen tesadüfi sayılarla parametre tahmini (MLE)

n	Tesadüfi sayı üretmek için kullanılan parametreler		Tesadüfi sayı üretmek için kullanılan yöntem			
	λ		Ters dönüşüm yöntemi		Parçalı ters dönüşüm yöntemi	
	ν	λ	$\hat{\nu}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\nu}$	$\hat{\lambda}$
10	0,2	0,1	0,169195	0,125484	0,215459	0,125338
50			0,178069	0,110815	0,188452	0,103756
100			0,220184	0,106167	0,203468	0,104284
1000			0,201603	0,101256	0,199698	0,100255
10000			0,200666	0,100184	0,199975	0,100044
10			5	3	6,277114	3,055834
50	5,916255	3,063270			5,118619	3,009089
100	5,240104	3,063606			5,079140	3,003876
1000	5,183275	3,002184			4,997209	3,000258
10000	5,021925	3,000006			4,999836	3,000006

Tablo 4. Tahminler için MSE ve Bias değerleri

n	Tesadüfi sayı üretmek için kullanılan yöntem	Üstel Dağılım		Pareto Dağılımı	
		$\theta = 3$	$\theta = 1$	$\nu = 5; \lambda = 3$	$\nu = 3; \lambda = 1$
10	TD	0,88738430 (0,00851277)	0,09943783 (0,00141232)	7,15897400; 0,00769656 (1,25884000; 0,06141827)	2,56851500; 0,00247909 (0,74665030; 0,03466414)
	PTD	0,09637399 (0,00010601)	0,01067126 (0,00004911)	0,39690930; 0,00132542 (0,33242300; 0,03140792)	0,14204690; 0,00041302 (0,19960940; 0,01750820)
30	TD	0,30095120 (0,00027901)	0,03321997 (0,00050562)	1,18906700; 0,00080592 (0,35506610; 0,01999320)	0,42944720; 0,00025874 (0,21436420; 0,01120998)
	PTD	0,01075075 (0,00033482)	0,00120851 (0,00010697)	0,03945450; 0,00013764 (0,09255411; 0,01015159)	0,01425646; 0,00004248 (0,05525725; 0,00562991)
50	TD	0,18068500 (0,00123703)	0,01995932 (0,00009666)	0,61937820; 0,00029299 (0,20900980; 0,01206964)	0,22388990; 0,00009080 (0,12636250; 0,00672942)
	PTD	0,00390774 (0,00009044)	0,00043450 (0,00002874)	0,01423956; 0,00004860 (0,05257971; 0,00602788)	0,00505620; 0,00001505 (0,03156033; 0,00335457)
100	TD	0,08995953 (0,00027665)	0,01004041 (0,00019313)	0,27810180; 0,00007211 (0,10452800; 0,00600257)	0,10081600; 0,00002247 (0,06154215; 0,00334814)
	PTD	0,00097471 (0,00000820)	0,00010793 (0,00001915)	0,00356202; 0,00001210 (0,02565159; 0,00300882)	0,00127007; 0,00000374 (0,01550005; 0,00167395)
1000	TD	0,00901250 (0,00007130)	0,00100522 (0,00008257)	0,02531483; 0,00000070 (0,00971054; 0,00059545)	0,00914023; 0,00000022 (0,00557434; 0,00033314)
	PTD	0,00000978 (0,00000548)	0,00000108 (0,00000074)	0,00003550; 0,00000012 (0,00248776; 0,00030022)	0,00001270; 0,00000003 (0,00150268; 0,00016657)
10000	TD	0,00089463 (0,00003750)	0,00009997 (0,00000645)	0,00250247; 0,00000001 (0,00102305; 0,00005982)	0,00090781; 0,00000001 (0,00041938; 0,00003342)
	PTD	0,00000009 (0,00000113)	0,00000001 (0,00000044)	0,00000034; 0,00000001 (0,00025028; 0,00003008)	0,00000012; 0,00000001 (0,00015068; 0,00001666)

TD: Ters Dönüşüm Yöntemi, PTD: Parçalı Ters Dönüşüm Yöntemi, (): Bias değerleri parantez içine yazıldı.

4. Tartışma ve Sonuç

Parçalı ters dönüşüm yönteminde (0,1) aralığından düzgün dağılım ile uyumlu bir örneklem seçilebilmesi garanti altına alınmış olduğundan dolayı bu örneklemin dağılım fonksiyonunun tersi altındaki görüntü kümesi ile üretilen tesadüfi sayıların ilgili teorik dağılımla uyumlu olması garanti altına alınmıştır.

Sürekli dağılımların parametrelerine bazı değerler atanarak ters dönüşüm ve parçalı ters dönüşüm yöntemiyle tesadüfi sayılar oluşturulmuştur ve bu tesadüfi sayılar kullanılarak en çok olabirlik tahmin edicileri elde edilmiştir. Parçalı ters dönüşüm yöntemi ile oluşturulan örneklemelerin parametre tahminlerinin MSE ve Bias değerlerinin düşük olduğu görülmüştür. MLE yönteminde parçalı ters dönüşüm yöntemiyle elde edilen örneklemin kullanılması tahmin hatalarını azaltmaktadır.

Önerilen yöntemle benzer yaklaşımla; dağılım fonksiyonunun tersi elde edilemeyen sürekli dağılımlarda, olasılık yoğunluk fonksiyonunun tanım kümesi eşit yoğunluklu ardışık n tane parçaya bölünüp ve bu parçaların sınırları belirlendikten sonra her bir parçadan birer tesadüfi sayı seçilerek ilgili teorik dağılımla uyumlu tesadüfi sayılar üretilebilir.

Teşekkür

Bu çalışma, birinci yazarın ikinci yazar danışmanlığında hazırladığı yüksek lisans tezinden üretilmiştir.

Çıkar Çatışması Beyanı

Yazarlar arasında herhangi bir çıkar çatışması bulunmamaktadır.

Araştırma ve Yayın Etiği Beyanı

Yapılan çalışmada, araştırma ve yayın etiğine uyulmuştur.

Kaynakça

- [1] Gentle, J. E. 2003. Random Number Generation and Monte Carlo Methods. Second Edition, USA.
- [2] Tanackov, I., Sinani, F., Stankovic, M., Bogdanovic, V., Stevic, Z., Vidic, M., Martinov, J.M. 2019. Natural Test for Random Numbers Generator Based on Exponential Distribution Mathematics. 7(920), 1-14.
- [3] Dodge, Y. 1996. A natural Random Number Generator. International Statistical Review, 64(3), 329-344.
- [4] Erbay, C., Ergün, S. 2018. Random Number Generator Based on Fuel Cells. New Generation of CAS (NGCAS), Valletta, 98-101.
- [5] Kaya, D., Tuncer, S. A. 2019. Generating random numbers from biological signals in labview environment and statistical analysis. Traitement du Signal, 36(4), 303-310.
- [6] Hu, G., Peng J. Kou, W. 2019. A Novel Algorithm for Generating Pseudo-random Number. International Journal of Computational Intelligence Systems, 12(2), 643-64.
- [7] Zang, S., Hu, H., Zhong, J., Luo, D., Fang, Y. 2018. Generating Random Numbers by means of Nonlinear Dynamic Systems. Physics Education, 53(4).
- [8] Ma, S., Liu, J., Yang Z., Hu, J. 2018. A Method of Generating High Speed and Long Period Pseudo-random Sequence Based on Residue Number System and Permutation Polynomial. Journal of Electronics and Information Technology, 40(1), 42-49.
- [9] Yan, N. S. 2017. Three steps Iteration Method of Generating Function of Sum N Random Numbers. Journal of Beijing Institute of Clothing Technology (Natural Science Edition), 37(4), 89-94.
- [10] Boiroju, N. K., Venkaiah, K. 2016. A New Algorithm for Generating Gaussian random Numbers. International Journal of Agricultural and Statistical Science, 12(2), 307-310.
- [11] Dong, L. H., Yao, G. L. 2016. Method for Generating Pseudo-random Numbers Based on Cellular Neural Network. Journal on Communications, 37, 85-91.
- [12] Tuncer, N. S., Genç, Y. 2019. İnsan Hareketleri Tabanlı Gerçek Rasgele Sayı Üretimi. Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, 8(1), 261-269.
- [13] Şahin, S. 2017. Pareto dağılımında örnek seçiminin tahmin ediciye etkisi. Bitlis Eren Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Bitlis.
- [14] Öztürk, F., Özbek, L. 2004. Matematiksel Modelleme ve Simülasyon. Gazi Kitabevi, Ankara.
- [15] Sağlam, V., Sağır, M., Yücesoy, E. 2016. Olasılığa Giriş. Seçkin Yayıncılık, Ankara.
- [16] Prakash, G. 2009. Some Estimators for the Pareto Distribution. Journal of Scientific Research, 1(2), 236-247.
- [17] Vasicek, O. 1976. A test for normality based on sample entropy. Journal of the Royal Statistical Society Series B Methodological, 38(1), 54-59.
- [18] Song, K. S. 2002. Goodness-of-fit tests based on Kullback-Leibler discrimination information. IEEE Transactions on Information Theory, 48(5), 1103-1117.
- [19] Lequesne, J., Regnault, P. 2020. Package vsgoftest: goodness-of-fit tests based on Kullback-Leibler divergence. https://cran.r-project.org/web/packages/vsgoftest/vignettes/vsgoftest_tutorial.pdf (Erişim Tarihi: 08.09.2021).

Ekler

Ek A. Parçalı ters dönüşüm yöntemi ile Üstel dağılımdan n tane tesadüfi sayı üretilmesi için R kodları

```
teta <- 3           # parametre
n <- 1000          # örneklem büyüklüğü
h <- 1/n           # aralığın genişliği
U <- n+1
sindeg <- seq(from = 0, to =1, length.out =U)
orn <- c()
for(i in 1:n)
{k <- sindeg[i]
m <- sindeg[i]+h
orn <- c(orn, runif(1, k, m))}
usteltesadufisayı <-(- (teta) * ( log(1-orn) ) )
```


Ek B. Parçalı ters dönüşüm yöntemi ile Pareto dağılımdan n tane tesadüfi sayı üretilmesi için R kodları

```

lmd <- 3           # skaler parametre
v <- 5            # şekil parametresi
h <- 1/n          # aralığın boyu
U <- n+1
sindeg <- seq(from = 0, to =1, length.out =U)
orn <- c()
for(i in 1:n)
{k <- sindeg[i]
m <- sindeg[i]+h
orn <- c(orn, runif(1, k, m))}
paretotesadufisayı <- ((lmd)/((1-orn)^(1/v)))

```

Ek C. Üstel dağılım için Vasicek-Song uyum iyiliği testi

```

usteltesadufisayı           #Uyum iyiliği test edilecek örneklem
install.packages('vsgofstest') #Zorunlu paket [19].
library('vsgofstest')
install.packages('devtools')
devtools::install_github('pregnault/vsgofstest')
vs.test(usteltesadufisayı, densfun = 'dexp')

```

Ek D. Pareto dağılımı için Vasicek-Song uyum iyiliği testi

```

paretotesadufisayı           #Uyum iyiliği test edilecek örneklem
install.packages('vsgofstest') #Zorunlu paket [19].
library('vsgofstest')
install.packages('devtools')
devtools::install_github('pregnault/vsgofstest')
vs.test(paretotesadufisayı, densfun = 'dpareto')

```