

BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ DERGİSİ

Cilt 20 Sayı 3 Aralık 2018 ISSN 1301-7985
ICAME'18 Özel Sayısı



Journal of Balıkesir University
Institute of Science and Technology

Volume 20 Number 3 December 2018 ISSN 1301-7985
Special Issue of ICAME'18

BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ DERGİSİ

Cilt 20 Sayı 3 (Özel Sayı) Aralık 2018



BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ DERGİSİ

Yazışma Adresi:

BAUN FBE Dergisi, Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 10145 Çağış / Balıkesir

Telefon: (266) 612 10 77

Elektronik Posta: fbedergi@balikesir.edu.tr

İnternet Adresi : <http://fbed.balikesir.edu.tr>

BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ DERGİSİ

Cilt 20 Sayı 3 Aralık 2018
ICAME'18 Özel Sayısı

ISSN 1301-7985
eISSN 2536-5142



Journal of Balıkesir University
Institute of Science and Technology

Volume 20 Number 3 December 2018
Special Issue of ICAME'18

ISSN 1301-7985
eISSN 2536-5142

BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ DERGİSİ

CİLT: 20 SAYI: 3

Aralık 2018
ICAME'18 Özel Sayısı

ISSN 1301-7985
eISSN 2536-5142

Sahibi Balıkesir Üniversitesi Adına: Prof. Dr. Kerim ÖZDEMİR
Balıkesir Üniversitesi Rektörü

Özel Sayı Editörleri :

Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR	Balıkesir Üniversitesi
Doç. Dr. Ali KONURALP	Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Doç. Dr. Fırat EVİRGEN	Balıkesir Üniversitesi
Dr. Öğr. Üyesi Nuray GEDİK	Balıkesir Üniversitesi
Dr. Öğr. Üyesi İbrahim KÜÇÜKKOÇ	Balıkesir Üniversitesi

Yayın Kurulu :

Prof. Dr. M. Sedat KABDAŞLI	İstanbul Teknik Üniversitesi
Prof. Dr. Serdar KALE	İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü
Prof. Dr. Ramazan KÖSE	Dumlupınar Üniversitesi
Prof. Dr. Hüseyin KÜÇÜKÖZER	Balıkesir Üniversitesi
Prof. Dr. Kemal LEBLEBİCİOĞLU	Orta Doğu Teknik Üniversitesi
Prof. Dr. Osman SAĞDIÇ	Yıldız Teknik Üniversitesi
Prof. Dr. Mustafa TAVASLI	Uludağ Üniversitesi
Prof. Dr. İlyas UYGUR	Düzce Üniversitesi
Prof. Dr. Kemal YÜRÜMEZOĞLU	Dokuz Eylül Üniversitesi
Prof. Dr. Metin DEMİRTAŞ	Balıkesir Üniversitesi
Doç. Dr. Aslan Deniz KARAOĞLAN	Balıkesir Üniversitesi

Yazışma Adresi: Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Çağış Yerleşkesi
10145, Balıkesir
Tel: (0266) 612 10 77 Faks: (0266) 612 10 78
Elektronik Posta: fbedergi@balikesir.edu.tr
İnternet Adresi: <http://fbed.balikesir.edu.tr>

BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ DERGİSİ

CİLT: 20 SAYI: 3

Aralık 2018
ICAME'18 Özel Sayısı

ISSN 1301-7985
eISSN 2536-5142

AMAÇ VE KAPSAM

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisinin amacı; Fen bilimleri, Mühendislik bilimleri ve Fen-Matematik Eğitimi alanlarında yapılan özgün araştırma makaleleri, kısa makaleleri, derlemeleri bu alanlarda saygın akademik bir kaynak oluşturmak amacıyla yayımlamaktır.

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, bilimsel ve hakemli bir dergi olup 1999 yılından bu yana yılda iki kez (haziran ve aralık aylarında) düzenli olarak yayımlanmaktadır. Derginin yazım dili Türkçe ve İngilizcedir.

YAYIM İZİNİ

Bireysel kullanım dışında, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi'nde yayımlanan makaleler ve bu makalelerde yer alan şekiller ve tablolar yazılı izin olmaksızın çoğaltılamaz. Bilimsel makalelerde akademik usullere uygun atıf yapılmak sureti ile alıntı yapılabilir.

YAZILARIN BİLİMSEL VE HUKUKİ SORUMLULUĞU

Yayımlanan yazıların bilimsel ve hukuki sorumluluğu yazarlarına aittir. Editör, Yardımcı Editörler ve Yayın Kurulu üyeleri dergideki hatalardan veya kullanımından kaynaklanan sonuçlardan dolayı sorumluluk kabul etmez.

Yazışma Adresi: Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Çağış 10145,
Balıkesir
Tel: (0266) 612 10 77 Faks: (0266) 612 10 78
Elektronik Posta: fbedergi@balikesir.edu.tr
İnternet Adresi: <http://fbed.balikesir.edu.tr>

İÇİNDEKİLER / CONTENTS

Araştırma Makalesi / Research Article

An effective numerical technique for the Rosenau-KdV-RLW equation

Rosenau-KdV-RLW denklemi için etkin bir sayısal teknik

1-14

Sibel ÖZER

Solving fractional difference equations by discrete Adomian decomposition method

Ayrık Adomian ayrışım metodu ile kesirli mertebe fark denklemlerinin çözümü

15-22

Figen ÖZPINAR

Kaotik bir hareket videosunun yapay sinir ağları ile modellenmesi

Modelling of chaotic motion video with artificial neural networks

23-35

Murat Erhan ÇİMEN, Sezgin KAÇAR, Emre GÜLERYÜZ, Bilal GÜREVİN, Akif AKGÜL

A numerical solution for advection-diffusion equation based on a semi-Lagrangian scheme

Yarı-Lagrangian bir şema yaklaşımına dayalı adveksiyon-difüzyon denkleminin bir sayısal çözümü

36-52

Ersin BAHAR, Sila O. KORKUT, Yesim CICEK, Gurhan GURARSLAN

Numerical solution and stability analysis of transient MHD duct flow

Zamana bağımlı MHD kanal akışının nümerik çözümü ve kararlılık analizi

53-61

Münevver TEZER-SEZGİN, Merve GÜRBÜZ

Marmara Bölgesi'ndeki bazı mermer örneklerinde radyolojik tehlikelerin ve yaşam boyu kanser riskinin değerlendirilmesi

Assessment of radiological hazards and lifetime cancer risk in some marble samples from the Marmara Region

62-74

Kadir GÜNOĞLU

İÇİNDEKİLER / CONTENTS

Araştırma Makalesi / Research Article

Homotopy methods for fractional linear/nonlinear differential equations with a local derivative operator

Lokal türev operatörlü lineer/lineer olmayan diferansiyel denklemler için homotopi metotları 75-89

Mehmet YAVUZ, Burcu YAŞKIRAN

Eko-verimlilik kavramı, gelişimi ve uygulanma süreci

The concept, development and implementation process of eco-efficiency 90-104

Bengü GÜNGÖR, Burcu FELEKOĞLU

Adveksiyon difüzyon denklemi için sektik B-spline Galerkin metodu

Sextic B-spline Galerkin method for advection diffusion equation 105-116

Evren TOPCU, Dursun IRK

Mathematical behavior of the solutions of a class of hyperbolic-type equation

Hiperbolik tipten bir denklemin çözümlerinin matematiksel davranışı 117-128

Erhan PİŞKİN, Hazal YÜKSEKKAYA

Various techniques to solve Blasius equation

Blasius denkleminin çözümü için çeşitli teknikler 129-142

Utku Cem KARABULUT, Alper KILIÇ

Simple recurrent neural networks for the numerical solutions of ODEs with Dirichlet boundary conditions

Dirichlet sınır değer koşullarına sahip adi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için basit tekrarlayan sinir ağları 143-153

Korhan GÜNEL, Gülsüm İŞMAN, Merve KOCAKULA

On some new sequence spaces

Bazı yeni dizi uzayları üzerine 154-162

Ekrem SAVAŞ

An effective numerical technique for the Rosenau-KdV-RLW equation

Sibel OZER*

Department of Mathematics, İnönü University, 44280 Malatya, Turkey,

Geliş Tarihi (Received Date): 26.07.2018

Kabul Tarihi (Accepted Date): 18.10.2018

Abstract

In this study, the Rosenau-Korteweg-de Vries-Regular Longwave (Rosenau-KdV-RLW) equation has been converted into a partial differential equation system consisting of two equations using a splitting technique. Then, numerical solutions for the Rosenau-KdV-RLW equation system have been obtained using separately both cubic and quintic B-spline finite element collocation method. For the unknowns in those equations, B-spline functions at x -position and Crank-Nicolson type finite difference approaches at time positions are used. A test problem has been chosen to check the accuracy of the proposed discretized scheme. The basic conservation properties of the Rosenau-KdV-RLW equation have been shown to be protected by the proposed numerical scheme. The results are compared with the analytical solution of the problem and the results given in the literature. For the reliability of the method the error norms L_2 and L_∞ are calculated. It is seen that the proposed method gives harmonious results with exact solutions.

Keywords: Rosenau-KdV-RLW, B-spline functions, collocation method, splitting technique.

Rosenau-KdV-RLW denklemi için etkin bir sayısal teknik

Özet

Bu çalışmada, Rosenau Korteweg-de Vries düzenli uzun dalga (Rosenau-KdV-RLW) denklemi bir parçalama tekniği kullanılarak iki denklemden oluşan bir kısmi diferansiyel denklem sistemine dönüştürülmüştür. Daha sonra, Rosenau-KdV-RLW denklem sistemi için kübik ve kuintik B-spline sonlu eleman kollakasyon yöntemi kullanılarak sayısal çözümler önerilmiştir. Bu denklemlerdeki bilinmeyenler için x -konumunda B-spline fonksiyonlar ve zaman konumunda Crank-Nicolson tipi sonlu fark

* Sibel OZER, sibel.oz@inonu.edu.tr, <http://orcid.org/0000-0003-4956-4002>

yaklaşimleri kullanılmıştır. Önerilen sayısal şemaların doğruluğunu kontrol etmek için bir test problemi seçilmiştir. Rosenau-KdV-RLW denkleminin temel korunum özelliklerinin önerilen sayısal şemalar ile korunduğu görülmüştür. Elde edilen sonuçlar problemin analitik çözümü ve literatürde verilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Yöntemin güvenilirliği için L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanmıştır. Önerilen yöntemin tam çözümlerle uyumlu sonuçlar verdiği görülmüştür.

Anahtar kelimeler: Rosenau-KdV-RLW, B-spline fonksiyonlar, kollakasyon metodu, parçalama tekniği.

1. Introduction

In this paper, we will deal with the numerical solution of the Rosenau-KdV-RLW equation given by

$$u_t + au_x + b(u^p)_x - cu_{xxt} + du_{xxx} + eu_{xxxxt} = 0 \quad (1)$$

subject to the initial condition

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [x_L, x_R] \quad (2)$$

and the boundary conditions

$$\begin{aligned} u(x_L, t) &= u(x_R, t) = 0 \\ u_x(x_L, t) &= u_x(x_R, t) = 0, \quad t \in (0, T], \\ u_{xx}(x_L, t) &= u_{xx}(x_R, t) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

where x and t denote the spatial and time variables, respectively, T is final time, $u(x, t)$ is the nonlinear wave profile, a, b, c, d and e are non-negative real numbers, $u_0(x)$ is a given smooth function and $x_L \leq 0$ and $x_R \geq 0$ which are both large [1]. If $u_0(x)$ tends to zero when $x_L \leq 0$ and $x_R \geq 0$, then the above initial-boundary value problem is consistent, so the given boundary conditions are meaningful for the solitary solution of the Rosenau-KdV-RLW Eq. (1) is obtained by combining the Rosenau-KdV equation and Rosenau-RLW equation. For $c=0$, Eq. (1) becomes

$$u_t + au_x + b(u^p)_x + du_{xxx} + eu_{xxxxt} = 0 \quad (4)$$

which is the well known Rosenau-KdV equation. Eq.(4) has been solved numerically by some methods [2-4]. For $d=0$, Eq. (1) takes the form

$$u_t + au_x + b(u^p)_x - cu_{xxt} + eu_{xxxxt} = 0 \quad (5)$$

which is the well known Rosenau-RLW equation. The numerical solution of this equation has been studied in the past years [1, 5-7].

The Rosenau-KdV-RLW equation (1) with the initial (2) and boundary conditions given by (3) has been solved by several authors. Pan and et.al. [8] presented a new Crank-Nicolson pseudo-compact conservative numerical scheme for the Rosenau-KdV-RLW equation. Korkmaz and Dereli [9] proposed a meshfree method based on the

collocation with radial basis functions to solve the Rosenau-KdV-RLW equation. Wang and Dai [4] proposed a three-level linear conservative implicit finite difference scheme. Ghilongi and Omrani [10] introduced some high-order accurate finite difference schemes for the Rosenau-KdV-RLW equation. Foroutan and Ebadian [11] proposed the modified Chebyshev rational approximations for the Rosenau-KdV-RLW equation on the infinite intervals. Fernandez and Ramos [12] analyzed numerically Rosenau-KdV-RLW equation with second and fourth-order dissipative terms subject to homogeneous boundary conditions and initial Gaussian conditions by means of a second-order accurate trapezoidal procedure in time where the first, second, third and fourth order spatial derivatives are considered as unknowns and have been discretized by means of three-point, fourth-order accurate, compact finite difference formulae.

2. Mathematical model

In the present study, the numerical solutions of the Rosenau-KdV-RLW equation (1) are going to be sought using separately both cubic and quintic B-spline finite element collocation method together with the initial (2) and the boundary conditions (3). First of all, the Rosenau-KdV-RLW equation (1) is converted into a system consisting of two partial differential equations as follows

$$u_t + au_x + pbu^{p-1}u_x - cv_t + dv_x + ev_{xxt} = 0 \quad (6)$$

$$u_{xx} - v = 0 \quad (7)$$

The resulting equations (6)-(7) are going to be called the Rosenau-KdV-RLW equation system. Under these conditions, the Rosenau-KdV-RLW equation system is converted into a new system of equation given by the following initial and boundary conditions.

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = u_0''(x), \quad x \in [x_L, x_R] \quad (8)$$

$$u(x_L, t) = u(x_R, t) = 0, \quad v(x_L, t) = v(x_R, t) = 0, \quad t \in (0, T] \quad (9)$$

In the Rosenau-KdV-RLW equations system (6)-(7), writing forward difference equations in place of derivatives with respect to time variable t , and Crank-Nicolson type finite difference approximations with respect to space variable x , and assuming $Z = a + pbu^{p-1}$, we obtain the following system of equations

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{k} + Z \frac{u_x^{n+1} + u_x^n}{2} - c \frac{v^{n+1} - v^n}{k} + d \frac{v_x^{n+1} + v_x^n}{2} + e \frac{v_{xx}^{n+1} - v_{xx}^n}{k} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{u_{xx}^{n+1} + u_{xx}^n}{2} - \frac{v^{n+1} + v^n}{2} = 0. \quad (11)$$

If we reorganize the above system of equations, we obtain the following relations between the n and $n+1$ time levels

$$u^{n+1} + \frac{kZ}{2}u_x^{n+1} - cv^{n+1} + \frac{kd}{2}v_x^{n+1} + ev_{xx}^{n+1} = u^n - \frac{kZ}{2}u_x^n - cv^n - \frac{kd}{2}v_x^n + ev_{xx}^n \quad (12)$$

$$u_{xx}^{n+1} - v^{n+1} = -u_{xx}^n + v^n. \quad (13)$$

The approximate solutions corresponding to the exact solutions $u(x, t)$ and $v(x, t)$ of the Rosenau-KdV-RLW equation system (6)-(7) are going to be denoted by $u_N(x, t)$ and $v_N(x, t)$, respectively. The solution domain of the problem is taken as $[x_L, x_R] \times [0, T]$. An uniform grid structure is constructed on the solution domain of the problem by taking $h = x_{m+1} - x_m$ for $m = 0(1)N - 1$ on the space domain $[x_L, x_R]$ as $x_L = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = x_R$ and $k = t_{n+1} - t_n$ for $n = 0(1)M - 1$ on the time domain $[0, T]$ as $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{M-1} < t_M = T$. Under these conditions, the values of $u_N(x_m, t_n)$ and $v_N(x_m, t_n)$ at the nodal points (x_m, t_n) are going to be denoted by u_m^n and v_m^n , respectively.

2.1. Scheme-I: Cubic B-spline collocation method

The first numerical scheme is going to be obtained by cubic B-spline finite element collocation method. Cubic B-spline basis functions $\phi_m(x)$ for $m = -1(1)N + 1$ are defined as follows

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m-2})^3 & , [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3 & , [x_{m-1}, x_m] \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3 & , [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^3 & , [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0 & , otherwise \end{cases} \quad (14)$$

[13]. Since the set of cubic B-spline basis functions $\{\phi_{-1}(x), \phi_0(x), \dots, \phi_{N+1}(x)\}$ constitutes a base for the smooth functions defined over the domain $[x_L, x_R]$, the approximate solutions $u_N(x, t_n)$ and $v_N(x, t_n)$ can be written as follows in terms of the cubic B-spline basis functions

$$u_N(x, t) = \sum_{i=-1}^{N+1} \phi_i(x) \delta_i(t), \quad v_N(x, t) = \sum_{i=-1}^{N+1} \phi_i(x) \sigma_i(t). \quad (15)$$

Here $\delta_i(t)$ and $\sigma_i(t)$ are time dependent parameters to be determined. Since the cubic B-spline basis functions and their derivatives are zero outside the domain $[x_{m-2}, x_{m+2}]$, the approximations over the typical element $[x_m, x_{m+1}]$ can be written in the following form

$$u_N(x, t) = \sum_{i=m-1}^{m+2} \phi_i(x) \delta_i(t), \quad v_N(x, t) = \sum_{i=m-1}^{m+2} \phi_i(x) \sigma_i(t). \quad (16)$$

If we apply the local coordinate transformation $h\xi = x - x_m$, $0 \leq \xi \leq 1$ on the typical element $[x_m, x_{m+1}]$, the B-spline basis functions on the new interval $[0, 1]$ in terms of local variable ξ can be written as follows

$$\begin{aligned} \phi_{m-1} &= (1 - \xi)^3, \\ \phi_m &= 1 + 3(1 - \xi) + 3(1 - \xi)^2 - 3(1 - \xi)^3, \\ \phi_{m+1} &= 1 + 3\xi + 3\xi^2 - 3\xi^3, \\ \phi_{m+2} &= \xi^3. \end{aligned} \quad (17)$$

The nodal values of the approximate functions $u_N(x_m, t) = u_m$, $v_N(x_m, t) = v_m$ and their derivatives up to second order with respect to space variable x for $m = 0(1)N$ in terms of parameters δ_m and σ_m are obtained as follows

$$\begin{aligned}
 u_m &= \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}, & v_m &= \sigma_{m-1} + 4\sigma_m + \sigma_{m+1}, \\
 u'_m &= \frac{3}{h}(-\delta_{m-1} + \delta_{m+1}), & v'_m &= \frac{3}{h}(-\sigma_{m-1} + \sigma_{m+1}), \\
 u''_m &= \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}), & v''_m &= \frac{6}{h^2}(\sigma_{m-1} - 2\sigma_m + \sigma_{m+1}).
 \end{aligned} \tag{18}$$

Here the superscript denotes the derivative with respect to variable x . If we write these pointwise values in Eqs. (12)-(13) and rearrange them for $m = 0(1)N$, we obtain the following set of algebraic equations

$$\begin{aligned}
 A_1\delta_{m-1}^{n+1} + A_2\delta_m^{n+1} + A_3\delta_{m+1}^{n+1} + B_1\sigma_{m-1}^{n+1} + B_2\sigma_m^{n+1} + B_3\sigma_{m+1}^{n+1} = \\
 C_1\delta_{m-1}^n + C_2\delta_m^n + C_3\delta_{m+1}^n + D_1\sigma_{m-1}^n + D_2\sigma_m^n + D_3\sigma_{m+1}^n
 \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
 E_1\delta_{m-1}^{n+1} + E_2\delta_m^{n+1} + E_3\delta_{m+1}^{n+1} + F_1\sigma_{m-1}^{n+1} + F_2\sigma_m^{n+1} + F_3\sigma_{m+1}^{n+1} = \\
 G_1\delta_{m-1}^n + G_2\delta_m^n + G_3\delta_{m+1}^n + H_1\sigma_{m-1}^n + H_2\sigma_m^n + H_3\sigma_{m+1}^n.
 \end{aligned} \tag{20}$$

The values of coefficients $A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i, G_i$ and H_i for $i = 1(1)3$ are given in the Table 1. This system of equations consists of $(2N + 6)$ unknowns and $(2N+2)$ equations. If the unknowns $\delta_{-1}, \delta_{N+1}, \sigma_{-1}, \sigma_{N+1}$ encountered for values of $m=0,N$

Tablo 1. The values of the coefficients of the equation systems given by Eqs. (19)-(20)

i	A_i	B_i	C_i	D_i	E_i	F_i	G_i	H_i
1	$1 - \frac{3kZ_m}{2h}$	$-c - \frac{3kd}{2h} + \frac{6e}{h^2}$	A_{4-i}	B_{4-i}	$\frac{6}{h^2}$	-1	$-\frac{6}{h^2}$	1
2	4	$-4c - \frac{12e}{h^2}$	A_{4-i}	B_{4-i}	$-\frac{12}{h^2}$	-4	$\frac{12}{h^2}$	4
3	$1 - \frac{3kZ_m}{2h}$	$-c + \frac{3kd}{2h} + \frac{6e}{h^2}$	A_{4-i}	B_{4-i}	$\frac{6}{h^2}$	-1	$-\frac{6}{h^2}$	1

are eliminated using the boundary conditions given by Eq.(9), a system of $(2N+2)$ equations in $(2N+2)$ unknowns are obtained. First of all, we write the unknowns of this system of equations in the form of $\mathbf{d}^T = [\delta_0 \sigma_0 \delta_1 \sigma_1 \dots \delta_N \sigma_N]^T$ and arrange the both sides of the equation in such a way that the coefficients matrices are in agreement with \mathbf{d}^T . The newly obtained $(2N+2)$ dimensional square matrices \mathbf{A} and \mathbf{B} are used in the system of equations $\mathbf{A}\mathbf{d}^{n+1} = \mathbf{B}\mathbf{d}^n$ and finally they are solved using an appropriate algorithm. The matrices \mathbf{A} and \mathbf{B} can be easily handled since they are six-band matrices. In order to be able to calculate the parameters \mathbf{d}^{n+1} , first of all, the initial parameter \mathbf{d}^0 should be known. Using the initial conditions given together with Eq.(8)

$$\begin{aligned}
 (u_N)_x(x_L, 0) &= \frac{3}{h}(-\delta_{-1}^0 + \delta_1^0) = u'_0(x_L) \\
 u_N(x_m, 0) &= \delta_{m-1}^0 + 4\delta_m^0 + \delta_{m+1}^0 = u_0(x_m), & m &= 0(1)N \\
 (u_N)_x(x_R, 0) &= \frac{3}{h}(-\delta_{N-1}^0 + \delta_{N+1}^0) = u'_0(x_R)
 \end{aligned} \tag{21}$$

and

$$\begin{aligned}
 (v_N)_x(x_L, 0) &= \frac{3}{h}(-\sigma_{-1}^0 + \sigma_1^0) = u_0'''(x_L) \\
 v_N(x_m, 0) &= \sigma_{m-1}^0 + 4\sigma_m^0 + \sigma_{m+1}^0 = u_0'(x_m), \quad m = 0(1)N \\
 (v_N)_x(x_R, 0) &= \frac{3}{h}(-\sigma_{N-1}^0 + \sigma_{N+1}^0) = u_0'''(x_R)
 \end{aligned} \tag{22}$$

the above system of equations is obtained. The solution of these systems of equations is found by the initial parameter \mathbf{d}^0 . The following inner iteration has been applied to the nonlinear terms of the equation 3 or 5 times to improve the approximations

$$\delta_m^* = \delta_m^n + \frac{1}{2}(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n) \quad \text{and} \quad \sigma_m^* = \sigma_m^n + \frac{1}{2}(\sigma_m^{n+1} - \sigma_m^n). \tag{23}$$

2.2. Stability analysis

The stability analysis of the numerical scheme resulting from the application of the cubic B-spline finite element collocation method to the Rosenau-KdV-RLW equation system is going to be implemented by the von Neumann method. Because of this reason, in place of u in the nonlinear term $u^{p-1}u_x$ in Eq. (6) a local constant \hat{Z} is taken. Under this condition, the term Z_m found in the coefficients A_i, C_i in Eq. (19) is going to be a constant in the form of $a + pb\hat{Z}^{p-1}$. Where i is the imaginary unit, φ is an arbitrary real number, the amplification factor $q = q(\varphi)$ is a complex number $\delta_m^n = Pq^n e^{im\varphi}$, $\sigma_m^n = Wq^n e^{im\varphi}$ special solutions are written in Eqs. (19)-(20) and the Euler formula $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ is used and the following homogenous equations systems is obtained

$$[(A + iZB)q - (A - iZB)]P + [(D + iBd)q - (D - iBd)]W = 0 \tag{24}$$

$$(q + 1)(CP - AW) = 0 \tag{25}$$

where $A = 2(\cos\varphi + 2)$, $B = \frac{3k}{h}\sin\varphi$, $C = \frac{12}{h^2}(\cos\varphi - 1)$, $D = -Ac + Ce$, $Z = \max Z_m$. It is known that this homogeneous equation system has at least one nonzero solution when the determinant of the coefficient matrix of the system is zero. Under this condition, from equations (24) and (25) we can write

$$[-A^2 - CD - iB(AZ + Cd)]q + A^2 + CD - iB(AZ + Cd) = 0 \quad \text{or} \quad q + 1 = 0. \tag{26}$$

Then, the the amplification factor is found as follows

$$q = \frac{-A^2 - CD + iB(AZ + Cd)}{-A^2 - CD - iB(AZ + Cd)} \quad \text{or} \quad q = -1. \tag{27}$$

As a conclusion, since $|q| = 1$, the method is unconditionally stable.

2.3. Scheme-II: Quintic B-spline collocation method

The second numerical scheme of the problem to be considered in Section 2 is going to be obtained by the quintic B-spline finite element collocation method. The quintic B-spline basis functions $\phi_m(x)$ for $m = -2(1)N + 2$ are defined as follows

$$\Phi_m(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} q_0 = (x - x_{m-3})^5 & , [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ q_1 = q_0 - 6(x - x_{m-2})^5 & , [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ q_2 = q_1 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 & , [x_{m-1}, x_m] \\ q_3 = q_2 - 6(x - x_{m-2})^5 - 20(x - x_m)^5 & , [x_m, x_{m+1}] \\ q_4 = q_3 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m+1})^5 & , [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ q_5 = q_4 - 6(x - x_{m-2})^5 - 6(x - x_{m+2})^5 & , [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ 0 & , otherwise \end{cases} \quad (28)$$

[13]. Since the set of quintic B-spline basis functions $\{\Phi_{-2}(x), \Phi_{-1}(x), \dots, \Phi_{N+2}(x)\}$ constitutes a base for the smooth functions defined on the domain $[x_L, x_R]$, the approximate solutions $u_N(x, t)$ and $v_N(x, t)$ are given as follows

$$u_N(x, t) = \sum_{i=-2}^{N+2} \Phi_i(x) \delta_i(t), \quad v_N(x, t) = \sum_{i=-2}^{N+2} \Phi_i(x) \sigma_i(t). \quad (29)$$

Here $\delta_i(t)$ and $\sigma_i(t)$ are time dependent parameters which are going to be found out. Since the quintic B-spline basis functions and their derivatives are zero outside the region $[x_{m-3}, x_{m+3}]$, a typical approximate solution can be written as follows over the region $[x_m, x_{m+1}]$ as follows

$$u_N(x, t) = \sum_{i=m-2}^{m+2} \Phi_i(x) \delta_i(t), \quad v_N(x, t) = \sum_{i=m-2}^{m+2} \Phi_i(x) \sigma_i(t). \quad (30)$$

If we apply the local transformation $h\xi = x - x_m$, $0 \leq \xi \leq 1$, on a typical region $[x_m, x_{m+1}]$ and convert it into the region $[0,1]$, the quintic B-spline basis functions over the region $[0,1]$ are defined as follows in terms of the local variable ξ

$$\begin{aligned} \Phi_{m-2} &= 1 - 5\xi + 10\xi^2 - 10\xi^3 + 5\xi^4 - \xi^5, \\ \Phi_{m-1} &= 26 - 50\xi + 20\xi^2 + 20\xi^3 - 20\xi^4 + 5\xi^5, \\ \Phi_m &= 66 - 60\xi^2 + 30\xi^4 - 10\xi^5, \\ \Phi_{m+1} &= 26 + 50\xi + 20\xi^2 - 20\xi^3 - 20\xi^4 + 10\xi^5, \\ \Phi_{m+2} &= 1 + 5\xi + 10\xi^2 + 10\xi^3 + 5\xi^4 - 5\xi^5, \\ \Phi_{m+3} &= \xi^5. \end{aligned} \quad (31)$$

The pointwise values of $u_N(x_m, t) = u_m$, $v_N(x_m, t) = v_m$ and their derivatives up to second order for $m = 0(1)N$ at the point (x_m, t) in terms of parameters δ_m and σ_m are given as follows

$$\begin{aligned} u_m &= \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, & v_m &= \sigma_{m-2} + 26\sigma_{m-1} + 66\sigma_m + 26\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2}, \\ u'_m &= \frac{5}{h}(-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), & v'_m &= \frac{5}{h}(-\sigma_{m-2} - 10\sigma_{m-1} + 10\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2}), \\ u''_m &= \frac{20}{h^2}(\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 6\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), & v''_m &= \frac{20}{h^2}(\sigma_{m-2} + 2\sigma_{m-1} - 6\sigma_m + 2\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2}). \end{aligned} \quad (32)$$

The upper indices in these formulae denote the derivative with respect to x . If these nodal values are written in their places in Eqs. (12)-(13) and they are arranged accordingly, the following systems of algebraic equations are obtained for $m = 0(1)N$

$$\begin{aligned}
& A_1\delta_{m-2}^{n+1} + A_2\delta_{m-1}^{n+1} + A_3\delta_m^{n+1} + A_4\delta_{m+1}^{n+1} + A_5\delta_{m+2}^{n+1} \\
& + B_1\sigma_{m-2}^{n+1} + B_2\sigma_{m-1}^{n+1} + B_3\sigma_m^{n+1} + B_4\sigma_{m+1}^{n+1} + B_5\sigma_{m+2}^{n+1} = \\
& \quad C_1\delta_{m-2}^n + C_2\delta_{m-1}^n + C_3\delta_m^n + C_4\delta_{m+1}^n + C_5\delta_{m+2}^n \\
& \quad + D_1\sigma_{m-2}^n + D_2\sigma_{m-1}^n + D_3\sigma_m^n + D_4\sigma_{m+1}^n + D_5\sigma_{m+2}^n, \quad (33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E_1\delta_{m-2}^{n+1} + E_2\delta_{m-1}^{n+1} + E_3\delta_m^{n+1} + E_4\delta_{m+1}^{n+1} + E_5\delta_{m+2}^{n+1} \\
& + F_1\sigma_{m-2}^{n+1} + F_2\sigma_{m-1}^{n+1} + F_3\sigma_m^{n+1} + F_4\sigma_{m+1}^{n+1} + F_5\sigma_{m+2}^{n+1} = \\
& \quad G_1\delta_{m-2}^n + G_2\delta_{m-1}^n + G_3\delta_m^n + G_4\delta_{m+1}^n + G_5\delta_{m+2}^n \\
& \quad + H_1\sigma_{m-2}^n + H_2\sigma_{m-1}^n + H_3\sigma_m^n + H_4\sigma_{m+1}^n + H_5\sigma_{m+2}^n. \quad (34)
\end{aligned}$$

The coefficients $A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i, G_i$ and H_i for $i = 1(1)5$ are given in Table 2. This system of equations consists of $(2N+10)$ unknowns and $(2N+2)$ equations. If the unknowns $\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}$ corresponding to $m=0,1,N-1,N$ are eliminated using the boundary conditions $u_x(x_L, t) = 0, u_{xx}(x_L, t) = u_0''(x_L), u_x(x_R, t) = 0, u_{xx}(x_R, t) = u_0''(x_R)$ and the unknowns $\sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_{N+1}, \sigma_{N+2}$ are eliminated using the boundary conditions $v_x(x_L, t) = u_0'''(x_L), v_{xx}(x_L, t) = u_0^{(4)}(x_L), v_x(x_R, t) = u_0'''(x_R), v_{xx}(x_R, t) = u_0^{(4)}(x_R)$, then a system of $(2N+2)$ unknowns $(2N+2)$ equations is obtained. First of all, we write the unknowns of this system of equations in the form of $\mathbf{d}^T = [\delta_0 \sigma_0 \delta_1 \sigma_1 \dots \delta_N \sigma_N]^T$ and arrange the both sides of the equation in such a way that the coefficients matrices are in agreement with \mathbf{d}^T . The newly obtained $(2N+2)$ dimensional square matrices \mathbf{A} and \mathbf{B} are used in the system of equations $\mathbf{A}\mathbf{d}^{n+1} = \mathbf{B}\mathbf{d}^n$ and finally they are solved using an appropriate algorithm. Since \mathbf{A} and \mathbf{B} matrices are ten-diagonal matrices, they can be handled easily. In order to compute parameter \mathbf{d}^{n+1} it is necessary to know the initial parameter \mathbf{d}^0 . Using the initial conditions given in Eq. (8), the following equations

$$\begin{aligned}
(u_N)_{xx}(x_L, 0) &= \frac{20}{h^2}(\delta_{-2}^0 + 2\delta_{-1}^0 - 6\delta_0^0 + 2\delta_1^0 + \delta_2^0) = u_0''(x_L), \\
(u_N)_x(x_L, 0) &= \frac{5}{h}(-\delta_{-2}^0 - 10\delta_{-1}^0 + 10\delta_1^0 + \delta_2^0) = u_0'(x_L), \\
u_N(x_m, 0) &= \delta_{m-2}^0 + 26\delta_{m-1}^0 + 66\delta_m^0 + 26\delta_{m+1}^0 + \delta_{m+2}^0 = u_0(x_m), \quad m = 0(1)N \quad (35) \\
(u_N)_x(x_R, 0) &= \frac{5}{h}(-\delta_{N-2}^0 - 10\delta_{N-1}^0 + 10\delta_{N+1}^0 + \delta_{N+2}^0) = u_0'(x_R), \\
(u_N)_{xx}(x_R, 0) &= \frac{20}{h^2}(\delta_{N-2}^0 + 2\delta_{N-1}^0 - 6\delta_N^0 + 2\delta_{N+1}^0 + \delta_{N+2}^0) = u_0''(x_R)
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
(v_N)_{xx}(x_L, 0) &= \frac{20}{h^2}(\sigma_{-2}^0 + 2\sigma_{-1}^0 - 6\sigma_0^0 + 2\sigma_1^0 + \sigma_2^0) = u_0^{(4)}(x_L), \\
(v_N)_x(x_L, 0) &= \frac{5}{h}(-\sigma_{-2}^0 - 10\sigma_{-1}^0 + 10\sigma_1^0 + \sigma_2^0) = u_0'''(x_L), \\
v_N(x_m, 0) &= \sigma_{m-2}^0 + 26\sigma_{m-1}^0 + 66\sigma_m^0 + 26\sigma_{m+1}^0 + \sigma_{m+2}^0 = u_0''(x_m), \quad m = 0(1)N \quad (36) \\
(v_N)_x(x_R, 0) &= \frac{5}{h}(-\sigma_{N-2}^0 - 10\sigma_{N-1}^0 + 10\sigma_{N+1}^0 + \sigma_{N+2}^0) = u_0'''(x_R), \\
(v_N)_{xx}(x_R, 0) &= \frac{20}{h^2}(\sigma_{N-2}^0 + 2\sigma_{N-1}^0 - 6\sigma_N^0 + 2\sigma_{N+1}^0 + \sigma_{N+2}^0) = u_0^{(4)}(x_R)
\end{aligned}$$

Tablo 2. The values of the coefficients of the equation systems given by Eqs.(33)-(34).

i	A_i	B_i	C_i	D_i	E_i	F_i	G_i	H_i
1	$1 - \frac{5kZ_m}{2h}$	$-c - \frac{5kd}{2h} + \frac{20e}{h^2}$	A_{6-i}	B_{6-i}	$\frac{20}{h^2}$	-1	$\frac{-20}{h^2}$	1
2	$26 - \frac{50kZ_m}{2h}$	$-26c - \frac{50kd}{2h} + \frac{40e}{h^2}$	A_{6-i}	B_{6-i}	$\frac{40}{h^2}$	-26	$\frac{-40}{h^2}$	26
3	66	$-66c - \frac{120e}{h^2}$	A_{6-i}	B_{6-i}	$-\frac{120}{h^2}$	-66	$\frac{120}{h^2}$	66
4	$26 + \frac{50kZ_m}{2h}$	$-26c + \frac{50kd}{2h} + \frac{40e}{h^2}$	A_{6-i}	B_{6-i}	$\frac{40}{h^2}$	-26	$\frac{-40}{h^2}$	26
5	$1 + \frac{5kZ_m}{2h}$	$-c + \frac{5kd}{2h} + \frac{20e}{h^2}$	A_{6-i}	B_{6-i}	$\frac{20}{h^2}$	-1	$\frac{-20}{h^2}$	1

are obtained. The initial parameter \mathbf{d}^0 is found by the solution of these systems of equations. The internal iteration given by equation (23) is applied 3 or 5 times at each time step to the nonlinear terms of the equation system, thus the approximate solution is improved.

2.4. Stability analysis

The stability analysis of the difference equations (33) - (34) obtained by applying the quintic B-spline finite element collocation method is going to be done by von Neumann method. In place of u in the nonlinear term $u^{p-1}u_x$ in Eq. (6), a local constant \hat{Z} is going to be taken. In that condition, the term Z_m in the difference equation given by Eq. (33) is going to be constant in the form of $a + pb\hat{Z}^{p-1}$, i is the imaginary unit, φ is an arbitrary real number, the amplification factor $q = q(\varphi)$ is a complex number, special solutions $\delta_m^n = Pq^n e^{im\varphi}$, $\sigma_m^n = Wq^n e^{im\varphi}$ are written in Eqs. (33) - (34) and the Euler formula $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ is used and after some arrangements the following homogenous equations system is obtained

$$[(A + iZB)q - (A - iZB)]P + [(D + iBd)q - (D - iBd)]W = 0 \tag{37}$$

$$(q + 1)(CP - AW) = 0 \tag{38}$$

where $A = 2(26\cos\varphi + \cos2\varphi + 33)$, $B = \frac{5k}{h}i(10\sin\varphi + \sin2\varphi)$, $C = \frac{40}{h^2}(2\cos\varphi + \cos2\varphi - 3)$, $D = -Ac + Ce$, $Z = \max Z_m$. It is well known that this homogenous equation system has at least one nonzero solution when the determinant of the coefficient matrix of the system is zero. Therefore from Eqs. (37)-(38) we can write

$$[-A^2 - CD - iB(AZ + Cd)]q + A^2 + CD - iB(AZ + Cd) = 0 \text{ or } q + 1 = 0. \tag{39}$$

Then, the amplification factor is found as follows

$$q = \frac{-A^2 - CD + iB(AZ + Cd)}{-A^2 - CD - iB(AZ + Cd)} \text{ or } q = -1 \tag{40}$$

As a conclusion, since $|q| = 1$, the method is unconditionally stable.

3. Application of the methods and comparisons

In this section, the methods proposed in Section 2 for the Rosenau-KdV-RLW equation system have been applied to one example and numerical results were obtained. To demonstrate the efficiency and effectiveness of the proposed methods, we have used the fundamental conservation characteristics of the Rosenau-KdV-RLW equation defined as follows

$$Q(t) = \int_{x_L}^{x_R} u(x, t) dx = \int_{x_L}^{x_R} u(x, 0) dx = Q(0) \quad (41)$$

$$E(t) = \int_{x_L}^{x_R} (u^2(x, t) + cu_x^2(x, t) + u_{xx}^2(x, t)) dx = E(0) \quad (42)$$

and known as mass and energy invariants, besides, we have used the error norms defined as follows

$$L_2 = \sqrt{h \sum_{i=1}^N |u_i^{analitik} - u_i^{nümerik}|^2}, \quad L_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |u_i^{analitik} - u_i^{nümerik}| \quad (43)$$

If L represents one of these error norms, then the following formula

$$\begin{aligned} & \text{Rate} \\ &= \frac{\ln(L(t, h_1)/L(t, h_2))}{\ln(h_1/h_2)} \end{aligned} \quad (44)$$

is going to be used as a convergence rate.

Example: The exact solution of the Rosenau-KdV-RLW equation given by Eq. (1) for parametric values of $a=1$, $b=0.5$, $c=1$, $d=1$, $e=1$, $p=2$ is

$$u(x, t) = k_1 \text{sech}^4[k_2(x - k_3 t)] \quad (45)$$

where $k_1 = -5(25 - 13\sqrt{457})/456$, $k_2 = \sqrt{-13 + \sqrt{457}}/\sqrt{288}$, $k_3 = (241 + 13\sqrt{457})/266$ [1, 4, 14]. By taking $t=0$ in the exact solution, the initial condition of the problem can be obtained. In Tables 3-4, the error norms L_2 and L_∞ of the numerical solutions obtained by cubic B-spline collocation methods and quintic B-spline collocation methods at time $T = 30$ for $x_L = -40$, $x_R = 100$ and are compared with those of some published ones in the literature. As it is seen from Tables 3-4, the errors of the numerical solutions obtained by the present methods are smaller than the errors of the compared ones.

Tablo 3. A comparison of numerical results error using L_2 for various $h=k$ and $x \in [-40,100]$ at time $T=30$.

$h=k$	Scheme-I	Scheme-II	[1]	[4]
0.25	2.55603E-1	2.37668E-1	2.94337E-0	1.86617E-0
0.125	6.46775E-2	6.00345E-2	8.05629E-1	5.18662E-1
0.0625	1.62185E-2	1.50476E-2	2.05276E-1	1.33174E-1
0.03125	4.05772E-3	3.76437E-3	5.15696E-2	3.35296E-2

Tablo 4. A comparison of numerical results error using L_∞ for various $h=k$ and $x \in [-40,100]$ at time $T=0$.

$h=k$	Scheme-I	Scheme-II	[1]	[4]
0.25	9.85936E-2	9.10323E-2	9.86753E-1	6.99597E-1
0.125	2.49932E-2	2.30177E-2	2.14488E-1	1.97127E-1
0.0625	6.26876E-3	5.76980E-3	5.19201E-2	5.06954E-2
0.03125	1.56845E-3	1.44360E-3	1.28858E-2	1.27669E-2

In Table 5, the convergence rates for the error norms L_2 and L_∞ of the numerical solutions obtained by cubic B-spline collocation method and quintic B-spline collocation method at time $T=30$ for $x_L = -40$, $x_R = 100$ are calculated and displayed. The convergence rates obtained by the present method have been compared with those obtained by Wang and Dai [4]. It is seen that the convergence rates of the proposed methods are larger. It is also clearly seen that the greatest convergence rate has been obtained by the quintic B-spline collocation method.

In Table 6, for values of $x_L = -40$, $x_R = 160$, $k=h=0.25$ at times $T=0, 15, 30, 45, 60$ mass and energy invariants have been calculated and compared with those given in [1]. According to the results obtained, the fundamental conservation properties of the Rosenau-KdV-RLW equation are preserved with those obtained by the proposed numerical schemes in the range $[0,60]$.

Tablo 5. A comparison of convergence rates for L_2 and L_∞ at $T=30$

$h=k$	Scheme-I		Scheme-II		[4]	
	Rate L_2	Rate L_∞	Rate L_2	Rate L_∞	Rate L_2	Rate L_∞
0.5	-----	-----	-----	-----	-----	-----
0.25	1.93025	1.92143	1.93992	1.92951	1.84721	1.82740
0.125	1.98257	1.97996	1.98508	1.98363	1.96149	1.95920
0.0625	1.99562	1.99528	1.99625	1.99838	1.98980	1.98945

Tablo 6. A comparison of mass and energy invariants for $h=k=0.25$, $x \in [-40,100]$ at time $T=30$

T	Scheme-I		Scheme-II		[1] $\theta = -1$	
	Q	E	Q	E	Q	E
0	21.67925844	43.70855146	21.67925844	43.70855146	21.67925844	43.70855146
15	21.67922349	43.70931861	21.67922326	43.71412237	21.68257703	43.72652015
30	21.67919030	43.70919982	21.67919310	43.71401660	21.68264127	43.72664228
45	21.67879169	43.70910121	21.67891685	43.71391006	21.68342617	43.72664409
60	21.68231910	43.70900042	21.68069226	43.71380341	21.67462536	43.72664408

In Figs. 1-2, the graphics of the exact and numerical solutions obtained using cubic and quintic B-spline collocation method on the region $[-40,100]$ for values of $h=k=0.25$ at times $T=10$, $T=20$, $T=30$ are illustrated. In those graphics, numerical solutions and exact ones overlap in such a way that they are indistinguishable.

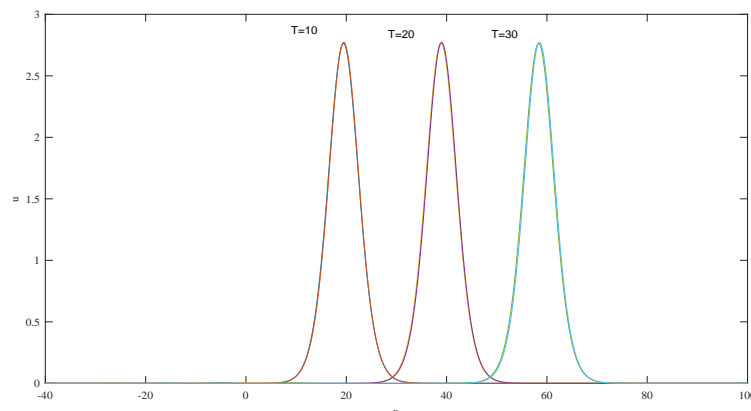


Figure 1. The graphics of exact and numerical solutions obtained using Scheme-I on the region $[-40,100]$ for values of $h=k=0.25$ at times $T=10$, $T=20$ and $T=30$.

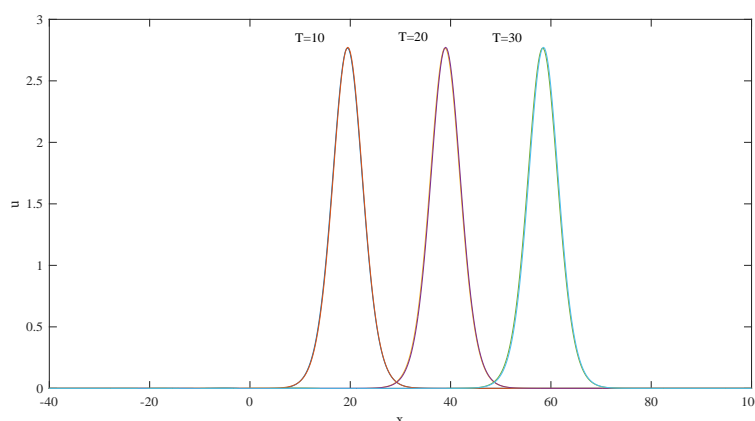


Figure 2. The graphics of exact and numerical solutions obtained using Scheme-II on the region $[-40,100]$ for values of $h=k=0.25$ at times $T=10$, $T=20$ and $T=30$.

4. Conclusion

In this study, the Rosenau-KdV-RLW equation is firstly converted into the partial differential equation system given by Eqs.(6)-(7). Then, the resulting system has been solved separately by both the cubic and quintic B-spline finite element collocation methods. The methods have been examined on an example of simulation of solitary waves. The error norms and invariants have been computed to determine the accuracy of the proposed methods. The error norms have been compared by Refs.[1-4]. It is seen that the error norms are smaller than the other ones. The mass and energy invariants for solved example are sufficiently constant during the simulation time for given both methods. The stability analysis of the methods has been made by the von

Neumann method. It is found that they are unconditionally stable. The convergence rates of the methods are found as nearly about two. It is obviously seen that the obtained results are in very good agreement with the exact ones. Although both methods produce close results, the quintic B-spline finite element collocation method gives better results than the other one. Consequently, the presented methods can also be applied to many partial differential equations including higher-order derivatives widely encountered in engineering and science.

References

- [1] Wongsajjai, B., Pochinapan, K., A three-level average implicit finite difference scheme to solve equation obtained by coupling the Rosenau-KdV equation and Rosenau-RLW equation, **Applied Mathematics and Computation**, 245, 289-304, (2014).
- [2] Hu, J., Xu, Y., Hu, B., Conservative linear difference scheme for Rosenau-KdV equation, **Advances in Mathematical Physics**, (2013). DOI: <https://dx.doi.org/10.1155/2013/423718>
- [3] Ucar, Y., Karaagac, B., Kutluay, S., A Numerical approach to the Rosenau-KdV equation using Galerkin Cubic Finite element method, **International Journal of Applied Mathematics and Statistics**, 56(3), 83-92, (2017).
- [4] Wang, X., Dai, W., A three-level linear implicit conservative scheme for the Rosenau-KdV-RLW equation, **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 330, 295-306, (2018).
- [5] Mittal, R. C., Jain, R. K., Numerical solution of general Rosenau-RLW equations using quintic B-splines collocation method, **Communications in Numerical Analysis**, 16, 1-16, (2012).
- [6] Wongsajjai, B., Pochinapan, K., Disyadej, T., A compact finite difference method for solving the general Rosenau-RLW equation. **IAENG International Journal of Applied Mathematics**, 44, 4, IJAM-44-4-05, (2014).
- [7] Yagmurlu, N. M., Karaagac, B., Kutluay, S., Numerical solutions of Rosenau-RLW Equation using Galerkin Cubic B-Spline finite element method, **American Journal of Computational and Applied Mathematics**, 7(1), 1-10, (2017).
- [8] Pan, X., Wang, Y., Zhang, L., Numerical analysis of a pseudo-compact C-N conservative scheme for the Rosenau-KdV equation coupling with the Rosenau-RLW equation, **Boundary Value Problems**, (2015). DOI: <https://doi.org/10.1186/s13661-015-0328-2>
- [9] Korkmaz, B., Dereli, Y., Numerical solution of the Rosenau KdV-RLW equation by using RBFs collocation method, **International Journal of Modern Physics C**, 27, 1650117 (11 pages), (2016).
- [10] Ghiloufi, A., Omrani, K., New conservative difference schemes with fourth-order accuracy for some model equation for nonlinear dispersive waves, **Numerical Methods Partial Differential Equation**, (2017). DOI: <https://doi.org/10.1002/num.22208>
- [11] Foroutan, M., Ebadian, A., Chebyshev rational approximations for the Rosenau-KdV-RLW equation on the whole line, **International Journal of Analysis and Applications** 16(1), 1-15, (2018).
- [12] Fernández, A.A., Ramos, J.I., Numerical solution of the generalized, dissipative KdV-RLW-Rosenau equation with a compact method, **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, 60, 165-183, (2018).

- [13] Prenter, P.M., **Splines and variational methods**, John Wiley & Sons, New York, (1975).
- [14] Razborova, P., Ahmed, B., Biswas, A., Solitons, shock waves and conservation laws of Rosenau-KdV-RLW equation with power law nonlinearity, **Applied Mathematics and Information Science**, 8, 485-491, (2014).

Solving fractional difference equations by discrete Adomian decomposition method

Figen ÖZPINAR*

Afyon Kocatepe University Bolvadin Vocational School, Kırkgöz Campus, Afyonkarahisar.

*Geliş Tarihi (Received Date): 16.08.2018
Kabul Tarihi (Accepted Date): 18.10.2018*

Abstract

In this paper, we propose the discrete Adomian decomposition method(DADM) to solve linear as well as nonlinear fractional partial difference equations and provide few examples to illustrate the applicability of proposed method. The results show that DADM is efficient, accurate and can be applied to other fractional difference equations.

Keywords: *Discrete Adomian decomposition method, fractional order, partial difference equations.*

Ayrık Adomian ayrışım metodu ile kesirli mertebe fark denklemlerinin çözümü

Özet

Bu makalede, hem lineer hem de lineer olmayan kesirli mertebe kısmi fark denklemlerini çözmek için ayrık Adomian ayrışım metodunu(DADM) önerdik ve önerilen metodun uygulanabilirliğini göstermek için birkaç örnek verdik. Sonuçlar, DADM'nin etkili, doğru ve diğer kesirli mertebe fark denklemlerine uygulanabileceğini gösterdi.

Anahtar kelimeler: *Ayrık Adomian ayrışım metodu, kesirli mertebe, kısmi fark denklemleri.*

* Figen ÖZPINAR, fozpinar@aku.edu.tr, <https://orcid.org/0000-0002-7428-4988>

1. Introduction and preliminaries

Fractional calculus has received increasing attention as one of the most important interdisciplinary subjects in mathematical physics, chemistry, mechanical and electrical properties of real phenomena [24, 27]. On the other hand recently, discrete fractional calculus gain much attention [1, 8-11].

Most fractional differential equation do not have precise analytic solution. Therefore various techniques have been developed to solve these equations [4, 18-20]. There are many studies with these techniques [5, 6, 21, 23, 25]. Adomian decomposition method(ADM) is widely used to provide on analytical approximation to linear/nonlinear problems. ADM was first introduced by Adomian[4, 5]. Wazwaz has applied ADM to solve various differential equations [26-20]. Later on the discrete ADM(DADM) was used to obtain numerical solution of partial differential equations [12, 15].

In this paper, we propose the discrete Adomian decomposition method to solve fractional partial difference equations. To the best of our knowledge, this is the first time the DADM have been used to solve linear or nonlinear fractional order difference equations. This method can be efficiently used to lead to accurate solutions for standard fractional partial difference equations.

Definition 2.1:[9, 10]Let $f: \mathbb{N}_a \rightarrow \mathbb{R}$ and $\alpha > 0$, the α th –order fractional sum of f is defined by

$${}_a\Delta_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=a}^{t-\alpha} (t - \sigma(s))^{\alpha-1} f(s), \quad t \in \mathbb{N}_{a+\alpha},$$

where $\mathbb{N}_a = \{a, a + 1, a + 2, \dots\}$, $\sigma(s) = s + 1$.

The trivial sum is

$${}_a\Delta_t^{-0} f(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{N}_a$$

and the falling function is

$$t^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(t + 1)}{\Gamma(t + 1 - \alpha)}.$$

This definition is analogous to Riemann-Liouville fractional integral.

Throughout, we assume that if $t + 1 - \alpha \in \{0, -1, \dots, -k, \dots\}$, then $t^{(\alpha)} = 0$.

$$\Delta^{-\alpha} t^{(\gamma)} = \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\alpha + \gamma + 1)} t^{(\alpha+\gamma)}, \quad \gamma \in \mathbb{R}^+$$

is known power rule.

Definition 2.2:[1, 3] Let $f: \mathbb{N}_a \rightarrow \mathbb{R}$ and $\alpha > 0$. Let $m \in \mathbb{N}_0$, such that $m - 1 < \alpha \leq m$. The α th –order Caputo-like delta difference is given by

$$\begin{aligned} {}_a^C \Delta_t^\alpha f(t) &= {}_a^C \Delta_t^{-(m-\alpha)} \Delta^m f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \sum_{s=a}^{t-(m-\alpha)} (t-\sigma(s))^{(m-\alpha-1)} \Delta^m f(s), \quad t \in \mathbb{N}_{a+m-\alpha}. \end{aligned}$$

${}_a^C \Delta_t^\alpha$ maps functions defined on \mathbb{N}_a to functions defined on $\mathbb{N}_{a+m-\alpha}$.

For special case $0 < \alpha \leq 1$,

$${}_a^C \Delta_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{s=a}^{t-(1-\alpha)} (t-\sigma(s))^{(-\alpha)} \Delta f(s),$$

where $\Delta f(s) = f(s+1) - f(s)$.

For the initial point $a \in \mathbb{R}$, the discrete Leibnitz sum law holds

$${}_{a+(1-\alpha)} \Delta_t^{-\alpha} {}_a^C \Delta_t^\alpha f(t) = f(t) - f(a), \quad t \in \mathbb{N}_a,$$

where $0 < \alpha \leq 1$.

2. Discrete Adomian decomposition method in fractional difference equations

To illustrate the methodology to this method, we consider the nonlinear fractional difference equation in the following general form

$${}_a^C \Delta_t^\alpha U_{k,t} + LU_{k,t} + NU_{k,t} = g_{k,t}, \quad t \in \mathbb{N}_{a+1-\alpha}, \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad (1)$$

with initial condition

$$U_{k,a} = f_k \quad (2)$$

where $0 < \alpha \leq 1$, $U_{k,t}$ is the unknown function, $g_{k,t}$ is the source term, L linear difference and N is the nonlinear difference operator.

Applying the fractional sum ${}_{a+(1-\alpha)} \Delta_t^{-\alpha}$ to both sides of Eq(1) and using the initial conditions, we get

$$U_{k,t} = G_{k,t} - {}_{a+(1-\alpha)} \Delta_t^{-\alpha} \{LU_{k,t} + NU_{k,t}\}, \quad (3)$$

where $G_{k,t}$ represents the term arising from the source term and from using the given initial conditions.

The DADM decomposes the solution into a series

$$U_{k,t} = \sum_{n=0}^{\infty} U_{k_n,t} \quad (4)$$

and decomposes the nonlinear term $NU_{k,t}$ into a series

$$NU_{k,t} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \quad (5)$$

where A_n , depending on $U_{k_0,t}, U_{k_1,t}, \dots, U_{k_n,t}$ are called the Adomian polynomials. For the nonlinearity $NU_{k,t} = M(U_{k,t})$, we determine the Adomian polynomials by using definitional formula

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \left[M \left(\sum_{j=0}^{\infty} U_{k_j,t} \lambda^j \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

where λ is s grouping parameter of convenience.

If the zeros component $U_{k_n,0}$ is given then the remaining components where $n > 1$ can be determined by using recurrence relations as follows

$$\begin{aligned} U_{k_0,t} &= G_{k,t}, \\ U_{k_{n+1},t} &= -{}_{\alpha+(1-\alpha)}\Delta_t^{-\alpha} \{LU_{k_n,t} + A_n\}, \quad n \geq 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Therefore we obtain the solution from (4).

3. Applications to fractional difference equations

Example 4.1: Consider the fractional order discrete diffusion equation

$${}^C_0\Delta_t^\alpha U_{k,t} = \Delta_k^2 U_{k,t} + k\Delta_k U_{k,t} + U_{k,t}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad t \in \mathbb{N}_{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (8)$$

with initial condition

$$U_{k,0} = k, \quad (9)$$

where Δ_k is the forward partial difference which is defined as usual, i.e., $\Delta_k U_{k,t} = U_{k+1,t} - U_{k,t}$.

Applying ${}_{1-\alpha}\Delta_t^{-\alpha}$ on both sides of Eq(8) and using the initial condition, we get

$$U_{k,t} = k + {}_{1-\alpha}\Delta_t^{-\alpha} (U_{k+2,t} + (k-2)U_{k+1,t} + (2-k)U_{k,t}). \quad (10)$$

Substituting Eq(4) into Eq(10) we have

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_{k_n,t} = k + {}_{1-\alpha}\Delta_t^{-\alpha} \left(\sum_{n=0}^{\infty} U_{k_n+2,t} + \sum_{n=0}^{\infty} (k-2)U_{k_n+1,t} + \sum_{n=0}^{\infty} (2-k)U_{k_n,t} \right)$$

Thus we have following recurrence relations

$$U_{k_0,t} = U_{k,0}$$

$$U_{k_{n+1},t} = {}_{1-\alpha}\Delta_t^{-\alpha} (U_{k_n+2,t} + (k-2)U_{k_n+1,t} + (2-k)U_{k_n,t}), \quad n = 0,1,2 \dots$$

Thus

$$U_{k_0,t} = k$$

and

$$U_{k_1,t} = k \frac{2t^{(\alpha)}}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$$U_{k_2,t} = k \frac{2^2(t+(\alpha-1))^{(2\alpha)}}{\Gamma(2\alpha+1)}$$

$$\vdots$$

$$U_{k_n,t} = k \frac{2^n(t+(n-1)(\alpha-1))^{(n\alpha)}}{\Gamma(n\alpha+1)}.$$

Therefore from (4) we obtain the solution

$$U_{k,t} = \sum_{n=0}^{\infty} k \frac{2^n(t+(n-1)(\alpha-1))^{(n\alpha)}}{\Gamma(n\alpha+1)} = kE_{(\alpha)}(2,t),$$

where $E_{(\alpha)}$ is the discrete Mittag-Leffler function.

Example 4.2: Consider the fractional order difference Schrödinger equation

$$i {}_0^C\Delta_t^\alpha U_{k,t} + \Delta_k^2 U_{k,t} + q|U_{k,t}|^2 U_{k,t} = 0 \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad t \in \mathbb{N}_{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (11)$$

with the initial condition

$$U_{k,0} = e^{ilk}. \quad (12)$$

Applying ${}_{1-\alpha}\Delta_t^{-\alpha}$ on both sides of Eq(11) and using the initial condition, we obtain

$$U_{k,t} = e^{ilk} + i {}_{1-\alpha}\Delta_t^{-\alpha} \left(\Delta_k^2 U_{k,t} + q|U_{k,t}|^2 U_{k,t} \right). \quad (13)$$

The nonlinear term is $(U_{k,t}) = |U_{k,t}|^2 U_{k,t} = U_{k,t}^2 \overline{U_{k,t}}$, which decomposed as an Adomian polynomials.

Substituting Eq(4) and Eq(5) into Eq(13) we get

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_{k_n,t} = e^{ilk} + i_{1-\alpha} \Delta_t^{-\alpha} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \Delta_k^2 U_{k_n,t} + q \sum_{n=0}^{\infty} A_n \right).$$

Since initial condition $U_{k_0,t}$ is given we get following recurrence relations.

$$\begin{aligned} U_{k_0,t} &= U_{k,0} \\ U_{k_{n+1},t} &= i_{1-\alpha} \Delta_t^{-\alpha} (U_{k_{n+2},t} - 2U_{k_{n+1},t} + U_{k_n,t} + qA_n) \quad n = 0,1,2 \dots \end{aligned}$$

According to Eq(6) we can compute first few components of Adomian polynomials as follows:

$$\begin{aligned} A_0 &= U_{k_0,t}^2 \overline{U_{k_0,t}} \\ A_1 &= 2U_{k_0,t} U_{k_1,t} \overline{U_{k_0,t}} + U_{k_0,t}^2 \overline{U_{k_1,t}} \\ A_2 &= 2U_{k_0,t} U_{k_2,t} \overline{U_{k_0,t}} + U_{k_1,t}^2 \overline{U_{k_0,t}} + 2U_{k_0,t} U_{k_1,t} \overline{U_{k_1,t}} + U_{k_0,t}^2 \overline{U_{k_2,t}} \\ A_3 &= 2(U_{k_0,t} U_{k_3,t} \overline{U_{k_0,t}} + U_{k_1,t} U_{k_2,t} \overline{U_{k_0,t}} + U_{k_0,t} U_{k_2,t} \overline{U_{k_1,t}} + U_{k_0,t} U_{k_1,t} \overline{U_{k_2,t}}) \\ &\quad + U_{k_1,t}^2 \overline{U_{k_1,t}} + U_{k_0,t}^2 \overline{U_{k_3,t}} \\ &\vdots \\ A_n &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} U_{k_i,t} U_{k_j,t} \overline{U_{k_{n-i-j},t}}. \end{aligned}$$

Thus we have the following solution:

$$\begin{aligned} U_{k_0,t} &= e^{ilk} \\ U_{k_1,t} &= i \frac{e^{ilk} \omega t^{(\alpha)}}{\Gamma(\alpha + 1)} \\ U_{k_2,t} &= -\frac{\omega^2 e^{ilk} (t + (\alpha - 1))^{(2\alpha)}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \\ U_{k_3,t} &= -i \frac{\omega^3 e^{ilk} (t + 2(\alpha - 1))^{(3\alpha)}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \\ &\vdots \\ U_{k_n,t} &= i^n \frac{\omega^n e^{ilk} (t + (n - 1)(\alpha - 1))^{(n\alpha)}}{\Gamma(n\alpha + 1)}, \end{aligned}$$

where $\omega = (e^{il} - 1)^2 + q$.

Thus from (4) we get the solution

$$U_{k,t} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{\omega^n e^{ilk} (t + (n - 1)(\alpha - 1))^{(n\alpha)}}{\Gamma(n\alpha + 1)} = e^{ilk} E_{(\alpha)}(i\omega, t).$$

4. Conclusions

Discrete Adomian decomposition method is successfully applied to fractional partial difference equations with discrete time derivative $\alpha(0 < \alpha \leq 1)$. From the obtained results, we conclude that DADM can provide highly accurate solutions for fractional

partial difference equations. It can be promising method to solve other nonlinear partial difference equations.

References

- [1] Abdeljawad T., On Riemann and Caputo fractional differences, **Computers and Mathematics with Applications**, 62, 1602–1611, (2011).
- [2] Ablowitz M.J. and Ladik J.F., Nonlinear differential–difference equation and Fourier analysis, **Journal of Mathematical Physics**, 17, 1011–1018, (1976).
- [3] Ablowitz M.J. and Ladik J.F., A nonlinear difference scheme and inverse scattering, **Studies in Applied Mathematics**, 55 , 213–229, (1976).
- [4] Adomian G., A Review of the decomposition method in applied mathematics, **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, 135, 501–544, (1988).
- [5] Adomian G., **Solving frontier problems of physics: the decomposition method**, Boston: Kluwer Academic Publishers, (1994).
- [6] Adomian G., Solution of coupled nonlinear partial differential equations by decomposition, **Computer and Mathematics with Applications**, 31, 117-120, (1996).
- [7] Agarwal, R.P., **Difference equations and inequalities**, Marcel Dekker, Newyork, (1992).
- [8] Anastassiou G.A., About discrete fractional calculus with inequalities, intelligent mathematics: computational analysis, **Intelligent Systems Reference Library**, 5, 575-585, (2011).
- [9] Atici F.M. and Eloe P.W., A transform method in discrete fractional calculus, **International Journal of Difference Equations**, 2, 165–176, (2007).
- [10] Atici F.M. and Eloe P.W., Initial value problems in discrete fractional calculus, **Proceedings of the American Mathematical Society**, 137, 981–989, (2009).
- [11] Atici F.M. and Sengül, S., Modeling with fractional difference equations, **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, 369, 1–9, (2010).
- [12] Bratsos A., Ehrhardt M. and Famelis I.T., A discrete Adomian decomposition method for discrete nonlinear Schrödinger equations, **Applied Mathematics and Computation**, 197, 190–205, (2008).
- [13] Bulut H. and Evans D.J., On the solution of the Riccati equation by the decomposition method, **International Journal of Computer Mathematics**, 79 (1), 103-109, (2002).
- [14] Caputo M., Linear models of dissipation whose Q is almost independent- II, **Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society**, 13, 529–539, (1967).
- [15] Dhaigude D.B. and Birajdar G.A., Numerical solutions of fractional partial differential equations by discrete Adomian decomposition method, **Advances in Applied Mathematics Mechanics**, 6, 107–119, (2014).
- [16] Ergüt M. and Bulut H., The numerical solution of 2-dimensional partial differential equations by the decomposition method, **Journal of Natural Science&Mathematics**, 42 (1), 07-20, (2002).
- [17] Evans D.J. and Bulut H., A new approach to the gas dynamics equations: an application of the decomposition method, **International Journal of Computer Mathematics**, 79 (7), 817-822, (2002).

- [18] He J.H., Variational iteration method-a kind of nonlinear analytical technique: some examples, **International Journal of Nonlinear Mechanics**, 34, 699-708, (1999).
- [19] He J.H., Homotopy perturbation technique, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 178, 257-262, (1999).
- [20] Liao S.J., The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems., PhD Thesis, Shanghai Jiao Tong University, (1992).
- [21] Liao S.J., **Beyond perturbation: introduction to homotopy analysis method**, Chapman and Hall/CRC Press, Boca Raton, (2003).
- [22] Mickens R.E., **Nonstandard finite difference models of differential equations**, World Publishing Company, Singapore, (1994).
- [23] Özpınar F., Applying discrete homotopy analysis method for solving fractional partial differential equations, **Entropy**, 20(5), 332, (2018).
- [24] Podlubny I., **Fractional differential equations**, Academic Press: San Diego, (1999).
- [25] Sharma D., Singh P., Chauhan S., Homotopy perturbation Sumudu transform method with He's polynomial for solutions of some fractional nonlinear partial differential equations, **International Journal of Nonlinear Science**, 21(2), 91-97, (2016).
- [26] Wazwaz A.M., A reliable modification of Adomian's decomposition method, **Applied Mathematics and Computation**, 102, 77-86, (1999).
- [27] Wazwaz A.M., A reliable technique for solving linear and nonlinear Schrödinger equations by Adomian decomposition method, **Bulletin of Institute of Mathematics**, 29, 125-134, (2001).
- [28] Wazwaz A.M. A reliable analysis for nonlinear Schrodinger equations with cubic nonlinearity and a power law nonlinearity, **Mathematical and Computer Modelling**, 43, 178-184, (2006).
- [29] Wazwaz A.M., A comparison between the variational iteration method and Adomian decomposition method, **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 207, 129-136, (2007).
- [30] Wu G.C., Balenau D., Zeng S.D., Deng Z.G., Discrete fractional diffusion equation, **Nonlinear Dynamics**, 80, 281-286, (2015).

Kaotik bir hareket videosunun yapay sinir ağları ile modellenmesi

Murat Erhan ÇİMEN^{1,*}, Sezgin KAÇAR¹, Emre GÜLERYÜZ², Bilal GÜREVİN², Akif AKGÜL¹

¹Sakarya Üniversitesi Teknoloji Fak. Elektrik- Elektronik Müh. Böl., Esentepe kampüsü, Sakarya.

²Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Esentepe kampüsü, Sakarya.

Geliş Tarihi (Received Date): 13.08.2018

Kabul Tarihi (Accepted Date): 24.10.2018

Özet

Bu çalışmada kaotik bir hareketin modellenerek tekrardan oluşturulabilmesi için yapay sinir ağları kullanılmıştır. Kaotik sinyaller, doğal ilişkiler, iletişim, şifreleme, finans, sağlık gibi birçok alanda ortaya çıkabilir. Yapay sinir ağları, bulanık model, hammerstein gibi modeller bu tip sinyalleri öngörmek ve form halinde matematiksel olarak hareketi modellemek için kullanılabilir. Bu hareket ikinci dereceden bir ters sarkacın hareketi, bardo masasındaki topların hareketleri veya bu tip sistemlerin faz diyagramları da olabilir. Burada ise en temel olan Lorenz kaotik hareketinin faz diyagramı tercih edilmiştir. Ardışık görüntülerde izlenen nokta veya nesnenin görüntü pozisyonu görüntü işleme teknikleri ile belirlenmiştir. Bu görüntülerden elde edilen konum bilgisini kullanarak, NAR yapısı olan yapay sinir ağları geri yayılım algoritması ile eğitilmiştir. Bu NAR yapısı iki giriş ile iki çıkış olarak oluşturulmuş ve ilk katmanı 20, ikinci katmanı 10 ve üçüncü katmanı da 2 nöron içermektedir. Ardından bu yapay sinir ağları test edilerek tekrardan kaotik hareket videosu elde edilmeye çalışılmıştır. Sonuç olarak, bazı kaotik işaretlerin, ardışık görüntülerin veya videoların matematiksel olarak modellemek yerine yapay sinir ağları ile modellenip tekrardan üretilebilmesi sağlanmıştır.

Anahtar kelimeler: Kaos, kaotik sistemler, yapay sinir ağları, görüntü işleme.

* Murat Erhan ÇİMEN, muratcimen@sakarya.edu.tr, <https://orcid.org/0000-0002-1793-485X>

Sezgin KAÇAR, skacar@sakarya.edu.tr, <https://orcid.org/0000-0002-5171-237X>

Emre GÜLERYÜZ, emre.guleryuz1@ogr.sakarya.edu.tr, <https://orcid.org/0000-0001-6198-3571>

Bilal GÜREVİN, bilalsau@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-4035-2759>

Akif AKGÜL, aakgul@sakarya.edu.tr, <https://orcid.org/0000-0001-9151-3052>

Modelling of chaotic motion video with artificial neural networks

Abstract

In this study a chaotic motion is modelled using artificial neural networks can be created again. Chaotic signals can occur many fields like natural affairs, communication, encryption, finance, health. Artificial neural networks, fuzzy models, hammerstein model can be used to predict these types of signals as well as to provide a mathematical form to be modelled. As an example of the motion that will be modelled in this study, there may be movement of an second order inverted pendulum, movements of balls on a billiard table, or phase diagrams of such systems. However, the phase diagram of the most basic Lorenz chaotic motion is preferred. The image position of the point or object that is followed in sequential images are determined by image processing techniques. By using the position information obtained from these images, they are trained with backpropagation algorithm to artificial neural networks, which is NAR structure. NAR structures is constructed with two inputs, two outputs. Its first layer contains 20 neurons, second structure contains 10 neurons and third structure contains 2 neurons. Subsequently, NAR artificial neural networks were tested to try to get chaotic motion videos again. As a result, some chaotic signals, sequential images, or videos can be modelled with artificial neural networks instead of being mathematically modelled and reproduced.

Keywords: *Chaos, chaotic systems, artificial neural networks, image processing.*

1. Giriş

Kaos başlangıç şartlarına aşırı derecede duyarlı olup gürültü gibi görünen fakat genel çerçevede bir düzenin olduğu davranışlardır. Dolayısıyla son yıllarda bu tip sistemlerin işaretleri, deterministik ve rastgele işaretler arasında kalmış ve ümit vaat ettiği için bu tip davranışların tespit edilmesi üzerine çalışmalar yapılmaktadır [1-4]. Bu anlamda ilk olarak bir meteorolog olan Lorenzin hava durumunun tahmini için topladığı veriler ile hava durumunu modellemesi ile başlamıştır. Ardında türbilans hareketleri için farklı bilim insanları bu konu üzerine çalışmaya devam etmişlerdir. Bu tip sistemlerin genel özelliğine bakıldığında düzgün bir dinamiğe sahip olmasına rağmen başlangıç durumuna çok duyarlı olan doğrusal olmayan sistemlerdir. Bu kaotik davranışlar ekonomide, biyolojide, kimyada, bilişimde, tıpta, mühendislik vb alanlar karşılaşılabilmektedir [3, 5].

Kaotik işaretler, başlangıç şartlarına çok hassas, deterministik, gürültü sinyali veya benzeri güç spektrumuna sahip, genliği ve frekansı bilinmeyen ancak sınırlı bir alan içerisinde değişen karmaşık davranışlar göstermektedir [1].

Kaotik işaretler elde edildikten sonra verilere uygun bir matematiksel model ile ifade edilebilmektedir [6]. Bu direk olarak nonlineer bir denklem formatında olabileceği gibi bulanık modelle, yapay sinir ağları veya volterra serileri gibi farklı modelleme teknikleri ile bu tip davranışlar modellenebilmektedir [7]. Bu bağlamda bu çalışmanın yapılmasının amacı, matematiksel olarak modeli oluşturulamayan bir nesnenin hareket videosundan hareketinin modellenmesidir. Bunun için ilk olarak videodaki nesnenin

konum bilgileri görüntü işleme teknikleri ile belirlenmesi, ikinci adımda ise yapay sinir ağı tabanlı bir model oluşturulması ve bu modelin görüntüden elde edilen verilere bağlı olarak eğitilmesidir. En sonunda da bu hareketin tekrardan yapay sinir ağı modeli üzerinden yaklaşık olarak aynı davranışı elde edebilmektedir.

Kaos alanındaki sıçrama yaratan ilk keşiflerden biri, 1963 yılında Edward Lorenz tarafından yapılmıştır [1, 3, 8, 9]. Lorenzin önerdiği bu model başlangıç koşullarında çok küçük değişiklikler bile sistem çıkışında çok büyük farklılıklara neden olduğu görülmüştür. Farklı bir başlangıç noktasından başladığında önceki çözümden üstel olarak farklı zaman aralıklarında uzaklaşmaktadır. Bu ise faz diyagramlarıyla, çatalaşma diyagramı veya Lyapunov ile daha belirgin şekilde görülebilmektedir [10-13]. Bunun için ilk önce sisteme uygun dinamik bir model belirlenmesi gerekmektedir. Sisteme uygun bir modelin belirlenmesi bazen zor olabilmektedir. Son zamanlarda bilgisayar sistemlerinin gelişmesi ile sistemden elde edilen dinamikleri de ifade edebilen farklı tipte model türleri ile sistemler modellenmektedir. Bu tip farklı dinamiğe sahip sistemlerin modellenmesinde pek çok yöntem kullanılmaktadır [7]. Maguire ve ark. kaotik bir sinyalin bulanık modeller ile ifade edilebildiğini göstermişlerdir [14]. Kuo ve arkadaşı kaotik bir zaman serisinde öngörü yapabilmek için yapay sinir ağlarını kullanmışlardır [15]. Gómez-Gil ve ark. da uzun süreli bir kaotik sinyalin yapay sinir ağları ile modellenmesi üzerinde çalışmışlardır [16]. Fırat ise yapmış olduğu çalışmada kaotik davranış sergileyen depremlerin yapay sinir ağları ile modellenmesi üzerine çalışma yapmıştır [17]. Hanbay yapmış olduğu çalışmada kaotik bir davranış sergileyen Chua Devresinin Yapay sinir ağı ile modellenmesini gerçekleştirmiştir [18]. Panahi ve ark. yapmış olduğu çalışmada da kendi önerdikleri özel bir yapay sinir ağı modeli ile epilepsi hastalığının modellenmesini yapmışlardır [19]. Bir nesnenin konumunu bulmaya yönelik olarak çok fazla çalışma yapılmıştır. Köker ve ark. ise hareketli nesnenin konumunun tespiti için kameradan sürekli veriler alarak görüntüden kendi belirledikleri öz nitelikleri ile karşılaştırarak cismin konumunu bulmaya yönelik çalışma yapmışlardır [20]. Karakaya ve ark. İse görüntü üzerinde HOG algoritması tekniğini FPGA üzerinde uygulayarak gerçek zamanlı olarak nesne tanıma gerçekleştirmişlerdir [21]. Solak ve ark. ise fındık meyvesinin tespiti ve sınıflandırılması için öznitelik ve k-means algoritmalarını kullanmışlardır [22]. Varol ve ark. ise farklı yüz tanıma algoritmalarını tanıtmış ve PCA algoritmasında uygulama yapışlardır [23]. Çelik ise yüksek lisans tezinde görüntü işleme ve yapay zeka ile avuç için tanınmasını gerçekleştirmiştir [24]. Bu çalışmada da videosu çekilen bir nesnenin hareketinin modellenmesi için ilk olarak nesne tanıma yapılmıştır. 2. Bölümde yapılan bu işlemde ilk olarak videonun her bir karesindeki nesneyi bulabilmek için nesnenin görüntü karelerindeki özniteliklere bakılarak cisim belirlendi ve ardından belirlenen cisimlerin konum bilgileri ağırlık merkezine göre bulundu. 3. Bölümde ise yapay sinir ağları hakkında genel bir bilgi verilmiş olup Nonlinear Autoregressive Neural Network (NAR) yapısındaki yapay sinir ağlarına cismin konum bilgileri eğitilmiştir. Ayrıca bu bölümde gerçek ile yapay sinir ağları ile modellenmiş olan kaotik videodan elde edilen verilerin eğitilmesine yönelik bir örnek verilmiştir. 4. Bölümde ise sonuçlar karşılaştırılarak bu yöntemde uygulanabileceği tartışılmıştır.

2. Görüntüdeki özniteliklerden cismi belirleme ve konum bulma

Videolar birçok görüntünün birleşiminden oluşmaktadır. Dolayısıyla video üzerindeki herhangi bir nesnenin takibi görüntüde bulunan nesnenin konumunun

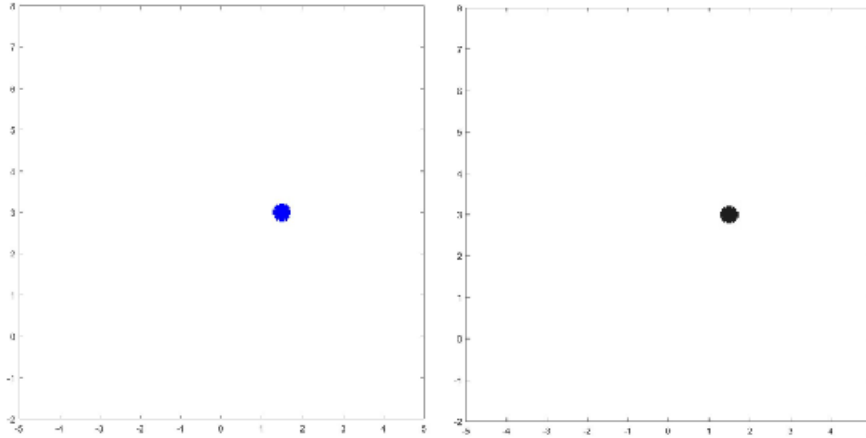
belirlenmesi ile sağlanmaktadır. Bunun için resim üzerinde bulunan istenen resim özellikleri aranarak yapılmaktadır. Örneğin görüntü eşleme, şablon eşleme, yönlü gradyan histogramı, HAAR kaskat sınıflandırması, temel bileşenler analizi, bağımsız bileşenler analizi, destek vektör makineleri, doğrusal diskriminant analizi, elastik demet grafik işaretleme gibi pek çok teknik bulunmaktadır [23, 25].

Bu çalışmada ise görüntü alındığında ilk olarak gürültünün azaltılması için 3x3 medyan filtre kullanılmıştır. Belirlenen maske görüntü üzerinde gezdirilmektedir. Görüntüde kaydırılan maskenin piksel değeri ile görüntünün eşleşen pikselleri çarpılır. Ardından bu değer maskenin görüntü üzerindeki konumuna göre pikselin yeni değeri olmaktadır.

Belirlenen işleme bağlı olarak Eşitlik (1) kullanılarak görüntü renkli formdan gri forma dönüştürüldü. Ardından Eşitlik(2) kullanılarak bir eşikleme işlemine tabii tutulur. Bu sayede görüntü 2 seviyeye quantalanması sağlanmış oldu. Bu işlemler Şekil 1a ve Şekil 1b'deki gibi yapılmıştır.

$$f(x, y) = \frac{f(x, y, 1) + f(x, y, 2) + f(x, y, 3)}{3} \quad (1)$$

$$I(x, y) = \begin{cases} 0 & f(x, y) \leq T \\ 255 & f(x, y) > T \end{cases} \quad (2)$$



Şekil 1.a Resmi gri forma dönüştürme

Şekil 1.b Resmi eşikleme

Görüntü üzerinde cisimlerin yerini belirlemek için en kolay yöntemlerden birisi kenar belirlemektir. Elde edilen görüntü için gradyen Eşitlik (3) ile ifade edilebilir.

$$\nabla I(x, y) = \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \end{bmatrix} \quad (3)$$

Eşitlik (3)'de verilen türev hem yatay eksene hem de dikey eksene göre alınmış bir türevi ifade etmektedir. Dolayısıyla bunların hesaplanması için Eşitlik (4)'deki maskeler ve Eşitlik (5)'deki denklemler kullanılmaktadır.

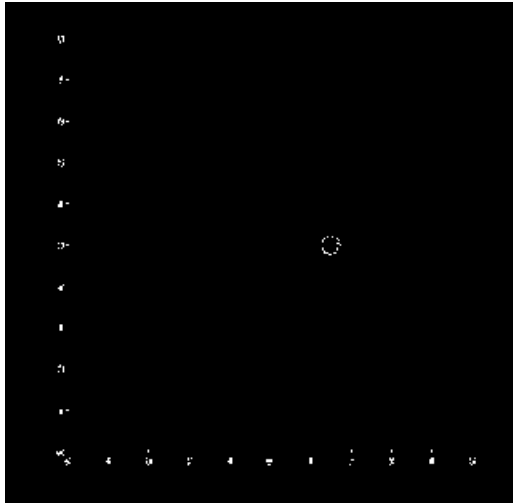
$$W_x(i, j) = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad W_y(i, j) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$g_x = \sum_j \sum_i I(x+i, y+j) W_x(i, j)$$

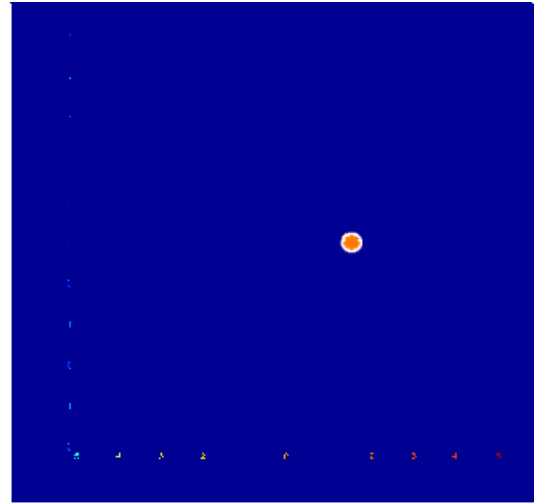
$$g_y = \sum_j \sum_i I(x+i, y+j) W_y(i, j) \quad (5)$$

Gradyanın büyüklüğü için Eşitlik (6) kullanılabilir.

$$g(x, y) = |\nabla I(x, y)| = \sqrt{g_x^2 + g_y^2} \quad (6)$$



Şekil 2a. Kenar bulma.



Şekil 2b. Delikleri numaralandırma.

Kenarları elde edilen görüntü Şekil 2a'deki gibi elde edilmiştir. Fakat görüntü içerisinde aranan cismin belirlemek için görüntü üzerindeki her bölgeye farklı bir değer ataması yapılarak Şekil 2b'deki gibi görüntünün bölüntülenmesi sağlanmış oldu. Bununla birlikte görüntü üzerinden takip edilecek olan nesnenin bir takım özellikleri bulunmaktadır. Bunlara örnek olarak;

- Alanı
- Çevre uzunluğu
- Çapı
- Kapanılan en küçük dikdörtgen
- Ağırlık merkezi
- Gri parlaklık seviyesi (maksimum, minimum, ortalama)

- Momentleri
- Cisimdeki içindeki delik sayısı

verilebilir. Bu çalışmada ise Eşitlik (7)'de kullanılan ağırlık merkezi ve Eşitlik (8)'de kullanılan alan özellikleri kullanıldı. Ortaya çıkan cismin alanına göre nesnenin ağırlık merkezi belirlenmektedir.

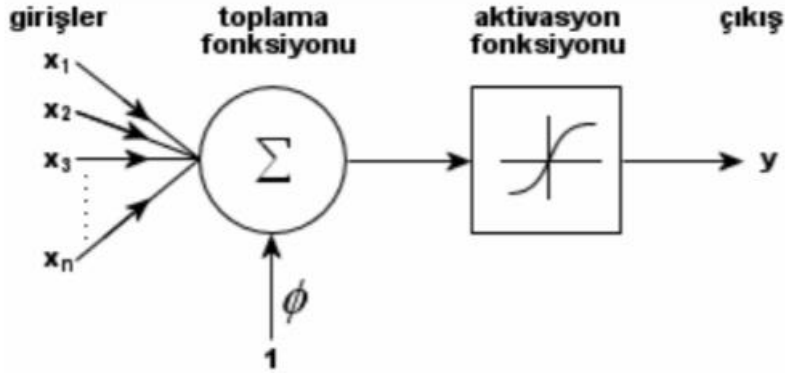
$$\text{Ağırlık_Merkezi} = \left(\frac{1}{n} \sum_x x, \frac{1}{n} \sum_y y \right) \quad (7)$$

$$\text{Alan} = \sum_x \sum_y I(x, y) \quad (8)$$

Bu işlem ile takip edilmesi istenen cismin ayırt edici özelliği diğer cisimlerden ayrılarak istenen nesnenin takip edilmesi sağlanabilmektedir. Eğer görüntüde birden fazla cisim olsa idi daha fazla ayırt edici özellik olması için daha fazla öznitelik çıkarmak gerekebilirdi. Bu çalışmada ise videoda takip edilmek istenen nesnenin görüntü üzerindeki x ve y konumları alınarak kullanılmak üzere hafızada saklanmıştır.

3. Yapay sinir ağları ile hareket videosunun modellenmesi

Yapay sinir ağı; sinir hücrelerinden oluşmuş olan insan beyninin sayısal dünyadaki uygulanabilir bir modelidir. Genel olarak bu model sinir hücrelerinin seri ve/veya paralel ve/veya katmanlı olarak birbirine bağlanmasına benzetilerek oluşturulmaktadır. Ayrıca çıkışının ise aktive edilmesi gibi özelliklerini temsil edebilmesidir. Bu temsil edebilme özelliği sayesinde yapay sinir ağları modelleme, sınıflandırma, görüntü tanıma, öngörme, yol planlama gibi farklı amaçlarla mühendislik, tıp veya finans gibi farklı alanlara uygulanabilmektedir. Özellikle doğrusal ve/veya doğrusal olmayan, basit ve/veya karmaşık, tek ve/veya çok değişkenli veya zamanla değişen sistemlerin temsil edilebilmesinde, ölçülmesi zor veya imkânsız olan parametrelerin veya durumların kestirilebilmesi veya tahmin edilebilmesi gibi çok çeşitli amaçlarla modellemede kullanılmaktadır. Basitçe insan beyninin yapısını ve çalışma şeklini taklit eden yapay sinir ağları çok sayıdaki değişkenle çalışarak eldeki veriden öğrenebilme, bu verilere göre genelleme yapabilme gibi birçok önemli özellikleri bulunmaktadır. Dolayısıyla bu yapı kullanılarak herhangi bir sistem hakkındaki sınırlı bilgi ile giriş-çıkış ilişkilerine dayalı bir model üretilebilmektedir. Ayrıca eğitilmiş olan bir yapay sinir ağı modeli; değişken durumlara uyum sağlayabildiği ve genelleme yeteneği sayesinde bilinmeyen bir girişe karşılık sonuç üretebilmektedir. Şekil 3'de verilmiş olan yapay sinir hücresine bakıldığından genel olarak; giriş, çıkış, ağırlıklar, birleşme fonksiyonu ve aktivasyon fonksiyonu olmak üzere 5 temel yapıdan oluşmaktadır. Çalışmasına bakıldığında ise yapay sinir ağlarına herhangi bir giriş uygulandığında; girişler düğüm noktasına gelirken belirli ağırlıkları ile çarpılmaktadır. Çarpımların sonucu bir birleştirme fonksiyonunda değerlendirilir, buradan elde edilen sonuç da aktivasyon fonksiyonu aktarılmaktadır. Aktive olan aktivasyon fonksiyonunun sonucu çıkışa aktarılmaktadır. Aktivasyon fonksiyonunun olmasının nedenleri; çıkan değeri belirli bir alanda sınırlamak ve özellikle ağırlık eğitilebilmesi için türevinin alınabilir bir fonksiyonu olmasıdır.

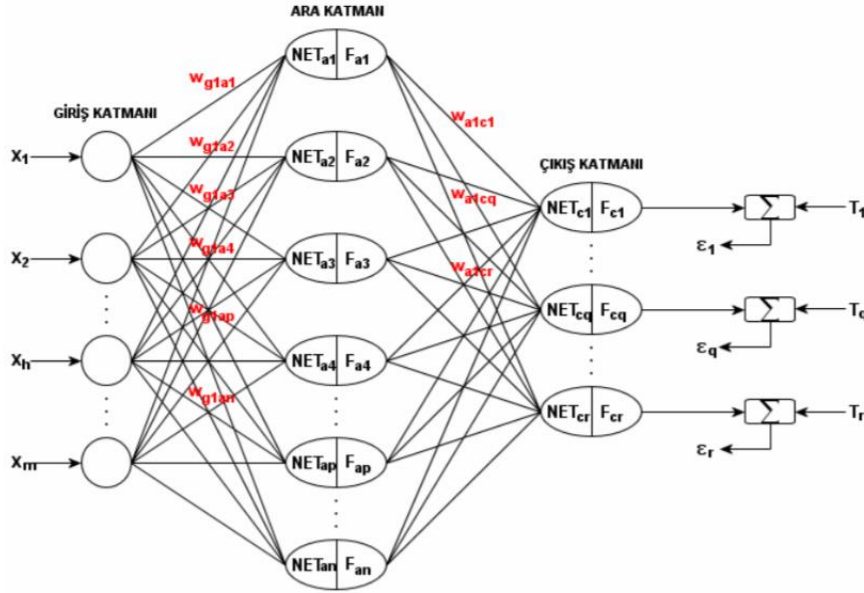


Şekil 3. Tek katmanlı YSA.

$$\text{net} = \sum_{i=1}^n w_i x_i + \phi \quad (9)$$

$$y = f(\text{net})$$

En basit hali ile verilen Şekil 3'deki YSA modeli Eşitlik (9)'daki denklem ile modellenebilir. Burada kullanılan aktivasyon fonksiyonu genellikle türevi alınabilen bir fonksiyon olan sigmoid fonksiyonu tercih edilmektedir. Bu tek katmanlı YSA her ne kadar iyi olsa da kaotik bir sistemi modellemek için bu yeterli olmamaktadır. Bu nedenle içerisinde birden fazla katman eklenmiş olan bir yapı olan çok katmanlı yapay sinir ağı kullanılacaktır.



Şekil 4. Çok katmanlı YSA.

Şekil 4'de blok şekilde verilen Çok katmanlı Yapay Sinir Ağları giriş katman, ara katman ve çıkış katmanlarından oluşmaktadır. Bu yapının matematiksel mantığı tek katmanlı yapıya çok benzemektedir. Lakin burada giriş katmanına gelen her bir giriş değeri ara katmanlara bir ağırlık ile çarpılarak ara katmandaki birimlere ulaşabilmektedir. Buraya ulaşan her bir birimin değeri ise belirli bir işlemden geçerek bir sonraki çıkış katmanın

girişi olmaktadır. Bu işlemi matematiksel olarak ifade edildiğinde ara katmana gelen ağın değeri Eşitlik (10)'da verilmiştir. Buradan elde edilen değer Eşitlik (11)'deki aktivasyon fonksiyonu ile çıkış katmanının girişi olabilmektedir. Aynı şekilde buraya ulaşan her bir değer yine bir ağırlık ile çarpılıp Eşitlik (12)'deki gibi çıkış katmanının NET değerini belirlemektedir. Ardından tekrardan Eşitlik (13) aktivasyon fonksiyonu ile ağ çıkışı elde edilmektedir.

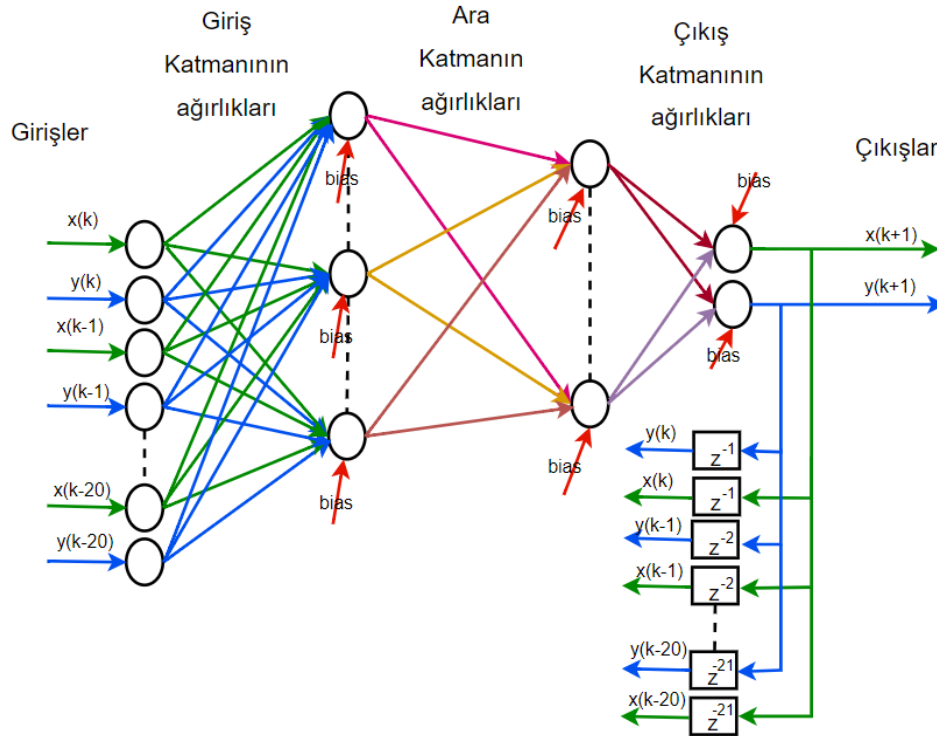
$$NET_{ap} = \sum_i w_{gi,ap} \cdot X_i \quad (10)$$

$$F_{ap} = f(NET_{ap}) \quad (11)$$

$$NET_{cq} = \sum_i w_{ai,aq} \cdot F_{ai} \quad (12)$$

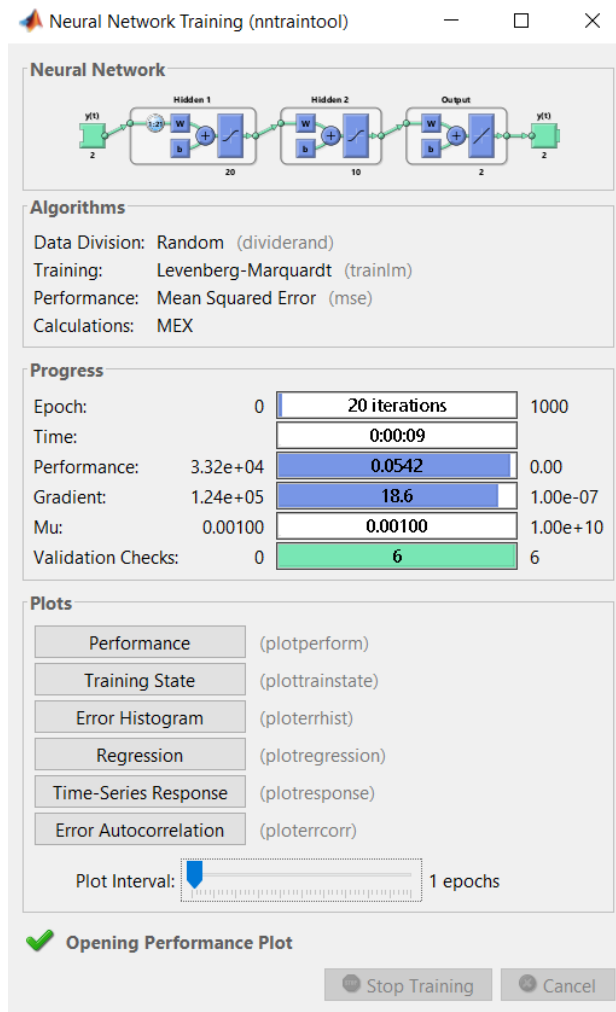
$$F_{cq} = f(NET_{aq}) \quad (13)$$

Yapay Sinir Ağlarının en temel mantığı bu olmakla birlikte bu yapıya çıkıştan birim geri besleme ekleyerek NAR (Nonlinear Autoregressive Neural Network) yapılabilmektedir. Bu çalışmanın muhtevası gereği girişler direk olarak çıkışların birim gecikmeli girişleri olduğu için bu yapı tercih edilmiştir. Bunun blok diyagramı da Şekil 5'de verilmiştir.

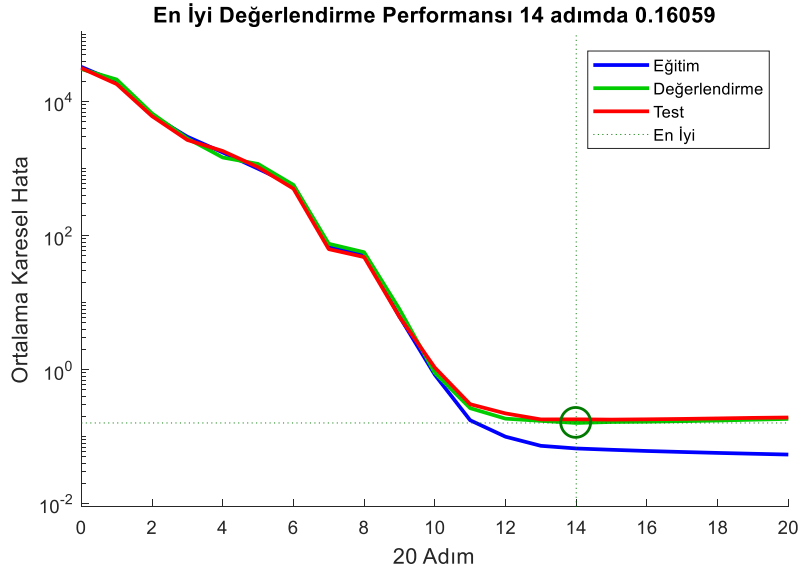


Şekil 5. Nonlinear autoregressive neural network yapısı.

Video üzerindeki nesnenin kaotik davranışın eğitilmesi için ilk önce videodan cismin ikinci bölümde anlatıldığı gibi konum bilgileri alınmıştır. Ardından bu konum bilgileri NAR yapısındaki YSA'ya verilmiştir. Matlab'da oluşturulan bu yapı Şekil 5'de verilmiştir. Burada YSA'nın ilk katmanı 20, ara katmanında 10 nöron ve çıkış katmanı 2 nöron olarak belirlenmiştir. YSA'nın eğitilmesi içinde Şekil 6'da verilen nntool'un içinde olan nntool özelliği kullanılmıştır. Bu ağı eğitilmesi için geri yayılım algoritması olarak Levenberg-Marquardt seçilmiştir. Geri beslemede ise konum sinyali olan her bir x ve y sinyalinin 20 birime kadar gecikmesi olarak seçilmiştir. Eğitim sonunda da adım sayısına göre performansını ifade eden ortalama kareli hatası Şekil 7'de verilmiştir.

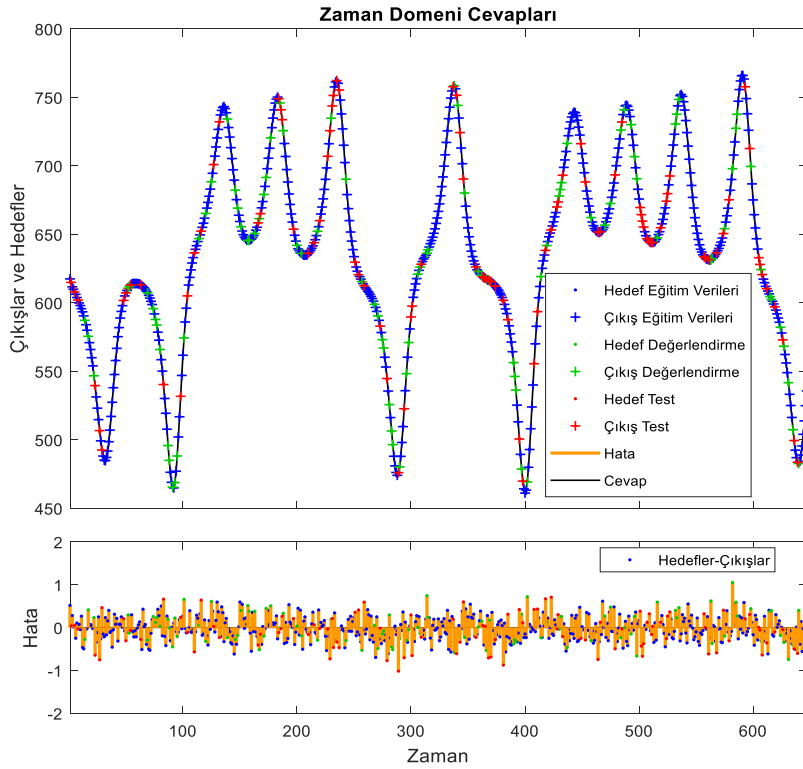


Şekil 6. YSA eğitimi.

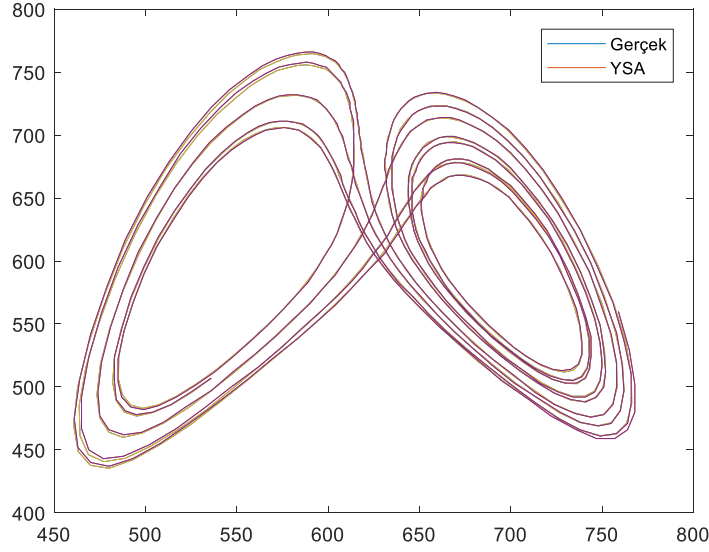


Şekil 7. YSA'nın performansı.

Sistem ile YSA modelinin çıkışları zamana bağlı olarak Şekil 8'de verilirken fazlara göre ise Şekil 9'da verilmiştir.



Şekil 8. Zaman bağlı YSA ve gerçek sonuçlar.



Şekil 9. Faza bağlı YSA ve gerçek sonuçlar.

5. Sonuçlar

Bu çalışmada kaotik bir davranış sergileyen bir cismin hareketi videodan elde edilmiştir. Bunun için takip edilmesi istenen cismin alan ve ağırlık merkezi içeren öznitelikleri kullanılarak konum bilgileri belirlenmiştir. Ardından alınan bu konum bilgileri NAR yapısındaki geri beslemeli bir yapay sinir ağına eğitilmiştir. Sonuç olarak matematiksel olarak ifade edilemeyen bir takım davranışların direk olarak video veya görüntü ile alınarak veri kümeleri üzerinden bu tip kaotik davranışlar modellenmektedir ve daha kısa sürdüğü görülmüştür. Diğer taraftan elde edilen verilere göre matematiksel bir denklem sistemi önerilebilirdi. Lakin önerilen denklem sisteminin uygun olabilmesi için modellenmek istenen sistemi çok iyi temsil etmesi ve dinamiklerini iyi yakalaması gerekmektedir. Bunun için tasarımcının sistemi iyi tanıması gerekmektedir. Özellikle sistemde ölçülebilen/ölçülemeyen, gözlenebilen/gözlenemeyen değişkenlerin belirlenmesi, zamanla değişip değişmediğinin bilinmesi ve bunların tahmin edilmesi gibi bir çok şeyi içeren matematiksel bir model olması gerekmektedir. Lakin bu tip sistemlerin yapay sinir ağı, bulanık model gibi yöntemlerle modellenerek sistemi temsil etmesi, sistemin gelecek davranışlarının kestirilmesi gibi işlemler yapılabilmektedir. Ayrıca bu yöntem sayesinde işlem yükü azalmış ve sistemin farklı bir şekilde yine aynı dinamik davranışları temsil eden matematiksel bir model ile çalışılmıştır. Lakin yapay sinir ağının eğitilmesi direk olarak verilere bağlı olduğu için sistemden olabildiğince fazla veri alınarak yapay sinir ağının eğitilmesi gerekmektedir. Aksi takdirde yapay sinir ağı sistemin farklı dinamiklerini kaçırabilir ve hatta sistemden farklı bir işaret üreterek sistemi temsil edemeyip hatalı sonuçlarda üretebilir. Genel olarak bakıldığında ise yapay sinir ağı uygulamalarında hatanın 'sıfır olması' ya da sıfıra yakın olması istenir. Modelleme açısından bu gerekli bir koşuldur. Lakin farklı uygulamalardan olan kaotik sinyal üreticilerinde ise yörüngelerin birbirini tekrar etmeyen yani 'rastgele' işaretler olması istenen bir durum olduğu için bu tip uygulamalarda hatanın pek önemi kalmayabilmektedir. Sonuçta olarak, YSA ile modellenen kaotik davranış, gerçek kaotik sistem ile aynı özellikleri ve beklenen davranışı gösterebildiği için birbiri yerine kullanılabilir. Dolayısıyla bu ve

bunun gibi kaotik davranış gösteren herhangi bir hareket yine görüntü işleme teknikleri ile belirlenip yapay sinir ağı ile modellenilebilir ve tekrardan üretilebilir, gelecek çıkışları kestirilebilir veya yerine kullanılabilir.

Kaynaklar

- [1] Pehlivan İ., Yeni kaotik sistemler: elektronik devre gerçeklemeleri, senkronizasyon ve güvenli haberleşme uygulamaları, Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya Üniversitesi, (2010).
- [2] Akkaya S., Pehlivan İ., Akgül A. ve Varan M., Yeni bir kaos tabanlı rasgele sayı üretici kullanan banka şifrematik cihazı tasarımı ve uygulaması, **Gazi Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Dergisi**, 33, 3, 1172-1182, (2018)
- [3] Kacar S., Wei Z., Akgul A. ve Aricioglu B., A novel 4D chaotic system based on two degrees of freedom nonlinear mechanical system, **Zeitschrift für Naturforschung**, 73, 595-607, (2018).
- [4] Sprott J. C., **Chaos and time-series analysis**, Oxford University Press, (2003).
- [5] Akgul A., Calgan H., Koyuncu I., Pehlivan I. ve Istanbulu A., Chaos-based engineering applications with a 3D chaotic system without equilibrium points," **Nonlinear dynamics**, 84, 2, 481-495, (2016).
- [6] Xu G., Shekofteh Y., Akgul A. ve Li C., ve S. Panahi, A new chaotic system with a self-excited attractor: entropy measurement, signal encryption, and parameter estimation, **Entropy**, 20, 2, 86, (2018).
- [7] Camacho E. F. ve Alba C. B., **Model predictive control**, Springer Science & Business Media, (2013).
- [8] Kis G., Jako Z., Kennedy M., ve Kolumbán G., Chaotic communications without synchronization, (1998).
- [9] Akgul A., Moroz I., Pehlivan I. ve Vaidyanathan S., A new four-scroll chaotic attractor and its engineering applications, **Optik-International Journal for Light and Electron Optics**, 127, 5491-5499, (2016).
- [10] Wolf A., Swift J. B., Swinney H. L. ve Vastano J. A., Determining Lyapunov exponents from a time series, **Physica D: Nonlinear Phenomena**, 16, 285-317, (1985).
- [11] Pamuk N., Dinamik Sistemlerde Kaotik Zaman Dizilerinin Tespiti, **Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi**, 15, 1, 78-92, (2013).
- [12] Lai Q., Akgul A., Li C., Xu G. ve U. Cavusoglu, A new chaotic system with multiple attractors: dynamic analysis, circuit realization and S-box design, **Entropy**, 20, 12, (2017).
- [13] Varan M. ve Akgul A., Control and synchronisation of a novel seven-dimensional hyperchaotic system with active control, **Pramana**, 90, 54, (2018).
- [14] Maguire L.P., Roche B., McGinnity T.M. ve McDaid L.J., Predicting a chaotic time series using a fuzzy neural network, **Information Sciences**, 112, 1-4, 125-136, (1998).
- [15] Principe J.C., Rathie A. ve Kuo J.M., Prediction of chaotic time series with neural networks, **International Journal of Bifurcation and Chaos**, 2, 4, 989-996, (1992).
- [16] Gómez-Gil, P., Ramírez-Cortes, J. M., Hernández, S. E. P. ve Alarcón-Aquino, V., A Neural network scheme for long-term forecasting of chaotic time series, **Neural Processing Letters**, 33, 215-233, (2011).

- [17] Fırat U., Kaotik zaman serilerinin yapay sinir ağlarıyla kestirimi: Deprem verisi durumu, Yüksel Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, (2006).
- [18] Hanbay D., Türkoğlu İ. ve Demir Y., Chua Devresinin Yapay Sinir Ağı ile Modellenmesi, **Fırat Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi**, 19, 1, 67-72, (2007).
- [19] Panahi S., Aram Z., Jafari S., Ma J. ve Sprott J., Modeling of epilepsy based on chaotic artificial neural network, **Chaos, Solitons & Fractals**, 105, 150-156, (2017).
- [20] Köker R., Öz C. ve Sarı Y., Hareketli cisimlerin bilgisayar görmesine dayalı hareket analizi, **Elektrik-Elektronik-Bilgisayar Mühendisliği 9. Ulusal Kongresi**, 497-500, (2001).
- [21] Karakaya F., Altun H., ve Çavuşlu M. A., Gerçek zamanlı nesne tanıma uygulamaları için HOG algoritmasının FPGA tabanlı gömülü sistem uyarlaması, **IEEE 17th Signal Processing and Communications Applications Conference (SIU)**, (2009).
- [22] Solak S. ve Altınışık U., Görüntü işleme teknikleri ve kümeleme yöntemleri kullanılarak fındık meyvesinin tespit ve sınıflandırılması, **Sakarya University Journal of Science**, 22, 56-65, (2018).
- [23] Varol A. ve Cebe B., Yüz tanıma algoritmaları, **5th International Computer & Instructional Technologies Symposium**, (2011).
- [24] Çelik E., Görüntü İşlemeye dayalı avuç içi izinin yapay sinir ağı ile tanınması, Yüksel Lisans Tezi, Kırıkkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kırıkkale, (2014).
- [25] Sütçüler E., Gerçek zamanlı video görüntülerinden yüz bulma ve tanıma sistemi, Yüksel Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, (2006).

A numerical solution for advection-diffusion equation based on a semi-Lagrangian scheme

Ersin BAHAR¹, Sila O. KORKUT², Yesim CICEK², Gurhan GURARSLAN^{1,3,*}

¹ Department of Civil Engineering, Pamukkale University, 20160, Denizli, Turkey.

² Department of Engineering Sciences, Izmir Kâtip Celebi University, 35620, Izmir, Turkey.

³ Department of Environmental Sciences, University of California, 92521, Riverside, CA.

Geliş Tarihi (Recived Date): 18.08.2018

Kabul Tarihi (Accepted Date): 18.10.2018

Abstract

This paper describes a numerical solution for the advection-diffusion equation. The proposed method is based on the operator splitting method which helps to obtain accurate solutions. That is, instead of sum, the operators are considered separately for the physical compatibility. In the process, method of characteristics combined with cubic spline interpolation and Saul'yev method are used in sub-operators, respectively. After guaranteeing the convergence of the method the efficiency is also tested on one-dimensional advection-diffusion problem for a wide range of Courant numbers which plays a crucial role on the convergence of the solution. The obtained results are compared with the analytical solution of the problem and other solutions which are available in the literature. It is revealed that the proposed method produces good approach not only for small Courant numbers but also big ones even though it is explicit method.

Keywords: *Advection-diffusion equation, method of characteristics, Saul'yev scheme, numerical solution.*

Ersin BAHAR, ebahar@pau.edu.tr, <https://orcid.org/0000-0001-8892-8441>

Sila O. KORKUT, silaovgu@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-4784-2013>

Yesim CICEK, yesimycicek@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-5438-4685>

* Gurhan GURARSLAN, gurarslan@pau.edu.tr, <http://orcid.org/0000-0002-9796-3334>

Yarı-Lagrangian bir şema yaklaşımına dayalı adveksiyon-difüzyon denkleminin bir sayısal çözümü

Özet

Bu çalışmada, adveksiyon-difüzyon denklemi için sayısal bir çözüm tanıtılmaktadır. Önerilen yöntem, doğru çözümler elde edilmesine yardımcı olan operatör ayırma metoduna dayanmaktadır. Yani, toplam yerine, operatörler fiziksel uyumluluk için ayrı olarak ele alınmaktadır. Bu süreçte, alt operatörler için karakteristikler yöntemi ile bir araya getirilmiş kübik spline interpolasyonu ve Saul'yev metodu sırası ile kullanılmıştır. Yöntemin yakınsamasını garanti altına aldıktan sonra, verimlilik de çözümün yakınsaması üzerinde önemli bir rol oynayan farklı Courant sayıları için tek boyutlu adveksiyon-difüzyon problemi üzerinde test edilmiştir. Elde edilen sonuçlar, problemin analitik çözümü ve literatürde mevcut olan diğer çözümlerle karşılaştırılmıştır. Önerilen yöntemin, açık bir yöntem olmasına rağmen sadece küçük Courant sayıları için değil, büyük olanlar için de iyi bir yaklaşım oluşturduğu ortaya çıkmıştır.

Anahtar kelimeler: Adveksiyon-difüzyon denklemi, karakteristikler metodu, Saul'yev şeması.

1. Introduction

Since the early days of civilization natural waters have been used as disposal places for human waste. At the beginning, there was no problem because the amount of the waste was not at a significant level and the content of the waste was simple. As the civilization progress and human population increase, the amount of the waste rises rapidly and the content of the waste is getting complex. The behavior of the pollutants in the water has been modeled by the advection-diffusion equation, see [1]. Developing a solution becomes important to interpret how the amount changes. The mathematical expression of three-dimensional advection-diffusion equation without the source term is given as follows:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} + V \frac{\partial C}{\partial y} + W \frac{\partial C}{\partial z} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \quad (1)$$

where t is time, C is the concentration of the pollution or substance, x , y and z are the spatial directions in cartesian coordinates, U , V and W represent the velocity components of the water in each direction and D_x , D_y and D_z are the diffusivity coefficients in each direction.

In this paper, for the sake of clarity, one-dimensional advection-diffusion equation, which is defined in Eq. (2), is studied.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (2)$$

where U and D_x are constant. The spatial and temporal step sizes are denoted by Δx and Δt , respectively. Moreover, Courant number, Cr , is computed as $U\Delta t/\Delta x$ and the Peclet number, Pe , is obtained as $U\Delta x/D_x$.

In order to reduce the amount of existing wastes in natural waters and to manage wastes which are disposed, properly, Eq. (2) must be solved accurately. However, Eq. (2) consists of two different types of processes which are advection (hyperbolic) and diffusion (parabolic). Even if these processes occur simultaneously, they refer extremely different events. Advection process happens in flow direction while diffusion process happens in both directions. This situation creates challenging problem for solving such equations. For this reason, many researchers developed different methods to solve Eq. (2) accurately. Some of these methods are classical finite difference method [2], high-order finite element method [3], high-order finite difference methods [4, 5], green element method [6], cubic and extended B-spline collocation methods [7-9], cubic, quartic and quintic B-spline differential quadrature methods [10, 11], method of characteristics unified with splines [12-14], cubic trigonometric B-spline approach [15], Taylor collocation and Taylor-Galerkin methods [16], Lattice Boltzmann method [17]. Moreover, non-linear advection-diffusion equation is studied in [18].

The outline of the present paper is as follows: Section 2 is dedicated to derivation and the convergence analysis of the proposed method. To obtain the solution of Eq. (2) method of characteristics with cubic spline interpolation (MOC-CS) and Saulyev method are used for advection and diffusion parts, respectively. Section 3 presents the results of the proposed method on one-dimensional advection-diffusion problems by taking different diffusion constants. The effectiveness of the proposed method is tested for several Caurant numbers. Obtained results are compared with the analytical solution and also the available results of the other researchers in the literature.

2. Derivation of the proposed method

The purpose of this section is to introduce the proposed method in details. The method is mainly based on Lie-Trotter splitting method, or sequentially splitting, which is a kind of operator splitting method. By the help of the Lie-Trotter splitting method Eq. (2) is divided into the two sub-problems. In order to obtain the solution of each sub-problems MOC-CS and Saulyev method are used, respectively. The convergence of the method is analyzed as well as the derivation.

2.1. Lie-Trotter operator splitting method

This method is a first-order splitting method and solves the problem sequentially. When its applied to Eq. (2), the problem will be split into two sub-problems such as advection and diffusion problems. The mathematical representation of it as follows [19]:

$$\frac{\partial \widehat{C}_1}{\partial t} + U \frac{\partial \widehat{C}_1}{\partial x} = 0, \quad \widehat{C}_1(t_n, x) = C(t_n, x), \quad t \in [t_n, t_{n+1}] \quad (3)$$

$$\frac{\partial \widehat{C}_2}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 \widehat{C}_2}{\partial x^2}, \quad \widehat{C}_2(t_n, x) = \widehat{C}_1(t_{n+1}, x), \quad t \in [t_n, t_{n+1}] \quad (4)$$

where Eq. (3) and Eq. (4) represents advection and diffusion processes, respectively. These processes are solved sequentially. At the beginning of the solution of advection-diffusion problem, Eq. (3) is solved first by using MOC-CS with the initial condition of the general advection-diffusion problem for the temporal step size of Δt . The obtained result is used as the initial condition of the Eq. (4) and this equation is solved by using Saulyev method. The result of the Eq. (4) defines the solution of the advection-diffusion equation at Δt [20].

2.2. MOC-CS for advection process

MOC-CS is a method which uses Lagrangian point of view. For this reason, the trajectory line of the concentration should be determined. Multiplying both sides of Eq. (3) by dt the partial differential equation is turned into the following ordinary differential equations.

$$\frac{d\widehat{C}_1}{dt} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{dx}{dt} = U \quad (6)$$

where Eq. (6) represents the characteristics line in the plane (x,t) . Eq. (5) shows that the concentration value of the advection process is not changed, see Figure 1. Also, the solution of the advection process with MOC-CS is independent of time. Thus, the exact solution of Eq. (3) can be written as follows:

$$\widehat{C}_1(x_{i+1}, t_{n+1}) = \widehat{C}_1(\widehat{x}_i, t_n) = \widehat{C}_1\left(x_{i+1} - \int_{t_n}^{t_{n+1}} U dt, t_n\right) \quad (7)$$

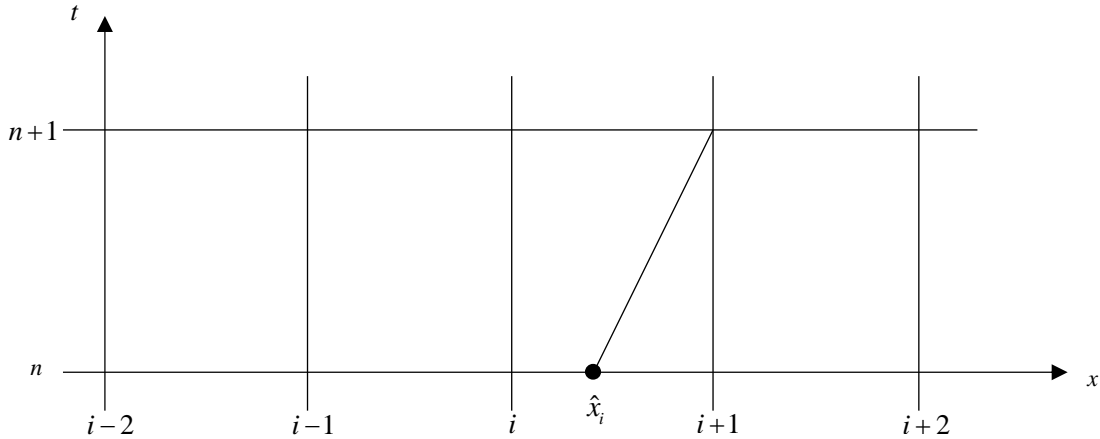


Figure 1: Finite difference grid and trajectory line of concentration in one-dimension.

To obtain the concentration value on the next time step in Eq. (7) the concentration value at the point \widehat{x}_i which is located between the nodal points should be found. To do so, interpolation method is used. As mentioned above, the solution of the advection process with the method of characteristics is independent of time. Therefore, there is no time discretization error, only an interpolation error in the solution. The magnitude of

this error depends on the order of the interpolation method. Taking into account this fact cubic spline polynomials method which has negligible interpolation error is used. Cubic spline polynomials can be written as follows:

$$C(x) = C_i + \alpha_i(x-x_i) + \beta_i(x-x_i)^2 + \gamma_i(x-x_i)^3, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1} \quad (8)$$

where C_i is the concentration value at the nodal point x_i and $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ are the polynomial coefficients which have to be determined by using known concentration values at time level n . The detailed discussion about construction of the cubic spline polynomials and calculation of coefficients in the polynomials is given [21].

After the polynomials are constructed in Eq. (8), the concentration values at the time level $n+1$ can be calculated by equation as follows:

$$\widehat{C}_1(x_{i+1}, t_{n+1}) = \widehat{C}_1(x_i, t_n) + \alpha_i(\widehat{x}_i - x_i) + \beta_i(\widehat{x}_i - x_i)^2 + \gamma_i(\widehat{x}_i - x_i)^3 \quad (9)$$

The result of Eq. (9) gives the solution of the advection process.

2.3. Saul'yev method for diffusion process

Even though Saul'yev method is an explicit one, it has an advantage of using a value at the next time level which improves the quality of the solution. Also, there are two ways of conducting Saul'yev method such as from left to right and from right to left. In this study from left to right version is used. Discretization of the diffusion process given in Eq. (4) with the Saul'yev method as follows:

$$\left. \frac{\partial^2 \widehat{C}_2}{\partial x^2} \right|_{i,n} \approx \frac{\left. \frac{\partial \widehat{C}_2}{\partial x} \right|_{i+1/2,n} - \left. \frac{\partial \widehat{C}_2}{\partial x} \right|_{i-1/2,n}}{\Delta x} \quad (10)$$

Due to the usage of the Saul'yev method, the left-hand side derivative at time level n is replaced with the derivative at time level $n+1$. A similar procedure can be applied for from right to left version of the Saul'yev method.

$$\left. \frac{\partial^2 \widehat{C}_2}{\partial x^2} \right|_{i,n} \approx \frac{\left. \frac{\partial \widehat{C}_2}{\partial x} \right|_{i+1/2,n} - \left. \frac{\partial \widehat{C}_2}{\partial x} \right|_{i-1/2,n+1}}{\Delta x} \quad (11)$$

The approximations used for the spatial discretizations of the derivatives in Eq. (11) and time discretization of the time derivative in Eq. (4) as follows:

$$\left. \frac{\partial \widehat{C}_2}{\partial x} \right|_{i+1/2,n} \approx \frac{\widehat{C}_2|_{i+1,n} - \widehat{C}_2|_{i,n}}{\Delta x} \quad (12)$$

$$\left. \frac{\partial \widehat{C}_2}{\partial x} \right|_{i-1/2,n+1} \approx \frac{\widehat{C}_2|_{i,n+1} - \widehat{C}_2|_{i-1,n+1}}{\Delta x} \quad (13)$$

$$\left. \frac{\partial \widehat{C}_2}{\partial t} \right|_{i,n} \approx \frac{\widehat{C}_2|_{i,n+1} - \widehat{C}_2|_{i,n}}{\Delta t} \quad (14)$$

By putting these equations together the solution of the Eq. (4) is attained, diffusion process, with the Saul'yev method as follows:

$$\widehat{C}_2|_{i,n+1} = \frac{\theta \widehat{C}_2|_{i-1,n+1} + (1-\theta) \widehat{C}_2|_{i,n} + \theta \widehat{C}_2|_{i+1,n}}{(1+\theta)} \quad (15)$$

where $\theta = \Delta t / \Delta x^2$.

The term at time level $n+1$ at $i=1$ in the right-hand side of Eq. (15) is unknown. However, the first term, $\widehat{C}_2|_{0,n+1}$, is known by the boundary condition of the problem. Then for $i > 1$ the unknown term $\widehat{C}_2|_{i-1,n+1}$ is calculated from Eq. (15), hence this method is an explicit method.

2.4. Convergence analysis of the method

To prove the convergence of the operator splitting method we have to show that the sequence which is obtained by the given method approaches to zero. By this sense, the notation of Δt represents a proportional value throughout the analysis. However, in the computational part for t_0 and t_{end} any value can be chosen any value. It means that in computational part Δt is taken from $[t_0, t_{end}]$ whereas in the analysis part it is considered in $[0, 1]$.

Due to the process of the Lie-Trotter splitting method the error obtained by solving \widehat{C}_1 is effecting the error of the solution of \widehat{C}_2 . The error obtained in one-step solution is effecting the solution obtained from the next step. Thus, it is expected that the error for operator splitting methods cause a cumulative error at the end of the procedure. For this purpose, we shall give the error bound of both techniques defined in Section 2.2 and 2.3.

Lemma 1. The error bound for one-step method of characteristics given in Section 2.2 is

$$\widehat{C}_1 \approx \widehat{C}_1(x,t) + O\left(\frac{\Delta x^4}{\Delta t}\right).$$

Proof.

Using Eq. (7) and the relation $\Delta x = U \Delta t$

$$\frac{\Delta t}{\Delta t} \left(\frac{\partial \widehat{C}_1}{\partial t} + U \frac{\partial \widehat{C}_1}{\partial x} \right) = 0,$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left(\Delta t \frac{\partial \widehat{C}_1}{\partial t} + U \Delta t \frac{\partial \widehat{C}_1}{\partial x} \right)$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\Delta t \frac{\partial \widehat{C}_1}{\partial t} + \Delta x \frac{\partial \widehat{C}_1}{\partial x}}{d\widehat{C}_1} \right) = 0 \quad (16)$$

Due to the availability the nature of the advection equation, the former equation is solved by the method of characteristics. That is,

$$\frac{1}{\Delta t} d\widehat{C}_1 = 0, \quad (17)$$

$$\widehat{C}_1 \approx \widehat{C}_1(x, t) + O\left(\frac{\Delta x^4}{\Delta t}\right). \quad (18)$$

Lemma 2. The error bound for one-step method of Sauljev method used for diffusion part of the Eq. (2) in Section 2.3 is

$$\|\widehat{C}_2^2 - \widehat{C}_2^1\| \leq O\left(\Delta t^2, \Delta x^2, \frac{\Delta t^2}{\Delta x}\right),$$

where \widehat{C}_2^i represents the i^{th} iteration.

Proof. The proof can be found in [22]. We note that Δt^2 and Δx^2 can be neglected by considering $\frac{\Delta t^2}{\Delta x}$ because of the following assumption. Thus, throughout the analysis the truncation error of Sauljev method is considered as follows:

$$\|\widehat{C}_2^2 - \widehat{C}_2^1\| \leq O\left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x}\right),$$

Proposition 1. Let Δt approach to zero faster than Δx . The Lie Trotter splitting method is convergent if the condition $\left|\frac{1}{(1+\rho)\Delta t}\right| < 1$ is hold with the global error

$$\|C_{n+1} - C_n\| \leq \beta(\Delta x) + K\Delta t,$$

where $\beta(\Delta x) = \max\left\{O\left(\frac{\Delta x^6}{\Delta t^2}\right), O(\Delta x)\right\}$ and $\rho = D_x \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$.

Proof:

To show the convergence of the Lie-Trotter operator splitting method we will use the induction technique. For the sake of brevity, we studied on $[0, \Delta t]$. approp

$$\widehat{C}_1^1 \cong \widehat{C}_1^0(x, t) + O\left(\frac{\Delta x^4}{\Delta t}\right), \quad \text{for } t \in [0, \Delta t] \quad (19)$$

$$\widehat{C}_2^1 \cong \frac{1}{1+\rho} \left((1-\rho)\widehat{C}_1^1 + \rho(\widetilde{w} + \widehat{C}_1^1) \right) + O\left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x}\right) \quad \text{for } t \in [0, \Delta t], \quad (20)$$

Substituting the Eq. (19) into Eq. (20) yields

$$\widehat{C}_2^1 = \underbrace{\frac{1}{1+\rho} \widehat{C}_1^0 + \frac{\rho}{1+\rho} \widetilde{w}}_{\text{say } w_0} + \frac{1}{1+\rho} O\left(\frac{\Delta x^4}{\Delta t}\right) + O\left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x}\right). \quad (21)$$

After taking the one-step solution, w_0 , as the initial condition of the second-step, that is on $[\Delta t, 2\Delta t]$, we have

$$\widehat{C}_1^2 \cong \widehat{C}_1^1(x, t) + \frac{1}{1+\rho} O\left(\frac{\Delta x^4}{\Delta t^2}\right) + \frac{1}{\Delta t} O\left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x}\right) + O\left(\frac{\Delta x^4}{\Delta t}\right) \quad (22)$$

$$\widehat{C}_2^2 \cong \underbrace{\frac{1}{1+\rho} \widehat{C}_1^2 + \frac{\rho}{1+\rho} \widetilde{w}}_{\text{say } w_1} + O\left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x}\right) \quad (23)$$

$$\widehat{C}_2^2 \cong \widehat{C}_2^1 + \frac{1}{(1+\rho)^2} O\left(\frac{\Delta x^4}{\Delta t^2}\right) + \frac{1}{1+\rho} \frac{1}{\Delta t} O\left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x}\right) + \frac{1}{1+\rho} O\left(\frac{\Delta x^4}{\Delta t}\right) + O\left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x}\right) \quad (24)$$

To get a general expression we use induction technique which leads to

$$\widehat{C}_2^{n+1} \cong \widehat{C}_2^n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+\rho)^k} O\left(\frac{\Delta x^4}{\Delta t^k}\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(1+\rho)^k \Delta t^k} O\left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x}\right). \quad (25)$$

The convergence result of the Lie-Trotter method combined with method of characteristics and Saul'yev method arises from the standard technique, that is

$$\widehat{C}_2^{n+1} - \widehat{C}_2^n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(1+\rho)^k} O\left(\frac{\Delta x^4}{\Delta t^k}\right) + \sum_{k=0}^n \frac{1}{(1+\rho)^k \Delta t^k} O\left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x}\right). \quad (26)$$

Taking appropriate norm of both sides and using the Cauchy-Schwartz inequality

$$\left\| \widehat{C}_2^{n+1} - \widehat{C}_2^n \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(1+\rho)^k \Delta t^k} O(\Delta x^4) + \sum_{k=0}^n \frac{1}{(1+\rho)^k \Delta t^k} O\left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x}\right) \right\| \quad (27)$$

$$\left\| \widehat{C}_2^{n+1} - \widehat{C}_2^n \right\| \leq \left\| \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(1+\rho)^k \Delta t^k} O(\Delta x^4) \right\| + \left\| \sum_{k=0}^n \frac{1}{(1+\rho)^k \Delta t^k} O\left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x}\right) \right\| \quad (28)$$

Using the condition $\left| \frac{1}{(1+\rho)\Delta t} \right| \leq 1$ which also holds $D_x \frac{\Delta t}{\Delta x^2} < -\frac{1}{2\Delta t}$. These inequalities guaranteed that

$$\|\tilde{C}_2^{n+1} - \tilde{C}_2^n\| \leq O(\Delta x^4) \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{(1+\rho)\Delta t}} \right) + O\left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x}\right) \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{(1+\rho)\Delta t}} \right) \quad (29)$$

$$\|\tilde{C}_2^{n+1} - \tilde{C}_2^n\| \leq O(\Delta x^4) \left(\frac{\Delta x^2 \Delta t + D_x \Delta t^2}{\Delta t \Delta x^2 + D_x \Delta t^2 - \Delta x^2} \right) + O\left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x}\right) \left(\frac{\Delta x^2 \Delta t + D_x \Delta t^2}{\Delta t \Delta x^2 + \Delta t^2 - \Delta x^2} \right), \quad (30)$$

$$\|\tilde{C}_2^{n+1} - \tilde{C}_2^n\| \leq O(\Delta x^4) \left(1 + \frac{\Delta x^2}{\Delta t \Delta x^2 + 3D_x \Delta t^2} \right) + O\left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x}\right) \left(1 + \frac{\Delta x^2}{\Delta t \Delta x^2 + 3D_x \Delta t^2} \right). \quad (31)$$

Due to the condition $0 < \Delta t < \Delta x < 1$, which has to be satisfied for the stability of the Sauljev method, we have

$$1 + \frac{\Delta x^2}{\Delta t \Delta x^2 + 3D_x \Delta t^2} \approx 1 + M \frac{\Delta x^2}{\Delta t \Delta x^2}$$

By taking $C_{n+1} := \tilde{C}_2^{n+1}$ the proof is concluded with the following relation

$$\|C_{n+1} - C_n\| \leq O\left(\frac{\Delta x^4}{\Delta t}\right) + O\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right). \quad (32)$$

3. Numerical applications

In this section, the proposed method is applied to one-dimensional advection-diffusion problems which have the different types of characteristics such as sharp gradient and smooth behavior. For the sake of clarity we note that the values of Δt in this section are different from those in analysis part. Also, the efficiency of the MOC-CS-Sauljev is tested for different Courant numbers. Comparisons of obtained results with the analytical solution and other solutions which are available in the literature are discussed. In these comparisons computed concentration values and error norms are used which are defined as follows:

$$L_\infty = \max_i |C_i^{exact} - C_i^{numerical}| \quad (33)$$

$$L_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^M |C_i^{exact} - C_i^{numerical}|^2} \quad (34)$$

Example 1. In this example, flow in a channel with the velocity $U=0.01 \text{ m/s}$ and diffusion coefficient $D=0.002 \text{ m}^2/\text{s}$ are considered. The length of the channel $L=100 \text{ m}$ is taken. Analytical solution of this problem is given as follows [23]:

$$C(x,t) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x-Ut}{\sqrt{4Dt}} \right) + \frac{1}{2} \exp \left(\frac{Ux}{D} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{x+Ut}{\sqrt{4Dt}} \right) \quad (35)$$

Boundary conditions of the problem are taken as follows

$$C(0,t) = 1 \quad (36)$$

$$-D \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right) (L,t) = 0 \quad (37)$$

The initial condition of the problem can be obtained from Eq. (35) by using $t=0$. Comparison of obtained result with MOC-CS-Saulyev and analytical solution of the problem can be seen from Figure 2. Also, the sharp behavior of the problem is clearly shown.

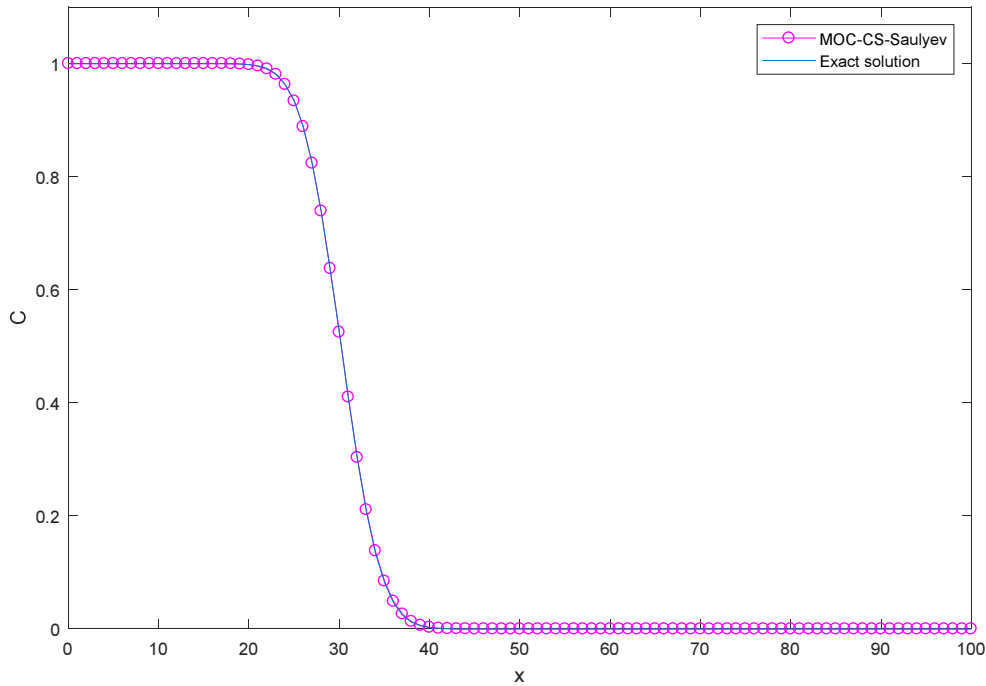


Figure 2: Comparison of the exact solution and the numerical solution obtained with MOC-CS-Saulyev method for $\Delta x = 1 \text{ m}$ and $\Delta t = 10 \text{ s}$.

The spatial step size $\Delta x = 1 \text{ m}$ is taken for all the calculations conducted for this problem throughout the study. Also, maximum calculation time is picked as 3000 s . As it can be seen from Figure 2 the coordinates of the critical concentration values of the problem are between 18 m to 42 m . This makes sense when we consider the fact that the maximum computational time is 3000 s .

For the obtained results in Table 1 temporal step size is taken as $\Delta t = 1 \text{ s}$ because of the advection dominance of the problem where $Pe = 5$. Even though MOC-CS-Saulyev has a lower order of accuracy than the sixth order compact finite difference methods, the results are so close to each other.

Table 2 shows the results for temporal step size $\Delta t=10$ s. With this relatively small change in the temporal step size is enough to diverge the solutions of the numerical methods from the analytical solution. MOC-CS-Saulyev produced the best results in the comparison. Also, this can be seen by checking the error norm values in which MOC-CS-Saulyev has the smallest.

Table 3, the temporal step size is taken $\Delta t=60$ s. Table 3 indicates that the proposed method is in a perfect agreement with the analytical solution.

Table 1: Comparison of numerical solutions and exact solution ($Cr=0.01$).

x (m)	[5] MC-CD6	[4] RK4-CD6	[15] CuTBSM	MOC-CS Saulyev	Analytical Solution
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
19	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
20	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998
21	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996
22	0.991	0.991	0.991	0.991	0.991
23	0.982	0.982	0.982	0.981	0.982
24	0.964	0.964	0.964	0.963	0.964
25	0.935	0.934	0.934	0.933	0.934
26	0.889	0.889	0.888	0.888	0.889
27	0.824	0.823	0.822	0.823	0.823
28	0.739	0.738	0.736	0.738	0.738
29	0.637	0.636	0.635	0.635	0.636
30	0.523	0.523	0.522	0.522	0.523
31	0.408	0.408	0.408	0.408	0.408
32	0.301	0.301	0.301	0.301	0.301
33	0.208	0.208	0.208	0.209	0.208
34	0.135	0.135	0.136	0.137	0.135
35	0.082	0.082	0.082	0.084	0.082
36	0.047	0.046	0.046	0.048	0.046
37	0.025	0.024	0.024	0.026	0.024
38	0.012	0.012	0.012	0.013	0.012
39	0.005	0.005	0.005	0.006	0.005
40	0.002	0.002	0.002	0.003	0.002
41	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
42	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
L_2	0.0017	0.0017	-	0.0047	-
L_∞	0.0008	0.0008	-	0.0019	-

Table 2: Comparison of numerical solutions and exact solution ($Cr=0.10$).

$x (m)$	[5] MC-CD6	[4] RK4-CD6	[15] CuTBSM	MOC-CS Saulyeu	Analytical Solution
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
19	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
20	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998
21	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996
22	0.991	0.992	0.991	0.991	0.991
23	0.982	0.982	0.982	0.981	0.982
24	0.965	0.965	0.963	0.964	0.964
25	0.936	0.936	0.933	0.934	0.934
26	0.891	0.891	0.885	0.889	0.889
27	0.827	0.827	0.818	0.824	0.823
28	0.743	0.743	0.732	0.739	0.738
29	0.642	0.641	0.631	0.636	0.636
30	0.529	0.528	0.517	0.524	0.523
31	0.414	0.413	0.404	0.409	0.408
32	0.306	0.306	0.298	0.302	0.301
33	0.213	0.212	0.207	0.211	0.208
34	0.138	0.138	0.134	0.138	0.135
35	0.084	0.084	0.081	0.085	0.082
36	0.048	0.048	0.045	0.049	0.046
37	0.025	0.025	0.023	0.027	0.024
38	0.012	0.012	0.011	0.014	0.012
39	0.006	0.006	0.005	0.006	0.005
40	0.002	0.002	0.002	0.003	0.002
41	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
42	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
L_2	0.0148	0.0142	-	0.0071	-
L_∞	0.0060	0.0055	-	0.0031	-

Table 3: Comparison of numerical solutions and exact solution ($Cr=0.60$)

$x(m)$	[12] MOCS	[23] MOCG	[25] CBSG	[26] FEMLSF	[26] FEMQSF	[16] TC	[16] TG	MOC-CS Saulyeu	Analytical Solution
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
19	1.000	0.999	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	1.000	0.999
20	1.000	0.998	0.999	0.999	1.000	0.999	0.998	0.999	0.998
21	1.000	0.996	0.996	0.997	0.999	0.999	0.996	0.997	0.996
22	1.000	0.990	0.991	0.993	0.996	0.998	0.991	0.993	0.991
23	1.000	0.978	0.981	0.985	0.989	0.994	0.980	0.985	0.982
24	1.000	0.957	0.961	0.970	0.974	0.987	0.960	0.969	0.964
25	1.000	0.922	0.927	0.943	0.946	0.972	0.926	0.942	0.934
26	0.996	0.870	0.874	0.902	0.900	0.945	0.874	0.898	0.889
27	1.013	0.799	0.800	0.842	0.832	0.902	0.800	0.834	0.823
28	1.047	0.708	0.706	0.763	0.743	0.838	0.705	0.750	0.738
29	0.897	0.602	0.596	0.666	0.638	0.755	0.595	0.648	0.636
30	0.457	0.488	0.479	0.556	0.524	0.653	0.479	0.535	0.523
31	0.067	0.375	0.366	0.442	0.411	0.541	0.366	0.420	0.408
32	-0.036	0.272	0.265	0.332	0.306	0.427	0.264	0.313	0.301
33	-0.010	0.185	0.181	0.235	0.218	0.320	0.181	0.220	0.208
34	0.002	0.118	0.118	0.156	0.147	0.227	0.117	0.146	0.135
35	0.000	0.070	0.072	0.096	0.095	0.152	0.072	0.092	0.082
36	0.000	0.038	0.042	0.055	0.058	0.096	0.041	0.055	0.046
37	0.000	0.020	0.023	0.030	0.034	0.057	0.023	0.031	0.024
38	0.000	0.009	0.012	0.015	0.019	0.032	0.012	0.016	0.012
39	0.000	0.004	0.006	0.007	0.010	0.017	0.006	0.008	0.005
40	0.000	0.002	0.003	0.003	0.005	0.008	0.002	0.004	0.002
41	0.000	0.001	0.001	0.001	0.003	0.004	0.001	0.002	0.001
42	0.000	0.000	0.001	0.000	0.001	0.001	0.000	0.001	0.000
L_2	-	-	-	-	-	-	-	0.0396	-
L_∞	-	-	-	-	-	-	-	0.0123	-

Example 2. In this problem flow velocity and diffusion coefficient picked as $U=0.8$ m/s and $D=0.005$ m²/s, respectively. Also length of the channel takes as $L=9$ m. Exact solution of this problem given by [24]

$$C(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp \left[-\frac{(x-1-Ut)^2}{D(4t+1)} \right] \tag{38}$$

subject to the following boundary conditions

$$C(0,t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp \left[-\frac{(-1-Ut)^2}{D(4t+1)} \right], \quad (39)$$

$$C(L,t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp \left[-\frac{(8-Ut)^2}{D(4t+1)} \right]. \quad (40)$$

The concentration values at the boundaries should be updated in each temporal step size in the solution algorithm. Initial condition of the problem can be calculated by taking $t=0$ s in Eq. (38).

MOC-CS-Saulyev, cubic B-spline collocation method and extended cubic B-spline collocation method are compared for different temporal step sizes in L_∞ -norm. And, Table 4 emphasizes that MOC-CS-Saulyev has produced better concentration value results compare to other methods as the value of Δt increases.

Table 4: Comparison of L_∞ error norms ($\Delta x=1$ m).

Δt (s)	[9] BSCM	[9] ECuBSCM	MOC-CS Saulyev
60	0.04330	0.04250	0.01235
30	0.01962	0.01961	0.00635
20	0.01270	0.01260	0.00471
10	0.00685	0.00608	0.00314
5	0.00409	0.00307	0.00243
1	0.00224	0.00127	0.00193

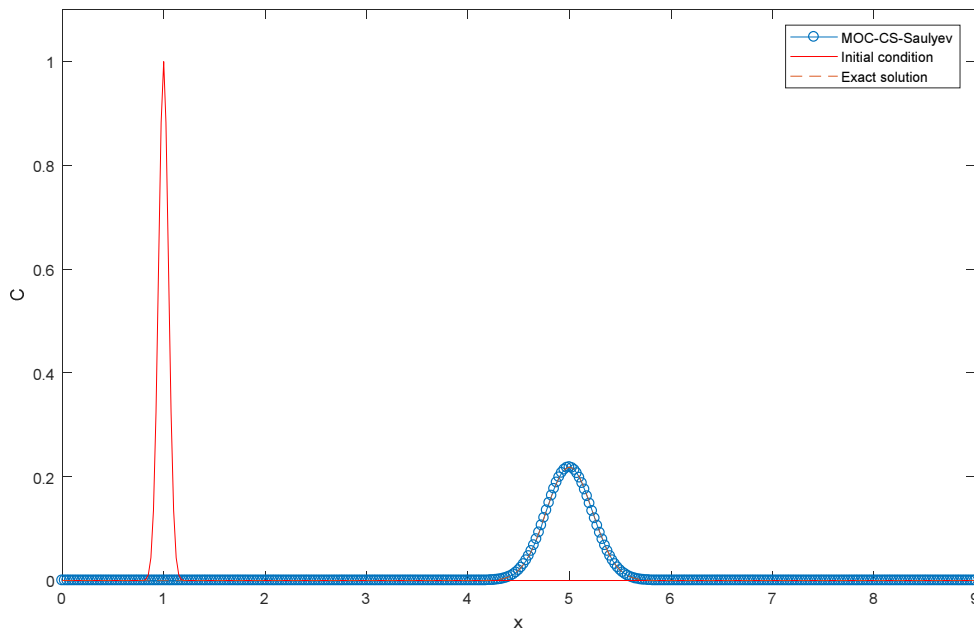


Figure 3: Comparison of the exact solution and the numerical solution obtained with MOC-CS-Saulyev method for $\Delta x=0.025$ m and $\Delta t=0.005$ s.

The exhibited figure, Figure 3, shows the smooth behavior of the exact equation and harmony of MOC-CS-Saulyeu. While the advection process moves the peak concentration along the channel, the diffusion process spreads the concentration around.

In Table 5, absolute peak error values for a wide range of Courant numbers are compared with RK4-CD6 method. RK4-CD6 has smaller absolute peak errors for $Cr < 1$. This is expected because RK4-CD6 has sixth-order in space and fourth-order in time discretizations with a stability condition. Therefore, it can not produce results for $Cr \geq 1$. Although MOC-CS-Saulyeu has bigger absolute peak errors, it is unconditionally stable. Thanks to that it can produce solutions even when Cr is really big. When the results are examined it is seen that MOC-CS-Saulyeu method has provided comparable low errors and acceptable results for all Courant numbers.

Table 5 Comparison of absolute peak errors ($\Delta x = 0.025 m$).

Cr	$\Delta t (s)$	[4] RK4-CD6	MOC-CS Saulyeu
0.016	0.0005	5.64E-09	3.01E-04
0.032	0.001	5.64E-09	2.92E-04
0.064	0.002	5.78E-09	2.75E-04
0.08	0.0025	5.99E-09	2.68E-04
0.16	0.005	1.10E-08	2.38E-04
0.32	0.01	8.18E-08	2.12E-04
0.64	0.02	9.02E-07	2.41E-04
0.8	0.025	1.79E-06	2.63E-04
1.6	0.05	-	1.77E-04
3.2	0.1	-	1.46E-04
6.4	0.2	-	1.53E-03
8	0.25	-	2.59E-03

4. Conclusions

This paper deals with a numerical solution of the advection-diffusion problem which contains two different type of processes such as advection and diffusion. Advection and diffusion processes are sequentially solved by method of characteristics with cubic-spline interpolation (MOC-CS) and Saulyeu method, respectively. These two methods are combined with the help of Lie-Trotter operator splitting method. The convergence analysis of the proposed method is studied as well as computational results. After the convergence issue is guaranteed the effectiveness of the proposed method is tested on two different types of one-dimensional advection-diffusion problems. The first problem has sharp gradient which makes it quite hard to solve accurately whereas the second problem has smooth behavior. Obtained results with the MOC-CS-Saulyeu method are compared with the analytical solutions of the problems and the results of other researchers available in the literature. It is seen that MOC-CS-Saulyeu method, which is explicit one, has low error norm values and produces acceptable results even when the Cr is really big. As a conclusion, MOC-CS-Saulyeu method can be adapted in a simple way to solve different types of advection-diffusion problems efficiently.

Acknowledgments

A part of this paper was prepared by the first and fourth author, and presented orally at the 13th International Conference on Hydroinformatics (HIC2018). The authors would like to thank the anonymous reviewers and the editor for their contributions to our paper.

References

- [1] Srivastava, R., **Flow through open channels**, Oxford University Press, (2008).
- [2] Appadu, A. R., Numerical solution of the 1D advection-diffusion equation using standard and nonstandard finite difference schemes, **Journal of Applied Mathematics**, 2013, 1-14, (2013).
- [3] Price, H. S., Cavendish, J. C. and Varga, R. S., Numerical methods of higher-order accuracy for diffusion-convection equations, **Society of Petroleum Engineers**, 8, 3, 293-303, (1968).
- [4] Gurarlan, G., Karahan, H., Alkaya, D., Sari, M. and Yasar M., Numerical solution of advection-diffusion equation using a sixth-order compact finite difference method, **Mathematical Problems in Engineering**, 2013, 1-7, (2013).
- [5] Gurarlan, G., Accurate simulation of contaminant transport using high-order compact finite difference schemes, **Journal of Applied Mathematics**, 2014, 1-8, (2014).
- [6] Taigbenu, A. E. and Onyejekwe, O. O., Transient 1D transport equation simulated by a mixed green element formulation, **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, 25, 4, 437-454, (1997).
- [7] Mittal, R. C. and Jain, R. K., Numerical solution of convection-diffusion equation using cubic B-splines collocation methods with Neumann's boundary conditions, **International Journal of Applied Mathematics and Computation**, 4, 2, 115-127, (2012).
- [8] Goh, J., Majid, A. A. and Ismail, A. I. M., Cubic B-spline collocation method for one-dimensional heat and advection-diffusion equations, **Journal of Applied Mathematics**, 2012, 1-8, (2012).
- [9] Irk, D., Dag, I. and Tombul, M., Extended cubic B-spline solution of the advection-diffusion equation, **KSCE Journal of Civil Engineering**, 19, 4, 929-934, (2015).
- [10] Korkmaz, A. and Dag, I., Cubic B-spline differential quadrature methods for the advection-diffusion equation, **International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow**, 22, 8, 1021-1036, (2012).
- [11] Korkmaz, A. and Dag, I., Quartic and quintic B-spline collocation methods for advection-diffusion equation, **Applied Mathematics and Computation**, 274, 208-219, (2016).
- [12] Holly Jr., F. M. and Preissmann, A., Accurate calculation of transport in two dimensions, **Journal of Hydraulic Division**, 103, 11, 1259-1277, (1977).
- [13] Tsai, T.-L., Yang, J.-C. and Huang, L.-H., Characteristics method using cubic-spline interpolation for advection-diffusion equation, **Journal of Hydraulic Engineering**, 130, 6, 580-585, (2004).

- [14] Tsai, T.-L., Chiang, S.-W. and Yang, J.-C., Examination of characteristics method with cubic interpolation for advection-diffusion equation, **Computers and Fluids**, 35, 10, 1217-1227, (2006).
- [15] Nazir, T., Abbas, M., Ismail, A. I. M., Majid, A. A. and Rashid, A., The numerical solution of advection-diffusion problems using new cubic trigonometric B-spline approach, **Applied Mathematical Modelling**, 40, 4586-4611, (2016).
- [16] Dag, I., Canivar, A. and Sahin, A., Taylor-Galerkin method for advection-diffusion equation, **Kybernetes**, 40, 5/6, 762-777, (2011).
- [17] Zhou, J. G., A lattice Boltzmann method for solute transport, **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, 61, 848-863, (2009).
- [18] Bak, S., Bu, S. and Kim, P., **An Efficient Backward Semi-Lagrangian Scheme for Nonlinear Advection-diffusion Equation**, World Academy of Science, Engineering and Technology International Journal of Mathematical and Computational Sciences, 8, 8, (2014).
- [19] Hundsdorfer, W. and Verwer, J., **Numerical solution of time-dependent advection-diffusion-reaction equations**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2003).
- [20] Bahar, E., Numerical solution of advection-dispersion equation using operator splitting method, MSc Thesis, Pamukkale University, (in Turkish) (2017).
- [21] Bahar, E., and Gurarslan, G., Numerical solution of advection-diffusion equation using operator splitting method, **International Journal of Engineering and Applied Sciences**, 9, 4, 76-88, (2017).
- [22] Osterby O., Bieniasz L. K. and Britz D., Numerical stability of the Saul'yev Finite Difference Algorithms for Electrochemical Kinetic Simulation: Matrix Stability Analysis for an Example Problem Involving Mixed Boundary Conditions, **Computers and Chemistry**, 19, 4, 357-370, (1995).
- [23] Szymkiewicz, R., Solution of the advection-diffusion equation using the spline function and finite elements. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, 9, 197–206, (1993).
- [24] Sankaranarayanan, S., Shankar, N. J. and Cheong, H. F., Three-dimensional finite difference model for transport of conservative pollutants, **Ocean Engineering**, 25, 6, 425-442, (1998).
- [25] Gardner, L.R.T. and Dag, I., A numerical solution of the advection-diffusion equation using b-spline finite element, **Proceedings International AMSE Conference**, 109-116, Lyon, France, (1994).
- [26] Dag, I., Irk, D. and Tombul, M., Least-squares finite element method for the advection-diffusion equation, **Applied Mathematics and Computation**, 173, 1, 554–565, (2006).

Numerical solution and stability analysis of transient MHD duct flow

Münevver TEZER-SEZGİN^{1,*}, Merve GÜRBÜZ²

¹ Department of Mathematics, Middle East Technical University, Ankara, Turkey

² Department of Management, Başkent University, Ankara, Turkey

Geliş Tarihi (Received Date): 02.08.2018

Kabul Tarihi (Accepted Date): 24.10.2018

Abstract

This paper simulates the 2D transient magnetohydrodynamic (MHD) flow in a rectangular duct in terms of the velocity of the fluid and the induced magnetic field by using the radial basis function (RBF) approximation. The inhomogeneities in the Poisson's type MHD equations are approximated using the polynomial functions $(1+r)$ and the particular solution is found satisfying both the equations and the boundary conditions (no-slip and insulated walls). The Euler scheme is used for advancing the solution to steady-state with a time increment and a relaxation parameter which are determined for achieving stable solution. It is shown that, as Hartmann number increases, the fluid becomes stagnant at the center of the duct, the flow is flattened and boundary layers are developed on the Hartmann and side walls. These are the well-known characteristics of the MHD duct flow. The stability analysis is also carried in terms of the spectral radius of the coefficient matrix of the discretized coupled system. Stable solutions are obtained with RBF by using quite large time increment and suitable relaxation parameters on the expense of explicit Euler time-integration scheme used.

Keywords: MHD duct flow, RBF, Euler time-integration, stability.

Zamana bağımlı MHD kanal akışının nümerik çözümü ve kararlılık analizi

Özet

Bu çalışmada, dikdörtgen kesit içerisindeki iki boyutlu zamana bağlı olan MHD akışı, sıvının hızı ve indüklenen manyetik alan cinsinden radyal baz fonksiyon yaklaşımı kullanılarak sunulmuştur. Poisson tipinde olan MHD denklemlerindeki homojen olmayan kısımlar, polinom fonksiyonları $(1+r)$ ile yaklaşılmıştır ve hem denklemleri

* Münevver TEZER-SEZGİN, munt@metu.edu.tr, <https://orcid.org/0000-0001-5439-3477>

Merve GÜRBÜZ, mervegurbuz@baskent.edu.tr, <https://orcid.org/0000-0002-7746-9005>

hem de kaymaz ve iletken olmayan sınır koşullarını sağlayan özel bir çözüm bulunmuştur. Euler yöntemi, kararlı çözümü veren zaman aralığı ve yumuşama katsayıları ile kullanılmıştır. Hartmann sayısı arttıkça sıvının kanal ortasında durgunlaştığı, akışın düzleştiği, Hartmann ve yan duvarlardaki sınır tabakalarının geliştiği gösterilmiştir. Bunlar MHD kanal akışının en iyi bilinen özellikleridir. Ayrıca, kararlılık analizi, ayrıştırılmış birbirine bağlı olan sistemdeki katsayı matrisinin spektral yarıçapı doğrultusunda yapılmıştır. Açık Euler zaman integrasyonu yöntemi kullanılmasına rağmen RBF ile oldukça geniş zaman aralığı ve uygun yumuşama parametreleri kullanılarak kararlı çözümler elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler: MHD kesit akışı, RBF, Euler zaman integrasyonu, kararlılık analizi.

1. Introduction

The study of magnetohydrodynamic (MHD) flow in channels has many industrial applications such as MHD generators, MHD flowmeters, nuclear reactors and electromagnetic pumps. The MHD equations, governed by the Navier-Stokes equations and Maxwell equations of electromagnetism through Ohm's law have been solved by several numerical methods. Tezer-Sezgin et al. [1] considered the steady MHD flow in a rectangular duct with arbitrarily conducting walls. The numerical results are obtained by using boundary element method (BEM) for moderate values of Hartmann number ($1 \leq M \leq 10$). Dual reciprocity boundary element method (DRBEM) is implemented to solve MHD duct flow with insulating boundary in [2]. The right hand side function is approximated by using osculating radial basis functions (RBF). Tezer-Sezgin [3] proposed the polynomial and Fourier based differential quadrature method (DQM) for solving the steady MHD flow under the effect of a transverse external oblique magnetic field. The numerical results are presented in terms of velocity and induced magnetic field for several values of Hartmann number. In the references [4, 5], BEM is employed to solve MHD flow for large values of Hartmann number ($M \leq 300$). Carabineau et al. [6] developed the pseudospectral collocation method for obtaining numerical solution of MHD flow in the cross-section of square and circular ducts. An exponential higher-order compact (EHO) difference scheme is applied for solving coupled MHD equations for several values of Hartmann number by Li et al. [7].

The unsteady two-dimensional MHD flows in channels are also studied. Bozkaya et al. [8] solved transient MHD flow problem in a rectangular duct with insulating walls by using DRBEM in space and DQM in time. They found that as Hartmann number increases, the steady-state solutions are reached at a faster rate. In the work [9], the numerical results for the unsteady MHD duct flow with arbitrarily conducting walls are obtained by using a meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method. Dehghan [10] implemented the method of variably scaled radial kernels to solve MHD flow for different geometries of the duct cross-section. The Crank-Nicolson scheme and the method of lines (MOL) are used for the time discretization.

The stability analysis of the BEM solution of the Diffusion equation is studied by Sharp in [11]. It is observed that as the time step decreases, the quality of the approximation deteriorates showing the state of the instability. Ramesh [12] et al. performed the stability

analysis of unsteady heat conduction flow by using the eigenvalue decomposition of the coefficient matrix of the multiple reciprocity discretized system.

In this study, the unsteady MHD flow in a rectangular duct with insulating walls is solved by using the RBF approximation in space and Euler scheme in time. The effect of the magnetic field on the velocity and the induced magnetic field is investigated. It is found that, the increase in the Hartmann number develops the boundary layers which is the well-known behavior of the MHD duct flow. The numerical stability analysis is carried for the RBF approximation of the time-dependent convection-diffusion type MHD flow equations when the explicit Euler time integration scheme is used with relaxation parameters. The numerical stability of the velocity and the induced magnetic field is shown in terms of maximum eigenvalues of the discretized coefficient matrices which is the main contribution of this study. The optimal choices of the time increment, relaxation parameter for certain values of the Hartmann number are found numerically to achieve stable solutions. It is observed that the numerical results are stable for the choice of relaxation parameter in the range $0.5 \leq \alpha_{u_1} < 1$ for all $M \leq 100$.

2. The physical problem and mathematical formulation

The unsteady, laminar, fully-developed flow of a viscous, incompressible, electrically conducting fluid is considered in a square duct $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$. The fluid is driven by a constant applied pressure gradient in the pipe-axis (z -axis) direction and the flow is subjected to a uniform magnetic field in the y -direction. The non-dimensional coupled MHD duct flow equations [13] are given in terms of the velocity $V(x, y, t)$ and the induced magnetic field $B(x, y, t)$ as

$$\nabla^2 V + M \frac{\partial B}{\partial y} = -1 + \frac{\partial V}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla^2 B + M \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial t} \quad (2)$$

In $\Omega \times [0, \infty)$ with zero initial, and no-slip insulated walls boundary conditions shown in Figure 1,

$$V(x, y, 0) = B(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (3)$$

$$V(x, y, t) = B(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad t \geq 0 \quad (4)$$

where $M = B_0 L \sqrt{\sigma/\nu\rho}$ is the Hartmann number. Here, L, B_0, σ, ν and ρ are the characteristic length, the external magnetic field intensity, electrical conductivity, kinematic viscosity and the density of the fluid, respectively.

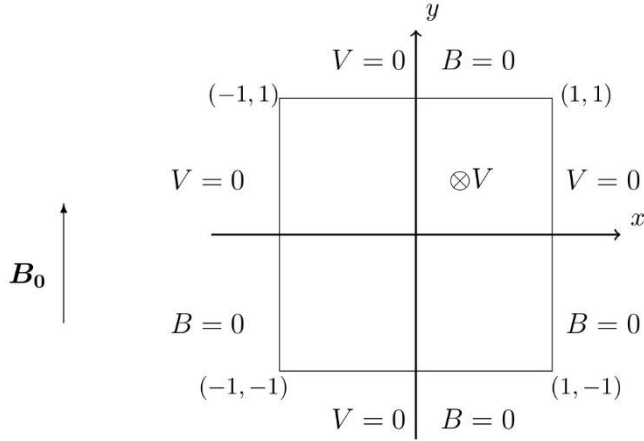


Figure 1. Square duct and boundary conditions.

The decoupled form of the MHD flow equations (1)-(2) is obtained

$$\nabla^2 U_1 + M \frac{\partial U_1}{\partial y} = -1 + \frac{\partial U_1}{\partial t} \quad (5)$$

$$\nabla^2 U_2 - M \frac{\partial U_2}{\partial y} = -1 + \frac{\partial U_2}{\partial t} \quad (6)$$

with the initial and boundary conditions

$$U_1(x, y, 0) = U_2(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (7)$$

$$U_1(x, y, t) = U_2(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad t \geq 0 \quad (8)$$

by the change of variables

$$U_1 = V + B, \quad U_2 = V - B. \quad (9)$$

3. Radial basis function approximation (RBF)

The decoupled convection-diffusion type MHD flow equations (5) and (6) can be considered as Poisson's type when all the terms except Laplacian are taken as inhomogeneity. Thus, the RBF method is described on the Poisson's type equation

$$\nabla^2 u = h(x, y) + \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, y, t) \text{ with the boundary condition } Bu = g(x, y, t) \text{ where } h(x, y) = -1 - \frac{\partial U_1}{\partial y} \text{ and } h(x, y) = -1 + \frac{\partial U_2}{\partial y}, \text{ respectively for equations (5) and (6).}$$

The boundary operator B is given identity ($B=I$) and $g(x, y, t) = 0$. The inhomogeneity function $f(x, y, t)$ and the particular solution $u(x, y, t)$ are approximated by the radial basis functions $\varphi_j(r)$ and $\Psi_j(r)$ as

$$f(x, y, t) = \sum_{j=1}^n a_j(t) \varphi_j(r), \quad u(x, y, t) = \sum_{j=1}^n a_j(t) \Psi_j(r), \quad (x, y) \in \Omega \quad (10)$$

where $\nabla^2\Psi_j(r) = \varphi_j(r)$, $r = ((x - x_j)^2 + (y - y_j)^2)^{1/2}$ being the Euclidean distance and n is the number of unknown coefficients. In this method [14], the approximate particular solution u becomes the solution of the original equation satisfying the boundary condition

$$\sum_{j=1}^n a_j(t)B\Psi_j(r) = g(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial\Omega. \quad (11)$$

Discretizing the boundary and the domain by taking N_b boundary and N_i interior points, we get the solution vector $\mathbf{u} = \mathbf{U}\mathbf{a}$ where $U_{ij} = \Psi_j(r_i)$, $1 \leq i, j \leq n$ and the unknown vector \mathbf{a} , depending on time, is the solution of the linear system $\mathbf{C}\mathbf{a} = \mathbf{d}$ obtained from the collocation of the equations (10)-(11). The nonsingular coefficient matrix $\mathbf{C}_{n \times n}$ [15] and the right hand side vector $\mathbf{d}_{n \times 1}$ are given as

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} B\Psi_1(r_1) & B\Psi_2(r_1) & \cdots & B\Psi_n(r_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B\Psi_1(r_{N_b}) & B\Psi_2(r_{N_b}) & \cdots & B\Psi_n(r_{N_b}) \\ \varphi_1(r_{N_b+1}) & \varphi_2(r_{N_b+1}) & \cdots & \varphi_n(r_{N_b+1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(r_n) & \varphi_2(r_n) & \cdots & \varphi_n(r_n) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} g(x_1, y_1, t) \\ \vdots \\ g(x_{N_b}, y_{N_b}, t) \\ f(x_{N_b+1}, y_{N_b+1}, t) \\ \vdots \\ f(x_n, y_n, t) \end{bmatrix}.$$

The solution $\mathbf{u} = \mathbf{U}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{d}$ can be rearranged as partitioning the contributions coming from the boundary condition and interior solution [16]

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}_u + \mathbf{K}\mathbf{f} \quad (12)$$

where $\mathbf{f} = \{f_i\} = \{h_i\} + \left\{\frac{\partial u_i}{\partial t}\right\}$, $1 \leq i \leq N_b + N_i$, $\mathbf{g}_u = \mathbf{R}_1\mathbf{u}_{bc}$ and $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{R}_2 \end{bmatrix}$.

Here, \mathbf{R}_1 and \mathbf{R}_2 are the submatrices of $\mathbf{U}\mathbf{C}^{-1}$ as $\mathbf{U}\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_2 \end{bmatrix}$, and \mathbf{u}_{bc} is the vector containing boundary values of the solution \mathbf{u} .

The application of the RBF approximation to unsteady MHD duct flow equations (5)-(6) gives

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{g}_{u_1} - \mathbf{M}\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{U}_1 - \mathbf{K}\mathbf{l} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial t} \quad (13)$$

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{g}_{u_2} + \mathbf{M}\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{U}_2 - \mathbf{K}\mathbf{l} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial t} \quad (14)$$

where \mathbf{F} is the coordinate matrix constructed from $F_{ij} = \varphi_j(r_i)$ and $l_{ij} = 1$, $1 \leq i, j \leq n$.

The explicit Euler method is used for the time derivatives in the equations (13)-(14) with the relaxation parameters α_{u_1} and α_{u_2} , we obtain the final discretized system for the unsteady MHD duct flow equations

$$\mathbf{C}_{u_1} \mathbf{U}_1^{(m+1)} = \mathbf{b}_{u_1}^{(m)} - \mathbf{L}_{u_1} \mathbf{U}_1^{(m)} \quad (15)$$

$$\mathbf{C}_{u_2} \mathbf{U}_2^{(m+1)} = \mathbf{b}_{u_2}^{(m)} - \mathbf{L}_{u_2} \mathbf{U}_2^{(m)} \quad (16)$$

where

$$\mathbf{C}_{u_1} = \alpha_{u_1} \mathbf{S}_{u_1} - \frac{1}{\Delta t} \mathbf{K}, \quad \mathbf{L}_{u_1} = (1 - \alpha_{u_1}) \mathbf{S}_{u_1} - \frac{1}{\Delta t} \mathbf{K},$$

$$\mathbf{C}_{u_2} = \alpha_{u_2} \mathbf{S}_{u_2} - \frac{1}{\Delta t} \mathbf{K}, \quad \mathbf{L}_{u_2} = (1 - \alpha_{u_2}) \mathbf{S}_{u_2} - \frac{1}{\Delta t} \mathbf{K},$$

$$\mathbf{S}_{u_1} = \mathbf{I} + \mathbf{MK} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{F}^{-1}, \quad \mathbf{S}_{u_2} = \mathbf{I} - \mathbf{MK} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{F}^{-1},$$

$$\mathbf{b}_{u_1} = \mathbf{g}_{u_1} - \mathbf{Kl}, \quad \mathbf{b}_{u_2} = \mathbf{g}_{u_2} - \mathbf{Kl}.$$

The iteration continues until the stopping criteria $\|\mathbf{z}^{(m+1)} - \mathbf{z}^{(m)}\|_{\infty} < 10^{-6}$ is satisfied for reaching steady-state where \mathbf{z} denotes \mathbf{U}_1 and \mathbf{U}_2 for the solutions of (15) and (16), respectively. The solutions, the velocity and the induced magnetic field are obtained from the back transformation $\mathbf{V} = (\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2)/2$ and $\mathbf{B} = (\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2)/2$. In the equations (15)-(16), the vectors $\mathbf{b}_{u_1}^{(m)}$ and $\mathbf{b}_{u_2}^{(m)}$ are known and do not contribute to the stability analysis. Thus, the stability conditions for the RBF space – Euler time discretized system of MHD duct flow equations are [12]

$$\rho(\mathbf{C}_{u_1}^{-1} \mathbf{L}_{u_1}) < 1 \quad (17)$$

$$\rho(\mathbf{C}_{u_2}^{-1} \mathbf{L}_{u_2}) < 1 \quad (18)$$

where $\rho(\mathbf{C}_{u_1}^{-1} \mathbf{L}_{u_1})$ and $\rho(\mathbf{C}_{u_2}^{-1} \mathbf{L}_{u_2})$ are the spectral radius of the matrices $\mathbf{C}_{u_1}^{-1} \mathbf{L}_{u_1}$ and $\mathbf{C}_{u_2}^{-1} \mathbf{L}_{u_2}$, respectively. These matrices differ only in the \pm sign of the matrices \mathbf{S}_{u_1} and \mathbf{S}_{u_2} .

4. Numerical results

In the RBF space discretization for the MHD duct flow equations (15)-(16), we use the polynomial function $\varphi = 1 + r$. In order to obtain smooth numerical results the boundary is discretized by taking $N_b=100, 156, 236$ and 336 points for the Hartmann number values $M=10, 30, 50$ and 100 , respectively, with the fixed time increment $\Delta t = 0.1$ and the relaxation parameters $\alpha_{u_1} = \alpha_{u_2} = 0.6$. Steady-state solutions of the velocity and the induced magnetic field are shown in terms of equivelocity and current lines in Figure 2. It is observed that velocity contours are symmetric with respect to center lines $x=0$ and

$y=0$. The flow attains its maximum value through the center of the duct making one vortex at the center. As the Hartmann number increases, fluid shows flattening tendency which is an expected behavior of the MHD duct flow. The increase in the magnetic field intensity develops the boundary layers for the flow near the walls with the thickness $O(1/M)$ on the Hartmann walls and $O(1/\sqrt{M})$ on the side walls.

Induced magnetic loops are anti-symmetric with respect to the centerline $y=0$. As M increases, boundary layers are also developed for induced magnetic field on the walls parallel to the applied magnetic field. The magnitude of the induced magnetic field decreases due to the convection dominance in the equation (2) as M increases.

In order to show that numerical results of MHD duct flow obtained from the RBF space-Euler time discretized systems (15)-(16) are stable, the spectral radius (maximum eigenvalue in magnitude) of the coefficient matrices $C_{u_1}^{-1}L_{u_1}$ and $C_{u_2}^{-1}L_{u_2}$ are computed for several values of the time increment Δt , relaxation parameters $\alpha_{u_1} = \alpha_{u_2}$ and the Hartmann number M . The maximum eigenvalues in magnitude ($\rho = \max_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j|$) are presented in Tables 1-2.

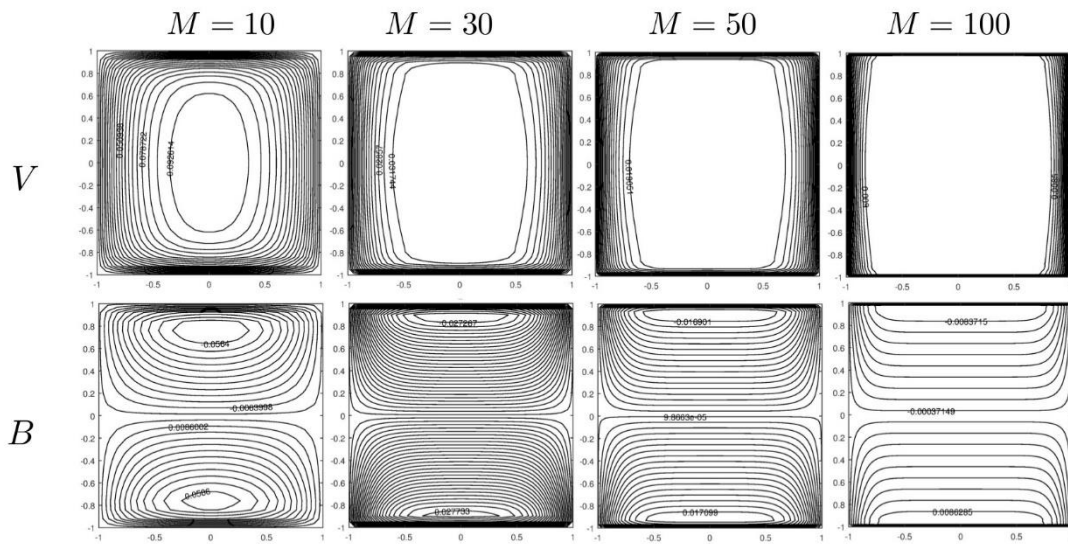


Figure 2. Velocity and induced magnetic field contours for $\Delta t = 0.1$.

Table 1 shows the effects of the relaxation parameters and the time increment on the spectral radius of the coefficient matrices $C_{u_1}^{-1}L_{u_1}$ or $C_{u_2}^{-1}L_{u_2}$ for a fixed Hartmann number $M=1$ and $N_b=100$. It is found that as relaxation parameter decreases, the maximum eigenvalue increases and for the choice of $\alpha_{u_1} \leq 0.5$ the method becomes unstable. This is an expected result since Euler method with a relaxation parameter tends to be explicit scheme with the small value of α_{u_1} ($u^{(m+1)} = (1 - \alpha_{u_1})u^{(m)} - \alpha_{u_1}u^{(m)}$, u representing U_1 and U_2 in (15) and (16), respectively). As Δt decreases, spectral radius increases but still does not exceed 1 for $0.6 \leq \alpha_{u_1} < 1$.

Table 1. Spectral radius ρ for $N_b=100$, $M=1$.

$\alpha \backslash \Delta t$	0.9	0.8	0.5	0.1	0.01
0.9	0.111	0.124	0.222	0.646	0.950
0.8	0.250	0.250	0.250	0.633	0.950
0.7	0.429	0.429	0.429	0.620	0.950
0.6	0.667	0.667	0.667	0.667	0.950

In Table 2, the maximum eigenvalues are obtained for different values of M and Δt with a fixed $\alpha_{u_1} = 0.9$. An increase in the Hartmann number decreases the spectral radius of the coefficient matrix. The variation of $M \geq 5$ gives always the same eigenvalue which is less than one for the choice of $\Delta t \leq 0.5$. This shows that for large values of Hartmann number one does not require smaller time increment to achieve stable solution.

Table 2. Spectral radius ρ for $\alpha_{u_1} = 0.9$.

Δt	$M=1$	$M=5$	$M=10$	$M=50$	$M=100$
0.01	0.950	0.898	0.771	0.266	0.111
0.1	0.646	0.443	0.197	0.111	0.111
0.5	0.222	0.111	0.111	0.111	0.111
0.8	0.124	0.111	0.111	0.111	0.111
0.9	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111

5. Conclusion

In this study, the RBF approximation is developed for solving the equations of unsteady MHD flow in a rectangular duct with insulating walls. The Euler scheme with a relaxation parameter is used for the time integration in the MHD equations. The impact of the external magnetic field is analyzed on the behaviors of the flow and the induced magnetic field by simulating equivelocity and equal current lines. Numerical results show that as the Hartmann number increases, boundary layers are formed and the flow is flattened. Numerical stability analysis of RBF space - Euler time approximation is also performed in terms of spectral radius of related coefficient matrices of the discretized system. It is found that quite large time increment can be used for achieving stable numerical results when suitable relaxation parameters are used for a certain Hartmann number.

References

- [1] Tezer-Sezgin, M. and Dost, S., Boundary element method for MHD channel flow with arbitrary wall conductivity, **Applied Mathematical Modelling**, 18, 429-436, (1994).

- [2] Tezer-Sezgin, M. and Aydın Han, S., Dual reciprocity boundary element method for magnetohydrodynamic flow using radial basis functions, **International Journal of Computational Fluid Dynamics**, 16, 49-63, (2002).
- [3] Tezer-Sezgin, M., Solution of magnetohydrodynamic flow in a rectangular duct by differential quadrature method, **Computers and Fluids**, 33, 533-547, (2004).
- [4] Tezer-Sezgin, M. and Aydın Han, S., Solution of magnetohydrodynamic flow problems using the boundary element method, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 30, 411-418, (2006).
- [5] Bozkaya, C. and Tezer-Sezgin, M., Fundamental solution for coupled magnetohydrodynamic flow equations, **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 203, 125-144, (2007).
- [6] Carabineanu, A. and Lungu, E., Pseudospectral method for MHD pipe flow, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 68, 173-191, (2006).
- [7] Li, Y. and Tian, Z.F., An Exponential compact difference scheme for solving 2D steady magnetohydrodynamic (MHD) duct flow problems, **Journal of Computational Physics**, 231, 5443-5468, (2012).
- [8] Bozkaya, C. and Tezer-Sezgin, M., Boundary element solution of unsteady magnetohydrodynamic duct flow with differential quadrature time integration scheme, **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, 51, 567-584, (2006).
- [9] Dehghan, M. and Mirzaei, D., Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) method for the unsteady magnetohydrodynamic (MHD) flow through pipe with arbitrary wall conductivity, **Applied Numerical Mathematics**, 59, 1043-1058, (2009).
- [10] Dehghan, M. and Mohammadi, V., The method of variably scaled radial kernels for solving two-dimensional magnetohydrodynamic (mhd) equations using two discretizations: the Crank-Nicolson scheme and the method of lines, **Computers and Mathematics with Applications**, 70, 2292-2313, (2015).
- [11] Sharp, S., Stability analysis for boundary element methods for diffusion equation, **Applied Mathematical Modelling**, 10, 41-48, (1986).
- [12] Ramesh, P.S. and Lean, M.H., Stability of the multiple reciprocity method for transient heat conduction, **Communication in Numerical Methods in Engineering**, 9, 629-634, (1993).
- [13] Dragos, L., **Magneto-fluid Dynamics**. 2nd ed. Abacus Press, England, (1975).
- [14] Chen, C.S., Fan, C.M. and Wen, P.H., The method of approximate particular solutions for solving certain partial differential equations, **Numerical Methods for Partial Differential Equations**, 28, 506-522, (2012).
- [15] Buhmann M.D., **Radial Basis Functions: Theory and Implementations**. 1st ed. Cambridge University Press, UK, (2004).
- [16] Gürbüz, M., Radial basis function and dual reciprocity boundary element solutions of fluid dynamics problems, Doctoral Thesis, Middle East Technical University, Graduate School of Natural and Applied Sciences, Ankara, (2017).

Marmara Bölgesi'ndeki bazı mermer örneklerinde radyolojik tehlikelerin ve yaşam boyu kanser riskinin değerlendirilmesi

Kadir GÜNOĞLU*

Isparta Uygulamalı Bilimler Üniversitesi, Teknik Bilimler Meslek Yüksekokulu, Isparta.

Geliş Tarihi (Received Date): 16.08.2018

Kabul Tarihi (Accepted Date): 18.10.2018

Özet

Bu çalışmada, Marmara Bölgesi'nden çıkarılan bazı mermerlerdeki doğal radyoaktivite seviyelerini belirlemek için ^{226}Ra , ^{232}Th ve ^{40}K konsantrasyonları gama spektrometre sistemi ile ölçülmüştür. Mermer numunelerindeki ^{226}Ra , ^{232}Th ve ^{40}K ortalama aktivite konsantrasyonları, sırasıyla 37.446, 34.593 ve 248.041 Bq / kg olarak ölçülmüştür. Ölçümler sonucunda elde edilen ^{226}Ra , ^{232}Th , ^{40}K aktivite konsantrasyonları kullanılarak soğurulan gama doz hızı (D), yıllık etkin doz eşdeğeri (YEDE), radyum eşdeğer aktivitesi (Ra_{eq}), iç tehlike endeksi (Hi) ve dış tehlike endeksi (Hd) değerleri hesaplanmıştır. Bunların yanı sıra, radyasyon maruziyetinin bir sonucu olan yaşam boyu kanser riski (LCR) hesaplanmıştır. Elde edilen tüm sonuçlar uluslararası kuruluşlar tarafından önerilen limit değerler ile karşılaştırılmıştır. Bu sonuçlara göre, hem radyolojik zarar indeksleri açısından hem de doz parametreleri açısından hiç bir zarar teşkil etmediği sonucuna varılabilir.

Anahtar kelimeler: Doğal radyoaktivite, radyolojik tehlike, yaşam boyu kanser riski, mermer.

Assessment of radiological hazards and lifetime cancer risk in some marble samples from the Marmara Region

Abstract

In this study, ^{226}Ra , ^{232}Th and ^{40}K concentrations were measured by gamma spectrometry system to determine the natural radioactivity levels in some marbles mining from the Marmara Region. Mean activity concentrations of ^{226}Ra , ^{232}Th and ^{40}K in marble samples were measured as 37.446, 34.593 and 248.041 Bq / kg, respectively.

* Kadir GÜNOĞLU, kadirgunoglu@sdu.edu.tr, <https://orcid.org/0000-0002-9008-9162>

The absorbed dose rate (D), annual effective dose equivalent (YEDE), radium equivalent activity (Ra_{eq}), internal hazard index (Hi) and external hazard index (Hd) values were calculated using the ²²⁶Ra, ²³²Th, ⁴⁰K activity concentrations obtained as a result of the measurements. In addition, lifetime cancer risk (LCR), which is a consequence of radiation exposure, has been calculated. All the results obtained are compared with the limit values recommended by international organizations. According to these results, it can be concluded that there is no harm in terms of both radiological damage indices and dose parameters.

Keywords: *Natural radioactivity, radiological hazard, lifetime cancer risk, marble.*

1. Giriş

Dünyanın varoluşundan bu yana yeryüzünde yaşayan tüm canlılar doğal ve yapay radyasyona maruz kalmaktadırlar. Tüm yapı malzemeleri çoğunlukla kaya ve topraktan oluşur ve bu iki hammadde, doğal radyasyona sebep olan ²³²Th ve ²³⁸U bozunma serileri ve ⁴⁰K doğal radyoaktif izotoplar içerir. Gama radyasyonu, ⁴⁰K ve ²³²Th ve ²³⁸U serilerinden gelen radyonüklidler gibi doğal olarak oluşan radyoizotoplardan ve bunların tüm zemin oluşumlarında eser seviyelerinde bulunan bozunma ürünlerinden (karasal zemin radyasyonu olarak da adlandırılır) yayılır. Daha spesifik olarak, gama radyasyonuna bağlı doğal çevresel radyoaktivite, öncelikle çalışma yapılan bölgenin jeolojisine ve coğrafi koşullarına bağlıdır. Bu nedenle dünyanın her bölgesinde doğal radyoaktivite seviyelerinde farklılıklar gözlenebilir [1,2].

Yapı malzemelerindeki doğal radyonüklitler, hem doğrudan gama ışımından dış maruziyete hem de radon gazından kaynaklanan iç maruziyete neden olabilir. Duvarlardan, katlardan ve tavanlardan kaynaklanan gama radyasyonu, Radon, Thoron ve bunların bozunma ürünleri radyasyon maruziyetinin başlıca kaynaklarıdır. Yapı malzemelerinden gama ışınlarının neden olduğu kapalı etkn dozun dünya çapında ortalama yılda yaklaşık 0.4 m Sv olduğu tahmin edilmektedir [3]. Bireyler zamanlarının % 80'inden fazlasını bina içlerinde geçirdikleri için yapı malzemelerinden kaynaklanan iç ve dış radyasyona uzun süreli maruz kalma durumları yaratır.

Yapı malzemeleri doğal radyonüklid içerikleri nedeniyle iç mekânlarda önemli bir gama dozuna neden olabilir. Binalarda özellikle döşeme ve dekoratif amaçla granit, seramik fayans, mermerler vb. malzemelerin kullanımı dünya genelinde giderek artmaktadır [4]. Konut yapımında kullanılan bu tip malzemelerde bulunan doğal radyoaktivite miktarının bilinmesi önemlidir. Doğal olarak oluşan materyallerde aktivite konsantrasyonlarının belirlenmesi için bir dizi radyoanalitik yöntem kullanılabilir. Gama ışını spektrometreleri bu amaç için yaygın olarak kullanılmaktadır.

Dünya çapında yapılan çalışmalarda bazı taş ve yapı malzemelerindeki ²²⁶Ra, ²³²Th ve ⁴⁰K aktivite konsantrasyonları Bq/kg birimlerinde ölçülmüştür. Sağlık risklerini belirlemek için çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Ayrıca bu çalışmalarda, UNSCEAR raporlarından elde edilen (nGy/h)/(Bq/kg) birimlerine göre dönüşüm faktörleri ve doğal radyonüklid konsantrasyonları kullanılarak malzemenin neden olduğu çeşitli tehlike indeksleri ve doz oranları değerleri hesaplanmıştır [5-18].

Bu çalışmada, Türkiye'nin Marmara Bölgesi'nden toplanan 7 adet mermer örneğinin doğal radyoaktivite seviyelerini belirlemek için ^{226}Ra , ^{232}Th ve ^{40}K konsantrasyonları gama spektrometre sistemi ile ölçülmüştür. Bu çalışmanın diğer bir amacı, ölçülen aktivite konsantrasyonlarından yararlanarak soğrulan gama doz hızını (D), Yıllık Etkin Doz Eşdeğeri (YEDE), radyum eşdeğer aktivitesini (Raeq), iç tehlike endeksi (Hi) ve dış tehlike endeksi (Hd) parametreleri hesaplanarak radyolojik tehlikelerin araştırılmasıdır. Ayrıca, doğal olarak maruz kalınan radyasyonun sebep olduğu yaşam boyu kanser riski tespit edilmesi de amaçlanmıştır. Bu çalışmada üretilen veriler, bu alan için doğal radyoaktivite düzey veri tabanına katkıda bulunabilir.

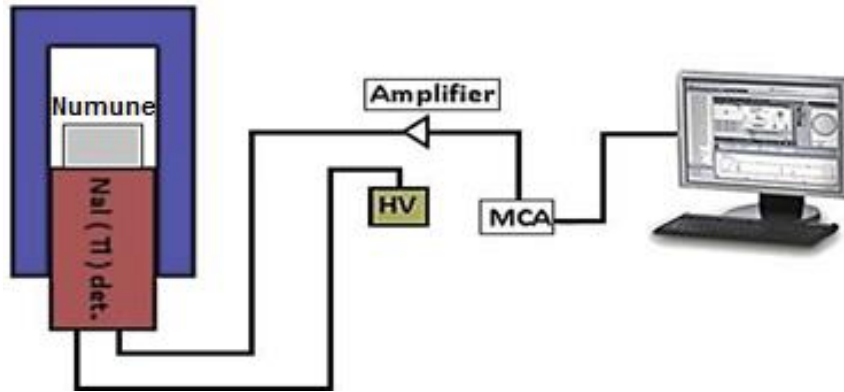
2. Deneysel çalışmalar

Bu çalışmada, Türkiye Marmara Bölgesi'nde bulunan Balıkesir ilinden Marmara Adası, Marmara Gri, ve Yakamoz Kahve olmak üzere 3 adet, Bursa ilinden Crema Bello ve Rosalya Light olmak üzere 2 adet ve Bilecik ilinden Bilecik Rosalya ve Crema Nuova olmak üzere 2 adet, toplamda 7 mermer örneği toplanmıştır.

Toplanan örnekler ölçüm öncesinde bir dizi hazırlık aşamasından geçirilmiştir. Öncelikle örnekler öğütülerek toz haline getirilmiştir. Toz haline getirilen örnekler neminden arındırılmak amacıyla 24 saat boyunca $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ ' de kurutulmuştur. Kurutulmuş numuneler, herhangi bir gaz kaçağını engellemek için kapakları sıkıca kapatılmış kaplar içerisine doldurulmuştur.

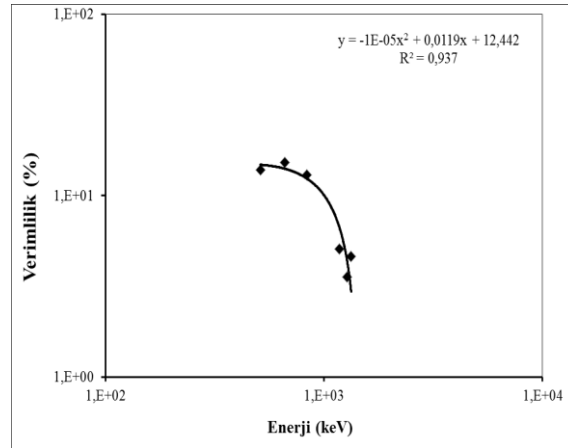
^{238}U 'un bozunum zinciri içerisinde bulunan uzun yarı ömürlü ^{226}Ra 'nın yarı ömrü kendisinden daha kısa olan ^{222}Rn ile seküler bir denge içerisinde olması gerekmektedir. Bu nedenle hazırlanmış olan numunelerin ölçümlerine başlamadan önce seküler dengesinin sağlanabilmesi için 30 gün süreyle bekletilmiştir.

Mermer numunelerindeki ^{226}Ra , ^{232}Th ve ^{40}K radyoaktivite konsantrasyonları Süleyman Demirel Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik bölümü Gama Spektroskopi laboratuvarında bulunan Çok-Kanalı Analizöre (MCA) bağlı 3"x3" NaI (TI) detektöründen oluşan bir gama spektrometresi kullanılarak ölçülmüştür [19,20]. Ölçümler sonucunda elde edilen spektrumlar MAESTRO-32 yazılımı kullanılarak analiz edilmiştir. Ölçüm sisteminin şematik görünümü Şekil 1'de gösterilmiştir.



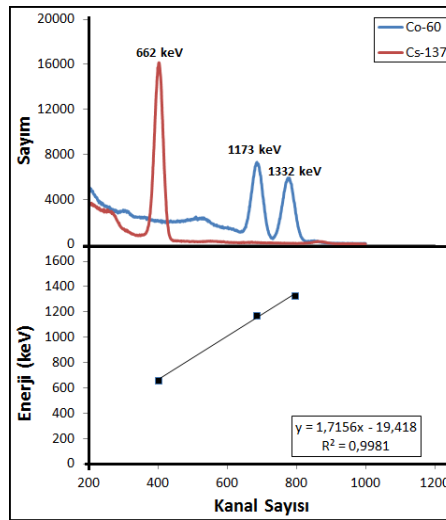
Şekil 1. Gama Spektrometre sistemi ve elektronik birimlerin şematik görünümü.

Dedektörün algılama verimliliği kalibrasyonu için 6 farklı gama enerjisi kullanılarak yapılmıştır [21]. Elde edilen algılama verimliliği değerleri Şekil 2' de gösterilmiştir.



Şekil 2. Gama ışını enerjilerinin bir fonksiyonu olarak algılama verimliliği.

Ölçümden önce sistemin enerji kalibrasyonunu ve algılama verimliliği kalibrasyonunu gerçekleştirmek gerekir. Enerji kalibrasyonu için 662 keV enerjili γ -ışını yayınlayan ^{137}Cs ve 1173 ve 1332 keV enerjili γ -ışını yayınlayan ^{60}Co radyoaktif kaynakları kullanılmıştır. Söz konusu kaynaklardan elde edilen gama ışını spektrumu Şekil 3' de gösterilmektedir.



Şekil 3. ^{137}Cs ve ^{60}Co kaynaklarından elde edilen γ -ışını enerji spektrumu (üst) ve enerjiye (keV) karşılık gelen uygun kanal.

Mermer numunelerinin doğal radyonüklidlerin (^{226}Ra , ^{232}Th ve ^{40}K) aktivite konsantrasyonlarını belirlemek için aşağıdaki bağıntı kullanılmıştır [15].

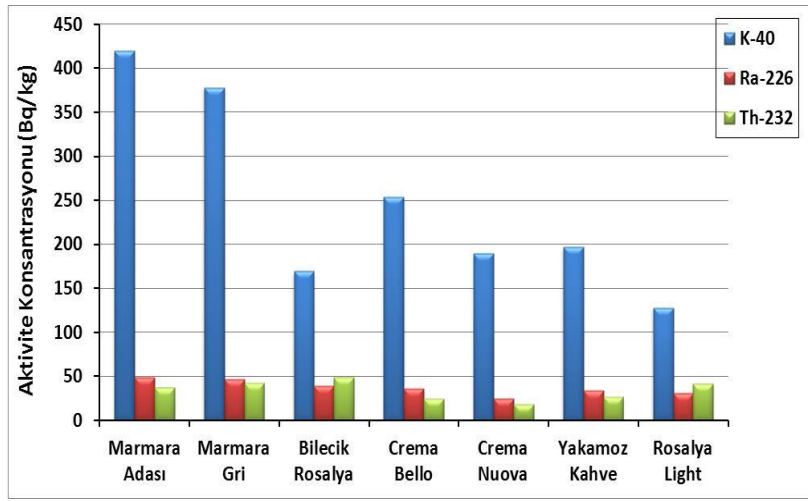
$$C(\text{Bq}/\text{kg}) = \frac{N_S - N_B}{E_\gamma \cdot P_\gamma \cdot t \cdot M_S} \quad (1)$$

Burada, NS, numune için ölçülen net pik sayımlarını, NB, background için ölçülen net pik sayımlarını, E γ spesifik γ -ışının detektör verimini, P γ γ -ışının emisyon olasılığını, t sayım zamanını ve MS numunenin kütlesini (kg) göstermektedir.

3. Sonuçlar ve tartışma

3.1. Aktivite konsantrasyonu sonuçları

Türkiye'nin Marmara Bölgesi'ndeki bazı mermerlerde ^{226}Ra , ^{232}Th ve ^{40}K aktivite konsantrasyonları ölçülmüştür. Ölçüm sonucunda elde edilen aktivite konsantrasyon sonuçları ^{226}Ra için 25.342–48.835 Bq/kg, ^{232}Th için 18.774–49.506 Bq/kg ve ^{40}K için 128.094–419.611 Bq/kg arasında değişmektedir. Elde edilen aktivite konsantrasyonu sonuçları Şekil 4' de gösterilmiştir.



Şekil 4. Mermer numunelerinin aktivite konsantrasyonları.

Tablo 1'de gösterildiği gibi ölçülen ^{226}Ra , ^{232}Th ve ^{40}K aktiviteleri, dünyanın farklı bölgelerindeki aktivite konsantrasyonları ve UNSCEAR 2000 raporlarında belirtilen dünya ortalaması ile karşılaştırılmıştır.

Tablo 1. Farklı bölgelerdeki aktiviteleri karşılaştırılması.

Bölge	Aktivite Konsantrasyonları (Bq/kg)			Referans
	^{226}Ra	^{232}Th	^{40}K	
Pakistan	33	32	57	[22]
Hindistan	25,88	42,82	560,6	[23]
Suudi Arabistan	28,82	34,83	665,08	[24]
Türkiye	15,85	33,8	359	[25]
İtalya	397	211	1265	[26]
Mısır	137	82	1082	[27]
Polonya	31-122	25-62	320-1200	[28]

Tablo 1. (Devamı).

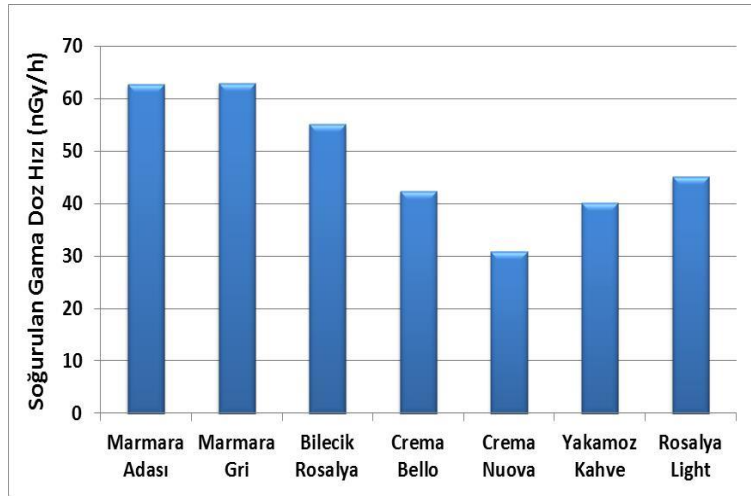
Ürdün	41,52	58,42	897	[29]
Filistin	71	82	780	[30]
Iran	77,4	44,5	1017,2	[31]
Bu çalışma	25.342 – 48.835	18.774 – 49.506	128.094 – 419.611	
Dünya Ortalaması	50	50	500	[3]

3.2. Soğurulan gama doz hızı (D)

Doğal olarak oluşan radyonüklitlerden (^{226}Ra , ^{232}Th ve ^{40}K) gelen karasal γ -ışınları nedeniyle, zemin yüzeyinden 1 m yüksekliğinde havada soğurulan gama doz hızı, UNSCEAR, 2000 raporlarında verilen kurallara göre hesaplanmaktadır [3]. Bu kurallara göre, ^{226}Ra için 0.462 nGy/saat, ^{232}Th için 0.604 nGy/saat ve ^{40}K için 0.042 nGy/saat dönüşüm faktörleri birim aktivite konsantrasyonu başına Bq/kg cinsinden havadaki soğurulan gama hızını hesaplamak için kullanılır. Buna göre, soğurulan gama doz hızı aşağıdaki bağıntı kullanılarak hesaplanabilir [3].

$$D \text{ (nGy/h)} = (0.462)C_{Ra} + (0.604)C_{Th} + (0.0417)C_K \quad (2)$$

Burada, C_{Ra} , C_{Th} ve C_K sırasıyla ^{226}Ra , ^{232}Th ve ^{40}K Bq/kg cinsinden spesifik aktivitelerdir. Soğurulan gama doz hızı sonuçları, Şekil 5'te gösterilmiştir.



Şekil 5. Soğurulan gama doz hızı (D).

Şekil 5' den görüldüğü gibi soğurulan gama doz hızı için hesaplanan en düşük değer Bilecik' ten çıkarılan numunesinde, en yüksek değer Balıkesir' den çıkarılan Marmara Gri numunesinde bulunmuştur. Soğurulan gama doz hızı sonuçlarına bakıldığında Marmara Adası, Marmara Gri ve Bilecik Rosalya numunelerinden elde edilen sonuçlar UNSCEAR, 2000 raporlarında verilen ortalama değer olan 55 nGy/saat ten yüksek çıktı ve diğer numunelerin bu ortalama değerden düşük olduğu görülmüştür.

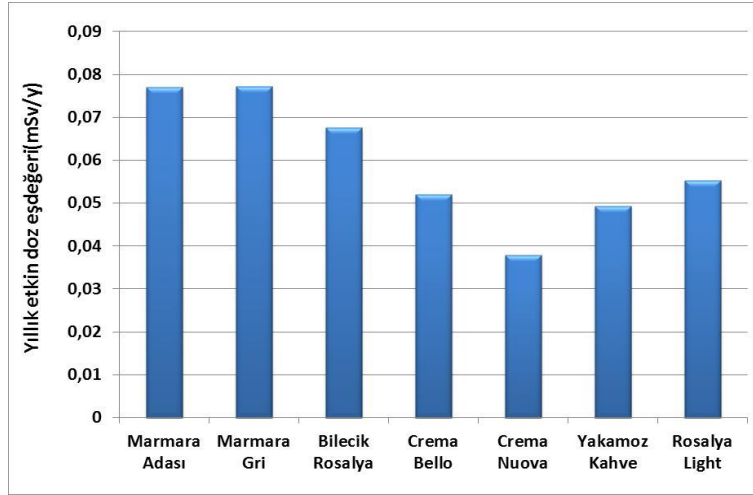
3.3. Yıllık etkin doz eşdeğeri (YEDE)

İnsanların yaşam alanları ve bu alanların çevresindeki sağlık etkilerinin belirlenmesi için yıllık etkin doz eşdeğeri (YEDE), soğurulan gama doz hızı kullanılarak hesaplanmaktadır. Yıllık etkin dozları hesaplamak için, soğurulan gama doz hızı,

yetişkinler tarafından alınan etkin doz oranı ve zaman geçirme faktörü kullanılır. UNSCEAR2000 raporlarına göre, etkin doz dönüşüm katsayısı (DDF) 0.7 Sv / Gy ve zaman geçirme faktörü (ZGF) 0.2'dir. Yıllık etkin doz eşdeğeri aşağıdaki denklemden hesaplanır [3]:

$$YEDE(mSv/y) = D(nGy/h) \times DDF \times ZGF \times T \quad (3)$$

Hesaplanan yıllık etkin doz eşdeğeri Şekil 6' da gösterilmiştir. Yıllık etkin doz eşdeğeri için elde edilen sonuçlar 0.038 ila 0.077 mSv/yıl arasında değiştiği görülmüştür. Ayrıca, YEDE için bulunan sonuçların hiçbirinin belirtilen 0,460 mSv/y sınır değerini aşmadığı açıktır.



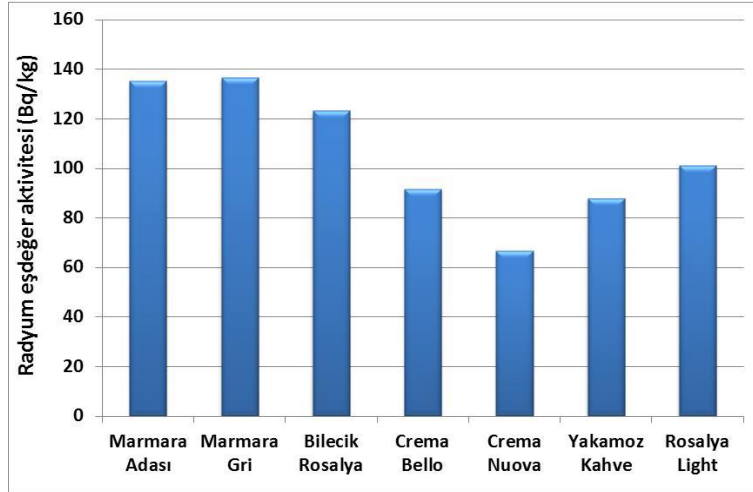
Şekil 6. Yıllık etkin doz eşdeğeri.

3.4. Radyum eşdeğer aktivitesi (Ra_{eq})

^{226}Ra ve bozunma ürünleri arasındaki radyoaktivite dengesizliğinden dolayı, materyallerdeki ^{40}K , ^{232}Th ve ^{226}Ra gibi doğal radyoaktif nüklitler homojen olmadığı için materyallerde farklı miktarlarda bulunur. Radyum eşdeğer aktivitesi, doğal radyoaktif nüklitlerle ilgili radyasyon tehlikelerini dikkate alan ve materyaldeki aktivite konsantrasyonunu kontrol etmek için kullanılan bir hesaplama yöntemidir. Ra_{eq} için radyolojik sağlık güvenliği değerlendirilmesi açısından izin verilen en yüksek değer 370 Bq/kg'dır [14]. Hesaplama kullanılan denklem aşağıdaki gibi verilir [15]:

$$Ra_{eq} = C_{Ra} + (1,43)C_{Th} + (0,077)C_K \quad (4)$$

Burada, C_{Ra} , C_{Th} ve C_K sırasıyla ^{226}Ra , ^{232}Th ve ^{40}K Bq/kg cinsinden spesifik aktivitedir. Radyum eşdeğer aktivitesi sonuçları, Şekil 7'de gösterilmiştir.



Şekil 7. Radyum eşdeğer aktivitesi.

Şekil 7'den görüldüğü gibi hesaplanan en yüksek radyum eşdeğer aktivitesi 136.575 Bq/kg ile Marmara Gri numunesinde, en düşük değer ise Crema Nuova numunesinde bulunmuştur. Ra_{eq} için radyolojik sağlık güvenliği değerlendirmesi açısından izin verilen en yüksek değer 370 Bq/kg'dır [14]. Şekilden de görüldüğü gibi tüm numuneler için elde edilen sonuçlar belirlenen limit değeri aşmamıştır.

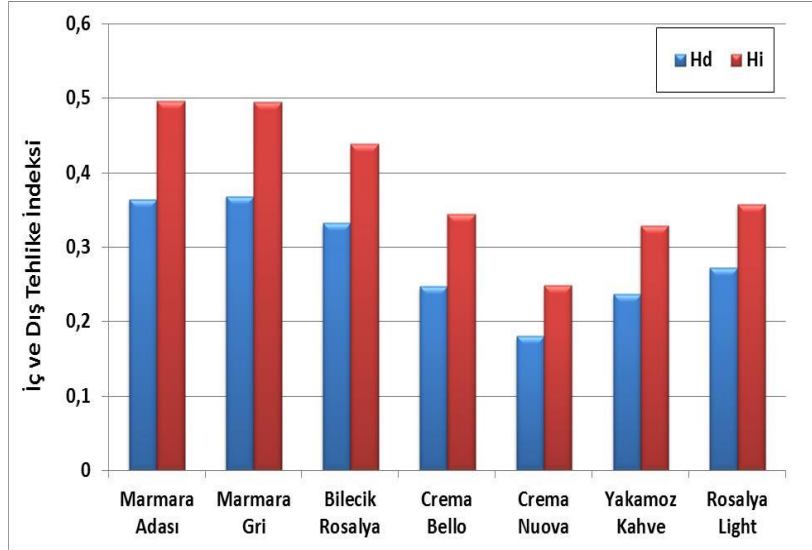
3.5. İç ve dış tehlike indeksi (H_i , H_d)

Primordial radyonüklid içeren materyallerin sağlık etkilerini değerlendirmek için kullanılan diğer bir parametre de İç (H_i) ve Dış (H_d) Tehlike İndeksi'dir. H_i ve H_d , radyasyon tehlikesinin göz ardı edilebilmesi için 1 sınırını aşmamalıdır. H_i ve H_d aşağıdaki denklemler kullanılarak hesaplanmıştır [18].

$$H_d = \left(\frac{1}{370}\right) \cdot C_{Ra} + \left(\frac{1}{259}\right) \cdot C_{Th} + \left(\frac{1}{4810}\right) \cdot C_K \leq 1 \quad (5)$$

$$H_i = \left(\frac{1}{185}\right) \cdot C_{Ra} + \left(\frac{1}{259}\right) \cdot C_{Th} + \left(\frac{1}{4810}\right) \cdot C_K \leq 1 \quad (6)$$

Burada, C_{Ra} , C_{Th} ve C_K sırasıyla ^{226}Ra , ^{232}Th ve ^{40}K Bq/kg cinsinden spesifik aktivitedir. İç ve Dış Tehlike İndeksi sonuçları, Şekil 8'de gösterilmiştir.



Şekil 8. İç ve dış tehlike indeksi.

Şekil 8’ den görüldüğü gibi mermer numuneleri için hesaplanan iç ve dış tehlike indeksi değerlerinden tümü belirlenen 1 değerinden daha düşüktür.

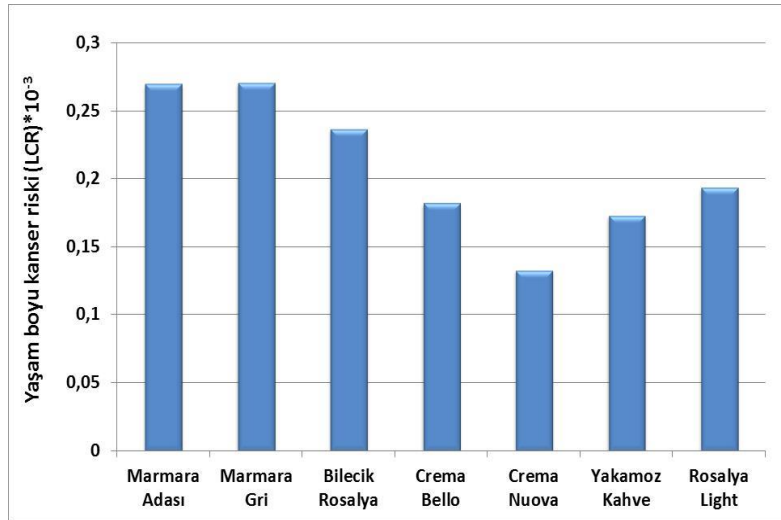
3.6. Yaşam boyu kanser riski (LCR)

Yaşam boyu kanser riski (LCR), bir kişinin yaşamı boyunca belirli bir kanserojen veya radyasyon dozuna maruz kalması durumunda kanser gelişmesi olasılığı olarak tanımlanır.

Yaşam boyu kanser riski hesaplanırken insanın ortalama yaşam süresi 70 yıl olarak kabul edilmektedir. Buna göre, Yaşam boyu kanser riski (LCR) aşağıdaki denklem kullanılarak hesaplanmaktadır [32].

$$LCR = YEDE \times YS \times RF \quad (7)$$

Burada, YEDE denklem (3) ile hesaplanan yıllık etkin dozdur, YS bir insan için ortalama yaşam süresi (yaklaşık 70 yıl olduğu varsayılmaktadır) ve RF insanlar için ölümcül bir kanser risk faktörüdür ve ICRP60 raporlarına göre bu değer 0.05 Sv^{-1} olarak verilmiştir [31]. Yaşam boyu kanser riski (LCR) için elde edilen sonuçlar Şekil 9’ da gösterilmiştir.



Şekil 9. Yaşam boyu kanser riski (LCR).

Yaşam boyu kanser riski (LCR) için limit değer 0.290×10^{-3} olarak verilmiştir. Şekil 9' da verilen sonuçlar verilen bu limit değerden düşük olduğunu göstermektedir.

Aktivite konsantrasyonları kullanılarak elde doz oranları ve radyolojik indeks sayısal verileri Tablo 2' de gösterilmiştir.

Tablo 2. Doz oranları ve radyolojik indeks sayısal verileri.

Numune adı	Doz Oranları ve Radyolojik Tehlike İndeksleri					
	D (nGy/h)	YEDE (mSv/y)	R _{eq} (Bq/kg)	H _d	H _i	ELCR*10 ⁻³
Marmara Adası	62,83	0,077	135,060	0,365	0,497	0,270
Marmara Gri	63,02	0,077	136,575	0,369	0,496	0,271
Bilecik Rosalya	55,12	0,068	123,140	0,333	0,439	0,237
Crema Bello	42,45	0,052	91,599	0,247	0,345	0,182
Crema Nuova	30,95	0,038	66,782	0,180	0,249	0,133
Yakamoz Kahve	40,27	0,049	87,862	0,237	0,329	0,173
Rosalya Light	45,11	0,055	101,076	0,273	0,358	0,194
Ortalama ± S.H	45,34 ± 6,87	0,056 ± 0,01	96,756 ± 15,07	0,261 ± 0,04	0,347 ± 0,05	0,195 ± 0,029

4. Tartışma

Marmara Bölgesi'nden çıkarılan bazı mermer örneklerindeki ²²⁶Ra, ²³²Th ve ⁴⁰K doğal radyonüklitlerin aktivite konsantrasyonları NaI (TI) detektörü ile gama ışını spektroskopisi tekniği kullanılarak ölçülmüştür. Mermer numunelerindeki ²²⁶Ra, ²³²Th ve ⁴⁰K ortalama aktivite konsantrasyonları, sırasıyla 37.446, 34.593 ve 248.041 Bq / kg olarak ölçülmüştür. Sonuçlar, mermer numunelerinde doğal olarak radyoaktif element içeriğine bağlı radyasyon dozlarının değerlendirilmesi için yararlıdır. Mermer örneklerinde deneysel olarak elde edilen radyonüklitlerin konsantrasyonları kullanılarak absorbe edilen gama doz oranı, yıllık etkili doz eşdeğeri, aşırı yaşam boyu kanser riski, radyum eşdeğeri aktiviteleri, harici tehlike indeksleri, içsel tehlike indeksleri ve gama indeks değerleri hesaplanmıştır. Hesaplanan sonuçlar belirlenmiş

olan sınır değerlerin altında olduğu görülmüştür. Elde edilen sonuçlar ışığında, incelenen mermer örneklerinin radyolojik açıdan bir zarar teşkil etmediği söylenebilir.

Kaynaklar

- [1] Malain, D., Regan, P.H., Bradley, D.A., Matthews, M., Al-Sulaiti, H.A., Santawamaitre, T. An evaluation of the natural radioactivity in Andaman beach sand samples of Thailand after the 2004 tsunami, **Appl. Radiat. Isot.**, 70(8), 1467–1474, (2012).
- [2] Veiga, R., Sanches, N., Anjos, R.M., Macario, K., Bastos, J., Iguatemy, M., Aguiar, J.G., Santos, A.M.A., Mosquera, B., Carvalho, C., Filho, M.B., Umisedo, N.K., Measurement of natural radioactivity in Brazilian beach sands. **Radiat. Meas.**, 41(2), 189–196, (2006).
- [3] UNSCEAR. Sources and Effects of Ionizing radiation, United Nations Scientific Committee on the Effects of Atomic radiation. Exposures from Natural Radiation Sources, Annex B, United Nations, New York (2000).
- [4] Stoulos, S., Manolopoulou, M., Papastefanou, C., Assessment of natural radiation exposure and radon exhalation from building materials in Greece, **J. Environ. Radioact.**, 69, 225–240, (2003).
- [5] Abbady, A.G.E., Uosif, M.A.M., El-Taher, A., Natural radioactivity and dose assessment for phosphate rocks from Wadi El-Mashash and El-Mahamid Mines, Egypt, **J. Environ. Radioact.**, 84, 65 (2005).
- [6] El Afifi, E.M., Hilal, M.A., Khalifa, S.M., Aly, H.F., Evaluation of U, Th, K and Emanated radon in some NORM and TENORM, **Radiat. Meas.**, 41, 627 (2006).
- [7] Al-Jarallah, M.I., Fazal-ur-Rehman, Musazay, M.S., Aksoy, A., Correlation between radon exhalation and radium content in granite samples used as construction material in Saudi Arabia, **Radiat. Meas.**, 40, 625 (2005).
- [8] Uyanik, N.A., Öncü, Z., Uyanik, O., Bozcu, M., Akkurt, İ., Günoğlu, K., Yağmurlu, F., Distribution of natural radioactivity from 40K radioelement in volcanics of Sandıklı-Şuhut (Afyon) area, **Acta Physica Polonica A**, 128(2-B), 438-440, (2012).
- [9] Canbaz, B., Füsün Çam, N., Yaprak, G., Candan, O., Natural radioactivity (226Ra, 232Th and 40K) and assessment of radiological hazards in the Kestanbolgranitoid, Turkey, **Radiat. Prot. Dosim.**, 141, 192 (2010).
- [10] Fazal-ur-Rehman, M.I. Al-Jarallah, M.S. Musazay, F. Abu-Jarad,. Application of the can technique and radon gas analyzer for radon exhalation measurements, **Appl. Radiat. Isot.** 59, 353 (2003).
- [11] Myatt, T.A., Allen, J.G., Minegishi, T., McCarthy, W.B., Mac-Intosh, D.L., McCarthy, J.F., Assessing exposure to granite countertops Part 1: radiation, **J. Expo. Sci. Environ. Epidemiol**, 20, 280 (2010).
- [12] Al-Selah, F.S., Al-Berzan, B., Measurements of natural radioactivity in some kinds of marble and granite used in Riyadh region, **J. Nucl. Radiat. Phys.**, 2, 25–36, (2007).
- [13] El-Dine, N.W., El-Shershaby, A., Ahmed, F., Abdel-Haleem, A.S., Measurement of radioactivity and radon exhalation rate in different kinds of marbles and granites, **Appl. Radiat. Isot.**, 55, 853, (2001).
- [14] Beretka, J., Mathew, P.J., Natural radioactivity of Australian building materials, industrial wastes and by-products, **Health Phys.**, 48, 87–95 (1985).

- [15] Akkurt I. ve Gunoglu, K., Natural radioactivity measurements and radiation dose estimation in some sedimentary rock samples in Turkey, **Science and Technology of Nuclear Installations**, Volume 2014 (2014).
- [16] Kohshi, C., Takao, I., Hideo, S., Terrestrial gamma radiation in Koshi prefecture, Japan, **J. Health Sci.**, 47, 362 (2001).
- [17] Akkurt, I., Uyanik, N.A., Gunoglu, K., Radiation dose estimation: an in vitro measurement for Isparta-Turkey **IJCESEN**, 1(1),1-4, (2015).
- [18] Günay, O., Saç, M.M., İçhedef, M. Taşköprü, C. Soil gas radon concentrations along the Ganos Fault (GF), **Arabian Journal of Geoscience**, 11:213. Print ISSN: 1866-7538, (2018)
- [19] Akkurt I. Effective atomic and electron numbers of some steels at different energies. **Annals of Nuclear Energy**, 36, 1702–1705, (2009).
- [20] Akkurt I., Basyigit, C., Kilincarslan, S., Mavi, B., Akkurt, A. Radiation shielding of concretes containing different aggregates, **Cement & Concrete Composites**, 28, 153–157, (2006).
- [21] Akkurt, I., Gunoglu, K. and Arda, S.S., Detection efficiency of NaI(Tl) detector in 511-1332 keV energy range, **Science and Technology of Nuclear Installations**, 1-5, (2014).
- [22] Iqbal, M., Tufail, M., ve Mirza, S.M., Measurement of natural radioactivity in marble found in Pakistan using a NaI(Tl) gamma-ray spectrometer. **Journal of Environmental Radioactivity**, 51, 255-265, (2000).
- [23] Senthilkumar, G., Raghu, Y., Sivakumar, S., Chandrasekaran, A., Anand, D. P., & Ravisankar, R., Natural radioactivity measurement and evaluation of radiological hazards in some commercial flooring materials used in Thiruvannamalai, Tamilnadu, India, **Journal of Radiation Research and Applied Sciences**, 7, 1, 116-122, (2014).
- [24] Al-Zahrani, J.H. Estimation of natural radioactivity in local and imported polished granite used as building materials in Saudi Arabia, **Journal of Radiation Research and Applied Sciences**, 10, 241-245, (2017)
- [25] Osmanlioglu, A.E., Natural radioactivity and evaluation of effective dose equivalent of granites in Turkey, **Radiation Protection Dosimetry**, 121, 325-329, (2006).
- [26] Sesana, L., Fumagalli, M., Carnevale, M., Polla, G., Facchini, U., Colombo, A., Tunesi, A., De Capitani, L., Rusconi, R., Natural radionuclides in the rocks of the Valle del Carvo Pluto in Piedmon, **Radiation Protection Dosimetry**, 118, 3, 337-344 (2006).
- [27] Amin, R.M., Gamma radiation measurements of naturally occurring radioactive samples from Egyptian commercial granites, **Environmental Earth Sciences**, 67(3), 771-775, (2012).
- [28] Malczewski, M., Teper, L., & Dorda, J., Assessment of natural and anthropogenic radioactivity levels in rocks and soils in the environs of Swieradow Zdrojin Sudetes, Poland, by in situ gamma-ray spectrometry, **Journal of Environmental Radioactivity**, 73, 233-245, (2004).
- [29] Sharaf, J.M., & Hamideen, M.S., Measurement of natural radioactivity in Jordanian building materials and their contribution to the public indoor gamma dose rate, **Applied Radiation and Isotopes**, 80, 61-66, (2013).
- [30] Thabayneh, K. M., Measurement of natural radioactivity and radon exhalation rate in granite samples used in Palestinian buildings, **Arabian Journal for Science and Engineering**, 1-7, (2013).

- [31] Günay O., Determination of natural radioactivity and radiological effects in some soil samples in Beykoz-Istanbul, **European Journal of Science and Technology** 12, 9-14, (2018).
- [32] Abbasi, A., Calculation of gamma radiation dose rate and radon concentration due to granites used as building materials in Iran, **Radiation Protection Dosimetry**, 155(3), 335-342, (2013).

Homotopy methods for fractional linear/nonlinear differential equations with a local derivative operator

Mehmet YAVUZ*, Burcu YAŞKIRAN

Necmettin Erbakan University, Faculty of Science, Department of Mathematics-Computer Sciences,
Meram, 42090, Konya, Turkey.

Geliş Tarihi (Received Date): 12.10.2018
Kabul Tarihi (Accepted Date): 24.10.2018

Abstract

In this paper, we consider some linear/nonlinear differential equations (DEs) containing conformable derivative operator. We obtain approximate solutions of these mentioned DEs in the form of infinite series which converges rapidly to their exact values by using and homotopy analysis method (HAM) and modified homotopy perturbation method (MHPM). Using the conformable operator in solutions of different types of DEs makes the solution steps are computable easily. Especially, the conformable operator has been used in modelling DEs and identifying particular problems such as biological, engineering, economic sciences and other some important fields of application. In this context, the aim of this study is to solve some illustrative linear/nonlinear problems as mathematically and to compare the exact solutions with the obtained solutions by considering some plots. Moreover, it is an aim to show the authenticity, applicability, and suitability of the methods constructed with the conformable operator.

Keywords: *Approximate solution, conformable operator, homotopy analysis method, modified homotopy perturbation method, nonlinear differential equations.*

* Mehmet YAVUZ, mehmetyavuz@konya.edu.tr, <https://orcid.org/0000-0002-3966-6518>
Burcu YAŞKIRAN, burcu.yaskiran89@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-3085-1837>

Lokal türev operatörlü lineer/lineer olmayan diferansiyel denklemler için homotopi metotları

Özet

Bu çalışmada conformable (uyumlu) türev operatörü (CTO) içeren bazı lineer/lineer olmayan diferansiyel denklemler ele alınmıştır. Homotopi analiz metodunu (HAM) ve modifiyeli homotopi pertürbasyon metodunu (MHPM) kullanarak bu bahsi geçen denklemlerin sonsuz seri formunda yaklaşık çözümleri elde edilmiştir. CTO kullanılması farklı türden diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmede çözüm adımlarının kolay bir şekilde hesaplanmasını sağlamaktadır. Özellikle CTO mühendislik, fiziksel bilimler, ekonomi ve diğer bazı alanlardaki problemleri modellemede kullanılmaktadır. Bu bağlamda, bu çalışmanın amacı bazı lineer/lineer olmayan diferansiyel denklemleri matematiksel olarak çözmek ve çözüm grafiklerini kullanarak elde edilen yaklaşık çözümler ile tam çözümleri karşılaştırmaktır. Ayrıca CTO ile yeniden tanımlanan HAM ve MHPM metotlarının güvenilirliğini, uygulanabilirliğini ve elverişliliğini göstermektedir.

Anahtar kelimeler: Yaklaşık çözüm, uyumlu operatör, homotopi analiz metodu, modifiyeli homotopi pertürbasyon metodu, lineer olmayan diferansiyel denklemler.

1. Introduction

In the last decade, several numerical, approximate and analytical methods have been investigated to get solutions of linear/nonlinear fractional PDEs. Especially, in the physics and engineering areas, numerous applications and theoretical aspects of fractional calculus have been studied. For example, in [1-10] researchers solved some important problems modelled with fractional DEs. Furthermore, conformable derivative operator defined in 2014 [11], is preferred by some researchers [12-19] to apply it to FDEs and to model some special physical, chemical and engineering problems. Moreover, the mentioned approximate methods have been applied extensively to real-life problems by taking these theoretical aspects into consideration. For instance, approximate-analytical methods have included homotopy analysis method (HAM) [20-22], Adomian decomposition method (ADM) [23-25], differential transform method (DTM) [26, 27], homotopy perturbation method (HPM) [28, 29], modified homotopy perturbation method (MHPM) [30], variational iteration method (VIM) [31], sine-Gordon expansion method [32], q-homotopy analysis method (q-HAM), [33], etc.

2. Conformable derivative operator

2.1. Definition

Given a function $\xi: [0, \infty) \rightarrow R$. Then the conformable derivative of ξ order $\alpha \in (0, 1]$ is defined for all $t > 0$ by [11]

$$T_{*t}^{\alpha}(\xi)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\xi(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - \xi(t)}{\varepsilon}.$$

2.2. Definition

The α – fractional integral of ξ is defined by

$$I_{*t}^\alpha (\xi)(t) = I_a^1 (t^{\alpha-1} \xi) = \int_a^t \frac{\xi(x)}{x^{1-\alpha}} dx, \quad \alpha \in (0,1).$$

2.3. Theorem

Let $\alpha \in (0,1]$ and ξ, \mathcal{G} be α – differentiable at a point $t > 0$. Then [11];

- (i) $T_{*t}^\alpha (a\xi + b\mathcal{G}) = aT_{*t}^\alpha (\xi) + bT_{*t}^\alpha (\mathcal{G})$ for all $a, b \in R$,
- (ii) $T_{*t}^\alpha (t^k) = kt^{k-\alpha}$ for all $k \in R$,
- (iii) $T_{*t}^\alpha (\xi(t)) = 0$ if $\xi(t) = k$,
- (iv) $T_{*t}^\alpha (\xi\mathcal{G}) = \xi T_{*t}^\alpha (\mathcal{G}) + \mathcal{G} T_{*t}^\alpha (\xi)$,
- (v) $T_{*t}^\alpha (\xi / \mathcal{G}) = \frac{\mathcal{G} T_{*t}^\alpha (\xi) - \xi T_{*t}^\alpha (\mathcal{G})}{\mathcal{G}^2}$,
- (vi) If $\xi(t)$ is differentiable, then $T_{*t}^\alpha (\xi(t)) = t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} \xi(t)$.

2.4. Lemma

Consider ξ as an n – times differentiable at t . Then we have $T_{*t}^\alpha (\xi(t)) = t^{[\alpha]-\alpha} \xi^{[\alpha]}(t)$, for all $t > 0, \alpha \in (n, n + 1]$ [11].

3. Homotopy analysis method in the conformable sense

This section of the study proposes the solution strategies that are generated by homotopy analysis method in the conformable-type derivative (CHAM). Firstly, we take the following general form of a nonlinear equation:

$$\mathcal{N}[\psi(x,t)] = 0 \tag{1}$$

where $\mathcal{N}(\cdot)$ is a nonlinear operator. Then, the deformation equation is presented as,

$$(1-p)\{L[\phi(x,t;p) - \psi_0(x,t)]\} = p\hbar H(x,t)\mathcal{N}[\phi(x,t;p)] \tag{2}$$

Let $\psi_0(x,t)$ show an initial estimation value of the exact solution of Eq. (1), $p \in [0,1]$ is an embedding parameter, $\hbar \neq 0$ is an supporting parameter, $H(x,t) \neq 0$ is an supporting function, and $L = T_{*t}^\alpha$ an supporting linear operator. It is free to choose the supporting parameters by applying the suggested method. Clearly, if $p = 0$ and $p = 1$, Eq.(2) turns out to be

$$\phi(x, t; 0) = \psi_0(x, t), \quad \phi(x, t; 1) = \psi(x, t) \quad (3)$$

respectively. Thus, p increases from 0 to 1, the solution $\phi(x, t; p)$ varies from the initial value $\psi_0(x, t)$ to the solution $\psi(x, t)$. Then, we consider the Taylor series expansion of $\phi(x, t; p)$ with respect to p , we get

$$\phi(x, t; p) = \psi_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(x, t) p^m, \quad (4)$$

where

$$\psi_m(x, t) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \phi(x, t; p)}{\partial p^m} \right|_{p=0} \quad (5)$$

If the supporting parameters mentioned above are chosen appropriately, the solution of Eq. (3) exists for $p \in [0, 1]$. Then we have

$$\psi(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m(x, t). \quad (6)$$

If we take the vector

$$\vec{\psi}_n = \{\psi_0(x, t), \psi_1(x, t), \dots, \psi_n(x, t)\}, \quad (7)$$

we obtain m th-order altered equation as

$$L[\psi_m(x, t) - \chi_m \psi_{m-1}(x, t)] = \hbar H(x, t) \mathfrak{R}_m(\vec{\psi}_{m-1}(x, t)), \quad (8)$$

where

$$\mathfrak{R}_m(\vec{\psi}_{m-1}(x, t)) = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{\partial^{m-1} \mathcal{N}[\phi(x, t; p)]}{\partial p^{m-1}} \right|_{p=0}, \quad (9)$$

and

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ 1, & m > 1. \end{cases} \quad (10)$$

Finally, operating the conformable integral operator defined in Definition 2.2. on both side of Eq. (8), we have

$$\psi_m(x, t) = \chi_m \psi_{m-1}(x, t) - \chi_m \sum_{k=0}^{n-1} \psi_{m-1}^{(k)}(x, 0^+) \frac{t^k}{k!} + I_{*t}^\alpha \hbar H(x, t) \mathfrak{R}_m(\vec{\psi}_{m-1}(x, t)). \quad (11)$$

4. Modified homotopy perturbation method in the conformable sense

In this section we illustrate the solution strategies that are generated by modified homotopy perturbation method in conformable-type derivative (CMHPM). Now we introduce a solution algorithm in an effective way for the general nonlinear PDEs. In this regard, firstly, we consider the following nonlinear equation:

$$T_{*t}^\alpha u(x,t) + L(u, u_x, u_{xx}) + N(u, u_x, u_{xx}) = f(x,t), \quad t > 0, \quad (12)$$

where L is a linear operator, N is a nonlinear operator, f is a known analytical function and T_{*t}^α , $n-1 < \alpha \leq n$, shows the conformable derivative of order α . We also have the initial conditions

$$u^k(x,0) = g_k(x), \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (13)$$

In view of the homotopy perturbation method (HPM), we can derive the following homotopy:

$$(1-p)T_{*t}^\alpha u(x,t) + p[T_{*t}^\alpha u(x,t) + L(u, u_x, u_{xx}) + N(u, u_x, u_{xx}) - f(x,t)] = 0, \quad (14)$$

or

$$T_{*t}^\alpha u(x,t) + p[L(u, u_x, u_{xx}) + N(u, u_x, u_{xx}) - f(x,t)] = 0. \quad (15)$$

Therefore, we get the solution of Eq. (15) by using the powers of p :

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots. \quad (16)$$

The modified form of the HPM which was proposed by Odibat [34] can be established based on the assumption that the function $f(x,t)$ in Eq. (12) can be divided into parts,

$$f(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x,t). \quad (17)$$

Then we have the following homotopy:

$$(1-p)T_{*t}^\alpha u(x,t) + p[T_{*t}^\alpha u(x,t) + L(u, u_x, u_{xx}) + N(u, u_x, u_{xx})] = \sum_{n=0}^{\infty} p^n f_n(x,t), \quad (18)$$

or

$$T_{*t}^\alpha u(x,t) + p[L(u, u_x, u_{xx}) + N(u, u_x, u_{xx})] = \sum_{n=0}^{\infty} p^n f_n(x,t), \quad (19)$$

where $p \in [0,1]$. If we set $f_0(x,t) = 0$, $f_1(x,t) = f(x,t)$ for $n = 0$ or $n \geq 2$, then the homotopy Eq. (18) or Eq. (19) reduces to the homotopy Eq. (14) or Eq. (15),

respectively. The form of homotopy Eq. (19) allows us to obtain the individual terms u_0, u_1, u_2, \dots in Eq. (16). Substituting Eq. (16) in Eq. (15) and collecting the terms with the same powers of p , we get

$$\begin{aligned} p^0 : T_{*t}^\alpha u_0 &= f_0(x, t), u_0^{(k)}(x, 0) = g_k(x), \\ p^1 : T_{*t}^\alpha u_1 &= -L(u_0) - N(u_0) + f_1(x, t), u_1^{(k)}(x, 0) = 0, \\ p^2 : T_{*t}^\alpha u_2 &= -L(u_1) - N(u_0, u_1) + f_2(x, t), u_2^{(k)}(x, 0) = 0, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{20}$$

At this step, by applying the conformable integral operator on both side of Eq. (20), the first few terms of the MHPM solution can be given by

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(x, 0) \frac{t^k}{k!} + I_{*t}^\alpha [f_0(x, t)], \\ u_1 &= -I_{*t}^\alpha [L(u_0)] - I_{*t}^\alpha [N(u_0)] + I_{*t}^\alpha [f_1(x, t)], \\ u_2 &= -I_{*t}^\alpha [L(u_1)] - I_{*t}^\alpha [N(u_0, u_1)] + I_{*t}^\alpha [f_2(x, t)], \\ u_3 &= -I_{*t}^\alpha [L(u_2)] - I_{*t}^\alpha [N(u_0, u_1, u_2)] + I_{*t}^\alpha [f_3(x, t)], \\ &\vdots \end{aligned} \tag{21}$$

Then we get the solution in the series form as

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t).$$

5. Numerical examples

5.1. Example

We consider the one-dimensional linear Klein-Gordon equation [35]

$$T_{*t}^\alpha u(x, t) - u_{xx}(x, t) + u(x, t) = 6x^3 \frac{t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + (x^3 - 6x)t^3, t > 0, x \in R, 1 < \alpha \leq 2, \tag{22}$$

with the initial conditions

$$u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0. \tag{23}$$

Firstly, we will solve this problem by using the mentioned HAM. Choosing the operator

$$L(\phi(x, t; p)) = T_{*t}^\alpha \phi(x, t; p)$$

with the property that $L[k] = 0, k$ is a constant. We use the initial approximation $u(x, 0) = 0$. Choosing $H(x, t) = 1$, we can construct the m . order modified equation as

$$L[u_m(x,t) - \chi_m u_{m-1}(x,t)] = \hbar \mathfrak{R}_m(\bar{u}_{m-1}(x,t)) \quad (24)$$

where

$$\mathfrak{R}_m(\bar{u}_{m-1}(x,t)) = T_{*t}^\alpha u_{m-1} - (u_{m-1})_{,xx} + u_{m-1} - (1 - \chi_m) \left[6x^3 \frac{t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + (x^3 - 6x)t^3 \right] \quad (25)$$

Therefore, the solution of Eq. (24) for $m \geq 1$ becomes

$$u_m(x,t) = \chi_m u_{m-1}(x,t) + \hbar I_{*t}^\alpha \mathfrak{R}_m(\bar{u}_{m-1}(x,t)). \quad (26)$$

From Eqs. (23), (25) and (26), we obtain

$$\begin{aligned} u_0(x,t) &= 0, \\ u_1(x,t) &= -\hbar \frac{x^3 t^3}{\Gamma(4-\alpha)} - \hbar \frac{(x^3 - 6x)t^{\alpha+3}}{(\alpha+2)(\alpha+3)}, \\ u_2(x,t) &= -\hbar \frac{x^3 t^3}{\Gamma(4-\alpha)} - \hbar \frac{(x^3 - 6x)t^{\alpha+3}}{(\alpha+2)(\alpha+3)} - \hbar^2 \frac{x^3 t^3}{\Gamma(4-\alpha)} - \hbar^2 \frac{(x^3 - 6x)t^{\alpha+3}}{(\alpha+2)(\alpha+3)} \\ &\quad - \hbar^2 \frac{(x^3 - 6x)t^{\alpha+3}}{(\alpha+2)(\alpha+3)\Gamma(4-\alpha)} - \hbar^2 \frac{(x^3 - 12x)t^{2\alpha+3}}{(\alpha+2)(\alpha+3)(2\alpha+2)(2\alpha+3)}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Then the approximate solution of Eq. (22) is presented by

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) + \dots \\ &= -\hbar \frac{x^3 t^3}{\Gamma(4-\alpha)} - \hbar \frac{(x^3 - 6x)t^{\alpha+3}}{(\alpha+2)(\alpha+3)} - \hbar \frac{x^3 t^3}{\Gamma(4-\alpha)} - \hbar \frac{(x^3 - 6x)t^{\alpha+3}}{(\alpha+2)(\alpha+3)} \\ &\quad - \hbar^2 \frac{x^3 t^3}{\Gamma(4-\alpha)} - \hbar^2 \frac{(x^3 - 6x)t^{\alpha+3}}{(\alpha+2)(\alpha+3)} - \hbar^2 \frac{(x^3 - 6x)t^{\alpha+3}}{(\alpha+2)(\alpha+3)\Gamma(4-\alpha)} \\ &\quad - \hbar^2 \frac{(x^3 - 12x)t^{2\alpha+3}}{(\alpha+2)(\alpha+3)(2\alpha+2)(2\alpha+3)} + \dots \end{aligned}$$

Then the exact solution of the Eq. (22) subject to the initial conditions Eq. (23) for $\alpha = 2$, is obtained with HAM as $u(x,t) = x^3 t^3$.

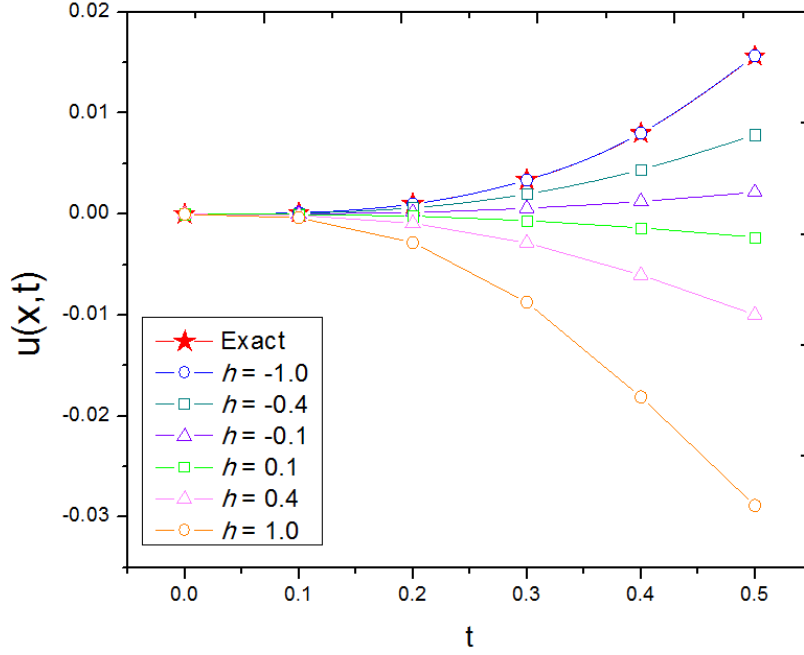


Figure 1. Comparison the HAM and the exact solutions at $\alpha = 2$, $x = 0.5$.

Secondly, we solve the Eq. (22) by using the MHPM. Let us take the initial conditions in Eq. (23) into consideration and use the homotopy in Eq. (19) and finally set

$$f_0(x,t) = 6x^3 \frac{t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)}, f_1(x,t) = (x^3 - 6x)t^3, \dots, f_n(x,t) = 0, n \geq 2.$$

The form of homotopy in Eq. (19) allows us to obtain the individual terms u_0, u_1, u_2, \dots in Eq. (16). Substituting Eq. (16) in Eq. (19) and collecting the terms with the same powers of p , we obtain

$$\begin{aligned} p^0 : T_{*t}^\alpha u_0 &= f_0(x,t), & u_0(x,0) &= 0, & (u_0)_t(x,0) &= 0, \\ p^1 : T_{*t}^\alpha u_1 &= (u_0)_{xx} - u_0 + f_1(x,t), & u_1(x,0) &= 0, & (u_1)_t(x,0) &= 0, \\ p^2 : T_{*t}^\alpha u_2 &= (u_1)_{xx} - u_1, & u_2^{(k)}(x,0) &= 0, & u_2(x,0) &= 0, & (u_2)_t(x,0) &= 0, \\ p^3 : T_{*t}^\alpha u_3 &= (u_2)_{xx} - u_2, & u_3^{(k)}(x,0) &= 0, & u_3(x,0) &= 0, & (u_3)_t(x,0) &= 0, \\ & \vdots & & & & & & \end{aligned} \tag{27}$$

Now, by applying the operator I_{*t}^α on both side of Eq. (27), the first few terms of the MHPM solution can be given by

$$\begin{aligned} u_0(x,t) &= \frac{x^3 t^3}{\Gamma(4-\alpha)}, \\ u_1(x,t) &= -\frac{(x^3 - 6x)t^{\alpha+3}}{(\alpha+2)(\alpha+3)\Gamma(4-\alpha)} + \frac{(x^3 - 6x)t^{\alpha+3}}{(\alpha+2)(\alpha+3)}, \end{aligned}$$

$$u_2(x,t) = \frac{6xt^{\alpha+3}}{(\alpha+2)(\alpha+3)(2\alpha+2)(2\alpha+3)} - \frac{6xt^{\alpha+3}}{(\alpha+2)(\alpha+3)(2\alpha+2)(2\alpha+3)\Gamma(4-\alpha)}$$

$$- \frac{(x^3-6x)t^{\alpha+3}}{(\alpha+2)(\alpha+3)(2\alpha+2)(2\alpha+3)} + \frac{(x^3-6x)t^{\alpha+3}}{(\alpha+2)(\alpha+3)(2\alpha+2)(2\alpha+3)\Gamma(4-\alpha)},$$

$$\vdots$$

In this way, the rest terms of the series can be calculated. The approximate solution of Eq. (22) is given by

$$u(x,t) = \frac{x^3t^3}{\Gamma(4-\alpha)} - \frac{(x^3-6x)t^{\alpha+3}}{(\alpha+2)(\alpha+3)\Gamma(4-\alpha)} + \frac{(x^3-6x)t^{\alpha+3}}{(\alpha+2)(\alpha+3)}$$

$$+ \frac{6xt^{\alpha+3}}{(\alpha+2)(\alpha+3)(2\alpha+2)(2\alpha+3)} - \frac{6xt^{\alpha+3}}{(\alpha+2)(\alpha+3)(2\alpha+2)(2\alpha+3)\Gamma(4-\alpha)}$$

$$- \frac{(x^3-6x)t^{\alpha+3}}{(\alpha+2)(\alpha+3)(2\alpha+2)(2\alpha+3)} + \frac{(x^3-6x)t^{\alpha+3}}{(\alpha+2)(\alpha+3)(2\alpha+2)(2\alpha+3)\Gamma(4-\alpha)} + \dots$$

Then the exact solution of the Eq. (22) subject to the initial conditions Eq. (23) for special case of $\alpha = 2$, is obtained with MHPM as $u(x,t) = x^3t^3$.

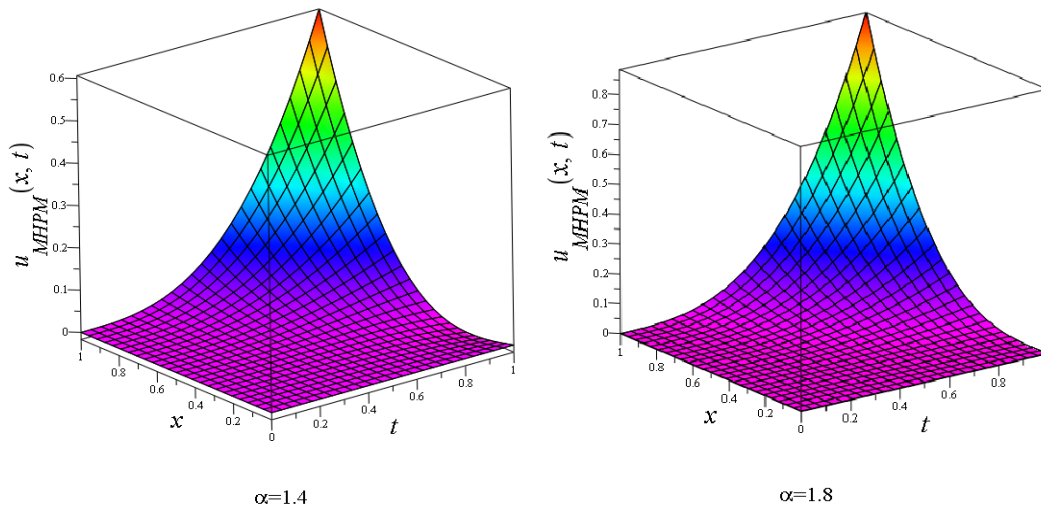


Figure 2. HAM sol. with $\alpha = 1.4$ and $\alpha = 1.8$ for Example 1

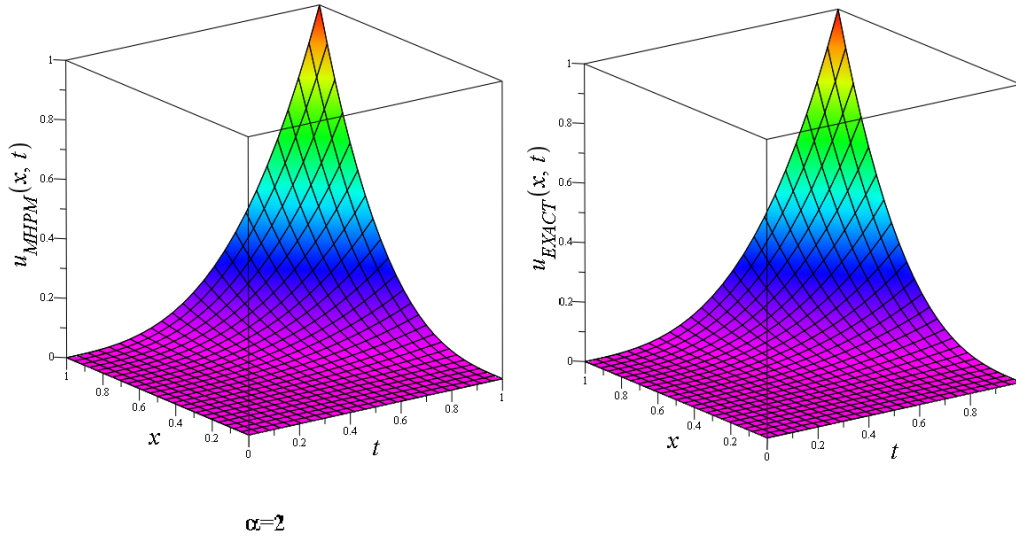


Figure 3. HAM solution and exact solution with $\alpha = 2$ for Example 1.

5.2. Example

Now let us consider the following nonlinear differential equation [36]

$$T_{*t}^\alpha u(x,t) + u^2(x,t) = 2x \frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + x^2 t^4, \quad t > 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (28)$$

with the initial condition

$$u(x,0) = 0, \quad (29)$$

and the boundary conditions

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = t^2. \quad (30)$$

Firstly, we will apply the HAM to the problem. Choosing $H(x,t) = 1$, we can construct the m . order modified equation as

$$L[u_m(x,t) - \chi_m u_{m-1}(x,t)] = \hbar \mathfrak{R}_m(\bar{u}_{m-1}(x,t)) \quad (31)$$

where

$$\mathfrak{R}_m(\bar{u}_{m-1}(x,t)) = T_{*t}^\alpha u_{m-1} + u_{m-1}^2 - (1 - \chi_m) \left[2x \frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + x^2 t^4 \right]. \quad (32)$$

Now the solution of Eq. (28) for $m \geq 1$ becomes

$$u_m(x,t) = \chi_m u_{m-1}(x,t) + \hbar I_{*t}^\alpha \mathfrak{R}_m(\bar{u}_{m-1}(x,t)). \quad (33)$$

From Eqs. (29), (32) and (33), we get

$$\begin{aligned}
 u_0(x,t) &= 0, \\
 u_1(x,t) &= -\hbar \frac{xt^2}{\Gamma(3-\alpha)} - \hbar \frac{x^2t^{\alpha+4}}{(\alpha+4)}, \\
 u_2(x,t) &= -\hbar \frac{xt^2}{\Gamma(3-\alpha)} - \hbar \frac{x^2t^{\alpha+4}}{(\alpha+4)} - \hbar^2 \frac{xt^2}{\Gamma(3-\alpha)} - \hbar^2 \frac{x^2t^{\alpha+4}}{(\alpha+4)}, \\
 u_3(x,t) &= -\hbar \frac{xt^2}{\Gamma(3-\alpha)} - 2\hbar^2 \frac{xt^2}{\Gamma(3-\alpha)} - \hbar^3 \frac{xt^2}{\Gamma(3-\alpha)} - \hbar \frac{x^2t^{\alpha+4}}{(\alpha+4)} \\
 &\quad - 2\hbar^2 \frac{x^2t^{\alpha+4}}{(\alpha+4)} - \hbar^3 \frac{x^2t^{\alpha+4}}{(\alpha+4)} + \hbar^3 \frac{x^2t^{\alpha+4}}{(\alpha+4)\Gamma(3-\alpha)\Gamma(3-\alpha)} \\
 &\quad + 2\hbar^3 \frac{x^3t^{2\alpha+6}}{(\alpha+4)(2\alpha+6)\Gamma(3-\alpha)} + \hbar^3 \frac{x^4t^{3\alpha+8}}{(\alpha+4)(\alpha+4)(3\alpha+8)}, \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

These steps give that the approximate solution of Eq. (28) as

$$\begin{aligned}
 u(x,t) &= -\hbar \frac{xt^2}{\Gamma(3-\alpha)} - \hbar \frac{x^2t^{\alpha+4}}{(\alpha+4)} - \hbar \frac{xt^2}{\Gamma(3-\alpha)} - \hbar \frac{x^2t^{\alpha+4}}{(\alpha+4)} - \hbar^2 \frac{xt^2}{\Gamma(3-\alpha)} \\
 &\quad - \hbar^2 \frac{x^2t^{\alpha+4}}{(\alpha+4)} - \hbar \frac{xt^2}{\Gamma(3-\alpha)} - 2\hbar^2 \frac{xt^2}{\Gamma(3-\alpha)} - \hbar^3 \frac{xt^2}{\Gamma(3-\alpha)} - \hbar \frac{x^2t^{\alpha+4}}{(\alpha+4)} \\
 &\quad - 2\hbar^2 \frac{x^2t^{\alpha+4}}{(\alpha+4)} - \hbar^3 \frac{x^2t^{\alpha+4}}{(\alpha+4)} + \hbar^3 \frac{x^2t^{\alpha+4}}{(\alpha+4)\Gamma(3-\alpha)\Gamma(3-\alpha)} \\
 &\quad + 2\hbar^3 \frac{x^3t^{2\alpha+6}}{(\alpha+4)(2\alpha+6)\Gamma(3-\alpha)} + \hbar^3 \frac{x^4t^{3\alpha+8}}{(\alpha+4)(\alpha+4)(3\alpha+8)} + \dots
 \end{aligned}$$

Then the exact solution of Eq. (28) for $\alpha=1$ is obtained with the HAM as $u(x,t) = xt^2$.

Secondly, we solve the mentioned problem by applying the MHPM to it. Considering the initial condition in Eq. (29) and the homotopy in Eq. (19), we set

$$f_0(x,t) = 2x \frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}, f_1(x,t) = x^2t^4, \dots, f_n(x,t) = 0, n \geq 2. \text{ Then we obtain}$$

$$\begin{aligned}
 p^0 : T_{*t}^\alpha u_0 &= f_0(x,t), & u_0(x,0) &= 0, \\
 p^1 : T_{*t}^\alpha u_1 &= -u_0^2 + f_1(x,t), & u_1(x,0) &= 0, \\
 p^2 : T_{*t}^\alpha u_2 &= -2u_0u_1, u_2^{(k)}(x,0) = 0, & u_2(x,0) &= 0, \\
 p^3 : T_{*t}^\alpha u_3 &= -(u_1^2 + 2u_0u_1), u_3^{(k)}(x,0) = 0, & u_3(x,0) &= 0, \\
 &\vdots & &
 \end{aligned} \tag{34}$$

Following the same solution steps in the Example 1, the first few terms of the MHPM solution can be obtained as

$$\begin{aligned}
 u_0(x,t) &= \frac{xt^2}{\Gamma(3-\alpha)}, \\
 u_1(x,t) &= \frac{x^2t^{\alpha+4}}{(\alpha+4)} - \frac{x^2t^{\alpha+4}}{(\alpha+4)\Gamma(3-\alpha)\Gamma(3-\alpha)}, \\
 u_2(x,t) &= -\frac{2x^3t^{2\alpha+6}}{(\alpha+4)(2\alpha+6)\Gamma(3-\alpha)} + \frac{2x^3t^{2\alpha+6}}{(\alpha+4)(2\alpha+6)\Gamma(3-\alpha)\Gamma(3-\alpha)\Gamma(3-\alpha)}, \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

The rest parts of the series can be given as the same way. Then the approximate solution of Eq. (33) is given by

$$\begin{aligned}
 u(x,t) &= \frac{xt^2}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{x^2t^{\alpha+4}}{(\alpha+4)} - \frac{x^2t^{\alpha+4}}{(\alpha+4)\Gamma(3-\alpha)\Gamma(3-\alpha)} - \frac{2x^3t^{2\alpha+6}}{(\alpha+4)(2\alpha+6)\Gamma(3-\alpha)} \\
 &\quad + \frac{2x^3t^{2\alpha+6}}{(\alpha+4)(2\alpha+6)\Gamma(3-\alpha)\Gamma(3-\alpha)\Gamma(3-\alpha)} + \dots
 \end{aligned}$$

The last equation means that the exact solution of the Eq. (28) for $\alpha=1$ is obtained with the proposed MHPM as $u(x,t) = xt^2$.

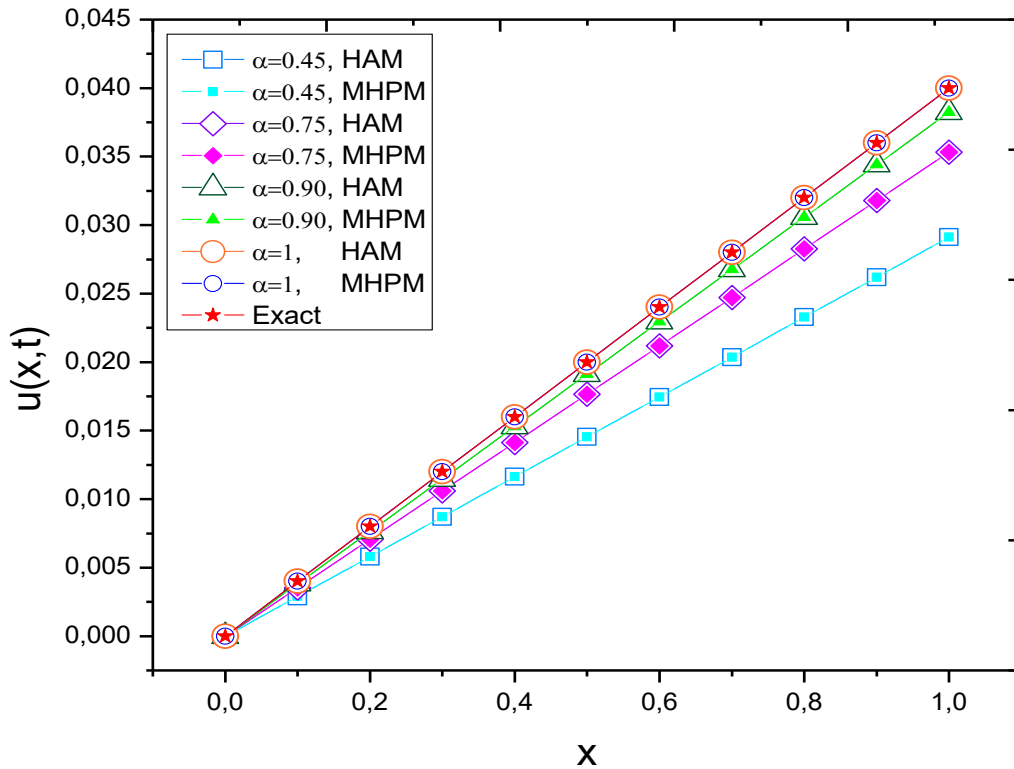


Figure 4. Comparison the numerical solutions with the exact solution at $h = -1, t = 0.2$.

6. Conclusion

In this work, approximate-analytical solutions of some linear/nonlinear PDEs are obtained by using the HAM and MHPM methods considering the conformable derivative operator. The fundamental solutions for non-homogeneous Klein-Gordon equation and a nonlinear PDE have been investigated by applying these suggested methods. The results of numerical computations have been illustrated by the figures under the variation of order α , time value t , distance term x and the auxiliary parameter \hbar . The results of this study find out that the HAM and MHPM in the conformable derivative mean are applicable and suitable methods that can evaluate the components of infinite series smoothly and with ease in short notice even in nonlinear PDEs and the results have proven the accuracy and influence of these mentioned methods.

References

- [1] Avci, D., Iskender Eroglu, B. B. and Ozdemir, N., Conformable heat equation on a radial symmetric plate, **Thermal Science**, 21, 2, 819-826, (2017).
- [2] Çenesiz, Y., Baleanu, D., Kurt, A. and Tasbozan, O., New exact solutions of burgers' type equations with conformable derivative, **Waves in Random and Complex Media**, 27, 1, 103-116, (2017).
- [3] Ilie, M., Biazar, J. and Ayati, Z., Optimal homotopy asymptotic method for first-order conformable fractional differential equations, **Journal of Fractional Calculus and Applications**, 10, 1, 33-45, (2019).
- [4] Yavuz, M., Novel solution methods for initial boundary value problems of fractional order with conformable differentiation, **An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications (IJOCTA)**, 8, 1, 1-7, (2018).
- [5] Bildik, N., Konuralp, A., Bek, F. O. and Küçükarslan, S., Solution of different type of the partial differential equation by differential transform method and Adomian's decomposition method, **Applied Mathematics and Computation**, 172, 1, 551-567, (2006).
- [6] Morales-Delgado, V. F., Gómez-Aguilar, J. F., Yépez-Martínez, H., Baleanu, D., Escobar-Jimenez, R. F. and Olivares-Peregrino, V. H., Laplace homotopy analysis method for solving linear partial differential equations using a fractional derivative with and without kernel singular, **Advances in Difference Equations**, 2016, 1, 164, (2016).
- [7] Özdemir, N. and Yavuz, M., Numerical solution of fractional black-scholes equation by using the multivariate Padé approximation, **Acta Physica Polonica A**, 132, 3, 1050-1053, (2017).
- [8] Turut, V. and Güzel, N., On solving partial differential equations of fractional order by using the variational iteration method and multivariate Padé approximations, **European Journal of Pure and Applied Mathematics**, 6, 2, 147-171, (2013).
- [9] Yokus, A., Sulaiman, T. A. and Bulut, H., On the analytical and numerical solutions of the Benjamin–Bona–Mahony equation, **Optical and Quantum Electronics**, 50, 1, 31, (2018).

- [10] Akgül, A., Khan, Y., Akgül, E. K., Baleanu, D. and Al Qurashi, M. M., Solutions of nonlinear systems by reproducing kernel method, **The Journal of Nonlinear Sciences and Applications**, 10, 4408-4417, (2017).
- [11] Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A. and Sababheh, M., A new definition of fractional derivative, **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 264, 65-70, (2014).
- [12] Yavuz, M. and Özdemir, N., **New numerical techniques for solving fractional partial differential equations in conformable sense** in: Ostalczyk P., Sankowski D., Nowakowski J. (eds) *Non-Integer Order Calculus and its Applications. Lecture Notes in Electrical Engineering*, vol 496. Springer, Cham, 49-62, (2019).
- [13] Evrigen, F., Conformable fractional gradient based dynamic system for constrained optimization problem, **Acta Physica Polonica A**, 132, 1066-1069, (2017).
- [14] Eroğlu, B. İ., Avcı, D. and Özdemir, N., Optimal control problem for a conformable fractional heat conduction equation, **Acta Physica Polonica A**, 132, 3, 658-662, (2017).
- [15] Ekici, M., Mirzazadeh, M., Eslami, M., Zhou, Q., Moshokoa, S. P., Biswas, A. and Belic, M., Optical soliton perturbation with fractional-temporal evolution by first integral method with conformable fractional derivatives, **Optik-International Journal for Light and Electron Optics**, 127, 22, 10659-10669, (2016).
- [16] Atangana, A., Baleanu, D. and Alsaedi, A., New properties of conformable derivative, **Open Mathematics**, 13, 1, (2015).
- [17] Abdeljawad, T., AL Horani, M. and Khalil, R., Conformable fractional semigroups of operators, **Journal of Semigroup Theory and Applications**, 2015, Article ID 7, (2015).
- [18] Usta, F. and Sarıkaya, M. Z., Explicit bounds on certain integral inequalities via conformable fractional calculus, **Cogent Mathematics**, 4, 1, 1277505, (2017).
- [19] Usta, F., A conformable calculus of radial basis functions and its applications, **An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications (IJOCTA)**, 8, 2, 176-182, (2018).
- [20] Kumar, S., Singh, J., Kumar, D. and Kapoor, S., New homotopy analysis transform algorithm to solve volterra integral equation, **Ain Shams Engineering Journal**, 5, 1, 243-246, (2014).
- [21] Arqub, O. A. and El-Ajou, A., Solution of the fractional epidemic model by homotopy analysis method, **Journal of King Saud University-Science**, 25, 1, 73-81, (2013).
- [22] Sakar, M. G. and Erdogan, F., The homotopy analysis method for solving the time-fractional Fornberg–Whitham equation and comparison with Adomian’s decomposition method, **Applied Mathematical Modelling**, 37, 20-21, 8876-8885, (2013).
- [23] Inc, M., Gencoglu, M. T. and Akgül, A., Application of extended Adomian decomposition method and extended variational iteration method to Hirota-Satsuma coupled kdv equation, **Journal of Advanced Physics**, 6, 2, 216-222, (2017).
- [24] Evrigen, F. and Özdemir, N., Multistage Adomian decomposition method for solving nlp problems over a nonlinear fractional dynamical system, **Journal of Computational and Nonlinear Dynamics**, 6, 2, 021003, (2011).

- [25] Yavuz, M. and Özdemir, N., A quantitative approach to fractional option pricing problems with decomposition series, **Konuralp Journal of Mathematics**, 6, 1, 102-109, (2018).
- [26] Yavuz, M., Ozdemir, N. and Okur, Y. Y., Generalized differential transform method for fractional partial differential equation from finance, **Proceedings, International Conference on Fractional Differentiation and its Applications**, Novi Sad, Serbia, pp 778-785, (2016).
- [27] Yang, X.-J., Machado, J. T. and Srivastava, H., A new numerical technique for solving the local fractional diffusion equation: Two-dimensional extended differential transform approach, **Applied Mathematics and Computation**, 274, 143-151, (2016).
- [28] Khan, Y., Akgul, A., Faraz, N., Inc, M., Akgul, E. K. and Baleanu, D., A homotopy perturbation solution for solving highly nonlinear fluid flow problem arising in mechanical engineering, **Proceedings, AIP Conference Proceedings: AIP Publishing**, pp 130004, (2018).
- [29] Evirgen, F. and Özdemir, N., **A fractional order dynamical trajectory approach for optimization problem with hpm** in: Baleanu, D., Machado, J.A.T., Luo, A. (eds) *Fractional Dynamics and Control*, Springer, 145-155, (2012).
- [30] Yavuz, M. and Özdemir, N., A different approach to the European option pricing model with new fractional operator, **Mathematical Modelling of Natural Phenomena**, 13, 1, 12, (2018).
- [31] Yavuz, M. and Yaskiran, B., Approximate-analytical solutions of cable equation using conformable fractional operator, **New Trends in Mathematical Science**, 5, 209-219, (2017).
- [32] Tasbozan, O., Şenol, M., Kurt, A. and Özkan, O., New solutions of fractional Drinfeld-Sokolov-Wilson system in shallow water waves, **Ocean Engineering**, 161, 62-68, (2018).
- [33] Yavuz, M., Özdemir, N., On the solutions of fractional Cauchy problem featuring conformable derivative, **Proceedings, ITM Web of Conferences**, EDP Sciences, Vol. 22, p. 01045, (2018).
- [34] Momani, S. and Odibat, Z., Homotopy perturbation method for nonlinear partial differential equations of fractional order, **Physics Letters A**, 365, 5, 345-350, (2007).
- [35] Hemeda, A. A., Modified homotopy perturbation method for solving fractional differential equations, **Journal of Applied Mathematics**, 2014, (2014).
- [36] Javidi, M. and Ahmad, B., Numerical solution of fractional partial differential equations by numerical Laplace inversion technique, **Advances in Difference Equations**, 2013, 1, 375, (2013).

Eko-verimlilik kavramı, gelişimi ve uygulanma süreci

Bengü GÜNGÖR^{1*}, Burcu FELEKOĞLU²

¹Balıkesir Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Endüstri Mühendisliği Bölümü Çağış Yerleşkesi, Balıkesir.

²Dokuz Eylül Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Endüstri Mühendisliği Bölümü, Tınaztepe Yerleşkesi, İzmir.

Geliş Tarihi (Received Date): 17.08.2018

Kabul Tarihi (Accepted Date): 18.10.2018

Özet

Eko-verimlilik, daha az atık, kaynak ve enerji kullanımı ile ürün üretme ilkesidir. Bu özelliğe göre eko-verimlilik, sadece çevresel kaygılar için değil, aynı zamanda endüstriyel verimliliğin korunması, doğal kaynaklar ve ekonomik büyüme gibi birçok alan için de önemlidir. İşletmeler için süreç verimliliğinin artırılması, doğal kaynak kullanımının azaltılması ve hammadde tüketiminin azaltılması, operasyonel verimliliği ve kârlılığı sağlayacaktır. Böylece, eko-verimli işletmeler, verimliliği arttırırken maliyetleri azaltacak ve daha rekabetçi hale gelecektir. Türkiye'de pek çok işletme, eko-verimli hale gelebilmek için danışmanlık hizmeti almaya ve Ar-Ge uygulamalarına ihtiyaç duymaktadır. Ancak, çevre odaklı bakış açısı dışındaki eko-verimlilik kavramının henüz net olarak tanımlanamamış ve anlaşılammış olmasıyla beraber, ülkemizdeki yetersiz yenilik kapasitesi nedeniyle bu kavram yeterince uygulanamamaktadır. Bu çalışmanın amacı, eko-verimlilik kavramını açıklamak, uluslararası düzeyde kabul görmüş tanımlarından bahsetmek ve küresel gelişimini göstermektir. Ayrıca, ulusal ve işletme düzeyinde eko-verimliliğin uygulanma sürecine ilişkin temel adımları içeren akış diyagramları çalışma kapsamında sunulmaktadır.

Anahtar kelimeler: Eko-verimlilik kavramı, eko-verimlilik tanımları, eko-verimlilik uygulama adımları.

* Bengü GÜNGÖR, bengu.gungor@balikesir.edu.tr, <https://orcid.org/0000-0003-2602-2411>
Burcu FELEKOĞLU, burcu.felekoglu@deu.edu.tr, <https://orcid.org/0000-0001-7414-9199>

The concept, development and implementation process of eco-efficiency

Abstract

Eco-efficiency is a principle of producing goods by using less resources and energy while creating less waste. According to this characteristic, it is significant not only for environmental concerns, but also for many other fields such as protection of industrial efficiency, natural resources, and economic growth. For industries, increasing process efficiency and decreasing natural resources and raw material consumption will directly result in operational efficiency and profitability for a company. Thus, eco-efficient companies reduce costs by increasing productivity and become more competitive. In Turkey, many companies need to take consultancy service and apply R&D practices for engaging with eco-efficiency. However, eco-efficiency concept, except the environmental perspective, is not clearly defined and understood and thus cannot be sufficiently applied mainly due to inadequate innovation capacity in our country. The aim of this paper is to explain the concept of eco-efficiency, to give its internationally accepted definitions and to show its global development process. In addition, flow diagrams are presented within the scope of this study, including basic steps of eco-efficiency implementation at national and company level.

Keywords: *Eco-efficiency concept, definitions of eco-efficiency, implementation steps of eco-efficiency.*

1. Giriş

20. yüzyılın ikinci yarısında başlayarak, günümüzde hızını git gide arttıran teknolojik ve endüstriyel gelişmeler, doğal kaynakların ve çevresel değerlerin hızla azalmasına neden olmaktadır. Artan atık miktarları ve arıtım maliyetleri yalnızca ürün ve hizmet üreten kurum ve sektörleri etkili çözümler aramaya yöneltmekte, aynı zamanda toplumsal çevre bilincinin oluşmasını da tetiklemektedir. Özellikle, son 20 yılda artan çevresel farkındalık, başta gelişmiş ülkeler olmak üzere tüketicilerin çevre dostu ürün ve süreçleri tercih etmelerine neden olmaktadır.

Ortaya çıkan bu yeni trendin sonucunda, üretim ve hizmet sektörlerinde üretkenliği arttırmak, ekolojik dengenin korunması için üretim girdisi olarak kullanılan hammaddeleri daha az tehlikeli eşdeğerleri ile değiştirmek, su ve enerji tüketimi başta olmak üzere kaynak tüketimlerini azaltmak gibi yaklaşımlar literatürde ortaya konulmaya başlamıştır. Atık azaltma, geri dönüşüm, ürün ve hizmetlerin çevreye daha duyarlı şekilde tasarlanması kapsamında yapılan araştırmaların önemi artmış ve kirliliğin ortaya çıktıktan sonra yok edilmesi olarak ortaya konan “kirlilik kontrolü” yaklaşımları yerini “eko-verimlilik” yaklaşımlarına bırakmaya başlamıştır [1].

Ulusal ve uluslararası düzeylerde eko-verimlilik yaklaşımına yönelik yürütülen çalışmalarda, üretim süreçlerinde girdinin daha verimli kullanılması için yapılacak iyileştirmelerin hem hammadde kayıplarını azaltacağı hem de atık üretimini minimize edeceği söylenmektedir [2]. Bunun yanı sıra, hizmet sektöründe de verimliliğin

arttırılmasına yönelik yapılan eko-verimlilik yaklaşımları ortaya çıkmaktadır [3]. 2004 yılında, Avrupa Ekonomik Araştırmalar Merkezi (Center for European Economic Research) tarafından Almanya'da yapılmış bir çalışmada, Ekonomik İşbirliği ve Kalkınma Örgütü (OECD) ülkelerinde mevcut kirlilik kontrolü ve eko-verimlilik yaklaşımları karşılaştırılmıştır ve özellikle Fransa ve Japonya gibi gelişmiş ülkelerde bu konuda çok sayıda çalışma yapıldığı ve eko-verimlilik uygulamalarının yaygınlaştırılmasına yönelik stratejilerin geliştirildiği görülmüştür [4]. Ülkemizde ise, eko-verimlilik konusundaki öncü bir proje olan Ulusal Eko-verimlilik Merkezi'nin kurulması ile ilgili çalışmalar Verimlilik Genel Müdürlüğü tarafından sürdürülürken, proje Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırmalar Kurumu (TÜBİTAK) ve Türkiye Teknoloji Geliştirme Vakfı (TTGV) tarafından desteklenmektedir [5].

Bahsedilen tüm bu nedenler göz önüne alındığında, eko-verimlilik kavramına yönelik uygulamaların sürdürülebilir olabilmesi için öncelikle bu kavrama karşı farkındalığın yaratılması gerekmektedir. Bu çalışmanın temel amacı, halen gelişmekte olan eko-verimlilik kavramını açıklamak, tarihsel gelişim sürecindeki tanımlarından bahsetmek, ulusal ve işletme düzeyindeki uygulama sürecinin adımları sunarak, ülkemizde konu ile ilgili farkındalığı arttırmaya yönelik katkı sağlayabilmektir. Çalışmanın ikinci bölümünde, geçmişten günümüze kadar eko-verimlilik kavramının tarihsel gelişimi verilmiş, tanımları ve amaçları açıklanmıştır. Üçüncü bölümde, eko-verimlilik konusunda çalışma yapacak olan kurumlar ve işletmeler için genel bir yol haritası sunmak amacıyla, eko-verimliliğin uygulanmasında izlenecek adımlar hem ulusal hem de işletme düzeyinde akış diyagramları şeklinde verilmiştir. Makalenin son bölümünde ise, araştırma sonuçlarını ve elde edilen bilgileri özetleyen bir sonuçlar ve tartışma kısmına yer verilmiştir.

2. Eko-verimlilik kavramı

Eko-verimlilik kavramı, daha fazla ürün ve hizmet sunumu ya da daha az enerji ve daha az doğal kaynak ile daha fazla ekonomik ve çevresel verimlilik olarak ifade edilmektedir. Bu kavram, işletme açısından ele alındığında ise verimlilik, kârlılık ve rekabet edebilirlik üzerine odaklanmaktadır. Eko-verimlilik kavramı ile faaliyet alanı ve büyüklüğü fark etmeksizin çeşitli sektörlerde verimlilik arttırılabilirken, çevresel ve ekonomik kazanımlar da elde edilebilmektedir.

Eko-verimlilik, çevresel etkilerin ortaya çıktıktan sonra yok edilmesini değil, kaynağında önlenmesini ifade etmektedir. Bu kavram, kirlilik kontrol yaklaşımlarının aksine, endüstriyel, kentsel, tarımsal gibi çevresel sorunları bir parametre olarak planlama süreçlerine dahil etmektedir. Kirlilik kontrolü, tasarım ve üretim süreçlerinin kaçınılmaz sonucu olarak kirliliği kabul eder ve kirliliğin ortaya çıkmasından sonra bu sorunu çözmeye çalıştığı için işletmelere ve kurumlara ekstra maliyetler oluşturmaktadır. Eko-verimlilik ise, kaynak maliyetlerinin azaltılmasına, kirlilik kaynaklarının önlenmesine yönelik metotlar ve çevre dostu ürünler aracılığıyla işletmelerin üretim maliyetlerinin düşürülmesinin yanı sıra çevresel performansın arttırılmasını da sağlamaktadır.

Günümüzde, işletmeler açısından çevresel konular sadece çevre mevzuatı baskılarından ve çevre korumaya yönelik ek maliyetlerden dolayı önem kazanmamakta, aynı zamanda atık miktarının, su ve enerji tüketiminin azaltılması, hammaddelerin verimli şekilde

kullanılması, üretim ve atık bertaraf maliyetlerinin en aza indirilmesi, iş yeri ve işçi güvenliğinin sağlanması konularını içeren daha kapsamlı bir geri kazanıma dönüşmektedir.

Eko-verimliliğin temel amaçlarından biri olan süreç verimliliğinin artırılması, doğrudan operasyonel verimliliğe bağlıdır ve bir işletme için değer katan enerji, doğal kaynak ve hammadde kullanımının azaltılması ile sonuçlanmaktadır. Ayrıca, işlevsel olarak eşdeğer ürünlerin daha az enerji, doğal kaynak ve hammadde kullanılarak üretilmesi, ürün maliyetlerinin düşürülmesi ve işletme kârlılığının artırılması anlamına gelmektedir. Üretim süreçlerinin iyileştirilmesi sayesinde çalışma ortamının da dolaylı olarak iyileştirilmesinin yanı sıra, ürünün daha kaliteli ve tutarlı olması da sağlanabilmektedir.

2.1. Eko-verimlilik kavramının tarihsel gelişimi

20'nci yüzyılın başlarından itibaren eko-verimlilik kavramı, “ekolojik verimlilik” olarak literatüre yansıtılmıştır. Bu dönemde, sanayileşmenin olumsuz etkileri hissedilmeye başlamış ve bilimsel bulgular bu sorunu dikkate alan önemli iddiaları ortaya koymaya başlamıştır [6]. 1990'lardan bu yana eko-verimlilik kavramı hem gelişmiş hem de gelişmekte olan ülkelerin gündeminde yer almaktadır. Bununla birlikte, bu kavram son yıllarda daha fazla işletme tarafından kabul edilerek, eko-verimlilik konusunda daha gelişmiş uygulamaya yaklaşımları ortaya çıkmaya başlamıştır.

Tablo 1, küresel kuruluşlar, çalışmalar ve hareketlere göre eko-verimlilik kavramı gelişiminin tarihsel sürecini çizelgelemektedir. Her birinin yapmış olduğu eko-verimlilik tanımları çalışmanın bu bölümünde başlıklar halinde verilmektedir.

Tablo 1. Eko-verimlilik tanımlarının yıllara göre dağılımı.

Eko-verimlilik kavramından bahseden küresel kuruluşlar, çalışmalar ve hareketler	Tarih	Kaynak
Sessiz Bahar (Silent Spring)	1962	7
Büyümenin Sınırları (Limits to Growth)	1972	8
Birleşmiş Milletler İnsan Çevresi Konferansı	1972	9
Kirlilik Önleme	1975	10
Çevresel Hareket	1980-1990	11
Brundtland Komisyon Raporu	1987	12
Dünya Sürdürülebilir Kalkınma İş Konseyi	1992	13
Birleşmiş Milletler Çevre ve Kalkınma Konferansı	1992	9
Faktör 10 Kulübü	1994	14
Faktör Dört	1998	14
Dünya Sürdürülebilir Kalkınma Zirvesi	2002	9
1.Uluslararası Eko-verimlilik Konferansı	2004	15
2. ve 3. Uluslararası Eko-verimlilik Konferansı	2006/2010	15
UNIDO Eko-verimlilik Programı	2008-2011	5
Birleşmiş Milletler Çevre Programı Eko-İnovasyon Projesi	2012-2017	16

Sessiz Bahar (Silent Spring, 1962)

Sessiz Bahar, çevre üzerindeki insan kaynaklı etkileri araştıran Amerikalı biyolog Rachel Carson tarafından yazılmış bir kitaptır. Bu kitap, pestisitlerin kullanılmasının olumsuz sonuçları konusunda farkındalık yaratmıştır ve çevresel hareketin desteklenmesi açısından önemli bir kitaptır [7].

Büyümenin Sınırları (Limits to Growth, 1972)

Donella H. Meadows, ekonomik büyümeden dolayı doğal kaynakların tükenmeye başladığı ve bu nedenle önümüzdeki on yıl içinde maksimum kaynak sınırlarına ulaşılacağı öngörüsü ile yoğun bir ilgiyi üzerine çekmeyi amaçlayan bir araştırma sunmuştur. Bir başka deyişle, bu büyümenin hem canlı popülasyonu hem de sanayi kapasitesinde kontrol edilemez bir düşüş yaratacağını söylemektedir [8].

Birleşmiş Milletler İnsan Çevresi Konferansı (1972)

İsveç Stockholm'de düzenlenen bu konferans sırasında, sağlıklı ve üretken bir çevreye yönelik hakların tanımlanması gerektiği konusu tartışılmış, ekonomik kalkınmayı hızlandırmak için etkin kaynak kullanımının önemi anlatılmıştır [9]. 1975'teki bir başka konferansta ise çevrenin korunmasının önemli olduğu vurgulanmıştır. Bu dönemde, çevre üzerindeki insan etkilerinin olumsuz yanları ortaya çıkmaya başladığından gelecek yıllarda olumsuz ve maliyetli sonuçlarla karşılaşmak yerine bugünden çevre dostu teknolojilerin kullanımının çevre ve üretici için çok daha fazla fayda sağlayacağı açık bir şekilde dile getirilmiştir.

Kirlilik Önleme (1975)

Bu yaklaşım, kirliliği kontrol etmek yerine önlenmesinin daha öncelikli bir yer alması gerektiğini öne sürmektedir. Bu amaçla, ABD'li üretici 3M, kirliliği kaynağında önlemek için “Kirlilik Önleme Ödemeleri Programı (3P)” adlı programını oluşturmuştur. Projenin ilk yılında işletme 800 milyondan fazla tasarruf etmiştir [10].

Çevresel Hareket (1980s)

Ürünlerin çevre üzerindeki olumsuz etkilerine karşı tüketicilerin farkındalıklarının artması ile 1980'lerden itibaren bu hareket hız kazanmaya başlamıştır. Bu bağlamdaki bir örnek olarak: Bhopal, Hindistan'daki “Union Carbide” böcek ilacı fabrikası, 1984'te zehirli gaz sızıntısı ile karşı karşıya kaldığında toplumun bu durumu göz önünde bulundurarak iş rollerini ve sorumluluklarını sorgulamaya başladığı görülmüştür [11].

Brundtland Komisyon Raporu (1987)

1987'de Brundtland Komisyonu, insanlığa dayalı mevcut perspektifleri gözden geçirmeyi ve insanlığın gelişimi için yeni çözümler önermeyi amaçlayan “Ortak Geleceğimiz” başlıklı bir rapor yayınlamıştır. Ayrıca, sürdürülebilir kalkınmanın formülasyonunu sunarak, bu kavramı önemli bir terim olarak vurgulamıştır. Bu terim, gelecek nesillerin ihtiyaçlarının karşılanmasını öncelikli olarak vurgulamaktadır ve sürdürülebilir çevre konusunda bugüne kadar kullanılan en yaygın terim olarak ifade edilmektedir [12].

Dünya Sürdürülebilir Kalkınma İş Konseyi (WBCSD, 1992)

WBCSD, ilk olarak 1992 yılında eko-verimlilik terimini ortaya koymuştur. Bu terime göre eko-verimlilik, çevresel performans ve ekonomik fayda arasındaki ilişkiye dayandırılarak ifade edilmiştir. Aynı yıl, İsviçreli bir iş adamı olan Stephen Schmidheiny, WBCSD'de bu kavramı ayrıntılı olarak ele alan “Değişen Kurs” başlıklı bir kitap yayınlamıştır [13].

Birleşmiş Milletler Çevre ve Kalkınma Konferansı (UNEP, 1992)

1. Uluslararası Dünya Zirvesi'nde, çevrenin korunması ve sosyo-ekonomik kalkınma ile ilgili büyük sorunlara değinilmiştir. Bu zirvede gündem, devlet başkanları tarafından 21.

yüzyılda Sürdürülebilir Kalkınma Planı olarak belirlenmiştir ve Gündem 21 olarak adlandırılmıştır. Sürdürülebilir Kalkınma süreci hem gündemde hem de Dünya Çevre ve Kalkınma Komisyonu'nun çalışmaları ile bu dönemde oldukça dikkat çekmiştir [9].

Faktör 10 Kulübü (1994)

Faktör 10 Kulübü kapsamında dünyadaki doğal kaynak tüketimini azaltmak amacıyla hükümet, sanayi, akademik ve diğer sektörlerden uluslararası liderler gelişmiş ülkelerde kaynak ve enerji verimliliğini arttırmak için on faktör önermiştir. Bu beyan, ekonomik büyümeyi sağlarken doğal kaynakların kullanımını hedefleyen marjinal ilişki politikasını ortadan kaldırmayı hedeflemiştir [14].

Faktör Dört (1998)

Faktör dört, mevcut eko-verimlilik metotlarının uygulanması ile kaynak verimliliğinde dört kat artış sağlamayı öngörürken, aynı zamanda genel yaşam kalitesinin artırılmasını da önemsemektedir. Bu kavram, 1998 yılında Rocky Mountain Enstitüsü tarafından bir kitapta tanıtılmış ve temel bir ekonomik düşünce olarak deklare edilmiştir [14].

Dünya Sürdürülebilir Kalkınma Zirvesi (WSSD, 2002)

Güney Afrika Cumhuriyeti'nin Johannesburg kentinde gerçekleştirilen Dünya Sürdürülebilir Kalkınma Zirvesi'nde, küreselleşmenin dünyada hızla devam etmesine rağmen refahın eşit düzeyde paylaşılmadığı, gelişmiş ve gelişmekte olan ülkelerin sorunlara bakış açılarının farklılaştığı vurgulanmıştır. Ayrıca, zirve kapsamında Gündem 21 Programı'nın tanıtılmasına katkıda bulunulmuş ve uygulanması ile ilgili değerlendirmeler yapılmıştır [9].

1. Uluslararası Eko-verimlilik Konferansı (2004)

Bu konferans, toplumsal eko-verimlilik analizi için karar vermenin bir ölçütü olarak ölçülebilir eko-verimlilik analizi'nin kullandığı operasyonel yöntemleri belirtmiştir ve sürdürülebilirliğin desteklenmesine odaklanmıştır [15].

2. ve 3. Uluslararası Eko-verimlilik Konferansı (2006/2010)

2006 yılında gerçekleştirilen konferansın teması, "Sürdürülebilirlik için Sayısal Eko-Verimlilik Analizi" ve 2004 yılında düzenlenen ilk konferansın geliştirilmesini içermektedir. Konferansın amacı, eko-verimlilik kavramını daha iyi tanıtmak ve endüstride eko-verimliliğin uygulanma yolunu tartışmaktır. Eko-verimlilik uygulamaları için en etkili politikaların tartışılması da konferansın bir diğer alt başlığıdır. 2010 yılında ise, "Sürdürülebilirlik için Modelleme ve Değerlendirme: Eko-İnovasyon ve Tüketim Kılavuzluğu" başlıklı eko-verimlilik kavramı ve uygulanması üzerine üçüncü bir konferans düzenlenmiştir [15].

Birleşmiş Milletler Eko-verimlilik Programı (UNIDO, 2008-2011)

Birleşmiş Milletler Sınai Kalkınma Örgütü (UNIDO) tarafından ulusal düzeyde atılan en önemli adım olan ve "Türkiye'nin Gelişmekte Olan İklim Değişikliği Uyum Stratejisi" kapsamında yürütülen "UNIDO Eko-Verimlilik Programı" gerçekleştirilmiştir. Programda, eko-verimlilik, kapasite oluşturulması ve pilot uygulamaların bilinçlendirilmesi, yaygınlaştırılması ve uygulanması ile ilgili önemli kazanımlar elde edilerek, konuyla ilgili birçok gelişme tetiklenmiştir [5].

Birleşmiş Milletler Çevre Programı Eko-İnovasyon Projesi (UNEP, 2012-2017)

Birleşmiş Milletler Çevre Programı Eko-İnovasyon Projesi, Avrupa Komisyonu

tarafından finanse edilen ve Danimarka Teknik Üniversitesi'nin desteğiyle eko-inovasyonu tanıtmak ve gelişmekte olan ülkelerde eko-yenilik yaratmaya teşvik etmek amacıyla yürütülen bir projedir. İşletmeler, proje adına oluşturulmuş veritabanı üzerinden eko-yenilik el kitabını kullanarak eko-inovasyona nasıl başlamaları gerektiğine dair fikir edinebilmekte ve dünyanın dört bir yanından gelen başarı öykülerini, eko-inovasyon ile ilgili vaka çalışmalarını gözden geçirebilmektedirler [16].

2.2. Eko-verimlilik kavramının tanımları ve amaçları

1970'lerden beri bazı uluslararası kuruluşlar, sivil toplum örgütleri ve hükümetler tarafından eko-verimlilik kavramı geliştirilmiş ve ortaya konan tanımlar tarafından kavramın farklı hedefleri vurgulanmıştır. Bu bölümde, dünya çapında öncelikli olarak kabul gören eko-verimlilik tanımları ve vurguladıkları temel amaçlar sunulmaktadır.

Dünya Sürdürülebilir Kalkınma İş Konseyi (World Business Council for Sustainable Development-WBCSD)

1992'de Dünya Sürdürülebilir Kalkınma İş Konseyi, "Değişen Kurs" başlıklı yayını ile eko-verimlilik kavramını ortaya koymuştur. Bu tanıma göre eko-verimlilik, insani ihtiyaçları karşılayan ve kaliteyi arttıran rekabetçi fiyatlı mal ve hizmetlerin sunulmasıyla sağlanabilmektedir. Dünya Sürdürülebilir Kalkınma İş Konseyi, "eko-verimlilik, ekolojik etkileri ve kaynak yoğunluğunu yaşam döngüsü boyunca aşamalı olarak azaltarak, dünyanın tahmini taşıma kapasitesine uygun bir düzeye çeker." demektedir [17]. Özetle, eko-verimlilik kavramı daha az atık ve kirlilik yaratarak, daha az kaynak tüketimi ile daha fazla mal ve hizmet üretmeye odaklanmaktadır.

Dünya Sürdürülebilir Kalkınma İş Konseyi eko-verimliliğin temel amaçlarını şöyle tanımlamaktadır:

- Ürün veya hizmet yaratırken kullanılan materyal ve enerji miktarını azaltmak,
- Ürün ve hizmet verimliliğini arttırmak,
- Toksik maddelerin çevre üzerindeki yoğunluğunu ve etkilerini azaltmak,
- Geri dönüştürülebilirliği iyileştirmek,
- Yenilenemeyen kaynakların tüketimini azaltmak,
- Ürün dayanıklılığını ve ürün-yaşam döngüsünü iyileştirmek.

Ekonomik İşbirliği ve Kalkınma Örgütü (Organisation for Economic Co-operation and Development-OECD)

Ekonomik İşbirliği ve Kalkınma Örgütü, üretim/tüketim hacminin ve üretilen/tüketilen birim başına düşen çevre etkisinin, çevresel insan faktörleri üzerinde etkili olduğunu savunmaktadır. Bu bağlamda, kirliliğin azaltılmasına, geri dönüştürülebilirliğin artırılmasına, yenilenebilir enerji kaynaklarından faydalanılmasına, ürün veya hizmet üretiminde verimli kaynak kullanımına ve atık minimizasyonuna yönelik işletme, yerel yönetim ve toplum düzeyinde çeşitli girişimlerde bulunulmuştur. Ekonomik İşbirliği ve Kalkınma Örgütü, eko-verimlilik kavramını, insan gereksinimlerini karşılarken artan verimliliği hedefleyen bir ekolojik kavram olarak ifade etmektedir [18]. Bu tanıma göre eko-verimlilik, çıktının (ürün veya hizmetlerin toplam değeri) pay olarak ve girdinin (işletme tarafından yaratılan çevresel etkilerin toplamı) payda olarak belirtildiği bir orandır.

Küresel Kalkınma Araştırma Merkezi (Global Development Research Center-GDRC)

Küresel Kalkınma Araştırma Merkezi'ne göre işletmeler, teknolojik ve süreç değişikliklerine giderek daha fazla mal ve hizmet yaratabilmektedir. Aynı zamanda, çevre odaklı teknolojik yenilikleri ve süreç değişikliklerini içeren eko-verimlilik çalışmaları ile de hem üretim sürecinde hem de ürün veya hizmetin yaşam döngüsü boyunca kaynak tüketimini ve çevresel etkilerini azaltarak daha fazla değer yaratabilmektedir [14].

Küresel Kalkınma Araştırma Merkezi tarafından tanımlanmış olan eko-verimlilik kavramı şu temel amaçları vurgulamaktadır:

- Hammadde, su ve enerji tüketimini azaltmak,
- Çevresel atık ve kirlilik düzeylerini düşürmek,
- Ürün veya hizmet ömrünü yaşam döngüsü prensiplerini göz önünde bulundurarak iyileştirmek,
- Ürün veya hizmetlerin geri dönüştürülebilirlik seviyelerini iyileştirmek,
- Hizmet verimliliğini arttırmak.

Avrupa Çevre Ajansı (European Environment Agency-EEA)

Avrupa Çevre Ajansı eko-verimliliği, daha fazla refah ortamı yaratmayı hedeflerken aynı zamanda doğal çevreyi koruyan bir kavram ve hem mevcut hem de gelecek nesillerin çevreye erişebilirliğini gözeterek insani ihtiyaçların karşılanması için ekonomik faaliyetler ile doğadan fayda elde edilmesi arasında yeterli düzeyde bağlantı kuran bir strateji olarak tanımlanmaktadır. Avrupa Çevre Ajansı tarafından tanımlanan başlıca eko-verimlilik göstergeleri: hava ve su kalitesinin gözetilmesi, doğanın ve canlı çeşitliliğinin korunması, doğal kaynak ve enerji tüketimi, toprak ve kimyasal madde kullanımınıdır [19].

ISO/DIS 14045 Çevresel Yönetim Standartları

ISO/DIS 14045 eko-verimliliği, ürün-yaşam döngüsünün çevresel etkilerini niceliksel olarak ele alan ve işletme değeri ile ölçen bir unsur olarak değerlendirmenin yanı sıra, hammadde tedarigi ile başlayıp, ürün kullanım ömrü sonunda atık bertarafı ile sonuçlanan ürün sistemleri boyunca yöneten bir araç olarak sunmaktadır [20]. Bu nedenle, eko-verimlilik değerlendirmesi yaparken ürün ve üretim süreçlerini birlikte değerlendirmektedir.

Bahsedilen tüm bu küresel anlamda kabul görmüş kuruluşlar tarafından belirlenen eko-verimliliğin temel amaçları Tablo 2'de özetlenmiştir.

Tablo 2. Küresel kuruluşlar tarafından tanımlanmış eko-verimlilik amaçları özet tablosu.

	WBCSD	OECD	GDRC	EEA	ISO/DIS 14045
Doğal kaynak tüketimi ve toprak kullanımının azaltılması	+	+	+	+	+
Kullanılan materyal, su ve enerji miktarının azaltılması	+	+	+	+	+
Atık, kirlilik miktarının ve sera etkisinin azaltılması	+	+	+	+	+
Çevre üzerindeki insan etkisinin azaltılması				+	
Hizmet verimliliğinin artırılması	+	+	+		+

Tablo 2. (Devamı).

Toksik madde miktarının ve yoğunluğunun azaltılması	+	+		+	+
Geri dönüştürülebilirliğin iyileştirilmesi	+	+	+		
Yenilenebilir enerji kaynaklarının kullanımına yönelmesi	+	+			
Ürün dayanıklılığının artırılması	+				+
Ürün/hizmet ömrünün uzatılması ve özelliklerinin geliştirilmesi			+		+
Kömür, yağ, gaz ve mineral kullanım miktarının azaltılması		+		+	

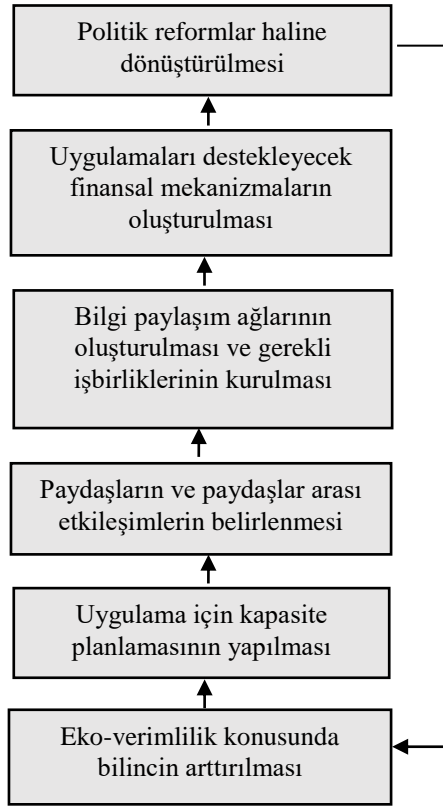
Tabloya göre, eko-verimlilik kapsamında en çok atıfta bulunulan amaçların, doğal kaynak tüketimi ve toprak kullanımının azaltılması, kullanılan materyal, su ve enerji miktarının azaltılması ile atık, kirlilik miktarının ve sera etkisinin azaltılması olduğu görülmektedir. Sonuç olarak, eko-verimlilik uygulamasının birincil amacının çevresel etkileri azaltmak olduğu anlaşılmaktadır.

3. Eko-verimlilik uygulama adımları

Üretim ve hizmet süreçlerinin çevre üzerinde hangi düzeyde etkili olduklarını araştırmak ve süreç bazlı faaliyetleri değerlendirmek ancak eko-verimli uygulamalarla mümkün olabilmektedir. Ayrıca, eko-verimlilik uygulama sürecinin çıktılarını değerlendirerek organizasyonel, finansal ve çevresel profiller geliştirilebilmektedir. Çalışmanın bu kısmında eko-verimliliğin uygulanmasındaki temel adımlar ulusal ve işletme düzeylerinde sunulmaktadır.

3.1. Ulusal Düzeyde Eko-verimlilik Uygulama Adımları

Çeşitli ülkelerin örnekleri incelendiğinde [21, 16, 22], bir ülkede eko-verimliliğin uygulama adımları genellikle kavram bilincinin oluşturulmasıyla başlamış ve sırasıyla: eko-verimlilik konusunda bilincin sağlanması ve uygulama için kapasitenin oluşturulması, paydaşların ve paydaşlar arası etkileşimlerin belirlenmesi, bilgi paylaşım ağlarının oluşturulması ve gerekli işbirliklerinin kurulması [23], uygulamaları destekleyecek finansal mekanizmaların oluşturulması [24] ve politik reformlar haline dönüştürülmesi [25] ile devam etmiştir. Şekil 1'de bu adımlar bir akış diyagramı olarak verilmektedir.



Şekil 1. Ulusal düzeyde eko-verimlilik uygulama adımları.

Görüldüğü gibi, sürecin doğal bir süreç olarak gelişmesi ve en yüksek oranda katılımın ve desteğin sağlanması için ulusal düzeyde eko-verimlilik uygulamaları yapılırken süreç öncelikle toplumsal farkındalığın oluşturulması ile başlayarak aşağıdan yukarıya doğru işlemektedir. Bununla birlikte, bu süreç bazen yerel, kültürel nedenlerden ötürü aşağıdan yukarıya akış göstermek yerine yukarıdan aşağıya doğru da gelişebilmektedir [26].

Ülkeler yerel yapılarına en uygun şekilde eko-verimlilik yaklaşımını benimseyecekleri için bu çalışmada belirtilen ulusal düzeyde eko-verimlilik yaklaşımının uygulama adımları ve sürecin akış yönü ülkeden ülkeye farklılık gösterebilir. Avrupa Birliği ülkeleri, Amerika, Kore, Japonya, Çin ve Vietnam gibi ülkelerde eko-verimlilik çalışmalarının temelini oluşturan kaynak israfını azaltma, yeniden kullanma, geri dönüşüm ve atık yönetimi konularına ilişkin ulusal politikaların geliştirilme süreciyle ilgili örneklerin incelendiği çalışmalar bulunmaktadır [25].

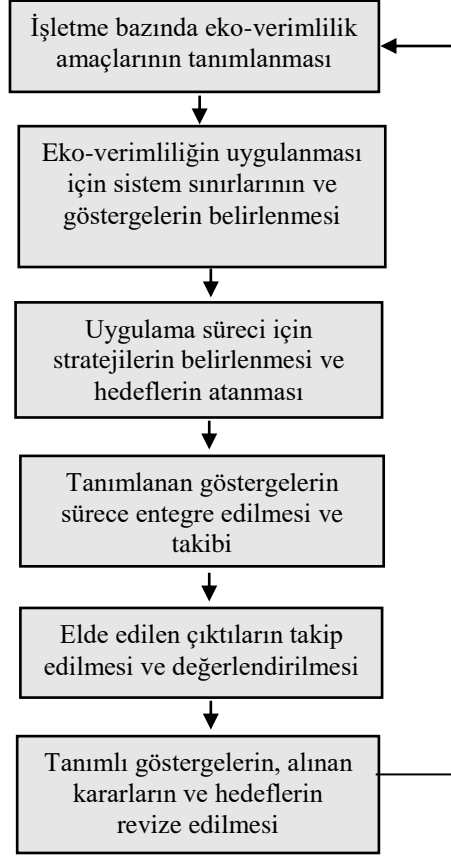
3.2. İşletme düzeyinde eko-verimlilik uygulama adımları

Sanayiciler için eko-verimlilik uygulamaları genellikle artan çevre mevzuatı baskıları ve çevre korumaya yönelik meydana gelen ek maliyetler nedeniyle olsa da bu kavram, hammadde, su ve enerji tüketiminin azaltılması, atık miktarının azaltılması, atıkların geri kazanılması ve üretim ve atık bertaraf maliyetlerinin en aza indirilmesi gibi çeşitli olanakları kapsayacak bir kimlik kazanarak işletmelere önemli katkılar sağlamaktadır [27].

Eko-verimliliğin ana hedeflerinden olan süreç verimliliğinin artırılması, enerji, doğal kaynaklar ve hammadde kullanımının azaltılması, doğrudan işletme verimliliğini arttıran ve işletmeye katma değer sağlayan unsurlardır. Üretim süreçlerinin iyileştirilmesi sayesinde hem çalışma ortamı verimliliği hem de ürün kalitesini artırılabilir. Bu bağlamda, eko-verimlilik uygulama süreci, işletmenin ana hedefleri göz önüne alınarak planlanmalıdır. Bu süreç, işletme bazında eko-verimlilik amaçlarının tanımlanması [19] ile başlamakta ve sırasıyla: eko-verimliliğin uygulanması için sistem sınırlarının ve göstergelerin belirlenmesi [28], uygulama süreci için stratejilerin belirlenmesi ve hedeflerin atanması, tanımlanan göstergelerin sürece entegre edilmesi ve takibi [18], elde edilen çıktıların takip edilmesi ve değerlendirilmesi, tanımlı göstergelerin, alınan kararların ve hedeflerin revize edilmesi şeklindedir. Şekil 3.1’de işletme düzeyinde eko-verimlilik uygulama adımları akış diyagramı olarak verilmektedir. Görüldüğü gibi ulusal düzeyde aşağıdan yukarıya doğru hareket eden eko-verimlilik uygulama sürecinden farklı olarak, işletme düzeyindeki uygulama süreci üst yönetimin sahiplenmesi ile strateji düzeyinde başlayıp, operasyonel düzeye doğru hareket etmektedir.

Eko-verimlilik uygulamasından elde edilen sonuçları yansıtan bazı örnek işletmeler aşağıda verilmiştir [17].

1. STMicroelectronics, eko-verimlilik uygulamaları ile enerji maliyetinden yılda 38 milyon sterlin ve su maliyetinden yılda 8 milyon dolar tasarruf ederek, işletmenin toplam tasarrufunun on yıl içinde 900 milyon dolara ulaşacağı tahmin edilmektedir.
2. United Technologies Corporation, test hücrelerini, atık akışlarını ve yeraltı depolama tanklarını yöneterek yılda 50.000 dolar tasarruf etmektedir.
3. Dupont, enerji tüketimini üçte birine düşürerek yılda 17 milyon dolar tasarruf etmektedir. Aynı zamanda, sera gazı kirliliğini, ürün maliyeti başına %50 oranında azaltmıştır. İşletme, kaynak ve verimlilik artışı sayesinde 2000 yılında 400 milyon dolar tasarruf sağlamıştır.
4. SC Johnson, üretim atıklarını beş yılda %50 oranında düşürürken, üretimi aynı miktarda arttırmıştır. İşletmenin yıllık maliyetten tasarrufu 125 milyondan fazladır.



Şekil 2. İşletme düzeyinde eko-verimlilik uygulama adımları.

Eko-verimlilik stratejileri geliştiren ve uygulayan işletmeler, sadece günümüz düzenlemelerine uygun olmanın avantajını kazanmakla kalmayıp, aynı zamanda gelecekte yaptırımı artacak olan yasal düzenlemeler ve çevre yönetim standartları için de kendilerini hazırlamış olurlar. Böylece eko-verimlilik uygulamaları, işletmelerin imajlarını daha güçlü hale getirmelerini sağlayarak daha yüksek standartları karşılayan ürünlerle yeni pazar fırsatlarını yakalamalarını mümkün kılar.

4. Sonuçlar ve tartışma

Çevre dostu üretim ilkeleri kapsamında, temiz ve yenilenebilir enerji kaynaklarından yararlanma, temiz teknolojilere geçme eğilimi ve enerji verimliliğinin gözetilmesi, sadece iklim değişikliğine neden olan etkilerin azaltılması için değil, aynı zamanda işletmelerin rekabet ortamında fark yaratması açısından da önemlidir. Son yıllarda küresel, ekonomik ve çevresel krizler nedeniyle üretim ve hizmet süreçlerinin sürdürülebilir sistemlerle bütünleştirilmesi için sürekli artan bir çabanın olduğu gözlenmektedir. Bu açıdan, eko-verimli süreçler, kaynak tüketimini minimize etmeye odaklanırken, çevresel etkileri azaltarak insan ihtiyaçlarını karşılayan mal ve hizmetler sağlamaktadır [29]. Eko-verimlilik kavramı sayesinde, daha az doğal kaynak, hammadde, enerji ve su kullanımı ile daha verimli süreçler sağlanabilirken, atık oluşumu ve kirlilik de en aza indirgenmektedir. Eko-verimliliğin uygulanması

yalnızca süreç değişikliğine gidilerek değil, üretim süreçlerinde iyileştirmelerin yapılması, çevre dostu hammaddelerin kullanılması, ekipman değişiklikleri, üretim planlaması, ürün/tasarım değişikliği ve atıkların geri dönüştürülmesi gibi operasyonlar ile de sağlanabilmektedir.

Günümüzde yeni teknolojilere kolay erişebilme imkânı ve alternatif uygulamaların sayısı arttıkça, sanayide rekabetçi ortam git gide hız kazanmaktadır. Ancak bu süreç, doğal kaynak kullanımında çevreye zarar verebilecek boyuta da ulaşabilir. Çevre korumaya yönelik artan mevzuat baskıları ve ek maliyetler, işletmeleri alternatif çözümler üretmeye yöneltmektedir. Bu nedenle, işletmeler hem hukuki boyutu hem de çevresel sorunları göz önünde bulundurarak süreçlerini geliştirmek için daha etkili çözümler üretmek adına kendilerini zorlamalıdır. Süreçlerin sürdürülebilir şekilde yeniden yapılandırılması ve yeni teknolojilere entegre edilmesi eko-verimliliğin sağlanabilmesi için gereklidir. Özellikle üretim süreçlerinde girdi yönetiminin verimli bir şekilde yapılması gerektiği, aksi takdirde sürdürülebilirliğin sağlanamayacağı literatürdeki birçok kaynakta vurgulanmaktadır. Ayrıca, bu süreç işletme açısından göz önüne alındığında, üretim sonrasında oluşan atıkların yönetilmesi daha fazla maliyete neden olacaktır.

Özellikle uluslararası boyutta kurumsallaşmış işletmelerin enerji ve kaynak verimliliği, atık yönetimi gibi eko-verimlilik kapsamında değerlendirilen konulara odaklandığı ve yenilikçi düşünceler ile teknolojik çözümler getirdikleri görülmektedir. Bu bağlamda, işletmelerin atık yönetimi odaklı teknolojik çözümleri kullanmaları ve üretim süreçlerinde atık ve kaynak verimliliğine yönelik yapacakları Ar-Ge çalışmaları hem atık ve maliyet konularını çözümleyecek, hem de sürdürülebilir bir çevre için proaktif bir hamle olacaktır [27]. Bu işletmeler, geliştirecekleri etkin çözümler ile günümüzün rekabetçi ortamında artan müşteri taleplerini kolayca yanıtlayabilecek ve aynı zamanda çevreye duyarlı bir işletme imajını kazanacaklardır.

Hem işletme hem ulusal düzeyde kaynakların etkin kullanımının büyük önem kazandığı günümüzde, eko-verimlilik kavramının önemi ülkemiz açısından da oldukça fazladır. Bu konuda toplumsal ve sanayi bilincinin artırılması ileride yapılacak çalışmalarda eko-verimlilik yaklaşımlarının uygulama sürecinin çok daha etkin şekilde gerçekleşmesine yardımcı olacaktır. Ayrıca, bu kavrama karşı sosyal ve endüstriyel farkındalığı arttırmak için yazılı ve görsel medya araçları kullanılabilir, topluma yönelik bilgilendirme etkinlikleri ve uygulamacılara yönelik başarı örneklerinin paylaşıldığı etkinlikler düzenlenebilir.

Kaynaklar

- [1] Demirer, G.N., Kirlilik Önleme Yaklaşımlarının Temel Prensipleri, **TMMOB Çevre ve Mühendis Dergisi**, 25, 13-20, (2003).
- [2] Kabongo, J.D., ve Boiral, O., Doing more with less: building dynamic capabilities for eco efficiency, **Business Strategy and the Environment**, 26(7), 956-971, (2017).
- [3] Strasburg, V.J., ve Jahno, V D., Application of eco-efficiency in the assessment of raw materials consumed by university restaurants in Brazil: A case study, **Journal of Cleaner Production**, 161, 178-187, (2017).

- [4] Frondel M., Horbach J. ve Rennings K., End-of-Pipe or Cleaner Production? An empirical comparison of environmental innovation decisions across OECD Countries, Centre for European Economic Research, Discussion Paper No. 04-82, (2004).
- [5] İzmir’de Eko-verimlilik stratejisi uygulamalarının yaygınlaştırılması’na yönelik strateji çalışması raporu, İzmir Kalkınma Ajansı (İZKA), 2, (2012).
- [6] Zhelyazkova, H., Eco-efficiency indicators: concept, types and applicability, **Economy&Business Journal**, 10, 322-331, (2016).
- [7] Carlson, R., **Silent Spring**, (1962)
<http://www.rachelcarson.org/SilentSpring.aspx> (24.07.2018)
- [8] Meadows, D.H., **The Limits to Growth**, (1972)
<http://www.donellameadows.org/wp-content/userfiles/Limits-to-Growth-digital-scan-version.pdf> (27.07.2018)
- [9] UNEP DTIE Cleaner Production, **Industry and Environment**, 25(3-4), (2002).
- [10] Ochsner, M., Chess, C., Greenberg, M., Pollution prevention at the 3M corporation: Case study insights into organizational incentives, resources, and strategies, **Waste Management**, 15, 663-672, (1995).
- [11] Carl, H., Environmentalism in the 80’s, (1981).
<https://www.nytimes.com/1981/05/31/nyregion/environmentalism-in-the-80-s.html> (27.07.2018)
- [12] Bacher, J., The brundtland report: our common future, **Peace Magazine**, 11, (1987).
- [13] Schmidheiny S., Changing course: a global business perspective on development and the environment, **Journal of Environmental Protection**, 7(1), 1, (1992).
- [14] Srinivas, H., Sustainability concepts, (2015).
<https://www.gdrc.org/sustdev/concepts.html> (24.07.2018)
- [15] History of eco-efficiency, TRUST IN-European Training Partnership on Sustainable Innovation, (2012).
- [16] The eco-innovation Project, UNIDO Eco-efficiency Programme, United Nations Environment Programme (UNEP), (2012).
<https://www.unep.org/ecoinnovationproject> (24.07.2018)
- [17] Eco-efficiency Learning Module, World Business Council of Sustainable Development (WBCSD), 3, (2006).
- [18] Eco-efficiency, Organization for Economic Co-operation and Development (OECD), 19, (1998).
- [19] Making sustainability accountable: Eco-efficiency, resource productivity and innovation, European Environment Agency (EEA), 11(6), (1999).
- [20] Environmental Management-Eco-efficiency assessment of product systems-Principles, requirements and guidelines, **ISO 14045 International Standard**, 1(3-4), (2012).
- [21] Luken, R.A. ve Navratil, J., A programmatic review of UNIDO/UNEP national cleaner production centres, **Journal of Cleaner Production**, 12(3), 195-205, (2004).
- [22] Measuring Eco-efficiency: A guide to reporting company performance, World Business Council of Sustainable Development (WBCSD), (2000).
- [23] Yedla, S. ve Park, H.S., Eco-industrial networking for sustainable development: review of issues and development strategies, **Clean Technologies and Environmental Policy**, 19, 2, 391-402, (2017).

- [24] Kosonen, K. ve Nicodeme, G., The role of fiscal instruments in environmental policy, CESifo Working Paper Series No. 2719, (2009). <https://ssrn.com/abstract=1437501> (12.10.2018)
- [25] Sakai, S.I., Yoshida, H., Hirai, Y., Asari, M., Takigami, H., Takahashi, S. ve Douvan, A.R., International comparative study of 3R and waste management policy developments, **Journal of Material Cycles and Waste Management**, 13(2), 86-102, (2011).
- [26] Ghisellini, P., Cialani, C., ve Ulgiati, S., A review on circular economy: the expected transition to a balanced interplay of environmental and economic systems, **Journal of Cleaner Production**, 114, 11-32, (2016).
- [27] Atalay, N., Türkiye’de temiz üretim (eko-verimlilik) alanında mevcut durum, **T.C. Bilim, Sanayi ve Teknoloji Bakanlığı Anahtar Dergisi**, (2012).
- [28] Ferrer, J. B., Negny, S., Robles, G.C., ve Le Lann, J.M., Eco-innovative design method for process engineering, **Computers & Chemical Engineering**, 45, 137-151, (2012).
- [29] Gaudino, S., Goia, I., Grignani, C., Monaco, S., and Sacco, D., Assessing agro-environmental performance of dairy farms in northwest Italy based on aggregated results from indicators, **Journal of Environmental Management**, 140, 120-134, (2014).

Adveksiyon difüzyon denklemi için sektik B-spline Galerkin metodu

Evren TOPCU^{1,*}, Dursun IRK²

¹Eskişehir Fatih Fen Lisesi, Eskişehir.

² Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Matematik-Bilgisayar Bölümü, Meşelik Kampüsü, Eskişehir.

Geliş Tarihi (Received Date): 19.08.2018

Kabul Tarihi (Accepted Date): 18.10.2018

Özet

Bu çalışmada sektik B-spline Galerkin metodu adveksiyon difüzyon denkleminin yaklaşık çözümü için önerilmiştir. Önerilen metotta zaman parçalanması için doğruluğu iki, üç ve dört olan tek adımlı yöntemler kullanılmıştır. Doğruluğu iki olan yöntem Crank-Nicolson yöntemi olarak ta bilinmektedir. İki sayısal örnek kullanılarak önerilen yöntemlerin etkinliği ve doğruluğu kontrol edilmiştir.

Anahtar kelimeler: Adveksiyon difüzyon denklemi, Sektik B-spline, Galerkin yöntemi.

Sextic B-spline Galerkin method for advection diffusion equation

Abstract

In this study, sextic B-spline Galerkin finite element method is proposed for numerical solution of the advection diffusion equation. In the method, second, three and fourth order single step methods are used for the time integration. Second order single step method is also known as Crank Nicolson method. Two numerical examples are studied to illustrate the accuracy and the efficiency of the proposed methods.

Keywords: Advection diffusion equation, sextic B-spline, Galerkin method.

* Evren TOPCU, evrentopcu2001@hotmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-8087-7130>

Dursun IRK, dirk@ogu.edu.tr, <https://orcid.org/0000-0002-3340-1578>

1. Giriş

Konveksiyon difüzyon denklemi olarak ta bilinen bir boyutlu sabit katsayılı adveksiyon difüzyon denklemi (AD denklemi)

$$u_t + \alpha u_x - \mu u_{xx} = 0, \quad a \leq x \leq b \quad (1)$$

formunda olup

$$\begin{aligned} u(a,t) = u(b,t) = 0, \\ u_x(a,t) = u_x(b,t) = 0, \end{aligned} \quad , t \in [0, T] \quad (2)$$

sınır şartlarına ve

$$u(x,0) = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (3)$$

başlangıç koşuluna sahiptir. Denklemdaki α sabit katsayısı bir akışkanın hızına ve μ ise sabit difüzyon katsayısına karşılık gelmektedir. Ayrıca denklemdaki u ise konum ve zaman karşılık gelen x ve t bağımsız değişkenlerine bağlı bilinmeyen bir fonksiyondur.

Birçok bilim dalındaki problemler AD denklemi ile modellenebilmektedir[1]. Bu tip problemlerin birçoğu keyfi sınır ve başlangıç koşullar altında tam olarak çözülemediğinden problemlerin yaklaşık çözümleri için sayısal yöntemler önerilmektedir. Dolayısıyla AD denkleminin yaklaşık çözümü için de sonlu farklar [2,3] ve sonlu elemanlar [4,5,6,7,8] gibi birçok sayısal yöntem önerilmiştir. AD denklemi veya kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü için önerilen yöntemlerin birçoğunda öncelikle denklem zamana ve konuma göre parçalanmaktadır. Zamana göre parçalanma işlemi yapılırken ise genellikle doğruluğu 2 olan Crank-Nicolson yöntemi kullanılmaktadır.

Bu çalışmada AD denkleminin yaklaşık çözümü yapılırken zaman parçalanması işleminde doğruluğu 2, 3, ve 4 olan 3 farklı yöntem önerilecektir. Konum parçalanması için ise sektik B-spline Galerkin sonlu elemanlar yöntemi kullanılacaktır. Sonlu elemanlar yöntemi uygulamalı matematik ve mühendislikteki bir çok sayısal simülasyon için yaygın olarak kullanılan bir yöntem olup ilk kez 1960 yılında Clough [9] tarafından kullanılmıştır. Bununla beraber yöntem fikri daha eskilere dayanmaktadır. 19. yüzyılın sonlarında ve 20. yüzyılın başlarında Ritz [10] ve Rayleigh [11,12] tarafından varyasyonel problemlerin çözümleri için yapılan çalışmalar mevcuttur. Galerkin [13] de sınır değer problemlerinin çözümleri için sonlu elemanlar metodu üzerinde çalışmalar yapmıştır. Sonlu elemanlar yönteminde problemin tanım kümesi öncelikle sonlu eleman adı verilen alt aralıklara bölünür. Daha sonra her bir alt aralıkta sürekli fonksiyonların cebirsel polinomların bir lineer birleşimi olarak yazılabileceği fikrinden yararlanılarak yaklaşım fonksiyonları oluşturulur. Son olarak cebirsel bağıntılardaki bilinmeyen katsayıların değerleri çözümü aranan denklemi bölünme noktalarında sağlayacak şekilde elde edilirler. Sonlu elemanlar metodu Galerkin, kolokasyon, en küçük kareler vb metodlarını içermektedir. Bu çalışmada AD denkleminin yaklaşık çözümü araştırılırken ağırlık fonksiyonu olarak yaklaşım için kullanılan taban fonksiyonun

kullanıldığı bir sonlu elemanlar yöntemi olan Galerkin metodu kullanılacaktır [14]. Yaklaşım fonksiyonu olarak ise sektik B-spline fonksiyonlar kullanılacaktır.

2. Metodun uygulanması

Sayısal çözüm aranırken konum zaman düzlemi Δt zaman adımı ve h konum adımı uzunluklarında parçalanacaktır. Bu durumda bölünme noktalarındaki bilinmeyen fonksiyonun tam değeri $x_m = a + mh$, $t_n = n\Delta t$ olmak üzere

$$u(x_m, t_n) = u_m^n, \quad m = 0, 1, \dots, N; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

olarak gösterilecektir. U_m^n notasyonu ise u_m^n tam çözümünün yaklaşık değerine karşılık gelecektir.

2.1. Zaman parçalanması

Adveksiyon difüzyon denklemi

$$u_t = \mu u_{xx} - \alpha u_x \quad (4)$$

olarak düzenlenir ve

$$u^{n+1} = u^n + \theta_1 u_t^{n+1} + \theta_2 u_t^n + \theta_3 u_{tt}^{n+1} + \theta_4 u_{tt}^n \quad (5)$$

tek adımlı metodu önerilirse

- (5) metodunda $\theta_1 = \theta_2 = \Delta t / 2, \theta_3 = \theta_4 = 0$ seçimi yapıldığında zaman parçalanması için doğruluk 2 olacaktır (M1). Ayrıca M1 metodu Crank-Nicolson metodu olarak ta bilinmektedir.
- (5) metodunda $\theta_1 = \frac{2\Delta t}{3}, \theta_2 = \frac{\Delta t}{3}, \theta_3 = -\frac{(\Delta t)^2}{6}, \theta_4 = 0$ seçimi yapıldığında zaman parçalanması için doğruluk 3 olacaktır (M2).
- (5) metodunda $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\Delta t}{2}, \theta_3 = -\frac{(\Delta t)^2}{12}, \theta_4 = \frac{(\Delta t)^2}{12}$ seçimi yapıldığında zaman parçalanması için doğruluk 4 olacaktır (M3).

(5) yöntemi ile birlikte (4) formundaki adveksiyon difüzyon denklemi kullanılırsa

$$u^{n+1} - \theta_1 (\mu u_{xx} - \alpha u_x)^{n+1} - \theta_3 (\mu^2 u_{xxxx} - 2\alpha \mu u_{xxx} + \alpha^2 u_{xx})^{n+1} = u^n + \theta_2 (\mu u_{xx} - \alpha u_x)^n + \theta_4 (\mu^2 u_{xxxx} - 2\alpha \mu u_{xxx} + \alpha^2 u_{xx})^n \quad (6)$$

olarak (4) adveksiyon difüzyon denkleminin zaman parçalanması elde edilmiş olur.

2.2. Konum parçalanması

$[a, b]$ konum aralığı $h = x_m - x_{m-1} = (b - a) / N$, $m = 1, \dots, N$ olmak üzere,

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

olarak parçalanırsın. Bu parçalanma üzerinde φ_m , $m = -3, \dots, N + 2$ sektik B-spline fonksiyonları $g(x_m) = (x - x_m)^6$ olmak üzere

$$\varphi_m(x) = \frac{1}{h^6} \begin{cases} g(x_{m-3}), & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ g(x_{m-3}) - 7g(x_{m-2}), & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ g(x_{m-3}) - 7g(x_{m-2}) + 21g(x_{m-1}), & [x_{m-1}, x_m] \\ g(x_{m-3}) - 7g(x_{m-2}) + 21g(x_{m-1}) - 35g(x_m), & [x_m, x_{m+1}] \\ g(x_{m+4}) - 7g(x_{m+3}) + 21g(x_{m+2}), & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ g(x_{m+4}) - 7g(x_{m+3}), & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ g(x_{m+4}), & [x_{m+3}, x_{m+4}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (7)$$

şeklinde tanımlanır [15,16]. Problemin tanım aralığı üzerinde $u(x,t)$ tam çözümü için $U(x,t)$ yaklaşık çözümü sektik B-spline fonksiyonların bir lineer birleşimi olarak

$$U(x,t) = \sum_{j=-3}^{N+2} \delta_j \varphi_j \quad (8)$$

formunda yazılabilir. Yaklaşımında verilen δ_j zamana bağlı bilinmeyen parametredir. (7-8) kullanılarak bölünme noktalarında ki bilinmeyen fonksiyon ve ilk 5 türevi için yaklaşımlar

$$U_m = U_N(x_m) = \delta_{m-3} + 57\delta_{m-2} + 302\delta_{m-1} + 302\delta_m + 57\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \quad (9)$$

$$U'_m = U'_N(x_m) = \frac{6}{h} (\delta_{m+2} + 25\delta_{m+1} + 40\delta_m - 40\delta_{m-1} - 25\delta_{m-2} - \delta_{m-3}), \quad (10)$$

$$U''_m = U''_N(x_m) = \frac{30}{h^2} (\delta_{m+2} + 9\delta_{m+1} - 10\delta_m - 10\delta_{m-1} + 9\delta_{m-2} + \delta_{m-3}), \quad (11)$$

$$U'''_m = U'''_N(x_m) = \frac{120}{h^3} (\delta_{m+2} + \delta_{m+1} - 8\delta_m + 8\delta_{m-1} - \delta_{m-2} - \delta_{m-3}), \quad (12)$$

$$U^{(4)}_m = U^{(4)}_N(x_m) = \frac{360}{h^4} (\delta_{m+2} - 3\delta_{m+1} + 2\delta_m + 2\delta_{m-1} - 3\delta_{m-2} + \delta_{m-3}), \quad (13)$$

$$U^{(5)}_m = U^{(5)}_N(x_m) = \frac{720}{h^5} (-\delta_{m+2} + 5\delta_{m+1} - 10\delta_m + 10\delta_{m-1} - 5\delta_{m-2} + \delta_{m-3}) \quad (14)$$

olarak hesaplanabilir. $\xi = x - x_m$ koordinat dönüşümü yapılırsa $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu aralığı $[0, h]$ aralığına dönüşecektir. Bu durumda $[0, h]$ aralığı üzerinde ξ -ye göre sektik B-spline şekil fonksiyonları

$$\varphi_{m-3}(\xi) = \left(\frac{h-\xi}{h}\right)^6, \quad (15)$$

$$\varphi_{m-2}(\xi) = \frac{(2h-\xi)^6 - 7(h-\xi)^6}{h^6}, \quad (16)$$

$$\varphi_{m-1}(\xi) = \frac{(3h-\xi)^6 - 7(2h-\xi)^6 + 21(h-\xi)^6}{h^6}, \quad (17)$$

$$\varphi_m(\xi) = \frac{(3h+\xi)^6 - 7(2h+\xi)^6 + 21(h+\xi)^6 - 35\xi^6}{h^6}, \quad (18)$$

$$\varphi_{m+1}(\xi) = \frac{(2h+\xi)^6 - 7(h+\xi)^6 + 21\xi^6}{h^6}, \quad (19)$$

$$\varphi_{m+2}(\xi) = \frac{(h+\xi)^6 - 7\xi^6}{h^6}, \quad (20)$$

$$\varphi_{m+3}(\xi) = \frac{\xi^6}{h^6} \quad (21)$$

olacak şekilde bulunabilir. φ_i şekil fonksiyonlarının lineer birleşimiyle

$$\delta_i, i = m-3, \dots, m+3$$

zaman parametresine göre $[0, h]$ aralığı için yaklaşım ise

$$U^e = U(\xi, t) = \sum_{j=m-3}^{m+3} \delta_j(t) \varphi_j(\xi) \quad (22)$$

olacaktır. $W(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere (6) denkleminde Galerkin metodu uygulandığında öncelikle

$$\begin{aligned} & \int_a^b W(x) \left(u^{n+1} - \theta_1 (\mu u_{xx} - \alpha u_x)^{n+1} \right. \\ & \left. - \theta_3 (\mu^2 u_{xxxx} - 2\alpha \mu u_{xxx} + \alpha^2 u_{xx})^{n+1} \right) dx = \\ & \int_a^b W(x) \left(u^n + \theta_2 (\mu u_{xx} - \alpha u_x)^n \right. \\ & \left. + \theta_4 (\mu^2 u_{xxxx} - 2\alpha \mu u_{xxx} + \alpha u_{xx})^n \right) dx \end{aligned} \quad (23)$$

elde edilecektir. Galerkin yönteminde $W(x)$ ağırlık fonksiyonu için sektik B-spline şekil fonksiyonları ve tam çözüm için ise (22) kullanıldığında (23) denklemin için $[0, h]$ aralığı üzerindeki yaklaşım

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-3}^{m+3} \left[\int_0^h (\varphi_i \varphi_j - \theta_1 \varphi_i (\mu \varphi_j'' - \alpha \varphi_j')) d\xi - \right. \\
& \left. \theta_3 \int_0^h (\mu^2 \varphi_i \varphi_j'''' - 2\alpha \mu \varphi_i \varphi_j'' + \alpha^2 \varphi_i \varphi_j'') d\xi \right] \delta_j^{n+1} - \\
& \sum_{j=m-3}^{m+3} \left[\int_0^h (\varphi_i \varphi_j + \theta_2 \varphi_i (\mu \varphi_j'' - \alpha \varphi_j')) d\xi + \right. \\
& \left. \theta_4 \int_0^h (\mu^2 \varphi_i \varphi_j'''' - 2\alpha \mu \varphi_i \varphi_j'' + \alpha^2 \varphi_i \varphi_j'') d\xi \right] \delta_j^n
\end{aligned} \tag{24}$$

olacaktır. Burada i ve j indisleri $m-3, \dots, m+3$ ve $m=0, 1, \dots, N-1$ değerlerini almaktadır. (24) yaklaşımı

$$\begin{aligned}
A_{ij}^e &= \int_0^h \varphi_i \varphi_j d\xi, & B_{ij}^e &= \int_0^h \varphi_i \varphi_j'' d\xi, \\
C_{ij}^e &= \int_0^h \varphi_i \varphi_j' d\xi, & D_{ij}^e &= \int_0^h \varphi_i \varphi_j'''' d\xi, \\
E_{ij}^e &= \int_0^h \varphi_i \varphi_j''' d\xi, & (\delta_j^{n+1})^e &= (\delta_{m-3}, \dots, \delta_{m+4})^T.
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \left[A^e - \theta_1 (\mu B^e - \alpha C^e) \right. \\
& \left. - \theta_3 (\mu^2 D^e - 2\alpha \mu E^e + \alpha^2 B^e) \right] (\delta^{n+1})^e - \\
& \left[A^e + \theta_2 (\mu B^e - \alpha C^e) \right. \\
& \left. + \theta_4 (\mu^2 D^e - 2\alpha \mu E^e + \alpha^2 B^e) \right] (\delta^n)^e
\end{aligned} \tag{25}$$

eleman matrisleri kullanılarak matris formunda yazılabilir. $m=0, 1, \dots, N-1$ için tüm elemanların birleştirilmesi sonucunda δ zaman parametresine göre aşağıdaki lineer sistem elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \left[A - \theta_1 (\mu B - \alpha C) - \right. \\
& \left. \theta_3 (-\mu^2 D - 2\alpha \mu E + \alpha^2 B) \right] \delta_j^{n+1} = \\
& \left[A + \theta_2 (\mu B - \alpha C) + \right. \\
& \left. \theta_4 (-\mu^2 D - 2\alpha \mu E + \alpha^2 B) \right] \delta_j^n
\end{aligned} \tag{26}$$

(26) sisteminin iterasyon ile çözülebilmesi için öncelikle $\delta_{-3}^0, \dots, \delta_{N+2}^0$ başlangıç değerleri

$$\begin{aligned}
 U(x_m, 0) &= \delta_{m-3}^0 + 57\delta_{m-2}^0 + 302\delta_{m-1}^0 + 302\delta_m^0 \\
 &\quad + 57\delta_{m+1}^0 + \delta_{m+2}^0, \quad m = 0, \dots, N \\
 U_x(x_0, 0) &= U_{xx}(x_0, 0) = U_{xxx}(x_0, 0) = 0, \\
 U_x(x_N, 0) &= U_{xx}(x_N, 0) = 0
 \end{aligned} \tag{27}$$

olarak verilen başlangıç şart ve sınır şartlar kullanılarak hesaplanmalıdır. x_m , $m = 0, \dots, N$ noktalarındaki U_m^{n+1} yaklaşık değeri ise $n\Delta t$ zamanında (26) sisteminden bulunan δ_m^n eleman parametreleri ve sektik B-spline yaklaşımı kullanılarak hesaplanabilir.

3. Test problemleri

Test problemlerinde önerilen üç metot için doğruluk

$$L_\infty = \max_m |u_m - U_m|, \tag{28}$$

$$\text{Yakınsaklık Oranı} = \frac{\log \left| \frac{(L_\infty)_{h_i}}{(L_\infty)_{h_{i+1}}} \right|}{\log \left| \frac{h_i}{h_{i+1}} \right|}, \tag{29}$$

formülü ile verilen yakınsaklık oranının (YO) hesaplanması ile kontrol edilecektir. YO hesaplanırken kullanılan $(L_\infty)_{h_i}$, h_i . konum artımı için bulunan L_∞ hata normuna karşılık gelmektedir.

2.2. Birinci test problemi

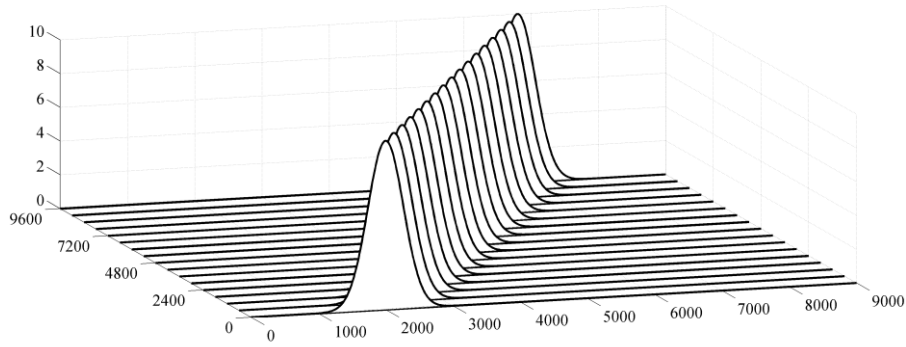
İlk test probleminde $\mu = 0$ seçimi yapılarak saf adveksiyon yayılımı çalışılacaktır. Bu durumda adveksiyon difüzyon denklemi

$$u(x, t) = 10 \exp \left(-\frac{(x - \tilde{x}_0 - \alpha t)^2}{2\rho^2} \right) \tag{30}$$

analitik çözümüne sahiptir. Sayısal çözüm için önerilen algoritmalar $[0, 9000]$ konum aralığında $\alpha = 0.5m/sn$ akış hızı, $\tilde{x}_0 = 2000m$ dalganın tepe noktasının konumu ve $\rho = 264$ seçimleri yapılarak $t = 9600sn$ zamanına kadar çalıştırılacaktır. Bu durumda problem

$$u(x, 0) = 10 \exp \left(-\frac{(x - \tilde{x}_0)^2}{2\rho^2} \right) \tag{31}$$

başlangıç koşuluna sahip bir dalganın $\alpha = 0.5m/sn$ akış hızıyla bir kanalda $t = 9600sn$ zamanına kadarki hareketini modellemektedir. Dolayısıyla dalga $96000sn$ içinde başlangıç noktasından $4800m$ uzağa hareket edecek ve bu esnada dalganın genliği 10 olarak sabit kalacaktır. İlk olarak $h = \Delta t = 20$ seçimleri yapılarak M3 programı $t = 9600sn$ zamanına kadar çalıştırılmış ve dalganın başlangıç durumu ve belirli zamanlardaki durumu Şekil 1 de çizilmiştir. Şekilden görüldüğü gibi zaman boyunca dalganın şeklinde herhangi bir bozulma olmamaktadır.



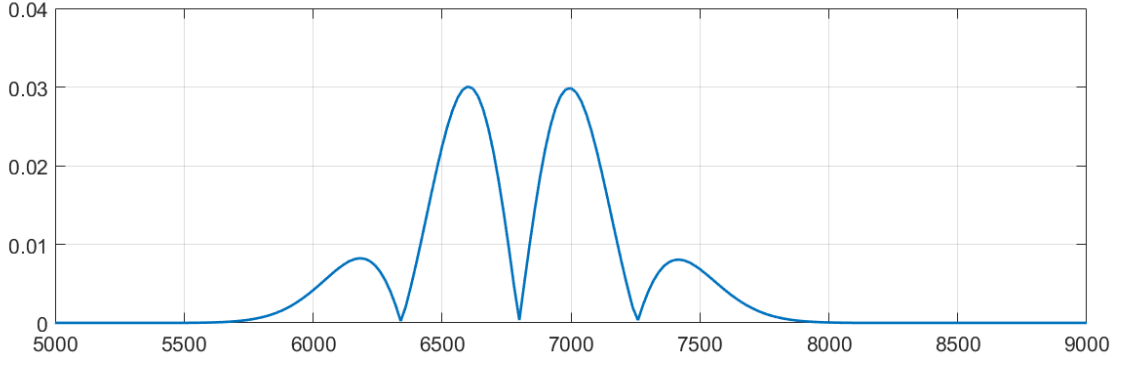
Şekil 1: $h = \Delta t = 20$ için dalganın hareketi.

Programlar $t = 9600sn$ zamanına kadar çalıştırılarak tüm yöntemler için L_∞ hata normları ve yakınsaklık oranları farklı zaman ve konum artımları için Tablo 1 de verilmiştir. Tablo incelendiğinde en iyi sonucu M3 yönteminin verdiği ve YO' larının yöntemlerin teorik değerleri ile uyumlu olduğu görülebilir.

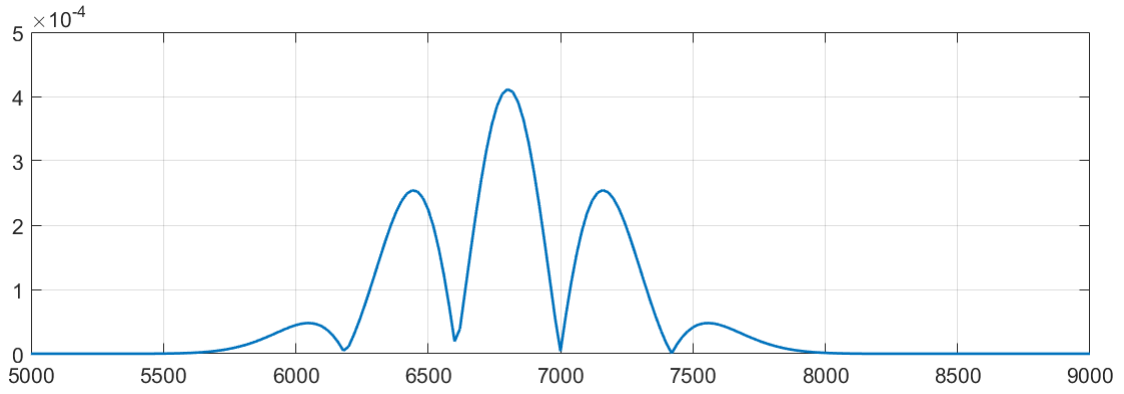
Tablo 1: L_∞ hata normları ve YO.

M1			M2		M3	
$h = \Delta t$	L_∞	YO	L_∞	YO	L_∞	YO
200	2.32	1.66	0.326	2.73	0.0378	4.43
100	0.734	2.95	0.049	2.94	0.00175	3.92
50	0.190	2.01	0.00638	2.99	0.000116	3.99
20	0.0301		0.000411		0.00000300	

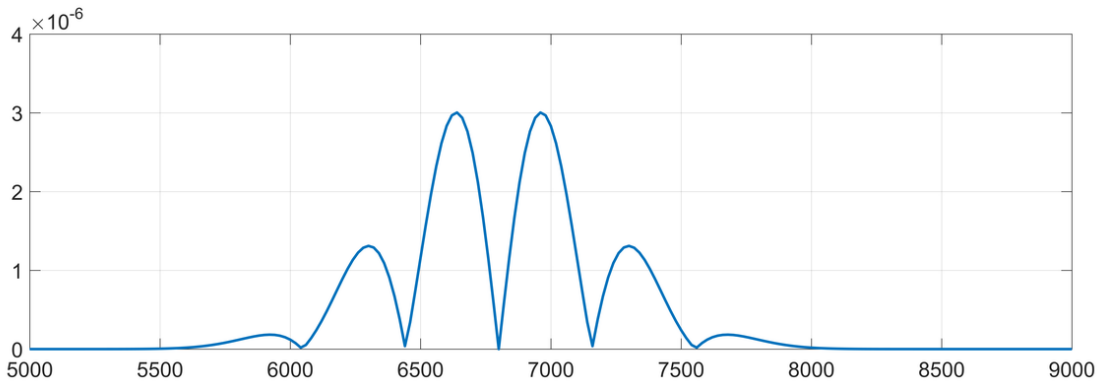
$t = 9600sn$ zamanında yaklaşık çözüm ile analitik çözüm arasındaki farkın mutlak değeri diğer bir ifade ile mutlak hata grafikleri her bir önerilen metot için Şekil 2 de çizilmiştir. Şekil 2 incelendiğinde her bir metot için maksimum hatanın konum aralığının orta noktalar civarında geldiği ve bu sebeple de sınır şartlarının uygulamasından kaynaklı bir hatanın oluşmadığı söylenebilir.



Şekil 2a: $h = \Delta t = 20$ için mutlak hata (M1).



Şekil 2b: $h = \Delta t = 20$ için mutlak hata (M2).



Şekil 2c: $h = \Delta t = 20$ için mutlak hata (M3).

2.2. İkinci test problemi

İkinci test probleminde adveksiyon ve difüzyon etkinin birlikte gerçekleştiği

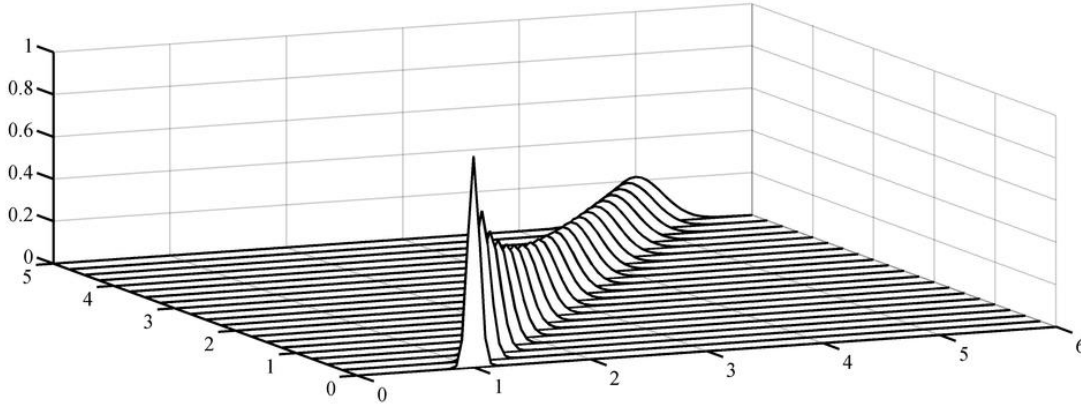
$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp\left(-\frac{(x-\tilde{x}_0-\alpha t)^2}{\mu(4t+1)}\right) \quad (32)$$

analitik çözümü kullanılacaktır. Bu çözüm genliği $1/\sqrt{4t+1}$, başlangıçtaki tepe noktası

\tilde{x}_0 olup $[a, b]$ konum aralığının da sağa doğru genliğini kaybederek T zamanına kadar sabit bir α hızıyla hareket eden dalgayı modellemektedir. Problem için başlangıç şartı

$$u(x, 0) = \exp\left(-\frac{(x - \tilde{x}_0)^2}{\mu}\right) \quad (33)$$

olacağından ikinci test problemi başlangıç anında yüksekliği 1 olan bir dalganın zaman içinde sönmelerini modellemektedir. Önerilen sayısal yöntemler $0 \leq x \leq 9$ konum aralığında $\alpha = 0.8m/sn$, $\mu = 0.005m^2/sn$ parametreleri ve $\tilde{x}_0 = 1$ başlangıç tepe noktası seçimi yapılarak programlar $t = 5$ zamanına kadar çalıştırılmıştır. $h = \Delta t = 0.005$ zaman ve konum artımları kullanılarak M3 yöntemi için başlangıç anındaki ve $t = 5$ zamanına kadarki bazı zamanlardaki dalgalar $[0, 9]$ konum aralığı boyunca Şekil 3 te gösterilmiştir. Şekilden görüldüğü gibi dalganın başlangıç noktasından 4 metre uzağa gittiği ve zaman boyunca dalganın genliğinde bir küçülme meydana geldiği görülebilir.



Şekil 3: $h = \Delta t = 0.005$ için dalganın hareketi.

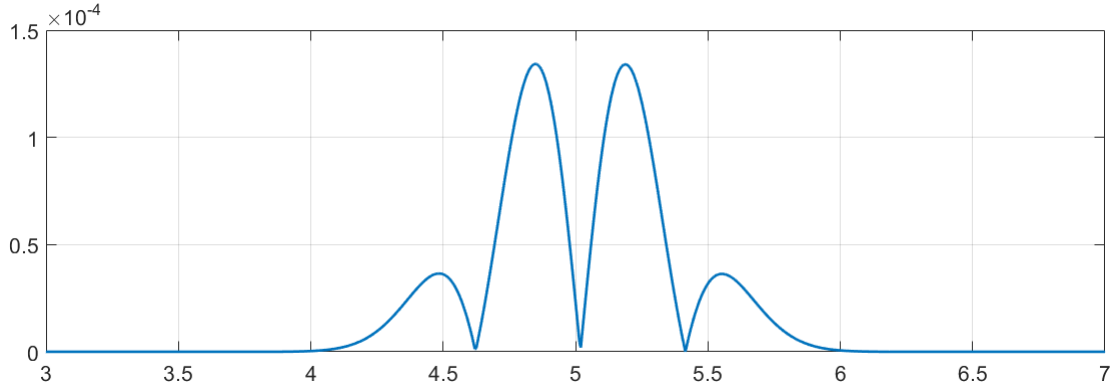
Programlar $t = 5sn$ zamanına kadar çalıştırılarak tüm yöntemler için L_∞ hata normları ve yakınsaklık oranları farklı zaman ve konum artımları için Tablo 2 de verilmiştir. Tablo incelendiğinde ilk test probleminde olduğu gibi en iyi sonucu M3 yönteminin verdiği ve YO'larının yöntemlerin teorik değerleri ile uyumlu olduğu görülebilir.

Tablo 2: L_∞ hata normları ve YO.

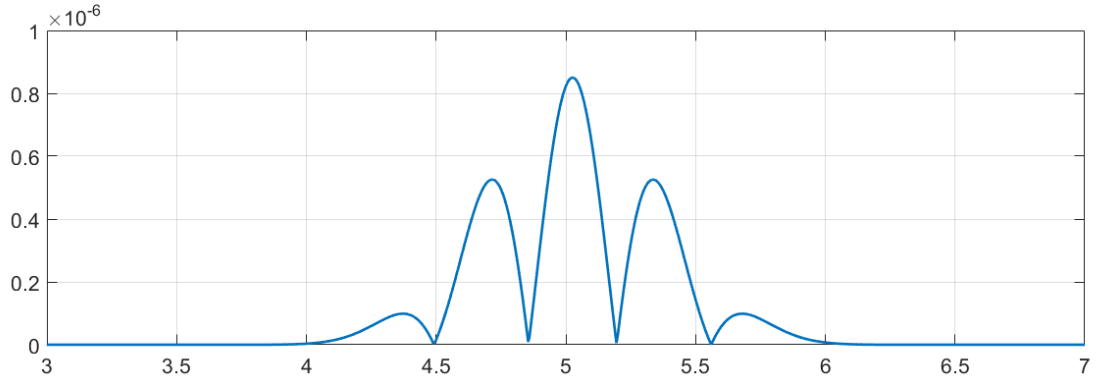
M1			M2		M3	
$h = \Delta t$	L_∞	YO	L_∞	YO	L_∞	YO
0.1	0.0549	1.96	0.00579	2.84	0.00278	4.78
0.05	0.0141	2.04	0.00081	2.96	0.00015	5.81
0.02	0.00217	2.01	0.0000539	2.99	0.00000073	3.99
0.010	0.000538	2.00	0.00000679	3.00	0.0000000459	3.99
0.005	0.000134		0.00000085		0.00000000287	

$t = 5sn$ zamanındaki mutlak hata grafikleri her bir önerilen metot için Şekil 4 de çizilmiştir. Şekil 4 incelendiğinde her bir metot için maksimum hatanın ilk test

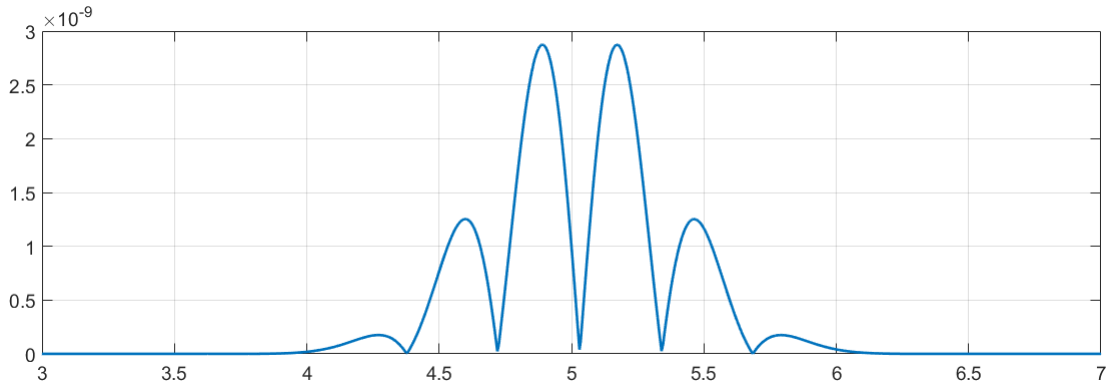
problemde olduğu gibi konum aralığının orta noktalar civarında geldiği görülebilir.



Şekil 4a: $h = \Delta t = 0.005$ için mutlak hata (M1).



Şekil 4b: $h = \Delta t = 0.005$ için mutlak hata (M2).



Şekil 4c: $h = \Delta t = 0.005$ için mutlak hata (M3).

4. Sonuçlar ve tartışma

Taylor seri açılımı yardımıyla elde edilen ikinci, üçüncü ve dördüncü mertebeden doğruluğa sahip zaman parçalanması ile birlikte Galerkin sektik B-spline sonlu elemanlar yöntemi adveksiyon difüzyon denkleminin yaklaşık çözümü için önerilmiştir. Önerilen algoritmaların doğruluğunun kontrolü için iki test problemi kullanılmıştır.

Elde edilen sonuçlara göre önerilen yöntemlerin özellikle de zamana göre doğruluğu dört olan M3 yönteminin adveksiyon difüzyon denkleminin yaklaşık çözümü için uygun bir yöntem olduğu görülmüştür.

Kaynaklar

- [1] Karur, S.R. and Ramachandran, P.A., Augmented Thin Plate Spline Approximation in DRM, **Boundary Elements Communications**, 6, 55-58.(1995).
- [2] Dehghan, M., Weighted finite difference techniques for the one-dimensional advection-diffusion equation, **Applied Mathematics and Computation**, 147, 307-319 (2004).
- [3] Sari, M., Güraslan, G. and Zeytinoglu, A , High-Order finite difference schemes for solving the advection-diffusion equation, **Mathematical and Computational Applications**, 15 (3), 449-460 (2010).
- [4] Dağ, I., Irk, D. and Tombul M., Least-squares finite element method for the advection diffusion equation, **Applied Mathematics and Computation**, 173, 554-565 (2006).
- [5] Kapoor, S. and Dhawan, S., B-spline finite element technique for advection diffusion equation. **International Journal of Applied Mathematics and Mechanics**, 6, 75-94 (2010).
- [6] Dağ, I. Canıvar, A. and Sahin, A., Taylor-Galerkin method for advection-diffusion equation, **Kybernetes** , 40, 762-777 (2011).
- [7] Dhawan, S., Kapoor, S. and Kumar, S., Numerical method for advection diffusion equation using FEM and B-splines, **Journal of Computational Science** 3,429-443 (2012).
- [8] Irk, D., Dağ, I. and Tombul, M., Extended cubic b-spline solution of the advection-diffusion equation, **KSCE Journal of Civil Engineering**, 19(4), 929-934 (2015).
- [9] Clough, R.W., The finite element method in plane stress analysis, **Proc. 2nd Conf. On Electronic Computation**, Pittsburgh (1960).
- [10] Ritz, W. Über eine neue methode zur lösung gewisser variations probleme der mathematischen physik, **J. Reine Angew. Math.**, 135, 1-61, (1908).
- [11] Rayleigh, J.W.S. On the theory of resonance, **Trans. Roy. Soc. (London)**, A161 77-118, (1870).
- [12] Rayleigh, J.W.S., **The Theory of Sound**, Dover Publications, 2nd Editon, (1945).
- [13] Galerkin, B.G., Stabe und Platten; Reihen in Gewissen Gleichgewichtspoblemen Elestischer Stabe und Platten, **Vestnik der Ingenieure**, 19 897-908, (1915).
- [14] Zienkiewicz, O.C and Morgan, K., **Finite Element and Approximation**, John Wiley & Sons, (1983).
- [15] Mohammadi, R., Sextic B-spline collocation method for solving Euler–Bernoulli Beam Models, **Applied Mathematics and Computation**, 241, 151-166, (2014)
- [16] Irk, D., Sextic B-spline collocation method for the modified burgers' equation, **Kybernetes**, 38(9) 1599-1620, (2009).

Mathematical behavior of the solutions of a class of hyperbolic-type equation

Erhan PİŞKİN*, Hazal YÜKSEKKAYA

Dicle University, Department of Mathematics, Diyarbakir, Turkey

Geliş Tarihi (Received Date): 11.08.2018

Kabul Tarihi (Accepted Date): 06.11.2018

Abstract

In this paper, we consider hyperbolic-type equations with initial and Dirichlet boundary conditions in a bounded domain. Under some suitable assumptions on the initial data and source term, we obtain nonexistence of global solutions for arbitrary initial energy.

Keywords: Hyperbolic equation, nonexistence, damping term.

Hiperbolik tipten bir denklemin çözümlerinin matematiksel davranışı

Özet

Bu makalede sınırlı bir bölgede hiperbolik tipten başlangıç ve Dirichlet sınır koşullu problem ele alınmıştır. Başlangıç ve kaynak terim üzerine bırakılan bazı uygun koşullar altında çözümlerin global yokluğu keyfi başlangıç enerjisi için çalışılmıştır.

Anahtar kelimeler: Hiperbolik denklem, yokluk, damping terim.

* Erhan PİŞKİN, episkin@dicle.edu.tr, <https://orcid.org/0000-0001-6587-4479>

Hazal YÜKSEKKAYA, hazally.kaya@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-1863-2909>

1. Introduction

Let Ω be a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$ in R^n . We study the following hyperbolic equation

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u - \Delta u + u_t = |u|^{q-1}u, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega \\ u(x, t) = \frac{\partial}{\partial \vartheta} u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

where $q \geq 1$ is real numbers, ϑ is the outer normal.

When without fourth order term $\Delta^2 u$, the equation (1) reduces to the following form

$$u_{tt} - \Delta u + u_t = |u|^{q-1}u. \quad (2)$$

Many authors has been extensively studied existence and blow up result (see[1-5]). The first serious study on the equation (2) was made by Levine [2,3]. He introduced the concavity method and studied that nonexistence of global solutions with negative initial energy. Later, Georgiev and Todorova [1] extended Levine's result. In 1999, Vitillaro [5] improved the result of Georgiev and Todorova for positive initial energy.

Without the $-\Delta u$ term, the equation (1) can be written in the following form

$$u_{tt} + \Delta u^2 + u_t = |u|^{q-1}u. \quad (3)$$

Messaoudi [6] studied the local existence and blow up of the solution to the equation (3). Wu and Tsai [7] obtained global existence and blow up of the solution of the problem (3). Later, Chen and Zhou [8] studied blow up of the solution of the problem (3) for positive initial energy.

In this paper, we prove the nonexistence of global solutions for the problem (1). There are several books (e.g. [9-11]) with very detailed and extensive study on blow up theory.

This paper is organized as follows. In Section 2, we present some lemmas and notations needed later of this paper. In Section 3 and 4, nonexistence of the solution is discussed.

2. Preliminaries

In this section, we will give some lemmas and a local existence theorem. Let $\|\cdot\|$ and $\|\cdot\|_p$ denote the usual $L^2(\Omega)$ norm and $L^p(\Omega)$ norm, respectively. Also, $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ is a Hilbert spaces (see [12, 13], for details)

Lemma 1 (Sobolev-Poincare inequality) [12]. Let p be a number with $2 \leq p < \infty$ ($n = 1, 2$) or $2 \leq p \leq \frac{2n}{n-2}$ ($n \geq 3$), then there is a constant $C_* = C_*(\Omega, p)$ such that

$$\|u\|_p \leq C_* \|\nabla u\| \text{ for } u \in H_0^1(\Omega).$$

We define the energy function as follows

$$E(t) = \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} (\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2) - \frac{1}{q+1} \|u\|_{q+1}^{q+1}. \quad (4)$$

Lemma 2. $E(t)$ is a nonincreasing function for $t \geq 0$ and

$$E'(t) = -\|u_t\|^2 \leq 0. \quad (5)$$

Proof. Multiplying the equation of (1) by u_t and integrating over Ω using integrating by parts, we get

$$E(t) - E(0) = -\int_0^t \|u_\tau\|^2 d\tau \text{ for } t \geq 0. \quad (6)$$

Next, we state the local existence theorem of problem (1), whose proof can be found in [14].

Theorem 3 (Local existence). Suppose that $(u_0, u_1) \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ holds, then there exists a unique solution u of (1) satisfying

$$u \in C([0, T]; H_0^2(\Omega)), \quad u_t \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^{p+1}(\Omega \times (0, T)).$$

Moreover, at least one of the following statements holds:

- (i) $T = \infty$,
- (ii) $\|u_t\|^2 + \|\Delta u\|^2 \rightarrow \infty$ as $t \rightarrow T^-$.

3. Nonexistence of solutions with arbitrary initial energy

In this section, we prove nonexistence of the solution for the problem (1) with negative and nonnegative initial energy.

Lemma 4 [15]. Let us have $\delta > 0$ and let $B(t) \in C^2(0, \infty)$ be a nonnegative function satisfying

$$B''(t) - 4(\delta + 1)B'(t) + 4(\delta + 1)B(t) \geq 0. \quad (7)$$

If

$$B'(0) > r_2 B(0) + K_0, \quad (8)$$

with $r_2 = 2(\delta + 1) - 2\sqrt{(\delta + 1)\delta}$, then $B'(t) > K_0$ for $t > 0$, where K_0 is a constant.

Lemma 5 [15]. If $H(t)$ is a nonincreasing function on $(t_0, \infty]$ and satisfies the differential inequality

$$[H'(t)]^2 \geq a + b[H(t)]^{2+\frac{1}{\delta}}, \text{ for } t \geq t_0, \quad (9)$$

where $a > 0, b \in R$, then there exists a finite time T^* such that

$$\lim_{t \rightarrow T^{*-}} H(t) = 0.$$

Upper bounds for T^* are estimated as follows:

(i) If $b < 0$ and $H(t_0) < \min \left\{ 1, \sqrt{-\frac{a}{b}} \right\}$ then

$$T^* \leq t_0 + \frac{1}{\sqrt{-b}} \ln \frac{\sqrt{-\frac{a}{b}}}{\sqrt{-\frac{a}{b}} - H(t_0)}.$$

(ii) If $b = 0$, then

$$T^* \leq t_0 + \frac{H(t_0)}{H'(t_0)}.$$

(iii) If $b > 0$, then

$$T^* \leq \frac{H(t_0)}{\sqrt{a}} \text{ or } T^* \leq t_0 + 2^{\frac{3\delta+1}{2\delta}} \frac{\delta c}{\sqrt{a}} \left[1 - (1 + cH(t_0))^{-\frac{1}{2\delta}} \right]$$

where $c = \left(\frac{a}{b}\right)^{2+\frac{1}{\delta}}$.

Definition 6. A solution u of (1) is called blow up if there exists a finite time T^* such that

$$\lim_{t \rightarrow T^{*-}} \left[\int_{\Omega} u^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} u^2 dx d\tau \right] = \infty. \quad (10)$$

Let

$$a(t) = \int_{\Omega} u^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} u^2 dx d\tau, \text{ for } t \geq 0. \quad (11)$$

Lemma 7. Assume $\frac{q-1}{4} \geq \delta \geq 0$, then we have

$$a''(t) \geq 4(\delta + 1) \int_{\Omega} u_t^2 dx - 4(2\delta + 1)E(0) + 4(2\delta + 1) \int_0^t \|u_{\tau}\|^2 d\tau. \quad (12)$$

Proof. By differentiating (11) with respect to t , we have

$$a'(t) = 2 \int_{\Omega} uu_t dx + \|u\|^2, \tag{13}$$

$$\begin{aligned} a''(t) &= 2 \int_{\Omega} u_t^2 dx + 2 \int_{\Omega} u u_{tt} dx + 2 \int_{\Omega} u u_t dx \\ &= 2(\|u_t\|^2 + \|u\|_{q+1}^{q+1}) - 2(\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2). \end{aligned} \tag{14}$$

Then from (1) and (14) we have

$$\begin{aligned} a''(t) &= 4(\delta + 1) \int_{\Omega} u_t^2 dx - 4(2\delta + 1)E(0) \\ &\quad + 4\delta(\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2) + \left(2 - \frac{4(2\delta+1)}{q+1}\right) \|u\|_{q+1}^{q+1} \\ &\quad + 4(2\delta + 1) \int_0^t \|u_{\tau}\|_2^2 d\tau. \end{aligned}$$

Since $\frac{q-1}{4} \geq \delta \geq 0$, we obtain (12).

Lemma 8. Assume $\frac{q-1}{4} \geq \delta \geq 0$ and one of the following statements are satisfied

(i) $E(0) < 0$ and $\int_{\Omega} u_0 u_1 dx > 0$,

(ii) $E(0) = 0$ and $\int_{\Omega} u_0 u_1 dx > 0$,

(iii) $E(0) > 0$ and

$$a'(0) > r_2 \left[a(0) + \frac{K_1}{4(\delta+1)} \right] + \|u_0\|^2 \tag{15}$$

holds.

Then $a'(t) > \|u_0\|^2$ for $t > t^*$, where $t_0 = t^*$ is given by (16) in case (i) and $t_0 = 0$ in cases (ii) and (iii), where K_1 and t^* are defined in (20) and (16), respectively.

Proof. (i) If $E(0) < 0$, then from (12), we have

$$a'(t) \geq 2 \int_{\Omega} u_0 u_1 dx + \|u_0\|^2 - 4(2\delta + 1)E(0)t, \quad t \geq 0.$$

Thus we get $a'(t) > \|u_0\|^2$ for $t > t^*$, where

$$t^* = \max \left\{ \frac{a'(0) - \|u_0\|^2}{4(2\delta+1)E(0)}, 0 \right\}. \tag{16}$$

(ii) If $E(0) = 0$ and $\int_{\Omega} u_0 u_1 dx > 0$, then $a''(t) \geq 0$ for $t \geq 0$.

We have $a'(t) > \|u_0\|^2$, $t \geq 0$.

(iii) If $E(0) > 0$, we first note that

$$2 \int_0^t \int_{\Omega} uu_t dx d\tau = \|u\|^2 - \|u_0\|^2. \tag{17}$$

From Hölder's and Young's inequalities, we get

$$\|u\|^2 \leq \|u_0\|^2 + \int_0^t \|u\|^2 d\tau + \int_0^t \|u_\tau\|^2 d\tau. \quad (18)$$

By Hölder's and Young's inequalities, and (18), we get

$$a'(t) \leq a(t) + \|u_0\|^2 + \int_\Omega u_t^2 dx + \int_0^t \|u_\tau\|^2 d\tau. \quad (19)$$

Hence, by (12) and (19), we have

$$a''(t) - 4(\delta + 1)a'(t) + 4(\delta + 1)a(t) + K_1 \geq 0.$$

where

$$K_1 = 4(2\delta + 1)E(0) + 4(\delta + 1) \int_\Omega u_0^2 dx - 4\delta \int_0^t \|u_\tau\|^2 d\tau. \quad (20)$$

Let

$$b(t) = a(t) + \frac{K_1}{4(\delta+1)}, \quad t > 0.$$

Then $b(t)$ satisfies Lemma 4. Consequently, we get from (15) $a'(t) > \|u_0\|^2$, $t > 0$, where r_2 is given in Lemma 4.

Theorem 9. Assume $\frac{q-1}{4} \geq \delta \geq 0$ and one of the following statements are satisfied

- (i) $E(0) < 0$ and $\int_\Omega u_0 u_1 dx > 0$,
- (ii) $E(0) = 0$ and $\int_\Omega u_0 u_1 dx > 0$,
- (iii) $0 < E(0) < \frac{(a'(t_0) - \|u_0\|^2)^2}{8[a(t_0) + (T_1 - t_0)\|u_0\|^2]}$ and (15) holds.

Then the solution u blow up in finite time T^* in the case of (10). In case (i),

$$T^* \leq t_0 - \frac{H(t_0)}{H'(t_0)}. \quad (21)$$

Furthermore, if $H(t_0) < \min \left\{ 1, \sqrt{-\frac{a}{b}} \right\}$ we have

$$T^* \leq t_0 + \frac{1}{\sqrt{-b}} \ln \frac{\sqrt{\frac{a}{b}}}{\sqrt{\frac{a}{b} - H(t_0)}}, \quad (22)$$

where

$$a = \delta^2 H^{2+\frac{2}{\delta}}(t_0) \left[(a'(t_0) - \|u_0\|^2)^2 - 8E(0)H^{-\frac{1}{\delta}}(t_0) \right] > 0, \quad (23)$$

$$b = 8\delta^2 E(0). \quad (24)$$

In case (ii),

$$T^* \leq t_0 - \frac{H(t_0)}{H'(t_0)}. \quad (25)$$

In case (iii),

$$T^* \leq \frac{H(t_0)}{\sqrt{a}} \text{ or } T^* \leq t_0 + 2^{\frac{3\delta+1}{2\delta}} \left(\frac{a}{b}\right)^{2+\frac{1}{\delta}} \frac{\delta}{\sqrt{a}} \left\{ 1 - \left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{2+\frac{1}{\delta}} H(t_0) \right]^{-\frac{1}{2\delta}} \right\}. \quad (26)$$

where a, b and $H(t)$ are defined in (23), (24) and (27), respectively.

Proof. Set

$$H(t) = [a(t) + (T_1 - t)\|u_0\|^2]^{-\delta}, \text{ for } t \in [0, T_1], \quad (27)$$

where $T_1 > 0$ is a certain constant which will be specified later. Then we get

$$\begin{aligned} H'(t) &= -\delta[a(t) + (T_1 - t)\|u_0\|^2]^{-\delta-1} [a'(t) - \|u_0\|^2] \\ &= -\delta H^{1+\frac{1}{\delta}}(t) [a'(t) - \|u_0\|^2], \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} H''(t) &= -\delta H^{1+\frac{2}{\delta}}(t) a''(t) [a(t) + (T_1 - t)\|u_0\|^2] \\ &\quad + \delta H^{1+\frac{2}{\delta}}(t) (1 + \delta) [a'(t) - \|u_0\|^2]^2 \end{aligned} \quad (29)$$

and

$$H''(t) = -\delta H^{1+\frac{2}{\delta}}(t) V(t), \quad (30)$$

where

$$V(t) = a''(t) [a(t) + (T_1 - t)\|u_0\|^2] - (1 + \delta) [a'(t) - \|u_0\|^2]^2. \quad (31)$$

For simplicity of calculation, we define

$$P_u = \int_{\Omega} u^2 dx, \quad R_u = \int_{\Omega} u_t^2 dx,$$

$$Q_u = \int_0^t \|u\|^2 d\tau, \quad S_u = \int_0^t \|u_{\tau}\|^2 d\tau.$$

By (13), (17) and Hölder's inequality, we have

$$\begin{aligned} a'(t) &= 2 \int_{\Omega} uu_t dx + \|u_0\|^2 + 2 \int_0^t \int_{\Omega} uu_t dx dt \\ &\leq (\sqrt{R_u P_u} + \sqrt{Q_u S_u}) + \|u_0\|^2. \end{aligned} \quad (32)$$

If case (i) or (ii) holds, by (12) we have

$$a''(t) \geq (-4 - 8\delta)E(0) + 4(1 + \delta)(R_u + S_u). \quad (33)$$

Thus, from (31)-(33) and (27), we obtain

$$V(t) \geq [(-4 - 8\delta)E(0) + 4(1 + \delta)(R_u + S_u)]H^{-\frac{1}{\delta}}(t) - 4(1 + \delta)(\sqrt{R_u P_u} + \sqrt{Q_u S_u})^2.$$

From (11),

$$\begin{aligned} a(t) &= \int_{\Omega} u^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} u^2 dx ds \\ &= P_u + Q_u \end{aligned}$$

and (27), we get

$$\begin{aligned} V(t) &\geq (-4 - 8\delta)E(0)H^{-\frac{1}{\delta}}(t) \\ &\quad + 4(1 + \delta)[(R_u + S_u)(T_1 - t)\|u_0\|^2 + \theta(t)], \end{aligned}$$

where

$$\theta(t) = (R_u + S_u)(P_u + Q_u) - (\sqrt{R_u P_u} + \sqrt{Q_u S_u})^2$$

By the Schwarz inequality, and $\theta(t)$ being nonnegative, we have

$$V(t) \geq (-4 - 8\delta)E(0)H^{-\frac{1}{\delta}}(t), \quad t \geq t_0. \quad (34)$$

Therefore, by (30) and (34), we get

$$H''(t) \leq 4\delta(1 + 2\delta)E(0)H^{1+\frac{1}{\delta}}(t), \quad t \geq t_0. \quad (35)$$

By Lemma 8, we know that $H'(t) < 0$ for $t \geq t_0$. Multiplying (35) by $H'(t)$ and integrating it from t_0 to t , we get

$$[H'(t)]^2 \geq a + bH^{2+\frac{1}{\delta}}(t)$$

for $t \geq t_0$, where a, b are defined in (23) and (24) respectively.

If case (iii) holds, similar to the steps of case (i), we get $a > 0$ if and only if

$$E(0) < \frac{(a'(t_0) - \|u_0\|^2)^2}{8[a(t_0) + (T_1 - t)\|u_0\|^2]}.$$

Then by Lemma 5, there exists a finite time T^* such that $\lim_{t \rightarrow T^{*-}} H(t) = 0$ and upper bound of T^* is estimated according to the sign of $E(0)$. This means that (10) holds.

4. Nonexistence of solutions with negative initial energy

In this section, we prove global nonexistence with negative initial energy.

Lemma 10. Suppose that $\psi(t)$ is a twice continuously differentiable function satisfying

$$\begin{cases} \psi''(t) + \psi'(t) \geq C_0\psi^{1+\alpha}(t), & t > 0, \quad C_0 > 0, \quad \alpha > 0, \\ \psi(0) > 0, \quad \psi'(0) \geq 0 \end{cases} \quad (36)$$

where $C_0 > 0, \alpha > 0$ are constants. Then $\psi(t)$ blows up in finite time.

Proof. See [16].

Theorem 11. In addition to the conditions of Theorem 3, if

$$E(0) \leq 0 \text{ and } \int_{\Omega} u_0 u_1 dx \geq 0$$

then the corresponding solution blows up in finite time.

Proof. Multiplying Eq. (1) by u_t , and integration by parts, we have

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 - \frac{1}{q+1} \|u\|_{q+1}^{q+1} \right] = -\|u_t\|_2^2.$$

So the corresponding energy to problem (1) is defined as

$$E(t) = \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} (\|\Delta u\|^2 + \|\nabla u\|^2) - \frac{1}{q+1} \|u\|_{q+1}^{q+1}$$

and one can find that $E(t) \leq E(0)$ easily from

$$\int_0^t E'(t) dt = - \int_0^t \|u_\tau\|^2 d\tau \leq 0.$$

Let

$$\psi(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|u\|^2 dx, \quad (37)$$

where u is a solution construct in theorem of Local existence. One can see that the derivative of $\psi(t)$ with respect to time

$$\psi'(t) = \int_{\Omega} uu_t dx \quad (38)$$

is well defined and Lipschitz continuous. Moreover, one can get by (37) and (38)

$$\begin{aligned} \psi''(t) &= \int_{\Omega} u_t^2 dx + \int_{\Omega} |u|^{q-1}u^2 dx - \int_{\Omega} u\Delta^2 u dx \\ &\quad + \int_{\Omega} u\Delta u dx - \int_{\Omega} uu_t dx \\ &= \|u_t\|^2 + \|u\|_{q+1}^{q+1} - \|\Delta u\|_2^2 - \|\nabla u\|_2^2 - \int_{\Omega} uu_t dx \\ &= \|u_t\|^2 + \|u\|_{q+1}^{q+1} - \|\Delta u\|_2^2 - \|\nabla u\|_2^2 - \psi'(t) \end{aligned}$$

and here we can write,

$$\psi''(t) + \psi'(t) = \|u_t\|^2 + \|u\|_{q+1}^{q+1} - \|\Delta u\|_2^2 - \|\nabla u\|_2^2.$$

If we substituting and adding $2E(t)$ to the right side of the equation, we get

$$\psi''(t) + \psi'(t) = 2\|u_t\|^2 - 2E(t) + \frac{q-1}{q+1} \|u\|_{q+1}^{q+1}.$$

Due to the

$$\|u_t\|^2 \geq 0 \text{ and } E(t) \leq 0$$

conditions, we can write

$$\psi''(t) + \psi'(t) \geq \frac{q-1}{q+1} \|u\|_{q+1}^{q+1}. \quad (39)$$

Let's make an estimate for the term of $\|u\|_{q+1}^{q+1}$ in this expression. By Hölder's inequality,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u|^2 dx &\leq \left(\int_{\Omega} |u|^{q+1} dx \right)^{\frac{2}{q+1}} \left(\int_{\Omega} dx \right)^{\frac{q+1}{2}}, \\ \|u\|_{q+1}^{q+1} &\geq \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{\frac{q+1}{2}} |\Omega|^{\frac{1-q}{2}}. \end{aligned} \quad (40)$$

If the expression (40) is written at (39), thus

$$\begin{aligned}\psi''(t) + \psi'(t) &\geq \frac{q-1}{q+1} |\Omega|^{\frac{1-q}{2}} \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{\frac{q+1}{2}} \\ &= 2^{\frac{q+1}{2}} \frac{q-1}{q+1} |\Omega|^{\frac{1-q}{2}} [\psi(t)]^{\frac{q+1}{2}},\end{aligned}$$

$$\psi''(t) + \psi'(t) \geq C_0 \psi^{1+\alpha}(t).$$

Then by Lemma 10 with $E(0) \leq 0$ and $\int_{\Omega} u_0 u_1 dx \geq 0$

$$C_0 = 2^{\frac{q+1}{2}} \frac{q-1}{q+1} |\Omega|^{\frac{1-q}{2}} \text{ and } \alpha = \frac{q-1}{2},$$

we see that $\psi(t)$ blows up in finite time.

References

- [1] Georgiev, V., Todorova, G., Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source term, **Journal of Differential Equations**, 109, 295-308, (1994).
- [2] Levine, H.A., Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + F(u)$, **Transactions of the American Mathematical Society**, 192, 1-21, (1974).
- [3] Levine, H.A., Some additional remarks on the nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations, **SIAM Journal on Applied Mathematics**, 5, 138-146, (1974).
- [4] Messaoudi, S.A., Blow up in a nonlinearly damped wave equation, **Mathematische Nachrichten**, 231, 105-111, (2001).
- [5] Vitillaro, E., Global existence theorems for a class of evolution equations with dissipation, **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, 149, 155-182 (1999).
- [6] Messaoudi, S. A., Global existence and nonexistence in a system of Petrovsky, **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, 265(2), 296-308, (2002).
- [7] Wu, S.T., Tsai, L.Y., On global solutions and blow-up of solutions for a nonlinearly damped Petrovsky system, **Taiwanese Journal of Mathematics**, 13(2A), 545-558 (2009).
- [8] Chen, W., Zhou, Y., Global nonexistence for a semilinear Petrovsky equation, **Nonlinear Analysis**, 70, 3203-3208, (2009).
- [9] Alshin, A.B., Korpusov, M.O., Sveshnikov, A.G., Blow up in nonlinear Sobolev type equations, **Walter De Gruyter**, 2011.
- [10] Hu, B., Blow up theories for semilinear parabolic equations, **Springer**, 2011.

- [11] Samarskii, A.A., Galaktionov, V.A., Kurdyumov, S.P., Mikhailov, A.P., Blow-up in Quasilinear Parabolic Equations, **Walter de Gruyter**, 1995.
- [12] Adams, R.A., Fournier, J.J.F., Sobolev Spaces, **Academic Press**, 2003.
- [13] Pişkin, E., Sobolev Spaces, **Seçkin Publishing**, 2017. (in Turkish).
- [14] Pişkin, E., Existence, decay and blow up of solutions for the extensible beam equation with nonlinear damping and source terms, **Open Mathematics**, 13, 408-420, (2015).
- [15] Li, M.R., Tsai, L.Y., Existence and nonexistence of global solutions of some system of semi-linear wave equations, **Nonlinear Analysis**, 54(8), 1397-1415, (2003).
- [16] Zhou, Y., Global existence and nonexistence for a nonlinear wave equation with damping and source terms, **Mathematische Nachrichten**, 278(11), 1341-1358, (2005).

Various techniques to solve Blasius equation

Utku Cem KARABULUT^{1, *}, Alper KILIÇ²

¹ Bandırma Onyedü Eylül University, Maritime Faculty, Department of Naval Architecture and Marine Engineering, Balıkesir.

² Bandırma Onyedü Eylül University, Maritime Faculty, Department of Maritime Business Administration, Balıkesir.

Geliş Tarihi (Received Date): 24.07.2018

Kabul Tarihi (Accepted Date): 06.11.2018

Abstract

This paper presents three distinct approximate methods for solving Blasius Equation. The first method can be regarded as an improvement to a series solution of Blasius by means of Padè approximation. The second method is a famous type of weighted residual technique which is called Galerkin method after the famous Russian engineer and mathematician Boris Galerkin. The last method is a simple discrete, numerical technique. Additionally, in order to show the power of the last method, the Thomas-Fermi problem is solved using the same technique. Results obtained by all three methods are highly accurate in comparison with the Howarth's solution and Bender's solution.

Keywords: Blasius equation, perturbation technique, Padè approximation, weighted residual method, Galerkin method, Thomas Fermi equation.

Blasius denkleminin çözümü için çeşitli teknikler

Özet

Bu makalede Blasius Denklemi'ni çözmek için üç farklı yaklaşık yöntem sunmaktadır. İlk yöntem Blasius'un seri çözümünün Padè yaklaşımı yardımı ile iyileştirilmesi olarak değerlendirilebilir. İkinci yöntem ünlü Rus mühendis ve matematikçi Boris Galerkin'e izafeten Galekin Metodu olarak adlandırılan bir ağırlıklı artık yöntemidir. Son yöntem ise basit, ayrık bir sayısal tekniktir. Ek olarak son yöntemin gücünü göstermek adına Thomas-Fermi Problemi de aynı teknik ile çözülmüştür. Her üç yöntem, sonuçlar Howarth'ın ve Bender'in çözümü ile kıyaslandığında, oldukça başarılı sonuç vermektedir.

* Utku Cem KARABULUT, ukarabulut@bandirma.edu.tr, <http://orcid.org/0000-0002-7588-0132>
Alper KILIÇ, alperkilig@bandirma.edu.tr, <http://orcid.org/0000-0002-2700-9094>

Anahtar Kelimeler: Blasius denklemi, pertürbasyon tekniği, Padè yaklaşımı, ağırlıklı artık yöntemler, Galerkin metodu, Thomas Fermi denklemi.

1. Introduction

The theory of boundary layer constitutes one of the most important branch of fluid dynamics since external flows with high Reynolds' numbers are common in both nature and many engineering applications. Solving these problems generally requires a challenging effort due to the non-linearity and multidimensional character of the governing equations. Although there is reasonable amount of exact solution found for the full Navier-Stokes equations in literature, they are only valid for some particular cases and geometries [1].

An effective approach to solve an external flow problem with high Reynolds number is known as boundary layer analysis technique which is first developed by Prandtl in 1904. One of his students Blasius, in 1908, introduced a technique to transform the well-known problem of laminar boundary layer flow over a flat plate into an ordinary differential equation (ODE). Blasius equation have great importance in many engineering applications since it provides very good approximations for boundary layer thickness and total drag force in laminar external flows [2]. For example, drag force acting on a thin airfoil in a laminar flow can be very well approximated by using Blasius equation. The equation is given as:

$$f'''(\eta) + \frac{1}{2}f(\eta)f''(\eta) = 0 \quad (1)$$

where relative boundary conditions are defined as:

$$f(0) = 0, f'(0) = 0 \quad (2)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = 1 \quad (3)$$

and where $f'(\eta)$ is the first derivative of f with respect to η . η is the similarity variable of the problem and defined in the Cartesian coordinates as:

$$\eta = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \quad (4)$$

where U is free stream velocity and ν is kinematic viscosity of the fluid. The relationship between f and stream function (Ψ) is given by:

$$\Psi = f(\eta)\sqrt{U\nu x} \quad (5)$$

and velocity components (u, v) can be derived from stream function by:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (6)$$

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{7}$$

The first term of (1) represents the viscos diffusion, so it becomes dominant as η approaches to zero. The second term, on the other hand, is due to convective acceleration and is dominant for high values of η . Even though the equation looks very simple at first glance, there haven't been any exact analytical solution found for over 100 years, so all solutions suggested so far depend on some approximate techniques; some of them are very successful while some of them are not. In fact, the equation has been used as a tool to investigate the success of various approximate solution techniques.

Blasius himself [3] suggested an approximate solution with an infinite series which is only convergent for small values of η . [4] reaches an estimation for shooting angle, $f''(0)$, with 8.6% relative error, using δ -perturbation method and Padè approximation. [5] gives a simple approach called iteration perturbation method and obtain $f''(0)$ with 0.73% relative error which can be considered as a very good result considering the simplicity of calculations. Using variational iteration method, [6 - 8] give valid solutions for whole domain. Solution with numerical transformations was presented by [9] while [10] uses an evaluation technique to find out Taylor coefficients. Reproducing Kernel Method was applied successfully by [11]. Amongst all of the numerical solutions, [12] is the most famous one with its extreme accuracy and is generally regarded as an exact result for comparison purposes. Some other solution techniques applied to Blasius equation are Sinc-collocation method [13], homotopy analysis method [14, 15], Laguerre-collocation method [16], homotopy perturbation method [17], parameter iteration method [18], differential transformation method [19, 20], Adomian's decomposition method [21, 22] and modified rational Legendre tau method [23].

In this paper approximate solutions for (1), under the boundary conditions (2) and (3), with three different methods are applied. First, series solution of Blasius (solution with perturbation technique) is considered and validity range of the series is increased making use of Padè approximation [24]. Secondly, a Galerkin-based weighted residual method [25] is applied with two different trial function. Finally, a simple numerical technique, which can be used for various non-linear problems, is introduced.

2. Perturbation Technique

In order to obtain a series solution, we put a perturbation parameter to (1) as:

$$f''' + \frac{1}{2}\epsilon f f'' = 0 \tag{8}$$

And assume that solution can be given with Poincare series:

$$f(\eta, \epsilon) = \sum_{i=0}^N \epsilon^i f_i \tag{9}$$

By putting (9) into (8) results in:

$$\sum_{i=0}^N \epsilon^i f_i''' + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N \epsilon^{i+1} f_i f_i'' = 0 \quad (10)$$

By considering the same powers of ϵ , we obtain a set of differential equations as:

$$f_0''' = 0 \quad (11)$$

$$f_{i+1}''' + f_i f_i'' = 0 \quad (12)$$

It is not possible to obtain a solution with boundary condition (3). Thus, we consider the initial value problem where:

$$f''(0) = \sigma \quad (13)$$

By solving (11) with (2) and (13):

$$f_0 = \frac{\sigma}{2} \eta^2 \quad (14)$$

Now solving (12) with homogenous initial conditions ($f_{i+1}''(0) = 0$) and as $\epsilon = 1$, approximate solution can be obtained in following series form:

$$f = \sum_{i=0}^N \left(-\frac{1}{2}\right)^i \frac{\beta_i \sigma^{i+1}}{(3i+2)!} x^{3i+2} \quad (15)$$

where,

$$\beta_i = \sum_{j=0}^{i-1} \binom{3i-1}{3j} \beta_j \beta_{i-j-1} \quad (16)$$

$$\beta_0 = \beta_1 = 1 \quad (17)$$

This is the approximate series solution first given by Blasius [2]. However power series is only convergent for small values of η . In order to expand the range of validity, Padè approximation technique can be applied to the first n term of the series. For example, first five term of the (15) can be calculated as:

$$f = 0.5\sigma\eta^2 - 4.1667 \times 10^{-3} \sigma^2 \eta^5 + 6.8204 \times 10^{-5} \sigma^3 \eta^8 - 1.1743 \times 10^{-6} \sigma^4 \eta^{11} + 2 \times 10^{-8} \sigma^5 \eta^{14} \quad (18)$$

Padè approximant of (18) around $\eta = 0$, as degree of both numerator and denominator of the approximate rational function being seven, can be found as:

$$f = \frac{4.88204 \times 10^{-3} \sigma^2 \eta^5 + 0.5\sigma\eta^2}{1.44037 \times 10^{-5} \sigma^2 \eta^6 + 1.80974 \times 10^{-2} \sigma \eta^3 + 1} \quad (19)$$

and first derivative of f :

$$f' = \frac{\sigma\eta(2.44102 \times 10^{-2}\sigma\eta^3 + 1)}{1.44037 \times 10^{-5}\sigma^2\eta^6 + 1.80974 \times 10^{-2}\sigma\eta^3 + 1} - \frac{4.21917 \times 10^{-7}\sigma^4\eta^{10} - 3.08268 \times 10^{-4}\sigma^3\eta^7 - 2.71461 \times \sigma^2\eta^4}{(1.44037 \times 10^{-5}\sigma^2\eta^6 + 1.80974 \times 10^{-2}\sigma\eta^3 + 1)^2} \quad (20)$$

It is of course impossible to satisfy the boundary condition at infinity for any finite value of σ . However, we can investigate the behaviour of f' for various values of σ and determine the necessary σ in order to approximate the exact solution of f . For this purpose, the range at which f' is monotone increasing, for positive values of η , is calculated. By using a shooting technique and forcing the $f' = 1$ at local maxima, very accurate solution is obtained for σ . In order to do that, we start with two initial guess for σ ; 0 and 1 respectively:

$$\sigma = 0, f'_{max} = 0 \quad (21)$$

$$\sigma = 1, f'_{max} = 2.09866 \text{ where } \eta = 4.60438 \quad (22)$$

Now more and more accurate σ values can be estimated by linear interpolation. Table 1 shows σ_n and $f'_{max,n}$ values where n denotes the number of iteration.

Table 1. σ and f'_{max} with respect to iteration number.

n	σ	f'_{max}	η
1	0.4765	1.28032	5.8950
2	0.3722	1.08591	6.4009
3	0.3428	1.02795	6.5790
4	0.3335	1.00927	6.6395
5	0.3304	1.00300	6.6602
6	0.3294	1.00098	6.6670
7	0.3291	1.00037	6.6690
8	0.3290	1.00017	6.6697
9	0.3289	0.99997	6.6704

This indicates that solution is not valid as $\eta > 6.67$. As a result, $f''(0)$ is estimated with only 0.96% relative error. Accuracy can be increased by adding higher order terms of the series, but we do not go further under this section. Table 2. shows calculated results for f, f' and f'' and their comparison to result of [12].

Table 2. Results and comparison of solution with perturbation technique.

η	f	Howarth [12]	f'	Howarth [12]	f''	Howarth [12]
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.3289	0.3321
1	0.1640	0.1656	0.3267	0.3298	0.3200	0.3230
2	0.6440	0.6500	0.6241	0.6298	0.2648	0.2668
3	1.3843	1.3969	0.8392	0.8461	0.1609	0.1614
4	2.2864	2.3059	0.9489	0.9555	0.0652	0.0642
5	3.2581	3.2834	0.9869	0.9916	0.0189	0.0159
6	4.2516	4.2798	0.9979	0.9990	0.0058	0.0024
7	5.2510	5.2794	0.9993	0.9999	-0.004	0.0002

This results are amazing considering the simplicity of the methodology however, since the domain is infinite and problem has a strong non-linearity, technique can be used for limited range of the domain. This is the general restriction of perturbation techniques as it is pointed out by [26].

3. Weighted residual method

In this section, an approximate solution technique using well-known Galerkin method is presented. In this method, first a trial function which satisfies all boundary condition should be introduced such as:

$$F_t(\eta, c_i) = g(\eta) + \sum_{i=1}^N c_i H(\eta) \quad (23)$$

Where F_t is trial function, $g(\eta)$ is a function of η which satisfies all boundary conditions, $H(\eta)$ is a function of η which satisfies the homogenous form of the given boundary conditions, and c_i s are unknown coefficients to be determined.

Unless F_t has not the form of exact solution of the problem, there is always a residual function of η and c_i . In all weighted residual methods, the goal is to determine the c_i s, which somewhat minimize the residual, by using suitable weight functions and integral relations. Specifically, in Galerkin method, the weight functions are chosen with having same form of the trial function, for another words:

$$w_j = \frac{\partial F_t}{\partial c_j} \quad (24)$$

Where w_j s are weight functions. The integral relations to find out c_i s are:

$$\int_0^{\infty} w_j \left(F_t''' + \frac{1}{2} F_t'' F_t \right) d\eta = 0 \quad (25)$$

As one can notice (25) provides N equations for N c_i s. In order to solve (1) with boundary conditions (2) and (3), we first introduce following trial function.

$$F_t = \eta + e^{-\eta} - 1 + \sum_{i=1}^N c_i [e^{-(i+1)\eta} - (i+1)e^{-\eta} + i] \quad (26)$$

And relative weight functions in this case:

$$w_j = e^{-(j+1)\eta} - (j+1)e^{-\eta} + j \quad (27)$$

By substituting trial function (26) into (1), residual function (R) is found as:

$$R = -e^{-\eta} + \sum_{i=1}^N c_i [-(i+1)^3 e^{-(i+1)\eta} + (i+1)e^{-\eta}] + \quad (28)$$

$$\frac{1}{2} \left[\eta + e^{-\eta} - 1 + \sum_{i=1}^N c_i [e^{-(i+1)\eta} - (i+1)e^{-\eta} + i] \right]$$

$$\left[e^{-\eta} + \sum_{i=1}^N c_i [(i+1)^2 e^{-(i+1)\eta} - (i+1)e^{-\eta}] \right]$$

The simplest case occurs when $N = 1$ which results in only one quadratic equation for one unknown. By multiplying (28) and (27) and substituting into (25), and with some algebra we get:

$$48c_1^2 + 65c_1 + 55 = 0 \tag{29}$$

The difficulty due to the non-linearity arises one more time since (29) does not have a solution for c_1 in real numbers. Although using only real part of the solution of (29) gives very good results for f , this is nothing to do with the method. However, by taking $N = 2$ and following the same process we get two quadratic equations for c_1 , and c_2 :

$$4720c_1^2 + 19680c_2^2 + 19170c_1c_2 + 7826c_1 + 9630c_2 + 7875 = 0 \tag{30}$$

$$3360c_1^2 + 13815c_2^2 + 13560c_1c_2 + 4550c_1 + 4599c_2 + 4900 = 0 \tag{31}$$

These equations have two distinct real solutions for c_1 and c_2 but we are interested in only one of them which minimize the residual. The relevant solution for f can be found as:

$$c_1 = -2.33236, c_2 = 0.7607 \tag{32}$$

Thus, the approximate solution becomes:

$$f_2 = \eta + e^{-\eta} - 1 - 2.33236(e^{-2\eta} - 2e^{-\eta} + 1) + 0.7607(e^{-3\eta} - 3e^{-\eta} + 2) \tag{33}$$

Where f_2 denotes the approximate solution of f when $N = 2$. f_3 and f_4 can be calculated similarly and given as:

$$f_3 = \eta + e^{-\eta} - 1 + 1.5796(e^{-2\eta} - 2e^{-\eta} + 1) + 0.2864(e^{-3\eta} - 3e^{-\eta} + 2) + 0.1093(e^{-4\eta} - 4e^{-\eta} + 3) \tag{34}$$

$$f_4 = \eta + e^{-\eta} - 1 - 1.7237(e^{-2\eta} - 2e^{-\eta} + 1) + 0.0008(e^{-3\eta} - 3e^{-\eta} + 2) + 0.8121(e^{-4\eta} - 4e^{-\eta} + 3) - 0.3547(e^{-5\eta} - 5e^{-\eta} + 4) \tag{35}$$

Comparative results for f , f' and f'' are shown by Table 3, 4 and 5 respectively.

Table 3. Comparative Results for f

η	f_2	f_3	f_4	Howarth [12]
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.1556	0.1768	0.1674	0.1656
2	0.6060	0.6805	0.6661	0.6500
3	1.3518	1.4599	1.4391	1.3969
4	2.2502	2.3731	2.3494	2.3059
5	3.2117	3.3405	3.3155	3.2834
6	4.1974	4.3284	4.3129	4.2798
7	5.1921	5.3238	5.2983	5.2794

Table 4. Comparative Results for f'

η	f'_2	f'_3	f'_4	Howarth [12]
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.2733	0.3237	0.3263	0.3298
2	0.6220	0.6682	0.6602	0.6298
3	0.8429	0.8652	0.8606	0.8461
4	0.9396	0.9486	0.9468	0.9555
5	0.9774	0.9809	0.9801	0.9916
6	0.9916	0.9929	0.9927	0.9990
7	0.9969	0.9974	0.9973	0.9999

Table 5. Comparative Results for f''

η	f''_2	f''_3	f''_4	Howarth [12]
0	0.8995	0.8715	0.2094	0.3321
1	0.3227	0.3584	0.3381	0.3230
2	0.3039	0.2787	0.2796	0.2668
3	0.1461	0.1272	0.1309	0.1614
4	0.0589	0.0503	0.0521	0.0642
5	0.0224	0.019	0.0197	0.0159
6	0.0083	0.0071	0.0073	0.0024
7	0.0031	0.0026	0.0027	0.0002

It appears that the results are very good for f and f' . However method is not successful, with this trial function, at predicting f'' for small values of η , especially when $\eta < 1$. In order to obtain better results for $\eta < 1$ we can force the trial function to include additional information where $\eta = 0$. By satisfying (1) at $\eta = 0$, we obtain following condition:

$$f'''(0) = 0 \tag{36}$$

Now we introduce following trial function which satisfies (35) besides (2) and (3).

$$f_t = \eta - \frac{e^{-2\eta}}{6} + \frac{4e^{-\eta}}{3} - \frac{7}{6} + \sum_{i=1}^N c_i \left[e^{-(i+2)\eta} + \frac{i+2 - (i+2)^3}{6} e^{-2\eta} + \frac{(i+2)^3 - 4(i+2)}{3} e^{-\eta} - \frac{(i+2)^3 - 7(i+2) + 6}{6} \right] \tag{37}$$

This time, there are no real solutions available for $N = 1$ and $N = 2$. However, by taking $N = 3$ and applying the same procedure we obtain;

$$f_3 = \eta - \frac{e^{-2\eta}}{6} + \frac{4e^{-\eta}}{3} - \frac{7}{6} + 0.75(e^{-3\eta} - 4e^{-2\eta} + 5e^{-\eta} - 2) - 0.05(e^{-4\eta} - 10e^{-2\eta} + 16e^{-\eta} - 7) - 0.04(e^{-5\eta} - 20e^{-2\eta} + 35e^{-\eta} - 16) \tag{38}$$

Results are tabulated below.

Table 6. Results for Second Trial Function

η	f	Howarth [12]	f'	Howarth [12]	f''	Howarth [12]
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.3667	0.3321
1	0.1676	0.1656	0.3375	0.3298	0.3649	0.3230
2	0.6812	0.6500	0.6727	0.6298	0.2699	0.2668
3	1.4624	1.3969	0.8654	0.8461	0.1259	0.1614
4	2.3755	2.3059	0.9484	0.9555	0.0503	0.0642
5	3.3427	3.2834	0.9807	0.9916	0.0191	0.0159
6	4.3305	4.2798	0.9929	0.9990	0.0071	0.0024
7	5.3260	5.2794	0.9974	0.9999	0.0026	0.0002

Inclusion of additional information did not increase the solution accuracy in general. On the other hand, new trial function predicts $f''(0)$ far better than the previous solution. Even though this method is more complicated than the perturbation technique, it is useful since it gives good results for whole domain.

4. Discrete solution based on numerical integration

In this section, a simple numerical procedure is presented. Even though common methods such as Runge Kutta Fehlberg algorithm are successful enough to solve Blasius equation with extreme accuracy, trying less common or new solution techniques is important since all numerical methods have their own advantages and disadvantages when solving various type of differential equations. The method which is discussed in this section is based on numerical integration and quite simple to adopt many type of differential equations. We first integrate (1) from η to $\eta + h$ where h is considered to be small.

$$\int_{\eta}^{\eta+h} f''' d\varphi + \frac{1}{2} \int_{\eta}^{\eta+h} f f'' d\varphi = 0 \tag{39}$$

With some arrangement, we obtain following equation:

$$f''(\eta + h) = f''(\eta) - \frac{1}{2} \int_{\eta}^{\eta+h} f f'' d\varphi \tag{40}$$

Now we can attack this problem with two different approaches. First, we can directly apply a suitable numerical integration method, such as left end point (starting point) method, to the last term of (39). Secondly, we can apply integration by parts before numerical integration. So we get:

$$f''(\eta + h) = f''(\eta) - \frac{h}{2} f''(\eta) f(\eta) \tag{41}$$

Or:

$$f''(\eta + h) = f''(\eta) - \frac{1}{2}[f'(\eta + h)f(\eta + h) - f'(\eta)f(\eta)] - \frac{h}{2}[f'(\eta)]^2 \quad (42)$$

As it is shown in previous section, $f'''(0)$ can be obtained by shooting technique, so we can assume that the only unknown at (40) is $f''(\eta + h)$. Thus we get a simple linear initial value problem in each step, which can be solved easily by direct integration.

$$f_{i+1} = \frac{\sigma}{2}h^2 + f'_i h + f_i \quad (43)$$

where f_i denotes $f(\eta)$ and f_{i+1} is $f(\eta + h)$ and σ is given by:

$$\sigma = f''_i - \frac{h}{2}f_i f''_i \quad (44)$$

(42) and (43) provide an incredibly simple algorithm, and should give quite good results for small values of h , since it depends only on one approximation. (41) on the other hand, includes two additional unknowns which can be determined by Taylor series expansion, or for more accurate estimate a predictor, corrector type algorithm can be applied. For this algorithm, we first try to guess f_{i+1} and f'_{i+1} by Taylor series:

$$f_{T,i+1} = f_i + hf'_i + \frac{h^2}{2}f''_i - \frac{h^3}{12}f_i f''_i + O(h^4) \quad (45)$$

$$f'_{T,i+1} = f'_i + hf''_i - \frac{h^2}{4}f_i f''_i + O(h^3) \quad (46)$$

Where T implies that, value is estimated by Taylor series while f''_i term is calculated from (1). As it is mentioned above, these values can directly be used to determine σ as well as, in order to obtain further accuracy, calculated value of σ can be treated as a prediction and used to calculate more accurate values, than Taylor series, for f_{i+1} and f'_{i+1} . Then a correction can be applied by calculating σ with these new values.

Even though second method is far more complicated than the first one, it is important since it can be generalized for more accurate numerical integration methods such as trapezoidal method, Simpson's methods etc. Additionally, it should be noted that the first approximation cannot be used for equations which have singularities at any point while integration by parts may be used in some cases to get rid of singularities. In order to guarantee an adequately accurate result, we take the integration at (39) with trapezoidal method and obtain following relation for σ .

$$\sigma = \frac{f''_i - \frac{h}{4}f_i f''_i}{1 + \frac{h}{4}f_{i+1}} \quad (47)$$

Extreme accuracy can be obtained by applying more accurate integration techniques, however we do not go further. By taking $h = 0.01$ and solving (42) and (46) as f_{42} denoting results for (42) and f_{46} denoting results for (46), obtained results are summarized at Table 7, 8 and 9.

Table 7. Comparative Results of Numerical Methods for f

η	f_{42}	f_{46}	Howarth [12]
0	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.1658	0.1659	0.1656
2	0.6510	0.6513	0.6500
3	1.3987	1.3990	1.3969
4	2.3084	2.3086	2.3059
5	3.2864	3.2863	3.2834
6	4.2828	4.2827	4.2798
7	5.2825	5.2823	5.2794

Table 8. Comparative Results of Numerical Methods for f'

η	f'_{42}	f'_{46}	Howarth [12]
0	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.3303	0.3305	0.3298
2	0.6307	0.6308	0.6298
3	0.8470	0.8469	0.8461
4	0.9561	0.9559	0.9555
5	0.9918	0.9916	0.9916
6	0.9990	0.9990	0.9990
7	0.9999	0.9999	0.9999

Table 9. Comparative Results of Numerical Methods for f''

η	f''_{42}	f''_{46}	Howarth [12]
0	0.3326	0.3328	0.3321
1	0.3236	0.3237	0.3230
2	0.2674	0.2672	0.2668
3	0.1618	0.1615	0.1614
4	0.0642	0.0642	0.0642
5	0.0158	0.0159	0.0159
6	0.0023	0.0024	0.0024
7	0.0002	0.0002	0.0002

Results are incredibly interesting since the simplest approach provides amazingly accurate results. It seems there is no need to carry all that calculations with the trapezoidal rule.

Now in order to show the power of second approach on equations which includes singularity, we consider well known Thomas-Fermi equation [27] which is given as:

$$y'' = \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} \tag{48}$$

Where relative boundary conditions are:

$$y(0) = 1 \tag{49}$$

$$y(\infty) = 0 \tag{50}$$

As one can notice, equation has a singularity at $x = 0$ which cause additional difficulty to solve this equation numerically. In fact, this equation has high reputation with its difficulty not only since it is non-linear or has a singularity, but also equation is so sensitive to initial slope, $y'(0)$, that we cannot solve it with common techniques. We give a relatively simple technique which is developed with a similar idea. By integrating the whole equation, we obtain:

$$y'_{i+1} = y'_i + 2\sqrt{x+h}(y_{i+1})^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{x}(y_i)^{\frac{3}{2}} - \int_x^{x+h} 3\sqrt{xy}y'd\varphi \tag{51}$$

Now applying the trapezoidal method and similar procedure, we obtain following equation.

$$y'_{i+1} = \frac{y'_i + 2\sqrt{x+h}(y_{i+1})^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{x}(y_i)^{\frac{3}{2}} + 3\sqrt{x}\sqrt{y_i}y'_i}{1 + 3\sqrt{x+h}\sqrt{y_{i+1}}} \tag{52}$$

Following a similar procedure presented above, and using bisection method, assuming that relative $y'(0)$ value is in between -1.5 and -2 , an accurate solution can be obtained. Solution of (51) as $h = 0.001$ is summarized at Table 10.

Table 10. Comparative Results for Thomas Fermi Equation

x	$y(x)$	Bender [27]
0.0	1.0000	1.0000
0.2	0.7932	0.7931
0.5	0.6071	0.6070
1.0	0.4241	0.4240
5.0	0.0788	0.0788
10	0.0243	0.0243
20	0.0058	0.0058
50	0.0006	0.0006
100	0.0001	0.0001

Additionally, initial slope, $y'(0)$, is calculated as -1.58927 with 0.076% relative error comparing to [28].

5. Conclusion

Several approximate solution techniques were applied to Blasius Equation. Obtained results reveals that all three approaches are useful and highly effective. The first approach which depends on simple perturbation technique is so easy that solution can be obtained with less than 1% error without even using any computer programme. It should be kept in mind that the results are not valid for whole domain though.

Galerkin method is more complicated than the first approach but it provides an approximate analytical solution which is valid for whole domain. The only weakness of

the method is that it cannot give highly accurate results for second derivative at small values of η . In order to get rid of this weakness, a new trial function which includes an additional information was introduced. Even though weakness diminishes when using this technique, calculation became more complicated than before.

The last approach is a simple numerical method which discretize the domain into small sections and calculates the values at the end points by solving an initial value problem at each section. Most accurate results were obtained with this approach. In order to show the power of this approach, famous Thomas Fermi problem was also solved with the same technique, and a highly accurate solution was obtained one more time.

These three techniques have some benefits and disadvantages. The first technique gave an approximated continuous curve which the discrete solutions such as finite difference techniques cannot provide. However, solution with this approach is only valid for small values of η . Galerkin method overcomes that issue while it cannot estimate the drag force on the plate correctly. Discrete solution gives the most accurate results though it is not capable of providing analytical curves as first two methods does. As a consequence, all three approaches presented in this paper can be effectively used to obtain highly accurate solutions for Blasius Flow problem.

Acknowledgement

This study was supported by Scientific Research Projects Coordination Unit of Bandirma Onyedi Eylul University. Project No: BAP-18-DF-1009-052

References

- [1] White F.M., **Viscous Fluid Flow**, Second Edition, McGraw Hill, Inc., p. 104, (1991).
- [2] Schlichting, H., et al., **Boundary Layer Theory**, Springer, Newyork, (2000).
- [3] Blasius H., Grenzschichten in Fluïssigkeiten mit kleiner Reibung, **Z Math Phys.**, 56, 1–37, (1908).
- [4] Datta B.K., Analytic solution for THE Blasius equation, **Indian Journal of Pure and Applied Mathematics**, 34(2), 237-240, (2003).
- [5] He, J.H., A simple perturbation approach to Blasius equation, **Appl. Math. Comput.**, 140(2-3), 217–222, (2003).
- [6] He, J.H., Approximate analytical solution of Blasius' equation, **Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation**, 13(4), (1998).
- [7] Wazwaz, A.M., The variational iteration method for solving two forms of Blasius equation on a half infinite domain, **Appl. Math. Comput.**, 188(1), 485-491, (2007).
- [8] Aiyesimi, Y.M. and Niyi, O.O., Computational analysis of the non-linear boundary layer flow over a flat plate using Variational Iterative Method (VIM), **American Journal of Computational and Applied Mathematics**, 1(2), 94-97, (2011).
- [9] Fazio, R., Numerical transformation methods: Blasius problem and its variants. **Appl. Math. Comput.**, 215(4), 1513–1521, (2009).

- [10] Asaithambi, A., Solution of the Falkner-Skan equation by recursive evaluation of Taylor coefficients, **J. Comput. Appl. Math.**, 176(1), 203–214, (2005).
- [11] Akgül A., A novel method for the solution of blasius equation in semi-infinite domains, **An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications** 7(2), 225-233, (2017).
- [12] Howarth, L., Laminar boundary layers. In **Handbuch der Physik** (herausgegeben von S. Flugge), Bd. 8 1, Strmungsmechanik I (Mitherausgeber C. Truesdell), pages 264 350. Springer-Verlag, Berlin-Gottingen-Heidelberg, (1959).
- [13] Parand, K., Dehghan, M., and Pirkhedri, A., Sinc collocation method for solving the Blasius equation, **Phys. Lett. A**, 373(44), 4060–4065, (2009).
- [14] Yao, B., and Chen, J., A new analytical solution branch for the Blasius equation with a shrinking sheet, **Appl. Math. Comput.**, 215(3), 1146–1153, (2009).
- [15] Liao, S. J., An explicit, totally analytic approximate solution for Blasius' viscous flow problems, **Internat. J. Non-Linear Mech.**, 34(4), 759–778, (1999).
- [16] Gheorghiu, C.I., Laguerre collocation solutions to boundary layer type problems, **Numer. Algor.** 64, 385–401, (2012).
- [17] Liao, S. J., An explicit, totally analytic approximate solution for Blasius' viscous flow problems, **Internat. J. Non-Linear Mech.**, 34(4), 759–778, (1999).
- [18] Lin, J., A new approximate iteration solution of Blasius equation, **Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.**, 4(2), 91–99, (1999).
- [19] Yu, L.T., and Chen, C.K., The solution of the Blasius equation by the differential transformation method, **Math. Comput. Modelling**, 28(1), 101–111, (1998).
- [20] Peker, H.A., Karaolu, O., and Oturan, G. The differential transformation method and Pade approximant for a form of Blasius equation, **Math. Comput. Appl.**, 16(2), 507–513, (2011).
- [21] Abbasbandy, S., A numerical solution of Blasius equation by Adomians decomposition method and comparison with homotopy perturbation method, **Chaos, Solutions and Fractals**, 3, 257-260, (2007).
- [22] Wang L., A new algorithm for solving classical Blasius equation, **Applied Mathematics and Computation**, 157, 1–9, (2004).
- [23] Tajvidi T., Razzaghi M., Dehghan M., Modified rational Legendre approach to laminar viscous flow over a semi-infinite flat plate, **Chaos, Solutions and Fractals**, 35, 59–66, (2008).
- [24] Baker, G. A. Jr. The theory and application of the pade approximant method. In **Advances in Theoretical Physics**, 1 (Ed. K. A. Brueckner). New York: Academic Press
- [25] Finlayson, B.A., **The Method of Weighted Residuals and Variational Principles With Applications in Fluid Mechanics**. Academic Press, New York and London, (1972),
- [26] Liao, S., **Beyond Perturbation Introduction to The Homotopy Analysis Method**, Part I, Chapman & Hall/CRC, (2004).
- [27] Bender, C.M. and Orszag, S.A., **Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers**. New York: McGraw-Hill, p. 25, (1978).
- [28] Kobayashi, S., et al., Some coefficients of the TFD function, **J. Phys. Soc. Jpn.** 10, 759–765, (1955).

Simple recurrent neural networks for the numerical solutions of ODEs with Dirichlet boundary conditions

Korhan GÜNEL^{1,*}, Gülsüm İŞMAN², Merve KOCAKULA²

¹Aydın Adnan Menderes University, Faculty of Arts and Sciences,
Department of Mathematics, Aydın.

²Aydın Adnan Menderes University, Graduate School of Natural Sciences,
Department of Mathematics, Aydın.

Geliş Tarihi (Received Date): 16.08.2018

Kabul Tarihi (Accepted Date): 16.11.2018

Abstract

In this study, we consider Dirichlet Boundary Value Problems (DBVPs) for Ordinary Differential Equations (ODEs) to illustrate the general procedure of obtaining numerical solutions using simple Recurrent Neural Networks (RNNs). Different types of both linear and nonlinear activation functions are used in the neural network. The network is trained by Particle Swarm Optimization (PSO) method, and cross validation approach is performed to tune the arbitrary parameters of neural nets. The exact solutions and the obtained neural net solutions, regarding with the types of activation functions, are compared to determine the efficiency of using RNNs in solving the problem. In all cases, the exact solutions are confronted with those obtained from RNNs in the context of absolute errors and average mean squared errors (MSEs) with standard deviations.

Keywords: *Recurrent neural networks, particle swarm optimization, ordinary differential equations, Dirichlet boundary value problem.*

* Korhan GÜNEL, kgunel@adu.edu.tr, <http://orcid.org/0000-0002-5260-1858>

Gülsüm İŞMAN, gulsumisman@gmail.com, <http://orcid.org/0000-0002-0563-5086>

Merve KOCAKULA, kocakulamerve@gmail.com, <http://orcid.org/0000-0001-9091-9050>

Dirichlet sınır değer koşullarına sahip adi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için basit tekrarlayan sinir ağları

Özet

Bu çalışmada, basit tekrarlayan yapay sinir ağları (RNN'ler) kullanılarak nümerik çözümlerin elde edilmesine yönelik süreci genel olarak açıklamak adına, Adi Diferansiyel Denklemler (ODE) için Dirichlet Sınır Değer Problemleri (DBVP) ele alınmıştır. Yapay sinir ağında doğrusal ve doğrusal olmayan türlerde çeşitli aktivasyon fonksiyonları kullanılmıştır. Ağ, Parçacık Sürü Optimizasyonu (PSO) yöntemiyle eğitilmiştir ve ağın keyfi parametrelerinin ayarlanabilmesi için çarpaz doğrulama yaklaşımı kullanılmıştır. Problemin çözümünde RNN kullanımının etkinliğini belirlemek için, gerçek çözümler ile aktivasyon fonksiyonunun türüne bağlı olarak elde edilen sinir ağı çözümleri karşılaştırılmıştır. Tüm durumlarda gerçek çözümler ile RNN'den elde edilen sonuçlar, mutlak hatalar, ortalama karesel hataların ortalaması ve standart sapma bağlamında karşılaştırılmıştır.

Anahtar kelimeler: *Tekrarlayan sinir ağları, parçacık sürü optimizasyonu, adi diferansiyel denklemler, Dirichlet sınır değer problemi.*

1. Introduction

Description of the systems are substantial step for the solution of daily life problems, and the modelling of the complex systems is mostly come true by the means of stating differential equations. To obtain the numerical solutions of differential equations using traditional methods such as Shooting Method, Runge-Kutta based methods, Multi-step methods, and Finite Difference Method, firstly, the continuous domain is discretized by welcoming some cumulative errors. Furthermore, the numerical solutions are available only at discretization nodes in the problem domain.

Neural Networks (NNs) have been introduced as an alternative approach to overcome these bottlenecks [1-5]. NNs are superior to classical numerical methods by means of training with the discretization nodes and providing the approximate solutions at any point of continuous search space. NNs are mostly trained by derivative based optimization methods such as Gradient Descent, Scaled Conjugate Gradient and Levenberg-Marquardt optimizers. However, the training NNs can occur by dissimilar ways such as derivative free or heuristic optimization methods. With this direction, some of the works that can be considered milestone research in literature is summarized in the following.

The first study is presented by Lee and Kang (1990) including utilizing Hopfield Neural Network models for solving the finite difference equation [1]. Meade and Fernandez (1994) demonstrate that Feedforward Neural Network (FFNN) is able to solve linear ODEs [2]. Lagaris et al. (1998) solve initial and boundary value problems, which has a trial solution, including two parts, which satisfies conditions with ANNs solution [3].

Malek and Beidokthi present a hybrid method based on optimization techniques and ANNs so as to solve both first and high order ODEs [4]. Raja improve stochastic

computational methods as ANNs and optimization methods such as Simulated Annealing (SA), Pattern Search (PS), Genetic Algorithms (GAs), Active-set Algorithm (ASA) and their hybrid methods in order to solve Boundary Value Problems (BVPs) of second order Pantography Functional Differential Equations (PFDEs) [5]. Raja et al. develop stochastic techniques for the solution of 2-dimensional Bratu problem with Feedforward Neural Networks [6]. For the network training, they utilize global technique as Particle Swarm Optimization (PSO) and to get faster convergence they use Sequential Quadratic Programming (SQP) and their hybrid approaches. Raja presents a study about the numerical treatment for the Troesch's problem [7]. For this purpose, he utilizes NNs optimized with optimization techniques as PSO, ASA and their hybrid methods. Raja et al. propose a computational intelligence method based on NNs and SQP for the solution of fractional order nonlinear Riccati Differential Equations [8].

Apart from of these studies, we put into practice one of the derivative-free population based global optimization method as Particle Swarm Optimization (PSO) to train a Recurrent Neural Network (RNN) for solving Dirichlet Boundary Problems of Ordinary Differential Equations, in this work. In contrast to studies in the literature, the main reason for using RNN in this study is that RNNs achieve more accurate results when making predictions with nonlinear chaotic time series as emphasized in the study of Brezak et al. (2012) and the study of Saini, Parkhe and Khadtare (2016) [9,10].

In the sequel, we proceed to summarize briefly the mathematical model of the problem utilized in this work for obtaining the Recurrent Neural Network solution of a Dirichlet Boundary Problem. The next section clarifies how to transform a DBVP to an optimization problem. The third section covers the limitations of this study and the experimental studies to compare the mentioned methods applied to some different types of second order ODEs with Dirichlet Boundary Conditions. The final section presents the findings of the study and some future works with the conclusion we reach.

2. Mathematical Modeling

In this section, we describe how to transform DBVPs for ODEs to an optimization problem along with the cost function depending on a Recurrent Neural Network solution. Let us consider the problem given in Eq. (1) in which the function f is continuous in $[a, b]$, so the ODE has a unique solution with the boundary conditions.

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), & x \in (a, b) \\ y(a) = A, \\ y(b) = B \end{cases} \quad (1)$$

The trial function as formed in Eq. (2) can be used to solve the given problem in Eq. (1). One can easily seen that the trial function satisfies the boundary conditions of Eq. (1).

$$y_T(x_j, \vec{p}) = \frac{(x_j - b)}{a - b} A - \frac{(x_j - a)}{a - b} B + (x_j - a)(x_j - b) \text{Net}(x_j, \vec{p}) \quad (2)$$

where the function Net depending on the arbitrary neural net parameters $\vec{p} = [\vec{\alpha}, \vec{\omega}, \vec{\Omega}, \vec{\beta}]$ as given in Eq. (3) and the input x_j denotes the simple RNN solution of Eq. (1). The inputs of RNN x_j for $j=1,2,\dots,N$ are determined by discretization of the interval $[a,b]$ where N is the total number of discretization nodes. The discretization nodes are only used to train the RNN whose architecture is given as in Fig. 1.

$$\text{Net}(x_j(t), \vec{p}) = \sum_{i=1}^m \alpha_i g(z_i) \quad (3)$$

where m is the total number of neurons in RNN depicted in Fig. 1, and the output of the i^{th} neuron is $z_i(t) = \omega_i x_j(t) + \Omega_i z_i(t-1) + \beta_i$ at iteration t for $i=1,2,\dots,m$. In this study, the activation function g in Eq. (3) is selected among of hyperbolic tangent, Rectified Linear Unit (ReLU), Parametric ReLU (PreLU), Leaky ReLU, Exponential Linear Unit (ELU) and Self-Gated Activation Function (SWISH) functions used commonly in RNNs to avoid the vanishing gradient problem. The definition of the aforementioned activation functions are listed in Table 1.

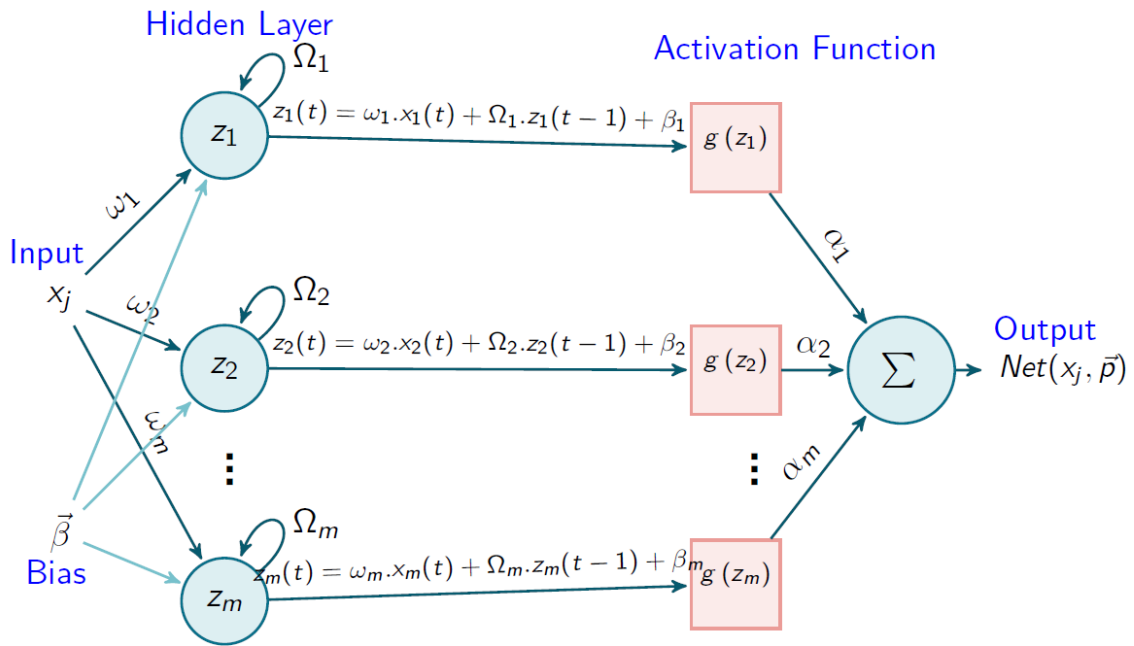


Figure 1. Architecture of simple RNN.

Table 1. The list of activation function used in this study.

Activation Function	Definition
tanh	$g(z) = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}$
ReLU	$g(z) = \max(0, z)$
Leaky ReLU	$g(z) = \begin{cases} z, & \text{if } z > 0 \\ 0.01z, & \text{otherwise} \end{cases}$
PReLU	$g(z) = \begin{cases} z, & \text{if } z > 0 \\ az, & \text{otherwise} \end{cases}$ where $a \in (0,1)$
ELU	$g(z) = \begin{cases} z, & \text{if } x > 0 \\ a(e^z - 1), & \text{otherwise} \end{cases}$ where $a \geq 0$
SWISH	$g(z) = z \cdot \sigma(z) = z \cdot \frac{1}{1 + e^{-z}}$

If unknown parameters of recurrent neural network given in Fig. 1 are specified as a cost function which is given in Eq. (4) our problem turns into an optimization problem.

$$E = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{\partial^2 y_T(x_j, \vec{p})}{\partial x_j^2} - f \left(x_j, y_T(x_j, \vec{p}), \frac{\partial y_T(x_j, \vec{p})}{\partial x_j} \right) \right\}^2 \quad (4)$$

First and second derivatives of the trial function in Eq. (4) are required to calculate the cost function, and they can be defined as given in Eq. (5) and Eq. (6) respectively.

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_T(x_j(t), \vec{p})}{\partial x_j(t)} &= \frac{A - B}{a - b} + (2x_j(t) - a - b) \text{Net}(x_j(t), \vec{p}) \\ &+ (x_j(t) - a)(x_j(t) - b) \frac{\partial \text{Net}(x_j(t), \vec{p})}{\partial x_j(t)} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y_T(x_j(t), \vec{p})}{\partial x_j^2(t)} &= 2 \text{Net}(x_j(t), \vec{p}) + 2(2x_j(t) - a - b) \frac{\partial \text{Net}(x_j(t), \vec{p})}{\partial x_j(t)} \\ &+ (x_j(t) - a)(x_j(t) - b) \frac{\partial^2 \text{Net}(x_j(t), \vec{p})}{\partial x_j^2(t)} \end{aligned} \quad (6)$$

where $\frac{\partial \text{Net}(x_j(t), \vec{p})}{\partial x_j(t)} = \alpha_i \frac{dg(z_i)}{dx_j(t)}$ and $\frac{\partial^2 \text{Net}(x_j(t), \vec{p})}{\partial x_j^2(t)} = \alpha_i \frac{d^2g(z_i)}{dx_j^2(t)}$ at iteration t . The definition of the function g regarding with the selected activation function in RNN are listed in Table 1.

Finally, Dirichlet Boundary Problem for ODEs is transformed to an optimization problem as given in Eq. (7).

$$\text{Problem : } \arg \min_{\vec{p} \in R^{4m}} \{E\} \quad (7)$$

For solving the problem given in Eq. (7), derivative based optimization methods like Gradient Descent are often used. However, most of time, the mentioned optimization methods fall into the trap at local optimum without converging to global optimum. Moreover, the derivative based methods require to calculate the partial derivatives of the cost function $E = E(\vec{\alpha}, \vec{\omega}, \vec{\Omega}, \vec{\beta})$ where $\vec{\alpha}, \vec{\omega}, \vec{\Omega}, \vec{\beta} \in R^m$ are the unknown parameters of the network such that m is the number of neurons in the neural network. Therefore, as the number of neurons in the neural network increases, the method requires more calculations. To handle the problem of falling into the local minima and to reduce the workload needed to solve the problem as given in Eq. (7), we used a variant of Particle Swarm Optimization (PSO) introduced by Kennedy and Eberhart (1995), in this study [11]. Because, when the number of neurons in RNN is increasing, the number of unknown parameters of the optimization problem are also increased, and it becomes more difficult to solve the problem. In addition, the cross-validation approach has been used to validate the method. With cross-validation process, one can check whether the proposed model converges to the solution, or not, every time with various population distribution initially.

3. Experiments

In this section, we present the numerical solutions, obtaining from RNNs, of both of linear and nonlinear types of Dirichlet Boundary Problems for ODEs. In all of the experiments, we use the step size as $h = 0.02$ at the training stage of the network. After training the RNN, the network is tested with inputs generated using half of the step size used in the training stage as $\frac{h}{2}$. The network includes 5 neurons with single hidden layer only, and the maximum number of epochs is selected as 3.000 for stopping criteria of training. The lower and upper bound values of each arbitrary parameter of the networks are -10 and 10 respectively.

The consideration by means of performance analysis is given via the Mean Squared Errors (MSEs). We use cross validation for parameter tuning for the arbitrary parameters of RNN. For this, each method is executed 10 times to obtain mean and standard deviations of MSEs obtained in the training and testing phase independently. We compare all of the obtained numerical solutions with exact solutions regarding with absolute errors using the RNN parameters produces the lowest cost value.

The proposed approach is coded in Python and implemented on a Windows 64 bit operating system with a 3.4Ghz Intel(R) Core (TM) i7-2600 CPU and 16 Gb 800Mhz DDR3 RAM.

Example 1. The second order homogenous linear differential equation with Dirichlet Boundary Condition in Eq. (8) has the exact solution as $y(x) = \sin(x) - \frac{1}{2} \cos(x)$.

$$\begin{cases} y''+y = 0, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ y(0) = -\frac{1}{2}, \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases} \quad (8)$$

According to the mean of MSEs shown in Table 2, when ReLU are used in RNN as activation function, the best numerical solutions are obtained. Therefore, the absolute errors are listed in Table 3 with ReLU activation function. The plot of numerical solution compared with exact solution of Eq. (8) is depicted in Fig. 2.(a). In addition, Fig. 2. (b) shows the changes of the cost value with respect to the iteration. The decreasing cost when the iteration increasing validates that the RNN trained by PSO solves the DBVPs for ODEs. It also shows the speed of convergence of RNN regarding with the activation functions, and both of Table 2 and Fig. 2. (b) also underline that the worst results are occurred with hyperbolic tangent function.

Table 2. The obtained average of MSEs with standard deviations from the numerical solutions for Eq. (8).

Activation Function	Mean of MSEs on	
	Training Set	Test Set
tanh	$1.667 \times 10^{-3} \pm 1.183 \times 10^{-3}$	$1.696 \times 10^{-3} \pm 1.212 \times 10^{-3}$
ReLU	$1.480 \times 10^{-4} \pm 1.406 \times 10^{-4}$	$1.480 \times 10^{-4} \pm 1.402 \times 10^{-4}$
Leaky ReLU	$1.700 \times 10^{-4} \pm 1.212 \times 10^{-4}$	$1.719 \times 10^{-4} \pm 1.237 \times 10^{-4}$
PReLU	$1.994 \times 10^{-4} \pm 1.636 \times 10^{-4}$	$1.994 \times 10^{-4} \pm 1.653 \times 10^{-4}$
ELU	$1.794 \times 10^{-4} \pm 1.535 \times 10^{-4}$	$1.824 \times 10^{-4} \pm 1.556 \times 10^{-4}$
SWISH	$3.265 \times 10^{-4} \pm 3.200 \times 10^{-4}$	$3.381 \times 10^{-4} \pm 3.355 \times 10^{-4}$

Table 3. The absolute errors on some quadrature points in the both of training and test sets for Eq. (8) by using ReLU activation function.

k	x_k	$E = y(x_k) - y_T(x_k) $	k	x_k	$E = y(x_k) - y_T(x_k) $
		for Training Set			for Test Set
1	0.00	0.000	1	0.00	0.000
2	0.02	1.072×10^{-3}	7	0.11	4.387×10^{-3}
3	0.04	2.041×10^{-3}	12	0.21	5.981×10^{-3}
4	0.06	2.907×10^{-3}	17	0.31	5.682×10^{-3}
5	0.08	3.675×10^{-3}	22	0.41	3.890×10^{-3}
6	0.10	4.346×10^{-3}	27	0.51	1.026×10^{-3}
11	0.20	6.356×10^{-3}	32	0.61	2.483×10^{-3}
21	0.40	4.879×10^{-3}	37	0.71	6.220×10^{-3}
31	0.60	1.176×10^{-3}	42	0.81	9.779×10^{-3}
41	0.80	8.448×10^{-3}	48	0.91	1.084×10^{-2}
51	1.00	1.381×10^{-2}	53	1.01	1.306×10^{-2}
61	1.20	1.473×10^{-2}	58	1.11	1.417×10^{-3}
71	1.40	9.576×10^{-3}	63	1.21	1.392×10^{-3}
79	1.56	7.403×10^{-4}	79	1.51	3.494×10^{-3}

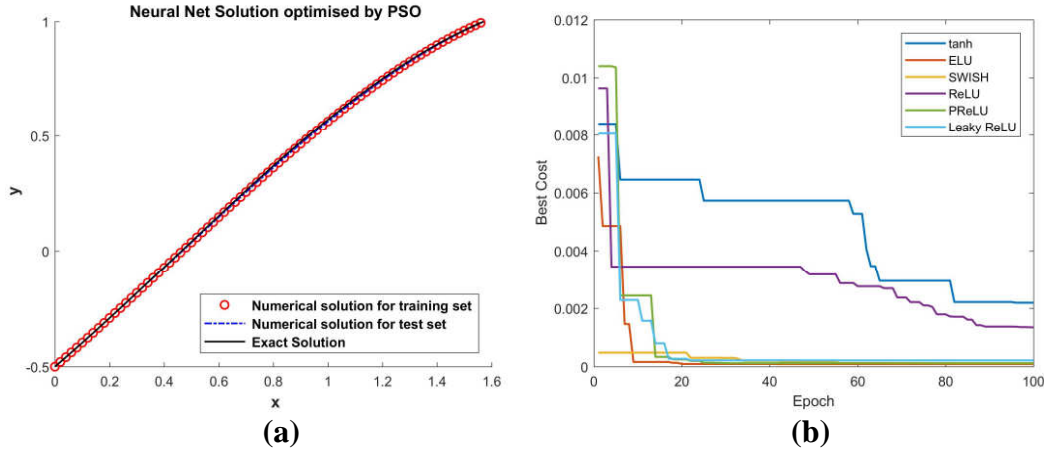


Figure 2. (a) The graph of the numerical and exact solution of Eq. (x1) (b) Best of cost values according to activation functions for 100 epochs.

Example 2. Let us consider the nonlinear differential equation with Dirichlet Boundary Condition given in Eq. (9). The the exact solution of the given problem is $y(x) = \frac{1}{x+1}$.

$$\begin{cases} y'' = y^3 - yy', & x \in [1,2] \\ y(1) = -\frac{1}{2}, \\ y(2) = \frac{1}{3} \end{cases} \quad (9)$$

Best results are obtained with SWISH function as depicted in Table 4. Thus, Table 5 gives the absolute errors when using SWISH. The exact solution and the best of RNN solution are compared in Fig. 3.(a). Moreover, Fig. 3. (b) shows the changes of the cost value relative to the iteration according to PSO. It also shows the speed of convergence of RNN depending on the activation functions, and Table 4 and Fig. 3. (b) emphasize that the worst results are occurred with hyperbolic tangent as same with linear case.

Table 4. The obtained average of MSEs with standard deviations from the numerical solutions for Eq. (9).

Activation Function	Mean of MSEs on	
	Training Set	Test Set
tanh	$5.426 \times 10^{-5} \pm 1.537 \times 10^{-4}$	$5.495 \times 10^{-5} \pm 1.010 \times 10^{-4}$
ReLU	$1.155 \times 10^{-5} \pm 2.609 \times 10^{-5}$	$1.142 \times 10^{-5} \pm 2.600 \times 10^{-5}$
Leaky ReLU	$2.075 \times 10^{-5} \pm 4.491 \times 10^{-5}$	$2.041 \times 10^{-5} \pm 4.438 \times 10^{-5}$
PReLU	$1.224 \times 10^{-5} \pm 1.897 \times 10^{-5}$	$1.213 \times 10^{-5} \pm 1.868 \times 10^{-5}$
ELU	$1.084 \times 10^{-5} \pm 1.647 \times 10^{-5}$	$1.141 \times 10^{-5} \pm 1.928 \times 10^{-5}$
SWISH	$1.003 \times 10^{-5} \pm 1.505 \times 10^{-5}$	$1.010 \times 10^{-5} \pm 1.518 \times 10^{-5}$

Table 5. The absolute errors on some quadrature points in the both of training and test sets for Eq. (9) by using SWISH activation function.

$E = y(x_k) - y_T(x_k) $			$E = y(x_k) - y_T(x_k) $		
k	x_k	for Training Set	k	x_k	for Test Set
1	1.00	0.000	1	1.00	0.000
2	1.02	1.737×10^{-4}	7	1.11	6.155×10^{-4}
3	1.04	3.172×10^{-4}	12	1.21	6.209×10^{-4}
4	1.06	4.327×10^{-4}	17	1.31	3.224×10^{-4}
5	1.08	5.226×10^{-4}	22	1.41	1.106×10^{-4}
6	1.10	5.889×10^{-4}	27	1.51	5.456×10^{-4}
11	1.20	6.344×10^{-4}	32	1.61	8.798×10^{-4}
21	1.40	6.945×10^{-5}	37	1.71	1.034×10^{-3}
31	1.60	8.574×10^{-4}	42	1.81	9.518×10^{-4}
41	1.80	9.749×10^{-4}	47	1.91	5.891×10^{-4}
51	2.00	0.000	53	2.00	0.000

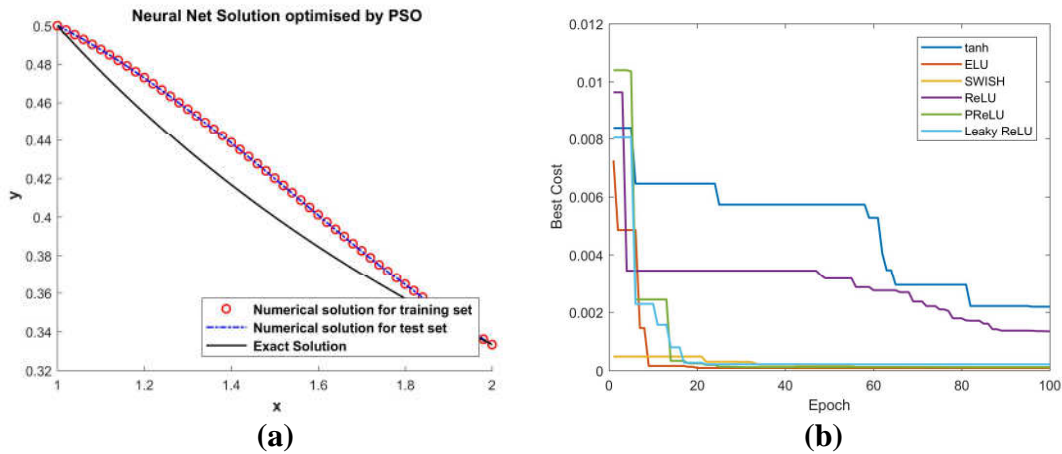


Figure 3. (a) The graph of the numerical and exact solution of Eq. (x2) (b) Best of cost values according to activation functions for 100 epochs.

4. Conclusions

In this work, a simple recurrent neural network trained by Partical Swarm Optimization is constructed for solving ODEs with Dirichlet Boundary Conditions. According to this study, it is showed that the recurrent neural networks can be a good alternative when trying to obtain fast solution of various challenging, mostly nonlinear, problems modelled by differential equations. Because, once the network is trained with some inputs, it gives nearly optimal solution at any point of problem domain unlike traditional methods. It is not required to retrain the neural network after the first construction.

Futhermore, six different activation functions are used in the network model. The convergence to the solution is obtained with all of them. In the linear case, the best results are obtained from ReLU activation functions, and the SWISH is more successful among others in the nonlinear case. However, the fastest convergence is observed with the ReLU activation function, according to Mean Squared Errors. In both cases, the slowest convergence was observed with the hyperbolic tangent function.

As a future work, the more complex neural network models, providing feedback among neurons, used in Deep Learning such as Reservoir or Echo State Networks can be used to optimize results. Moreover, some heuristics, meta-heuristics as global optimization methods, and the hybridization of them can be used to train the neural networks to solve Dirichlet Boundary Problems.

It must be emphasized that, most of problems are more complex in real worlds application, so they are modelled with delay differential equations, partial differential equations or integro-differential equations. Therefore, the model should be extended to be experienced on them.

Acknowledgments

This study is an extended version of the conference paper presented in “International Conference on Applied Mathematics in Engineering (ICAME 18)” Günel, İşman and Kocakula, (2018). We would like to thank the anonymous reviewers for their helpful comments to improve the paper.

References

- [1] Lee, H., Neural algorithms for solving differential equations. **Journal of Computational Physics**, 91, 1, 110-131, (1990).
- [2] Meade, A. J. ve Fernandez, A. A., The numerical solution of linear ordinary differential equations by feedforward neural networks. **Mathematical and Computer Modelling**, 19, 12, 1 – 25, (1994).
- [3] Lagaris, I. E., Likas, A. and Fotiadis, D. I., Artificial neural networks for solving ordinary and partial differential equations. **IEEE Transactions on Neural Networks**, 9, 5, 987-1000, (1998).
- [4] Malek, A. and Beidokhti, S. R. Numerical solution for high order differential equations using a hybrid neural network - Optimization method. **Applied Mathematics and Computation**, 183, 1, 260-271, (2006).
- [5] Raja, M. A., Numerical treatment for boundary value problems of Pantograph functional differential equation using computational intelligence algorithms. **Applied Soft Computing**, 24, 806-821, (2014).
- [6] Raja, M. A., Ahmad, S., and Samar, R., Solution of the 2-dimensional Bratu problem using neural network, swarm intelligence and sequential quadratic programming. **Neural Computing and Applications**, 25, 7-8, 1723-1739, (2014).
- [7] Raja, M.A.Z., Stochastic numerical treatment for solving Troesch’s problem. **Information Sciences**, 279, 860 – 873, (2014).
- [8] Raja, M.A.Z., Manzar, M.A., Samar, R., An efficient computational intelligence approach for solving fractional order riccati equations using ann and sqp. **Applied Mathematical Modelling**, 39, 10, 3075 – 3093, (2015).
- [9] Brezak, D., Bacek, T., Majetic, D., Kasac, J., and Novakovic, B., A comparison of feed-forward and recurrent neural networks in time series forecasting. **2012 IEEE Conference on Computational Intelligence for Financial Engineering & Economics (CIFEr)**, New York, NY, 1 – 6, (2012).

- [10] Saini, S.S., Parkhe, O. and Khadtare, T.D., Analysis of Feedforward and Recurrent Neural Network in Forecasting Foreign Exchange Rate. **Imperial Journal of Interdisciplinary Research (IJIR)**, 2, 822 – 826, (2016).
- [11] Kennedy, J. and Eberhart, R.C. Particle swarm optimization, **Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks**, 1942-1948, (1995).

On some new sequence spaces

Ekrem SAVAŞ*

Department of Mathematics, Uşak University, Uşak, Turkey

Geliş Tarihi (Recived Date): 04.11.2018

Kabul Tarihi (Accepted Date): 25.11.2018

Abstract

In this paper, we investigate some new sequence spaces which arise from the notation of generalized de la Vallée-Poussin means and introduce the spaces of strongly λ -invariant summable sequences which happen to be complete paranormed spaces under certain conditions.

Keywords: σ -convergence, absolutely lambda-invariant, strongly lambda invariant summability.

Bazı yeni dizi uzayları üzerine

Özet

Bu makalede, genelleştirilmiş de la Vallée-Poussin ortalamalarından ortaya çıkan bazı yeni dizi uzayları incelenmiş ve belirli koşullar altında tam paranormlu uzay olan kuvvetli λ -değişmez toplanabilir dizi uzayları tanıtılmıştır.

Anahtar kelimeler: σ -yakınsama, mutlak lambda-değişmez, güçlü lambda değişmez toplanabilirlik.

1. Introduction

Let w be the set of all sequences real or complex and ℓ_∞ denote the Banach space of bounded sequences $x = \{x_k\}_{k=0}^\infty$ normed by $\|x\| = \sup_{k \geq 0} |x_k|$. Let D be the shift operator on

* Ekrem SAVAŞ, ekremsavas@yahoo.com

w , that is, $Dx = \{x_k\}_{k=1}^\infty$, $D^2x = \{x_k\}_{k=2}^\infty$ and so on. It may be recalled that [see Banach [1]] Banach limit L is a nonnegative linear functional on ℓ_∞ such that L is invariant under the shift operator (that is, $L(Dx) = L(x) \forall x \in \ell_\infty$) and that $L(e) = 1$ where $e = \{1, 1, \dots\}$. A sequence $x \in \ell_\infty$ is called almost convergent (see, [5]), if all Banach limits of x coincide. Let \hat{c} denote the set of all almost convergent sequences. Lorentz [5] proved that

$$\hat{c} = \left\{ x : \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m x_{n+i} \text{ exists uniformly in } n \right\}.$$

Several authors including Duran [2], Lorentz [5], King [6], Nanda [12], [9] and Savas [17] have studied almost convergent sequences.

Let σ be a one-to-one mapping of the set of positive integers into itself. A continuous linear functional φ on ℓ_∞ is said to be an invariant mean or a σ -mean if and only if

1. $\varphi \geq 0$ when the sequence $x = (x_n)$ has $x_n \geq 0$ for all n .
2. $\varphi(e) = 1$, where $e = (1, 1, \dots)$ and
3. $\varphi(x_{\sigma(n)}) = \varphi(x)$ for all $x \in \ell_\infty$.

For a certain kinds of mapping σ every invariant mean φ extends the limit functional on space c , in the sense that $\varphi(x) = \lim x$ for all $x \in c$. Consequently, $c \subset V_\sigma$ where V_σ is the bounded sequences all of whose σ -means are equal, (see, [19]).

If $x = (x_k)$, set $Tx = (Tx_k) = (x_{\sigma(k)})$ it can be shown that (see, Schaefer [19]) that

$$V_\sigma = \left\{ x \in \ell_\infty : \lim_{k \rightarrow \infty} t_{km}(x) = Le \text{ uniformly in } m \text{ for some } L = \sigma - \lim x \right\} \quad (1.1)$$

where

$$t_{km}(x) = \frac{x_m + Tx_m + \dots + T^k x_m}{k+1} \text{ and } t_{-1,m} = 0.$$

We say that a bounded sequence $x = (x_k)$ is σ -convergent if and only if $x \in V_\sigma$ such that $\sigma^k(n) \neq n$ for all $n \geq 0$, $k \geq 1$.

Just as the concept of almost convergence lead naturally to the concept of strong almost convergence, σ -convergence leads naturally to the concept of strong σ -convergence. A sequence $x = (x_k)$ is said to be strongly σ -convergent (see Mursaleen [10]) if there exists a number L such that

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left| x_{\sigma^i(m)} - L \right| \rightarrow 0 \tag{1.2}$$

as $k \rightarrow \infty$ uniformly in m . We write $[V_\sigma]$ as the set of all strong σ -convergent sequences. When (1.2) holds we write $[V_\sigma]-\lim x = \ell$. Taking $\sigma(m) = m + 1$, we obtain $[V_\sigma] = [\hat{c}]$ so strong σ -convergence generalizes the concept of strong almost convergence.

Note that

$$[V_\sigma] \subset V_\sigma \subset I_\infty.$$

σ -convergent sequences are studied by Savas ([13]-[16]) and others.

The summability methods of real or complex sequences by infinite matrices are of three types [see, Maddox [7], p.185] ordinary, absolute and strong. In the same vein, it is expected that the concept of invariant convergence must give rise to three types of summability methods-invariant, absolutely invariant and strongly invariant. The invariant summable sequences have been discussed by Schafer [19] and some others. More recently Mursaleen [11] have considered absolute invariant convergent and absolute invariant summable sequences. Also the strongly invariant summable sequences was studied by Saraswat and Gupta[18]. The strongly summable sequences have been systematically investigated by Hamilton and Hill [3], Kuttner [4] and some others. The spaces of strongly summable sequences were introduced and studied by Maddox [7, 8]. It is naturel to ask that how we can define a new sequence spaces by using (λ, σ) -summable sequences. In this paper, we will give answer of this question and study the spaces of strongly (λ, σ) -summable sequences, which naturally come up for investigation and which will fill up a gap in the existing literature.

Let $\lambda = (\lambda_n)$ be a non-decreasing sequence of positive numbers tending to ∞ such that

$$\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1, \lambda_1 = 1.$$

The generalized de la Valèe-Poussin mean of a sequence x is defined by

$$t_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} x_k$$

where $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$, for $n = 1, 2, \dots$. A sequence $x = (x_k)$ is said to be (V, λ) -summable to a number L , if $t_n(x) \rightarrow L$ as $n \rightarrow \infty$.

Let $A = (a_{nk})$ be an infinite matrix of nonnegative real numbers and $p = (p_k)$ be a sequence such that $p_k > 0$. (These assumptions are made throughout.) We write $Ax =$

$\{A_n(x)\}$ if $A_n(x) = \sum_k a_{nk} |x_k|^{p_k}$ converges for each n . We write

$$d_{mn}(x) = \frac{1}{\lambda_m} \sum_{i \in I_m} A_{\sigma^n(i)}(x) = \sum_k a(n, k, m) |x_k|^{p_k}$$

where

$$a(n, k, m) = \frac{1}{\lambda_m} \sum_{i \in I_m} a_{\sigma^n(i), k}.$$

If $\lambda_m = m, m = 1, 2, 3, \dots$

$$d_{mn}(x) = \frac{1}{\lambda_m} \sum_{i \in I_m} A_{\sigma^n(i)}(x) = \sum_k a(n, k, m) |x_k|^{p_k}$$

and

$$a(n, k, m) = \frac{1}{\lambda_m} \sum_{i \in I_m} a_{\sigma^n(i)}$$

reduces to

$$t_{mn}(x) = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m A_{\sigma^n(i)}(x) = \sum_k a(n, k, m) |x_k|^{p_k}$$

where

$$a(n, k, m) = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m a_{\sigma^n(i), k}.$$

We now define

$$\begin{aligned} [A_{(\lambda, \sigma)}, p]_0 &= \{x : d_{mn}(x) \rightarrow 0 \text{ uniformly in } n\}; \\ [A_{(\lambda, \sigma)}, p] &= \{x : d_{mn}(x - le) \rightarrow 0 \text{ for some } l \text{ uniformly in } n\} \end{aligned}$$

and

$$[A_{(\lambda, \sigma)}, p]_\infty = \left\{ x : \sup_n t_{mn}(x) < \infty \right\}.$$

The sets $[A_{(\lambda,\sigma),p}]_0$, $[A_{(\lambda,\sigma),p}]$ and $[A_{(\lambda,\sigma),p}]_\infty$ will be respectively called the spaces of strongly (λ,σ) -summable to zero, strongly (λ,σ) -summable and strongly (λ,σ) -bounded sequences. If $\lambda_m = m, m=1,2,3,\dots$, the above spaces reduces to the following sequence spaces.

$$\begin{aligned} [A_{\sigma}, p]_0 &= \{x : t_{mn}(x) \rightarrow 0 \text{ uniformly in } n\}; \\ [A_{\sigma}, p] &= \{x : t_{mn}(x - le) \rightarrow 0 \text{ for some } l \text{ uniformly in } n\} \end{aligned}$$

and

$$[A_{\sigma}, p]_\infty = \left\{ x : \sup_n t_{mn}(x) < \infty \right\}.$$

If x is strongly (λ,σ) - summable to l we write $x_k \rightarrow l[A_{(\lambda,\sigma),p}]$. A pair (A, p) will be called strongly λ - invariant regular if

$$x_k \rightarrow l \Rightarrow x_k \rightarrow l[A_{(\lambda,\sigma),p}].$$

In the next Theorem, we have suitable conditions for the above sets to be complete linear topological spaces.

2. The main results

We first establish a number of useful propositions.

Proposition 2.1 *If $p \in \ell_\infty$, then $[A_{(\lambda,\sigma),p}]_0$, $[A_{(\lambda,\sigma),p}]$ and $[A_{(\lambda,\sigma),p}]_\infty$ are linear spaces over \mathbb{C} .*

Proof. We consider only $[A_{(\lambda,\sigma),p}]$. If $H = \sup p_k$ and $K = \max(1, 2^{H-1})$, we have [see, Maddox [6, p. 346].

$$|a_k + b_k|^{p_k} \leq K(|a_k|^{p_k} + |b_k|^{p_k}) \tag{2.1}$$

and for $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$|\lambda|^{p_k} \leq \max(1, |\lambda|^H). \tag{2.2}$$

Suppose that $x_k \rightarrow l[A_{(\lambda,\sigma),p}]$, $y_k \rightarrow l[A_{(\lambda,\sigma),p}]$ and $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Then we have

$$d_{mn}(\lambda x + \mu y - (\lambda l + \mu l) e) \leq KK_1 d_{mn}(x - le) + KK_2 d_{mn}(y - l e')$$

where $K_1 = \sup |\lambda|^{p_k}$ and $K_2 = \sup |\mu|^{p_k}$, and this implies that $\lambda x + \mu y \rightarrow (\lambda l + \mu l) [A_{(\lambda, \sigma)}, p]$. This completes the proof.

We have

Proposition 2.2 $[A_{(\lambda, \sigma)}, p] \subset [A_{(\lambda, \sigma)}, p]_\infty$, if

$$\|A\| = \sup_m \sum_k a(n, k, m) < \infty. \quad (2.3)$$

Proof. Assume that $x_k \rightarrow l [A_{(\lambda, \sigma)}, p]$ and (2.3) holds. Now by the inequality (2.1),

$$\begin{aligned} d_{mn}(x) &= t_{mn}(x - le + le) \quad (4) \\ &\leq K d_{mn}(x - le) + K \sum_k a(n, k, m) |l|^{p_k} \\ &\leq K d_{mn}(x - le) + K (\sup |l|^{p_k}) \sum_k a(n, k, m). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Therefore $x \in [A_{(\lambda, \sigma)}, p]_\infty$ and this completes the proof.

Remark 2.3 Some known sequence spaces are obtained by specializing A and therefore some of the results proved here extend the corresponding results obtained for the special cases.

Proposition 2.4 Let $p \in \ell_\infty$ then $[A_{(\lambda, \sigma)}, p]_0$ and $[A_{(\lambda, \sigma)}, p]_\infty$ ($\inf p_k > 0$) are linear topological spaces paranormed by g defined by

$$g(x) = \sup_{m,n} [d_{m,n}(x)]^{1/M}$$

where $M = \max(1, H = \sup p_k)$. If (2.3) holds, then $[A_\lambda, p]$ has the same paranorm.

Proof. Clearly $g(0) = 0$ and $g(x) = g(-x)$. Since $M \geq 1$, by Minkowski's inequality it follows that g is subadditive. We now show that the scalar multiplication is continuous. It follows from the inequality (2.2) that

$$g(\lambda x) \leq \sup |\lambda|^{p_k / M} g(x).$$

Therefore $x \rightarrow 0 \Rightarrow \lambda x \rightarrow 0$ (for fixed λ). Now let $\lambda \rightarrow 0$ and x be fixed. Given $\varepsilon > 0 \exists N$ such that

$$d_{m,n}(\lambda x) < \varepsilon / 2 (\forall n, \forall m > N). \tag{2.5}$$

Since $d_{m,n}(x)$ exists for all m , we write

$$d_{m,n}(x) = K(m), (1 \leq m \leq N)$$

and

$$\delta = \left(\frac{\varepsilon}{2K(m)} \right)^{1/p_k}.$$

Then $|\lambda| < \delta$,

$$d_{m,n}(\lambda x) < \frac{\varepsilon}{2} (\forall n, 1 \leq m \leq N). \tag{2.6}$$

It follows from (2.5) and (2.6) that

$$\lambda \rightarrow 0 \Rightarrow \lambda x \rightarrow 0 (x \text{ fixed})$$

This proves the assertion about $[A_{(\lambda,\sigma)}, p]_0$. If $\inf p_k = \theta > 0$ and $0 < |\lambda| < 1$, then $\forall x \in [A_{(\lambda,\sigma)}, p]_\infty$,

$$g^M(\lambda x) \leq |\lambda|^\theta g^M(x).$$

Therefore $[A_\lambda, p]_\infty$ has the paranorm g . If (2.3) holds it is clear from Proposition 2.2 that $g(x)$ exists for each $x \in [A_{(\lambda,\sigma)}, p]$. This completes the proof.

Remark 2.5 It is evident that g is not a norm in general. But if $p_k = p \forall k$, then clearly g is a norm for $1 \leq p \leq \infty$ and a p -norm for $0 < p < 1$.

Proposition 2.6 $[A_\lambda, p]_0$ and $[A_{(\lambda,\sigma)}, p]_\infty$ are complete with respect to their paranorm topologies $[A_{(\lambda,\sigma)}, p]$ is complete if (2.3) holds and

$$\sum_k a(n, k, m) \rightarrow 0 \text{ uniformly in } n. \tag{2.7}$$

Proof. Let $\{x^i\}$ be a Cauchy sequence in $[A_{(\lambda,\sigma)}, p]_0$. Then there exists a sequence x such that $g(x^i - x) \rightarrow 0 (i \rightarrow \infty)$. Since g is subadditive it follows that $x \in [A_\lambda, p]_0$. The

completeness of $[A_{(\lambda, \sigma)}, p]_\infty$ can be similarly obtained. We now consider $[A_{(\lambda, \sigma)}, p]$. If (2.3) holds and $\{x^i\}$ is a Cauchy sequence in $[A_\lambda, p]$, Then there exists x such that $g(x^i - x) \rightarrow 0$. If (2.7) holds then from inequality (2.4) it is clear that $[A_{(\lambda, \sigma)}, p] = [A_{(\lambda, \sigma)}, p]_0$. This completes the proof.

Combining the above facts we obtain the main result.

Theorem 2.7 *Let $p \in \ell_\infty$. Then $[A_{(\lambda, \sigma)}, p]_0$ and $[A_{(\lambda, \sigma)}, p]_\infty$ ($\inf p_k > 0$) are complete linear topological spaces paranormed by g . If (2.3) and (2.7) hold then $[A_{(\lambda, \sigma)}, p]$ has the same property. If further $p_k = p$ for all k , they are Banach spaces for $1 \leq p < \infty$ and p -normed spaces for $0 < p < 1$.*

References

- [1] Banach, S., **Theorie des Operations Lineaires**, (1932).
- [2] Duran, J.P., Infinite matrices and almost convergence, **Math. Z.**, 128, 75-83, (1972).
- [3] Hamilton, H.J. and Hill, J. D., On strong summability, **Amer. J. Math.**, 60, 588-94, (1938).
- [4] Kuttner, B., Note on strong summability, **J. London Math. Soc.**, 21, 118-22, (1946).
- [5] King, J.P., Almost summable sequences, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 17, 1219-25, (1966).
- [6] Lorentz, G.G., A contribution to the theory of divergent sequences, **Acta Math.**, 80, 167-190, (1948).
- [7] Maddox, I.J., Spaces of strongly summable sequences, **Quart. J. Math. Oxford Ser.**, (2)18, 345-55, (1967).
- [8] Maddox, I.J., **Elements of Functional Analysis**, Cambridge University Press, (1970).
- [9] Malkowsky, E. and Savaş, E., Some λ -sequence spaces defined by a modulus, **Archivum Math.**, 36(3), 219-228, (2000).
- [10] Mursaleen, M., Matrix transformation between some new sequence spaces, **Houston J. Math.**, 9, 505-509, (1993),.
- [11] Mursaleen, M., On some new invariant matrix methods of summability, **Q.J. Math.**, 34, 77-86, (1983).
- [12] Nanda, S., Some sequence spaces and almost convergence, **J. Austral. Math. Soc. (Series A)**, 22, 446-455, (1976).
- [13] Savaş, E., Some sequence spaces involving invariant means, **Indian J. Math.**, 31, (1989).
- [14] Savaş, E., A note on some sequence spaces, **Doğa Türk. J. Math.**, 15, (1991).
- [15] Savaş, E., Invariant means and generalization of a theorem of S. Mishra, **Doga Türk. J. Math.**, 14, (1989).
- [16] Savaş, E., Invariant coregular and conull matrices of operators, **Hacettepe Bull. Math. Sci. and Eng.**, 19, (1990).
- [17] Savaş, E., Infinite matrices and generalized almost convergence, **Doga Türk. J.**

- Math.**, 5(3), 1-10, (1987).
- [18] Saraswat, S.K. and Gupta, S.K., Spaces of strongly σ -summable sequences, **Bull. Cal. Math. Soc.**, 75, 179-184, (1983).
- [19] Schaefer, P., Infinite matrices and invariant means, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 36, 104–110, (1972).

BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ DERGİSİ

CİLT: 20 SAYI: 3

Aralık 2018
ICAME'18 Özel Sayısı

ISSN 1301-7985
eISSN 2536-5142

BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ DERGİSİ MAKALE YAZIM KURALLARI

- Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi (Journal of Balıkesir University Institute of Science and Technology) bütün Fen, Mühendislik ve Mimarlık Anabilim Dallarını ilgilendiren konulardaki önemli, özgün, kaliteli araştırma ve çalışma makalelerini yayımlayan **hakemli ve bilimsel** bir dergidir. Haziran ve Aralık aylarında olmak üzere yılda iki kez yayınlanır.
- Dergide yayımlanan makaleler başka hiç bir yerde yayımlanamaz veya bildiri olarak sunulamaz. Kısmen veya tamamen yayımlanan makaleler kaynak gösterilmeden hiçbir yerde kullanılamaz. Dergiye gönderilen makalelerin içerikleri özgün, daha önce herhangi bir yerde yayımlanmamış veya yayımlanmak üzere gönderilmemiş olmalıdır. Değerlendirmeye sunulacak çalışmaların bir başka dergiye gönderilmediği veya basılmadığı ön yazı ile **mutlaka belirtilmelidir**.
- Dergi yazım kuralları aynı zamanda baskı formatıdır.** Bu nedenle yazım kurallarının yazar veya yazarlarca dikkatle uygulanması gerekmektedir. Yazım kurallarına uygun olmayan yazılar, yazarlara geri gönderilecektir. **Göstereceğiniz ilgi için teşekkür ederiz.**

Sayfa boyutu, sayısı ve kenar boşlukları	A4 formatında, en fazla (eğer mümkünse) 12 sayfa olmalıdır. Sol ve Sağ : 3 cm, Üst ve Alt: 2,5 cm.
Sayfa numaraları	Sayfa numaraları sayfa altında ve ortada verilmelidir.
Satır boşlukları	Bütün satır boşlukları Times New Roman karakterinde ve 12 punto olmalıdır.
Metin	Times New Roman karakterinde 12 punto ile, sağa ve sola dayalı olarak tek aralıklı yazılmalıdır. Noktadan sonra 2 boşluk, virgülden sonra 1 boşluk bırakılmalıdır.

Paragraf	Her paragraf arasında bir satır boşluk bırakılmalı, paragraf başlarında içerden başlanmamalıdır (Tab tuşu kullanılmamalıdır).
Makale başlığı	Sayfa başından 5 satır boşluk bırakıldıktan sonra, Times New Roman, 20 punto (koyu olmayacak) ile başlığın sadece ilk harfi büyük olacak şekilde sayfa ortalanarak yazılmalıdır.
Yazar adı veya adları	Başlıktan sonra 2 satır boşluk bırakılarak, ünvan belirtilmeden, Adın ilk harfi ve SOYAD'ın tamamı büyük harf ile, birden fazla yazarlarda aralarına virgöl konularak, Times New Roman, 12 punto, koyu ve sayfa ortalanarak yazılmalıdır.
Yazarın/ların adresi/leri	Yazar adının hemen altına boşluk bırakılmadan, Times New Roman, 10 punto ve <i>italik</i> olarak yazılmalıdır. Adresleri aynı olan yazarlar için tek adres, farklı yazar adresleri alt alta boşluk bırakılmadan yazılmalıdır.
İletişim yazarının bilgileri	Bütün yazarlar için Sorumlu yazar ilk sırada olacak şekilde; Ünvensiz Ad SOYAD, e-mail adresi, ORCID ID numarası (http://orcid.org/xxxx-xxxx-xxxx-xxxx .) aralarına virgöl konularak 1. sayfanın altına dipnot olarak, Times New Roman, 10 punto ile yazılmalıdır.
Türkçe özet	Adres/ler den 3 satır boşluk bırakıldıktan sonra, Özet kelimesi Times New Roman yazı karakterinde, 12 punto, koyu ve sola dayalı olarak yazılmalıdır. <i>Özet metni</i> Times New Roman yazı karakterinde, 12 punto ve <i>italik</i> olarak yazılmalıdır. Özet metninin 200 kelimeyi geçmemesine özen gösterilmelidir. Özet kelimesi ile özet metni arasında bir satır boşluk bırakılmalıdır.
Anahtar kelimeler Keywords	Anahtar kelimeler: ve Keywords: kelimeleri Türkçe özetin ve İngilizce özetin altına bir satır boşluk bırakılarak, Times New Roman, 12 punto, koyu ve <i>italik</i> olarak yazılmalıdır. En az 3 en fazla 6 adet anahtar kelime verilmeli, anahtar kelimelerin birincisinin ilk harfi büyük diğerleri küçük harfle ve aralarına virgöl konularak verilmelidir.

İngilizce başlık ve Abstract	Türkçe anahtar kelimelerin altına 2 satır boşluk bırakılarak, Times New Roman, 16 punto (koyu olmayacak) ile başlığın sadece ilk harfi büyük olacak şekilde sayfa ortalanarak yazılmalıdır. Abstract, Türkçe özet formatında yazılmalıdır.
Ana başlıklar	Ana Başlıklar sırasıyla numaralandırılmalıdır (1. Giriş 2. Deneysel çalışmalar gibi). Tüm başlıklar sola dayalı Times New Roman, 12 punto, koyu ve sadece ilk kelimenin ilk harfi büyük olacak şekilde yazılmalıdır. Ana başlıklardan önce 2 satır, sonra 1 satır boşluk bırakılmalıdır.
Alt başlıklar	Alt başlıklar ana başlık numarasına uygun olarak numaralandırılmalıdır. Tüm alt başlıklar sola dayalı Times New Roman, 12 punto, koyu ve italik olarak sadece ilk kelimenin ilk harfi büyük olacak şekilde yazılmalıdır (2.1. Malzeme 2.2. Isıl işlemler gibi). Alt başlıklardan önce tek satır boşluk bırakılmalı, sonra ise boşluk bırakılmadan metine geçilmelidir.
Şekiller Resimler Fotoğraflar	Sayfa sınırlarını aşmayacak şekilde ortalanarak, net ve okunaklı olmalıdır. Sıra ile numaralandırılmalıdır. Şekil no ve adları şeklin altında ortalanarak ve sadece ilk kelimenin ilk harfi büyük olarak verilmelidir. Şekiller ya bir çizim programı ile çizilmiş olmalı ya da en az 300 dpi çözünürlükte taranmış olmalıdır. Şekil olarak gösterilen grafik, resim ve metin kutularında yer alan yazı ve sayıların büyüklüğü makale içinde Times New Roman karakteri ile yazılmış 9 punto boyutundaki bir yazının büyüklüğünden az olmamalıdır. Şekilden önce, şekil adından önce ve sonra birer satır boşluk bırakılmalıdır. Şekiller metin içine yerleştirilirken mutlaka şekilden önce atıfta bulunulmalıdır.

Tablolar	<p>Sayfa sınırlarını aşmayacak şekilde ortalanarak konulmalıdır. Sıra ile numaralandırılmalıdır. Tablo no ve adları, tablonun üstünde tek satır boşluk ile sadece ilk kelimenin ilk harfi büyük olacak şekilde ortalanarak yazılmalıdır. Tablo adı yazılırken üstte ve altta birer satır, tablodan sonra yine bir satır boşluk bırakılmalıdır. Tablolara tablodan önce mutlaka metin içerisinde atıfta bulunulmalıdır. Tablo satır ve sütunlarındaki rakam ve yazılar Times New Roman 12 punto ile yazılmalıdır. Ancak zorunlu kalınan durumlarda yazı boyutu yazı sınırlarını geçmeyecek şekilde en az 9 puntoya kadar düşürülebilir.</p>
Denklemler	<p>Metin içerisine yazılacak denklemler, word yazım programındaki denklem editörü ile sola dayalı olarak yazılmalı ve eşitliklere sağa dayalı olarak parantez içerisinde sıra ile numara verilmelidir.</p>
Semboller	<p>Makale çok sayıda sembol içeriyor ya da makaledeki sembollerin açıklanması gerekiyorsa uluslararası standarda uygun olarak, semboller, kaynaklardan önce, Times New Roman 12 punto ile italik yazılmalıdır. Makalede ondalık gösterimde nokta kullanılmalı, binlikleri ayırırken virgül veya nokta kullanılmamalı gerekiyorsa tek boşluk kullanılmalıdır.</p>
Kaynaklar	<p>Kaynaklar metin içerisinde sıra ile numaralandırılmalıdır. Makalenin sonunda bulunan kaynaklar bölümündeki sıralama, metinde verilen sıraya uygun olarak yapılmalıdır.</p> <p>Atıfta bulunulan kaynaklar; ya [1]. şeklinde cümlenin sonunda yada [1], şeklinde cümle içinde verilmelidir. İki veya daha fazla kaynak yazarken verilecek kaynaklar sıralı ise [1,2,3,4] şeklinde değil, [1-4] şeklinde verilmelidir. Sıralı değil ise [8,11,15] şeklinde verilmelidir.</p> <p>Kaynaklar, Times New Roman 12 punto ile yazılmalı, sadece dergi, kitap ya da sempozyum adı kalın yazılmalıdır. Kaynaklar kısmında yer alan ulusal-uluslararası makalelerin yer aldığı dergi adları kısaltılmış halleriyle değil, açık olarak yazılmalıdır (örnek: dergi adı Wat. Res. şeklinde değil Water Resources şeklinde yazılmalı).</p>

Ulusal - Uluslararası Makaleler

- [1] Li, G., Hart, A. ve Gregory, J., Flocculation and sedimentation of high turbidity water, **Water Resources**, 25, 9, 1137-1143, (1998).

Ulusal - Uluslararası Bildiriler

- [2] Li, G., Hart, A. ve Gregory, J., Flocculation and sedimentation of high turbidity waters, **Proceedings, 9th Biennial Conference**, International Association on Water Quality, 1137-1143, Vancouver, (1998).

Ulusal - Uluslararası Kitap

- [3] Li, G., Hart, A. ve Gregory, J., **Flocculation and sedimentation**, 295, Technomics Press, Lancaster PA, (1998).

Kitap İçinde Bölüm

- [4] Blackburn, T., **Flocculation and sedimentation** in Li, G., Hart, A. ve Gregory, J., Physical Processes, Technomics Press, 29-45, Lancaster PA, (1998).

Editörlük

- [5] Li, G., Hart, A. ve Gregory, J., **Flocculation and sedimentation**, 295, Technomics Press, Lancaster PA, (1998).

Makaleler

- [6] Li, G., Hart, A. ve Gregory, J., Flokülasyona hız gradyanı etkisi, **Su Kirlenmesi Kontrolü Dergisi**, 7, 4, 26-32, (1998).
- [7] Snell, F. D. ve Ettore, L. S., **Encyclopedia of Industrial Chemical Analysis**, 14, Interscience, New York, (1971).

Basılmış Bilimsel Rapor

- [8] Li, G., Hart, A. ve Gregory, J., The effect of velocity gradient in flocculation, Technical Report, NATO Science for Stability Programme, 150, Brussels, (1998).

Mesleki Teknik Rapor

- [9] Li, G., Hart, A. ve Gregory, J., Flokülasyona hız gradyanı etkisi, Teknik Rapor 45, İTÜ Geliştirme Vakfı, İstanbul, (1998).
-

Doktora, Y.Lisans Tezi

- [10] Türker, K., Yapıların deprem davranışının belirlenmesi için çok modlu uyarlamalı yük artımı yöntemi, Doktora Tezi, Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir, (2005).

Standartlar

- [11] TS825, Binalarda ısı yalıtım kuralları, **Türk Standartları**, Ankara, (1998).

Güncel Yazı

- [12] Li, G., Hart, A. ve Gregory, J., Flokülasyona hız gradyanı etkisi, **Bilim ve Teknik**, 363, 8, 23–45, (1998).
- [13] Li, G., Hart, A. ve Gregory, J., Flokülasyona hız gradyanı etkisi, **Milliyet Gazetesi**, sf.2, 3, 24, (1998).

Web adresleri

- [14] Li, G., Hart, A. ve Gregory, J., Flokülasyona hız gradyanı etkisi, (1998). <http://www.server.com/projects/paper2.html>, (20.05.2004).
-