TURKISH JOURNAL OF SCIENCE

e-ISSN 2587-0971

TURKISH JOURNAL OF SCIENCE

(An International Peer-Reviewed Journal / Uluslararası Hakemli Dergi)
ISSN: 2587-0971

Volume: III, Issue: I, 2018
Sayı: III, Cilt: I, 2018

Turkish Journal of Science (TJOS) is published electronically yearly. It publishes, in English or Turkish, full-length original research papers and solicited review articles. TJOS provides a forum to scientists, researchers, engineers and academicians to share their ideas and new research in the field of natural and applied sciences as well as theirs applications. TJOS is a high-quality double-blind refereed journal. TJOS is also a multidisciplinary research journal that serves as a forum for individuals in the field to publish their research efforts as well as for interested readers to acquire latest development information in the field. TJOS facilitate communication and networking among researchers and scientists in a period where considerable changes are taking place in scientific innovation. It provides a medium for exchanging scientific research and technological achievements accomplished by the international community.

Correspondence Address / Yazışma Adresi
Turkish Journal of Science (TJOS)
http://dergipark.gov.tr/tjos

CONTENTS/ İÇİNDEKİLER

TURKISH JOURNAL OF SCIENCE
VOLUME III, ISSUE I, 1-13
ISSN: 2587-0971
http://dergipark.gov.tr/tjos

Epstein Barr Virüsü ve Burkitt Lenfoma

Epstein Barr Virus and Burkitt Lymphoma

Yunus Emre USLU[1] and Arzu GÖRMEZ[1*]

[1]*Erzurum Technical University, Faculty of Science,*
Department of Molecular Biology and Genetics, Erzurum, Turkey
**Sorumlu yazar / Corresponding Author*: arzugormez@gmail.com

Geliş Tarihi / Received Date: 14 June 2018
Kabul Tarihi / Accepted Date: 28 November 2018

Öz: Epstein-Barr Virus (EBV) Herpesviridae familyasına ait dünyada yaygın olarak görülen, orofarinks salgıları ile yakın temas, kan ve kontamine eşyalarla bulaşabilen DNA yapılı bir virüstür. EBV enfeksiyonları genel itibariyle ergenlik döneminde gelişmekte ve asemptomatik olarak seyretmektedir. EBV yapısında bulundurduğu Epstein Barr Nükleer Antijenleri (EBNA), Viral kapsid antijeni (VCA) ve Latent membran protein (LMP) ile konakçı hücreyi enfekte edebilen ve enfeksiyon esnasında latent olarak kalabilen güçlü bir virüstür. Doğal şartlarda konakçıda latent halde bulunan EBV, fırsat bulduğu zaman İnfeksiyoz Mononükleoz (IM), Burkitt Lenfoma (BL) gibi ciddi hastalıklara neden olabilmektedir. EBV'nin neden olduğu en riskli ve ciddi hastalık BL'dir. BL, özellikle MYC (Myelocytomatosis, Avian myeloblastosis virus oncogene cellular homolog) genlerinin immunoglobulin zincirlerindeki translokasyonu sonucu ortaya çıkmaktadır.

Anahtar Kelimeler — Epstein Barr Virüsü (EBV), Burkitt Lenfoma (BL), EBNA , VCA, LMP.

Abstract: Epstein-Barr Virus (EBV) belongs to the Herpesviridae family is a DNA virus that widely seen all the world and it can be transmitted through close contact, oropharyngeal secretions, blood and contaminated belongings. EBV infections generally emerge in childhood and remains asymptomatic. Epstein Barr Nuclear Antigens (EBNA), Viral capsid antigen (VCA) and Latent Membrane Protein (LMP) are strong a virus that can infect host cells and remain latent during infection. If EBV is latent in the host under natural conditions, it can affect the cell and cause severe diseases such as Infectious Mononucleosis (IM), Burkitt's lymphoma (BL). BL is undoubtedly the most risk and serious disease cause of EBV. BL is especially an emerge as the translocation genes of MYC a results immunoglobulin chains.

Keywords — Epstein Barr Virus (EBV), Burkitt's Lymphoma (BL), EBNA, VCA, LMP.

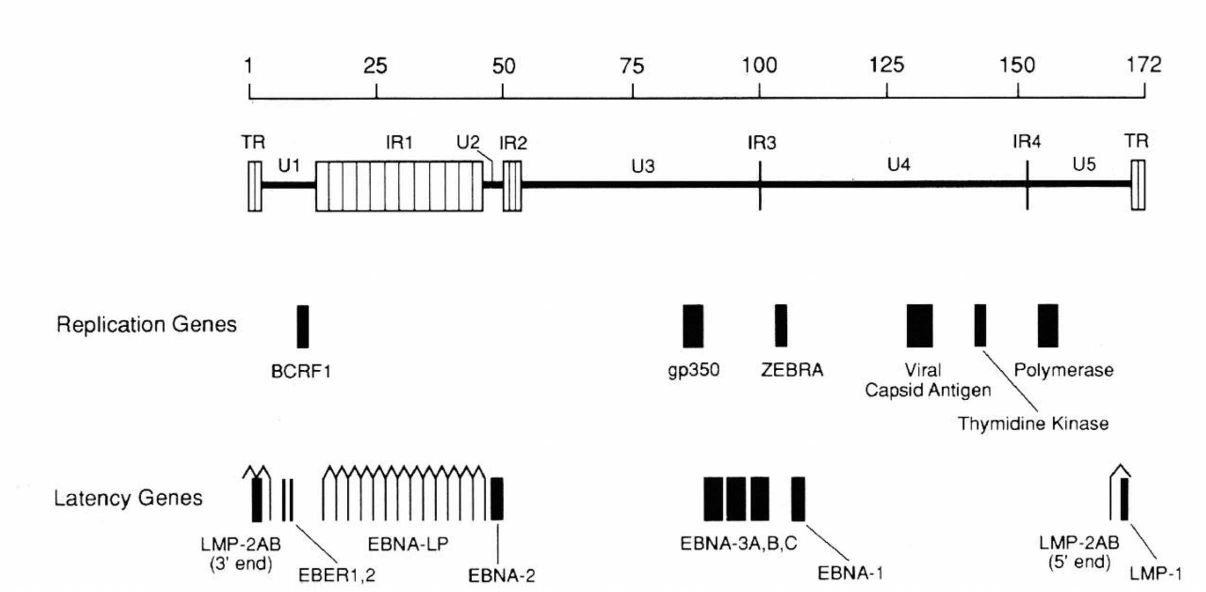
GİRİŞ

İlk izole edilen insan tümör virüsü olan Epstein-Barr virüsü (EBV), 1964'te Epstein'in grubu tarafından Burkitt lenfomasından türetilen bir hücre hattında tanımlanmıştır (Epstein et al., 1964). EBV, hem bulaşıcı mononükleozise hem de lenfoproliferatif hastalığa neden olabilen yaygın bir insan herpes virüsüdür. EBV özellikle yakın temasla bulaşmakta ve ilk olarak oral kavitedeki lenfoepitelyal hücrelere ve B lenfositlere yerleşerek burada persistan enfeksiyonlara neden olmaktadır. EBV, kişilerde her yaşta görülmesine karşın özellikle primer enfeksiyonu çocukluk döneminde ortaya çıkmakta ve geç ergenlik çağında veya ileri yaşlarda bulaşıcı mononükleoz ile sonuçlanmayarak spesifik olmayan semptomlara neden olabilmektedir (Maeda et al., 2009). EBV özellikle iki yaş altında genellikle asemptomatik olmakla beraber klinik bulguları ateş, halsizlik, boğaz ağrısı, eksudatif tonsillit ve lenfadenopati şeklinde belirmektedir. Tonsiller, virüsün ilk tutulum yeri ve aynı zamanda kaynağı durumundadır (Çağlar et al., 2014). Hastalığın seyrinde genellikle litik evreler birincil enfeksiyonlarda rol alırken, tekrarlayan enfeksiyonlarda daha çok latent (gizli) evreler önem arz etmektedir. Primer enfeksiyon oluştuktan sonra EBV latent hale gelebilmekte ve periferal kan içindeki lenfositlere giderek enfekte kişiye ömür boyu sürecek bir EBV taşıyıcılığı sağlamaktadır (Liebowitz and Kieff, 1993). Bu esnada virüs konakçı B hücrelerini ve epitelyumu enfekte edebilmektedir. Virüsün hücreye girişi ile konak hücre çekirdeğinde EBV nükleer antijenleri saptanmaktadır. EBV nükleer antijenlerinin oluşturduğu bir dizi uyarı sonucu başta latent membran proteinleri 1 ve 2 (LMP-1 ve 2) olmak üzere çeşitli proteinler sentezlenmektedir. Bu proteinlerin karmaşık ilişkileri sonucu hücre DNA'sına entegre olan provirüs latent halde kalmakta ve immün sistemi baskılanmış kişilerde sonradan yeniden reaktive olabilmektedir (Fidan ve ark., 2005). Litik döngü ile ilişkili mekanizmalar incelendiğinde ise bu mekanizmaların virüsün yatay yayılımı ve B hücrelerinin çoğalmasına önemli oranda katkıda bulunduğu görülmektedir (Young and Rickinson, 2004).

EBV'nin Tanımlanması

Fiziksel yapısı

EBV, toroid (oval) biçimli, zarflı bir DNA virüsü olup, 162 kapsomeri olan bir nükleokapsid ile nükleokapsid ve zarf arasında bir protein zar bulunduran tipik bir herpesvirüstür (Liebowitz and Kieff, 1993). EBV genomu 85'den fazla geni kodlayan doğrusal, çift iplikli ve yaklaşık 172 kb büyüklüğünde DNA molekülüne sahiptir (Sample and Sample, 2008). Viral genomun yapısında diziye özgü kesim noktaları bulunmaktadır (BamHI, BamHIIA, BARF1 ve BARFII). EBV'de asıl enfeksiyon işleminden sorumlu olan EBNA (Epstein-Barr nüklear antijenleri) ve LMP'ler ile genomda EBERs (Epstein–Barr virus-encoded small RNAs) olarak adlandırılan kodlanmayan RNA'lardır. EBV'nin hücrede çoğalması için gerekli olan ZEBRA (Z Epstein-Barr Virüs Çoğaltma Aktivatörü) protein aktivatörü de viral genomun oluşumu esnasında yapısına katılmaktadır (Miller, 1990). (Şekil 1.)



Şekil 1. Epstein Barr Virüsü Genomu ve Enfeksiyonu İşleminde Kullanılan Proteinler (Straus et al. 1993)

Biyolojik özellikler

İnsanlarda EBV-1 ve EBV-2 olmak üzere iki temel EBV tipi tespit edilmiştir. Bu iki tipin ayırımında, EBV nükleer antijenlerini (EBNA-2, EBNA-3A, EBNA 3B / 4 ve EBNA-3C) kodlayan genlerin dizilişindeki farklılıklar esas alınmıştır (Sample and Sample 2008). Bu genlerin farklılığına dayalı olarak, EBV-1'in B hücreleri üzerindeki etkisi, EBV-2'nin etkisinden daha fazla olmakta ve böylelikle lenfoblastoid hücre dizilerinin yaşama yeteneği de EBV-1'de daha az olmaktadır (Rickinson et al., 1987). Yapılan çalışmalarda; EBV reseptörleri (CD21) insan ve primat B lenfositlerinin yüzeyinde ve nadir olarak da nazofarengeal epitel hücrelerinde var olduğu bildirilmektedir. B lenfositlerinin uyarılmasında, EBV genomunda bulunan ve ORIP olarak adlandırılan viral promotör'e EBNA-1 proteinin bağlanması büyük önem arz etmektedir. Dolayısıyla, B lenfositlerdeki enfeksiyonda en ilk beliren viral antijen EBNA-1'dir, EBNA-1, EBNA-2 proteinini EBNA-2'de EBV'nin kodladığı LMP'leri aktive etmektedir (LMP1-2). Membranöz proteinlerden biri olan LMP-1, hücreler arası bazı adezyon molekülleri ile B hücrelerinde otokrin büyüme faktörlerini stimüle ederek B hücrelerinde belirsiz tümörijenik çoğalmalara neden olmakta, böylelikle, B-hücrelerini kontrolsüz çoğalan hücrelere dönüştürerek onkogeneziste önemli bir rol oynamaktadır (Wang et al., 1985).

Konak hücre

EBV için tek konak insanlar olup türe spesifik EBV homologlarına karşı çapraz reaktif antikorların varlığından dolayı bazı yüksek primatlarda da EBV benzeri virüsler tespit edilmiştir. Yapılan çalışmalarda bazı marmosetler ile insanlarda bulunan EBV arasında benzerlikler ortaya koyulmuştur (Cox et al., 1996).

Epidemiyolojisi

EBV'nin neden olduğu IM ve belirli kanserler dünyanın belirli bölgelerinde yaygın olarak görülmekte ve epidemisi bölgesel olarak farklılık göstermektedir. Dünya üzerinde görülme sıklığı % 90-95 oranlarında olduğu bilinen EBV özellikle tükürük teması ile kolayca bulaşmakta ve bulaştığı kişilerde litik ve latent enfeksiyonlara yol açmaktadır. Bulaşma oranı yüksek olduğu için virüsü önlemede koruyucu tedbirler çoğu zaman mümkün olamamaktadır (Abdel-Hamid et al., 1992).

EBV, hücreye giriş için birçok glikoprotein kullanmakta ve bu zarf glikoproteinlerden özellikle gB, gH ve gL epitelyal hücrelere girmek ve nükleokapsidlerini bırakmak için bir dimer oluşturmaktadırlar (Matsuura, 2010). Epitelyal hücrelerin enfeksiyonunda genellikle litik evre tetiklenirken B hücrelerinin enfeksiyonunda ise özellikle latent evre görülmektedir. B hücrelerinin EBV enfeksiyonunun, viral zarf glikoprotein gp350/220'nin C3d kompleman bileşeni ve CR2 (CD21) hücresel reseptörlerinin etkileşimi aracılığıyla başladığı bilinmektedir (Fingeroth et al., 1984). EBV'nin konakçı hücrenin yüzeyine tutunmasından sonra, diğer üç viral glikoproteinin (gp85, gp25 ve gp42) konakçı hücrenin membranı ile birleştiği (Li et al., 2004), özelikle gp42'nin major histo-kompatibilite kompleksi (MHC) sınıf II'ye bağlanabildiği ve EBV'nin bunu B lenfositlerin enfeksiyonunda bir kofaktör olarak kullandığı belirlenmiştir. Bu şekilde EBV, latent evrede B hücrelerini aktive edeceği proteinleri sentezletmek suretiyle çoğaltmakta ve ölümsüzleştirmektedir. Böylelikle enfekte olmuş hücrelerin replikasyonu önlenememekte ve EBV ile ilişkili hastalıklar oluşmaktadır (Liebowitz and Kieff., 1993).

EBV'nin, CD21'den bağımsız mekanizmalar yoluyla, az da olsa hücreleri enfekte edebileceği ve ayrıca gp350/220'si eksik olan bir virüsün de hala enfeksiyöz olabildiği bilinmektedir. CD21'den bağımsız enfeksiyon yolları, B lenfositleri dışındaki hücrelerin EBV enfeksiyonundan sorumlu olabileceğini düşündürmektedir (Imai et al., 1998). EBV'nin B-lenfotropik bir virüs olduğu düşünülse de T lenfositler veya epitelyal hücreleri de enfekte edebilme yetisi olduğu bazı çalışmalarda ortaya koyulmuştur. (Thompson and Kurzrock, 2004). EBV ile enfekte olmuş bireylerin bazılarında epitelyal hücrelerde enfeksiyon tespit edilmişse de yapılan çalışmaların çoğunda enfeksiyonun B hücreleri ile sınırlı kaldığı belirtilmiştir. EBV'nin epitelyal hücreler ile enfeksiyonu için en uygun ve olası rol, kalıcı latent enfeksiyon oluşturmaktan ziyade replikasyonu ve amplifikasyonunu en uygun biçimde yapmak için bir alan oluşturma eğilimidir (Kieff, 1996). EBV'nin tüm dünyada yaşayan insan popülasyonlarında özellikle latent formda bulunması nedeniyle epidemisini çalışmak oldukça güçtür. Aynı zamanda EBV'nin farklı bölgelerde yoğun olarak görülmesi nedeniyle de EBV ile ilişkili kanserlerin oluşmasında sıklık frekansı tam olarak belirlenememektedir. Özellikle sosyoekonomik durumun düşük olduğu bölgelerde diğer bölgelere nazaran % 60 oranında enfeksiyon riski fazlalığı gözlemlenmektedir. Genetik ve ırk, enfeksiyonun oluşması için henüz bir faktör olarak nitelendirilmemektedir. Dişi bireylerin EBV enfeksiyonlarına karşı yüksek oranlarda antikor oluşturdukları, bu nedenle de daha ciddi bağışıklık sağladıkları bilinmektedir. EBV enfeksiyonunda etkili olabilecek çeşitli faktörler çalışılmakta ancak tatmin edici sonuçlar alınamamaktadır.

Patolojisi

EBV enfeksiyonlarının büyük çoğunluğu non-semptomatik olduğu için teşhisi oldukça zordur (Klein et al., 2007). EBV ile ilişkilendirilen ve ilk tespit edilen hastalık Enfeksiyöz mononükleoz (IM)'dur. Mononükleoz, ara sıra hayatı tehdit eden komplikasyonlara neden olabilen bir hastalık olsa da bazı durumlarda tedavi edilmeye bile gerek duyulmayabilmektedir. Bu hastalığın dışında, nazofaringeal karsinoma, Burkitt Lenfoma ve gastrik karsinom gibi ciddi hastalıkların da EBV ile bağlantılı olduğu tespit edilmiştir (Gruhne et al., 2009).

EBV ile ilişkili kanserlerin teşhisinde genellikle *in-situ* hibridizasyonu ve bu amaçla virüsün viral proteinleri için dizayn edilen problar kullanılmaktadır. Bu amaçla hastalardan alınan biyopsi örnekleri floresan olarak işaretlenmiş problarla muamele edilerek virüsün varlığı floresan mikroskobunda tespit edilmektedir. Yine bu amaca uygun olarak geliştirilen monoklonal antikorlar, tıp uzmanlarının son yıllarda EBV ile ilişkili farklı kanser türlerini daha kolay tanımlamalarını da sağlamaktadır.

EBV ve Burkitt Lenfoma

B-lenfositlerin neoplastik proliferasyonu sonucu oluşan Burkit lenfoma, ilk kez 1958 yılında Afrikalı çocuklarda, özellikle çenede görülen, oldukça hızlı gelişen ve ölümcül seyredebilen bir lenfoma türü olarak, "Denis Burkitt" tarafından tanımlanmıştır (Yavuz, 2002). Burkitt lenfoma (BL), endemik (eBL), sporadik (sBL) ve immün yetmezlik ile ilişkili varyantlara sahip agresif bir B hücre malignitesidir. BL'nın oluşumunda MYC onkogeninin belirli immunoglobulin bölgelerine translokasyonu sonucunda gerçekleşen transformasyon olayının önemi büyüktür. BL hücreleri yuvarlak nukleuslu, birkaç nükleol ve yoğun sitoplazmaya sahip orta büyüklükteki hücrelerdir. BL tümörleri, yüksek sayıda apoptoz ve fagositoz yeteneğine sahip makrofajların varlığından ötürü, bir "yıldızlı gökyüzü paterni" sergilerler (Ferry,. 2006).

BL, insanlarda en hızlı büyüyen tümör olup 24 saatlik bir katlanma zamanı vardır. Bu nedenle, BL hastalarında kemik iliği infiltrasyonuna bağlı olarak kemik ağrıları, bisitopeni veya pansitopeni, halsizlik, yorgunluk, solukluk, cilt ve mukoza kanamaları ve enfeksiyonlarla ilişkili ateş gibi belirtiler hızlı bir şekilde ortaya çıkabilir (Sandlund et al.,. 2003). BL oldukça agresif bir malign olmasına rağmen kemoterapiye karşı oldukça duyarlıdır özellikle endemik ve sporadik varyasyonları potansiyel olarak daha fazla iyileşme gücüne sahiptir. Tümör yükünün hızla ikiye katlanması nedeni ile BL/lösemi tanı ve tedavi açısından en hızlı yaklaşımı gerektiren malignitedir. Bu nedenle mümkün olan en kısa sürede tedaviye başlanmalıdır (Brady et al., 2007)

Dünya Sağlık Örgütü (WHO) tarafından lenfoid neoplazi sınıflamasında son derece agresif olarak tanımlanan BL'nın endemik, sporadik ve immün yetmezlik ile ilişkili (HIV) tüm varyantlarında EBV'nin varlığı bildirilmiştir. EBV ile çok az ilişkili olan sBL'nin dünya çapında yaygınlığı oldukça azdır, Batı Avrupa ve Amerika'daki yetişkin lenfomaların %1-2'sinden sorumludur. Fakat eBL vakalarının %95'inden fazlası EBV ile ilişkilidir ve Afrika'nın ekvatoral kuşağında ve sıtmanın hiperendemik olduğu dünyanın diğer bölgelerinde baskındır. (Blum et al., 2004). Afrika'nın ekvatoryal kısmı ile sıtmanın hiperendemik olarak görüldüğü bölgelerde EBV'nin daha baskın ve EBV ile ilişkili eBL'nin, çocuklarda 5-10/100.000 insidansa sahip olduğu bununla birlikte bu oranın Afrika ekvatoryal kuşağında görülen çocukluk çağındaki malignitelerin % 74'üne tekabül ettiği rapor edilmiştir (Van den Bosch, 2004).

EBV’nin burkitt lenfomadaki rolü

Bazı tümör hücrelerinde EBV genomlarının tespiti, progenitör tümör hücresinin EBV ile enfekteli olduğunu ve tümörün tümörogenez safhasının erken bir aşamasında rol oynadığını göstermektedir (Neri et al., 1991). Ancak, EBV ile enfekteli hücrelerde viral kapsid antijenine (VCA) karşı antikorların oluşumundan sonra zamanla BL belirtileri ortaya çıkmaktadır (Pagano et al., 2004).

EBV latent gen ekspresyonu üç evrede tamamlamaktadır; latens I (latent evre), latens II (oluşum evresi) ve latens III (gelişim evresi)’dür. Enfeksiyonun III. evresinde, tüm latent genlerin (EBNA, LMP ve EBERS) ekspresyonu gözlemlenmekte ve EBV'nin hücre proliferasyonu ile B hücreleri üzerinde birincil enfeksiyonlar oluşmaktadır. eBL hücreleri genellikle latent evrede EBNA-1 proteinini ve EBER'leri eksprese etmekte ve bu durumun EBV'nin tümör büyümesine katkı da bulunabileceği bildirilmektedir (Tao et al., 1998). EBV gen ekspresyonu, MHC sınıf I genleri, antijen işleme molekülleri (TAP) ve tümör hücrelerinde yer alan proteozom alt ünitesi LMP7’nin gen ekspresyonun azalması ile tümörün immün sistemden kaçması kolaylaşmakta bununla birlikte EBV gen ürünleri de tümörlerde BL hücrelerinin canlılığını sürdürmesine yardımcı olmaktadır. BL hücrelerinde EBNA-1 ve EBER'lerin ekspresyonu yeterince gerçekleşmezse, EBV’nin hücre içinde canlılığını sürdürmesi söz konusu olamayabilmektedir (Hammerschmidt and Sugden, 2004). Apoptozun önlenmesinde ve BL hücrelerinin hayatta kalmasında EBNA-1 ve EBER'lerin önemi pek çok çalışmada bildirilmiştir. B hücrelerinde EBNA-1 eksprese eden transgenik fareler üzerinde yapılan bir çalışmada, bu B hücrelerinin tümör oluşturmaya eğilimli olduğu ve B hücrelerinde eksprese olan EBNA-1’in inhibisyonu sonucunda da EBV’nin sağ kalım oranının düştüğü gözlemlenilmiştir. EBNA-1'in inhibe edildiği hücrelerde, sadece EBV genomunun kaybı veya EBER'lerin seviyesindeki değişiklikler değil aynı zamanda apoptoz seviyesinde de ciddi artışlar olduğu bildirilmiştir (Wilson et al., 1996). EBER'lerin (EBER1) dsRNA ile aktive olan protein kinaz reseptörlerine (PKR) bağlanarak bu reseptörleri ve aynı zamanda apoptozu indükleyen IFN-α’yı inhibe ettiği bildirilmiştir (Nanbo et al., 2005). Hücresel stres ve apoptotik yolları düzenleyen PKR’nin aynı zamanda tümör baskılayıcı özelliklerinin de, tümörogenez oluşumunda önem arz eden EBER'ler tarafından inhibe edildiği rapor edilmiştir. IL-10'un EBV-pozitif BL tümör hücrelerinde daha yüksek seviyelerde eksprese edildiği, nazofaringeal karsinom gibi diğer EBV ile ilişkili hastalıklarda çok fazla oranda eksprese edilen mikroRNA'ların ise BL hücrelerinde çok fazla görülmediği bildirilmiştir (Kitagawa et al., 2000). eBL’lerde EBNA-1 ve EBER'lerin ifade edilen tek EBV genleri olduğu düşünülürken, son zamanlarda yapılan çalışmalarda, eBL tümörlerinin bazılarında EBNA-3A, 3B, 3C ve LP latent genlerinin de varlığı gösterilmiştir (Cai et al., 2006). Yapılan çalışmalar sonucunda, EBNA-1, 3A, 3B, 3C ve LP pozitif EBNA-2 ile LMP negatif BL hücrelerinin apoptozise dirençli olduğu, EBNA-2 , LMP1-negatif BL hücrelerinin ise apoptoz direncinin daha az olduğu ortaya çıkarılmıştır (Xue et al., 2002). Dolayısıyla eBL tümörlerinin, her biri apoptoza karşı farklı bir direnç seviyesi veren, farklı EBV geninin eksprese edildiği tümör hücrelerinden oluşabileceği gösterilmiştir (Kelly et al., 2006)

SONUÇ

EBV latent enfeksiyonlarda uzun yıllar kalabilmesi nedeniyle hastalık oluşmasa bile konak hücre için her zaman risk faktörü olarak değerlendirilmektedir. EBV ile enfeksiyona uğramış bireylerde latent enfeksiyonlarda dahi virüs, B hücrelerinde çoğalmakta ve bağışıklık yanıtından kurtulmaktadır. Virüs kalıtsal materyalini konak hücre çekirdeğine aktardığından hiçbir zaman ortadan kaldırılamamaktadır. EBV’nin neden olduğu en ciddi hastalıklardan biri BL olarak bilinmektedir. BL’nın birçok patolojik faktörün oluşumunda katkısı olduğu bilindiğinden, hastalığın oluşumuna neden olan EBV ile ilgili yapılacak güncel araştırmalarla bu mekanizmaların daha da aydınlatılması gerekmektedir.

KAYNAKLAR

Abdel-Hamid M, Chen J, Constantine N, Massoud M, Raab-Traub N. 1992. EBV strain variation: geographical distribution and relation to disease state. Virology. 190:168–175.

Blum KA, Lozanski G, Byrd JC. Adult Burkitt leukemia and lymphoma. Blood 2004;104:3009–20.

Brady G, MacArthur GJ, Farrell PJ, 2007. Epstein–Barr virus and Burkitt lymphoma. J Clin Pathol. 60(12): 1397-402.

Cai X, Schafer A, Lu S. 2006. Epstein–Barr virus microRNAs are evolutionarily conserved and differentially expressed. PLoS Pathog 2006;2:e23.

Cox C, Chang S, Karran L. 1996. Persistent Epstein-Barr virus infection in the common marmoset (*Callithrix jacchus*). J Gen Virol. 77:1173-1180.

Çağlar M, Balcı Y, Polat A, Cevahir N, Çölgeçen Ş. 2014. Enfeksiyöz mononükleoz tanısı alan hastaların değerlendirilmesi. Pamukkale Tıp Dergisi, (3), 210-213. Retrieved from http://dergipark.gov.tr/patd/issue/35413/393437.

Epstein MA, Achong BG, Barr YM. 1964. Virus particles in cultured lymphoblasts from Burkitt’s lymphma. Lancet. 703-283:702.

Epstein-Barr Virus and Infectious Mononucleosis." Centers for Disease Control.http://www.cdc.gov/ncidod/diseases/ebv.htm. Accessed: 11/3/12.

Epstein-Barr Virus." International Agency for Research on Cancer. IARC Monographs. 1997. 49-92. http://monographs.iarc.fr/ENG/Monographs/vol100B/mono100B-6.pdf. Accessed: 11/3/12.

Ferry JA. Burkitt’s lymphoma: clinicopathologic features and differential diagnosis. Oncologist 2006;11:375.

Fidan I, Yuksel S, İmir T. 2005. Değişik yaş gruplarında Epstein-Barr virus antikorlarının araştırılması. J Infect 2005;19:453-456. Cohen JI. Epstein-Barr virus infection. N Engl J Med 2000;343:481-492

Fingeroth JD, Weis JJ, Tedder TF, Strominger JL, Biro PA, Fearon DT. 1984 Epstein-Barr virus receptor of human B lymphocytes is the C3d receptor CR2. 1984; 81(14): 4510–4514.

Gruhne B, Sompalle R, Marescotti D, Kamranvar SA, Gastaldello S, Masucci MG. 2009. The Epstein-Barr virus nuclear antigen-1 promotes genomic instability via induction of reactive oxygen species. PNAS. 106(7): 2313-2318.

Hammerschmidt W, Sugden B. 2004. Epstein–Barr virus sustains Burkitt's lymphomas and Hodgkin's disease. Trends Mol Med 6-10:331.

Imai S, Nishikawa J, Takada K. 1998. Cell-to-cell contact as an efficient mode of Epstein-Barr virus infection of diverse human epithelial cells. 1998 May;72(5):4371-8

Kelly GL, Milner AE, Baldwin GS. 2006. Three restricted forms of Epstein–Barr virus latency counteracting apoptosis in c-myc-expressing Burkitt lymphoma cells. Proc Natl Acad Sci USA 40-103:14935.

Kieff E, 1996. Epstein-Barr virus and its replication. In: Fields Virology. Fields BN, Knipe DM, Howley P et al., editors. Philadelphia, PA: Lippincott–Raven, pp. 2343–2396.

Kitagawa N, Goto M, Kurozumi K. 2000. Epstein–Barr virus-encoded poly(A)(-) RNA supports Burkitt's lymphoma growth through interleukin-10 induction. Embo J 50-19:6742.

Klein E, Kis LL, Klein G. 2007. Epstein-Barr virus infection in humans: from harmless to life endangering virus-lymphocyte interactions.Oncogene. 26:1297–1305.

Li Y, Webster-Cyriaque J, Tomlinson C, Yohe M, Kenney S. 2004. Fatty acid synthase expression is induced by the Epstein–Barr virus immediate-early protein BRLF1 and required for lytic viral gene expression J. Virol. 78(8), in press

Liebowitz D, Kieff E. 1993. Epstein-Barr virus. In: The Human Herpesvirus. Roizman B, Whitley RJ, Lopez C, editors. New York. 107–172.

Maeda E, Akahane M, Kiryu S, Kato N, Yoshikawa T, Hayashi N, Aoki S, Minami M, Fukayama H, Ohtomo K, 2009. Spectrum of Epstein-Barr virus-related diseases: a pictorial review 15: 8-12.

Matsuura H, Austin N, Longnecker R, Theodore S. 2010. Crystal structure of the Epstein-Barr virus (EBV) glycoprotein H/glycoprotein L (gH/gL) complex. PMID: 21149717.

Miller G. 1990. The switch between latency and replication of Epstein-Barr virus. J Infect Dis. 44-161:833.

Nanbo A, Yoshiyama H, Takada K. 2005. Epstein–Barr virus-encoded poly(A)- RNA confers resistance to apoptosis mediated through Fas by blocking the PKR pathway in human epithelial intestine 407 cells. J Virol 5-79:12280.

Neri A, Barriga F, Inghirami G. 1991. Epstein–Barr virus infection precedes clonal expansion in Burkitt's and acquired immunodeficiency syndromeassociated lymphoma. Blood 77:1092–5.

Pagano JS, Blaser M, Buendia MA. 2004. Infectious agents and cancer: criteria for a causal relation. Semin Cancer Biol 14:453–71.

Rickinson AB, Young LS, Rowe M. 1987. Influence of the Epstein-Barr virus nuclear antigen EBNA 2 on the growth phenotype of virus-transformed B cells. J Virol, 61: 1310-1317. PMID:3033261

Sample JT, Sample CE. 2008. Epstein-Barr Virus: Molecular Biology. In: Encyclopedia of Virology. Mahy BWJ, van Regenmortel MHV, editors. Oxford: Academic Press, pp 157-167.

Sandlund JT, Murphy SB, Santana VM, Behm F, Jones D, Berard CW, Furman WL, Ribeiro R, Crist WM, Greenwald C, Chen G, Walter A, Pui CH, 2000. CNS involvement in children with newly diagnosed non-Hodgkin's lymphoma.

Straus SE, Cohen JI, Tosato G and Meier J, 1993. Epstein-Barr Virus Infections: Biology, Pathogenesis, and Management. Annals of Internal Medicine. 118:45-58.

Tao Q, Robertson KD, Manns A. 1998. Epstein–Barr virus (EBV) in endemic Burkitt's lymphoma: molecular analysis of primary tumor tissue. Blood 91:1373-81.

Thompson MP, Kurzrock R, 2004. Epstein-Barr virus and cancer. 2004 Feb 1;10(3):803-21

Van den Bosch CA. 2004. Is endemic Burkitt's lymphoma an alliance between three infections and a tumour promoter? Lancet Oncol 5:738–46.

Wang D, Liebowitz D, Kieff E. 1985. An EBV Membrane Protein Expressed in Immortalized Lymphocytes Transforms Established Rodent Cells. Cell. 43: 831-840.

Wilson JB, Bell JL, Levine AJ. 1996. Expression of Epstein–Barr virus nuclear antigen-1 induces B cell neoplasia in transgenic mice. Embo J 26-15:3117.

Xue SA, Labrecque LG, Lu QL 2002. Promiscuous expression of Epstein–Barr virus genes in Burkitt's lymphoma from the central African country Malawi. Int J Cancer 43-99:635.

Yavuz G, 2002. Burkitt lenfoması ve Türkiye, XII. 7. Türk Pediatrik Onkoloji Grubu Kongresi, Yu-varlak hücreli tümörler, 22-25 Mayıs, 2002, İstanbul, Kongre kitabı,42-49)

Young LS, Rickinson AB. 2004. Epstein-Barr Virus: 40 Years On. Nature Reviews. 4:757-768.

TURKISH JOURNAL OF SCIENCE
VOLUME III, ISSUE I, 14-31
ISSN: 2587-0971

http://dergipark.gov.tr/tjos

Türevlenebilen Geometrik Konveks Fonksiyonlar için Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikler*

Hadamard Type Integral Inequalities for Differentiable Geometrically Convex Functions*

Nurullah KILIÇ[1] and Ahmet Ocak AKDEMİR[2*]

[1]*Ministery of National Education, Ağrı, Turkey*
[2]*Ağrı İbrahim Çeçen University, Faculty of Science and Letters, Department of Mathematics, Ağrı, Turkey*
Sorumlu yazar / Corresponding Author:* **aocakakdemir@gmail.com

Geliş Tarihi / Received Date: 23 August 2018
Kabul Tarihi / Accepted Date: 29 December 2018

*Bu çalışma "Geometrik konveks fonksiyonlar üzerine bazı integral eşitsizlikler" başlıklı (Nurullah KILIÇ, Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2016) yüksek lisans tezinden üretilmiştir.

Öz: Bu çalışmada öncelikle iki integral eşitsizliği elde edilmiş ve bu iki eşitlik yardımıyla türevlenebilen geometrik konveks fonksiyonlar için bazı Hadamard tipli integral eşitsizlikler ispat edilmiştir. Ayrıca elde edilen bulgulara ait bazı uygulamalar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler — Hadamard Eşitsizliği, Geometrik konvekslik, Hölder Eşitsizliği.

Abstract: In this study, firstly two integral identity have been obtained and some Hadamard type integral inequalities have been proved for geometrically convex functions by using these two integral identities. Also, some applications related to findings have been given.

Keywords — Hadamard Inequality, Geometrically convexity, Hölder inequality.

1. GİRİŞ

Bu bölümde çalışmada kullanılacak olan bazı temel tanımlar ve literatürde mevcut bazı teoremler verilecektir.

Tanım 1.1. (Geometrik Konveks Fonksiyon) $f: I \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(x^t y^{1-t}) \leq [f(x)]^t [f(y)]^{1-t}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna geometrik konveks fonksiyon denir (Zhang *et al.* 2012).

Tanım 1.2. (Harmonik Konveks Fonksiyon) I$\subset R/\{0\}$ bir açık aralık olsun. $f: I \to R$ bir fonksiyon olmak üzere eğer $\forall x, y \in I\ ve\ \alpha\ \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{xy}{\alpha x+(1-\alpha)y}\right) \leq \alpha f(y)+(1-\alpha)f(x)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyon denir (Anderson *et al.* 2007).

Tanım 1.3. (Ortalama Fonksiyonu) M fonksiyonu $M: (0,\infty)\times(0,\infty)\rightarrow(0,\infty)$ şeklinde verilsin. Eğer

(1) $M(x,y) = M(y,x)$

(2) $M(x,x) = x$

(3) $x < M(x,y) < y\, , x < y$

(4) $M(ax,ay) = aM(x,y),\ a > 0$

şartları sağlanıyorsa M fonksiyonuna ortalama fonksiyonu denir (Anderson *et al.* 2007).

Tanım 1.4. (MN- Konveks (Konkav) fonksiyon): $f: I \rightarrow (0,\infty)$ sürekli fonksiyonu verilsin. $I \subseteq (0,\infty)$ ve M, N herhangi iki ortalama fonksiyonu olsun. Eğer $\forall x, y \epsilon I$ için

$$f\big(M(x,y)\big) \leq (\geq) N\big(f(x), f(y)\big)$$

şartı sağlanıyor ise f fonksiyonuna MN −konveks(konkav) fonksiyonu denir (Anderson 2007).

Teorem 1.1. $I \subseteq (0,\infty)$ ve $f: I \rightarrow (0,\infty)$ sürekli fonksiyonu verilsin.(4)-(9) seçenekleri için $I = (0,b), 0 < b < \infty$ olarak verilsin.

(1) f nin AA −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart f nin konveks (konkav) olmasıdır.

(2) f nin AG −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $log f$ nin konveks (konkav) olmasıdır.

(3) f nin AH −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart ${}^{1}/_{f}$ nin konveks (konkav) olmasıdır.

(4) f nin GA −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f(be^{-t})$ nin$(0,\infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

(5) f nin GG −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f(be^{-t})$ nin $(0,\infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

(6) f nin GH −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart ${}^{1}/_{f(be^{-t})}$nin$(0,\infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

(7) f nin HA −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f\left({}^{1}/_{x}\right)$ nin $({}^{1}/_{b},\infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

(8) f nin HG −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $logf\left({}^{1}/_{x}\right)$ nin $({}^{1}/_{b},\infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

(9) f nin HH −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart ${}^{1}/_{f\left({}^{1}/_{x}\right)}$ nin $({}^{1}/_{b},\infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır (Anderson 2007).

Teorem 1.2. $I \subseteq (0,\infty)$ ve $f: I \to (0,\infty)$ diferensiyellenebilir fonksiyonu verilsin. (4)-(9) seçenekleri için $I = (0,b)$,$0 < b < \infty$ olarak verilsin.

(1) f nin AA −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f^{'}(x)$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(2) f nin AG −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart ${}^{f^{'}(x)}/_{f(x)}$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(3) f nin AH −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart ${}^{f^{'}(x)}/_{f(x)^2}$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(4) f nin GA −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $xf'(x)$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(5) f nin GG −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart ${}^{xf^{'}(x)}/_{f(x)}$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(6) f nin GH −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $\left. xf^{'}(x) \middle/ f(x)^2 \right.$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(7) f nin HA −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $x^2 f^{'}(x)$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(8) f nin HG −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $\left. x^2 f^{'}(x) \middle/ f(x) \right.$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(9) f nin HH −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $\left. x^2 f^{'}(x) \middle/ f(x)^2 \right.$ nin artan (azalan) olmasıdır (Anderson 2007).

Teorem 1.3. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f^{'} \in L[a,b]$ olsun. Eğer$\left|f^{'}(x)\right|^q$fonksiyonu $[a,b]$ aralığında GA −konveks ise$q \geq 1$ için;

$$\left|[bf(b) - af(a)] - \int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\leq \frac{[(b-a)A(a,b)]^{1-\frac{1}{q}}}{2^{\frac{1}{q}}} \{[L(a^2,b^2) - a^2]|f'(a)|^q + [b^2 - L(a^2,b^2)]|f'(b)|^q\}^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Zhang *et. al.* 2013).

Teorem 1.4. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f^{'} \in L[a,b]$ olsun. Eğer$\left|f^{'}(x)\right|^q$fonksiyonu $[a,b]$ aralığında GA −konveks ise $q > 1$ için;

$$\left|[bf(b) - af(a)] - \int_a^b f(x)dx\right| \leq (lnb - lna)[L\left(a^{\frac{2q}{(q-1)}}, b^{\frac{2q}{(q-1)}}\right)]^{1-\frac{1}{q}} [A\left|f^{'}(a)\right|^q \left|f^{'}(b)\right|^q]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Zhang *et. al.* 2013).

Teorem 1.5. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f^{'} \in L[a,b]$ olsun. Eğer$\left|f^{'}(x)\right|^q$fonksiyonu $[a,b]$ aralığında GA −konveks ise $q \geq 1$ için;

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{(\ln b - \ln a)^{1-\frac{1}{q}}}{(2q)^{\frac{1}{q}}}\left[L\left(a^{\frac{2q}{q-1}}, b^{\frac{2q}{q-1}}\right)\right]^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times \{[L(a^{2q}, b^{2q}) - a^{2q}]|f'(a)|^q + [b^{2q} - L(a^{2q}, b^{2q})]|f'(b)|^q\}^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Zhang *et. al.* 2013).

Teorem 1.6. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm ve $a, b \in I^o$, $a < b$, $f' \epsilon L[a,b]$ olsun. Eğer $\left|f'(x)\right|$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında GA −konveks ise bu takdirde

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \left(\frac{L(x^2, b^2) - L(a^2, x^2)}{2}\right)|f'(x)| + \left(\frac{L(a^2, x^2) - a^2}{2}\right)|f'(a)| + \left(\frac{b^2 - L(x^2, b^2)}{2}\right)|f'(b)|$$

eşitsizliği $\forall x \in [a,b]$ için geçerlidir (Avcı-Ardıç *et. al.* 2015).

Teorem 1.7. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm ve $a, b \in I^o$, $a < b$, $f' \epsilon L[a,b]$ olsun. Eğer $\left|f'(x)\right|^q$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında GA −konveks ise bu takdirde

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq (lnx - lna)^{1-\frac{1}{q}}(L(a^2, x^2) - x^2)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{|f'(a)|^q - |f'(x)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+(lnb - lnx)^{1-\frac{1}{q}}(L(b^2, x^2) - b^2)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{|f'(b)|^q - |f'(x)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği $\forall x \in [a,b]$ ve $q \geq 1$ için geçerlidir (Avcı-Ardıç *et. al.* 2015).

Teorem 1.8. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm ve $a, b \in I^o$, $a < b$, $f' \epsilon L[a,b]$ olsun. Eğer $\left|f'(x)\right|^q$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında GA −konveks ise bu taktirde

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq (lnx - lna)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{q-1}{2q}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(x^{\frac{2q}{q-1}} - a^{\frac{2q}{q-1}}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{|f'(x)|^q + |f'(a)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+(lnb - lnx)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{q-1}{2q}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(b^{\frac{2q}{q-1}} - x^{\frac{2q}{q-1}}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{|f'(b)|^q + |f'(x)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği $\forall x \in [a, b]$ ve $q > 1$ için geçerlidir (Avcı-Ardıç *et. al.* 2015).

Teorem 1.9. $f: I \subseteq \mathbb{R}/\{0\} \to \mathbb{R}$ harmonik fonksiyon $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere eğer $f \in L[a, b]$ ise bu durumda

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir (İşcan 2014).

Teorem 1.10. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q$fonksiyonu $[a, b]$ aralığında harmonik konveks ise $q \geq 1$ için;

$$\left|\frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx\right| \leq \frac{ab(b-a)}{2} \lambda_1^{1-\frac{1}{q}} [\lambda_2 |f'(a)|^q + \lambda_3 |f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada

$$\lambda_1 = \frac{1}{ab} - \frac{2}{(b-a)^2} ln \frac{(a+b)^2}{4ab}$$

$$\lambda_2 = \frac{-1}{b(b-a)} + \frac{3a+b}{(b-a)^3} ln \frac{(a+b)^2}{4ab}$$

ve

$$\lambda_3 = \frac{1}{a(b-a)} - \frac{3a+b}{(b-a)^3} ln \frac{(a+b)^2}{4ab} = \lambda_1 - \lambda_2$$

şeklinde tanımlıdır (İşcan 2014).

Teorem 1.11. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q$fonksiyonu $[a, b]$ aralığında harmonik konveks ise

$$\left|\frac{f(a)+\ f(b)}{2}-\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(x)}{x^2}dx\right|\le\frac{ab(b-a)}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{p}+1}\right)^{\frac{1}{\mathrm{p}}}[\mu_1|f'(a)|^q\ +\ \mu_2|f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olacak şekilde $q>1$ için geçerlidir ve burada

$$\mu_1=\frac{a^{2-2q}+b^{1-2q}[(b-a)(1-2q)-a]]}{2(b-a)^2(1-q)(1-2q)}$$

$$\mu_2=\frac{a^{2-2q}-a^{1-2q}[(b-a)(1-2q)-a]]}{2(b-a)^2(1-q)(1-2q)}$$

şeklinde tanımlıdır (İşcan 2014).

2. GEOMETRİK KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

Lemma 2.1. $f: I\subseteq\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferansiyellenebilen bir dönüşüm ve $a,b\in I^\circ$ ve $a<b$ olsun. Eğer $f'\in L[a,b]$ ise $n\in N\ ,n\ge 1$ için aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$b^nf(b)-a^nf(a)-n\int_a^b x^{n-1}f(x)dx=(lnb-lna)\int_0^1 a^{(n+1)t}b^{(n+1)(1-t)}f'(a^tb^{1-t})dt$$

İspat: Bu lemmayı ispatlamak için,

$$\int_0^1 a^{(n+1)t}b^{(n+1)(1-t)}f'(a^tb^{1-t})dt$$

integralinde,

$$x=a^tb^{1-t}$$

değiken değiştirmesi yapılırsa,

$$\int_0^1 a^{(n+1)t}b^{(n+1)(1-t)}f'(a^tb^{1-t})dt=\frac{1}{(lnb-lna)}\int_b^a x^nf'(x)dx$$

$$=\frac{1}{(lnb-lna)}\ [\,b^nf(b)-a^nf(a)-n\int_a^b x^{n-1}f(x)dx\,]$$

elde edilir. Daha sonra eşitliğin her tarafı $(lnb-lna)$ ile çarpılırsa ispat tamamlanmış olur.

Lemma 2.2. $f: I\subseteq\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ f fonksiyonu I üzerinde diferansiyellenebilen bir dönüşüm ve $a,b\in I^\circ$ ve $a<b$ olsun. Eğer $f'\in L[a,b]$ ise $n\in N\ ,n\ge 1$ iken aşağıdaki eşitlik $\forall\ u\in[a,b]$ için geçerlidir:

$$b^n f(b) - a^n f(a) - n\int_a^b x^{n-1} f(x)dx = (lnu - lna)\int_0^1 u^{(n+1)t}\, a^{(n+1)(1-t)} f'(u^t a^{1-t})dt$$
$$+ (lnb - lnu)\int_0^1 u^{(n+1)t}\, b^{(n+1)(1-t)} f'(u^t b^{1-t})dt.$$

İspat: Bu lemmayı ispatlamak için önce;

$$I_1 = \int_0^1 u^{(n+1)t}\, a^{(n+1)(1-t)} f'(u^t a^{1-t})dt$$

ve

$$I_2 = \int_0^1 u^{(n+1)t}\, b^{(n+1)(1-t)} f'(u^t b^{1-t})dt$$

alalım. $x = u^t a^{1-t}$değişken değiştirmesi yapılır ve integral alınırsa;

$$I_1 = \int_0^1 u^{(n+1)t}\, a^{(n+1)(1-t)} f'(u^t a^{1-t})dt$$
$$= \frac{1}{(lnu - lna)}\left[u^n f(u) - a^n f(a) - n\int_a^u x^{n-1} f(x)dx\right] (1)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$I_2 = \int_0^1 u^{(n+1)t}\, b^{(n+1)(1-t)} f'(u^t b^{1-t})dt$$
$$= \frac{1}{(lnu - lnb)}\left[u^n f(u) - b^n f(b) - n\int_b^u x^{n-1} f(x)dx\right] (2)$$

(1) eşitlik $(\ln u - \ln a)$ ile ve (2) eşitlik $(\ln b - \ln u)$ ile çarpılır ve taraf tarafa toplanırsa ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.1. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I° de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$, $n \in N$, $n \geq 1$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer$[a,b]$ aralığında $|f'(x)|^q$fonksiyonu GG −konveks ise;

$$\left|b^n f(b) - a^n f(a) - n\int_a^b x^{n-1} f(x)dx\right|$$

$$\leq (lnb - lna) L^{\frac{1}{P}}\left(a^{(n+1)p}, b^{(n+1)p}\right) L^{\frac{1}{q}}\left(|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\right)$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için geçerlidir.

İspat: Lemma 2.1 ve $|f'(x)|^q$ nin GG-konveks olduğu kullanılarak

$$\left|b^n f(b) - a^n f(a) - n\int_a^b x^{n-1} f(x)dx\right|$$

$$\leq (lnb - lna)\int_0^1 a^{(n+1)t} b^{(n+1)(1-t)} |f'(a^t b^{1-t})| dt$$

$$\leq (lnb - lna)\int_0^1 a^{(n+1)t} b^{(n+1)(1-t)} \, |f'(a)|^t |f'(b)|^{(1-t)} dt$$

$$= (lnb - lna) b^{(n+1)} |f'(b)| \int_0^1 (\frac{a}{b})^{(n+1)t} \left|\frac{f'(a)}{f'(b)}\right|^t dt$$

elde edilir. Hölder integral eşitsizliği kullanılarak

$$\left|b^n f(b) - a^n f(a) - n\int_a^b x^{n-1} f(x)dx\right|$$

$$\leq (lnb - lna) b^{(n+1)} |f'(b)| \left[\int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^{(n+1)tp} dt\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^1 \left|\frac{f'(a)}{f'(b)}\right|^{tq} dt\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$= (lnb - lna) L^{\frac{1}{P}}\left(a^{(n+1)p}, b^{(n+1)p}\right) L^{\frac{1}{q}}(|f'(a)|^q, |f'(b)|^q)$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.2. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I° de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$, $n \in N$, $n \geq 1$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer$[a, b]$ aralığında $|f'(x)|^q$fonksiyonu GA $-$konveks ise;

$$\left|b^n f(b) - a^n f(a) - n\int_a^b x^{n-1} f(x)dx\right|$$

$$\leq (lnb - lna) \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} L^{\frac{1}{q}}\left(a^{(n+1)q}, b^{(n+1)q}\right)(|f'(a)| + |f'(b)|)$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için geçerlidir.

İspat: Lemma 2.1 , $|f'(x)|^q$ in GA $-$konveksliği ve Hölder integral eşitsizliği kullanılarak:

$$\left|b^n f(b) - a^n f(a) - n\int_a^b x^{n-1} f(x)dx\right|$$

$$\leq (lnb - lna)\int_0^1 a^{(n+1)t} b^{(n+1)(1-t)} |f'(a^t b^{1-t})| dt$$

$$\leq (lnb - lna) b^{(n+1)} \left[\int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^{(n+1)t} (t|f'(a)| + (1-t)|f'(b)|)\, dt\right]$$

$$\leq (lnb - lna)b^{(n+1)}\left[|f'(a)|\left(\int_0^1 t^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^{(n+1)tq}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+|f'(b)|\left(\int_0^1 (1-t)^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^{(n+1)tq}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$
$$\leq \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}(lnb - lna)L^{\frac{1}{q}}\left(a^{(n+1)q}, b^{(n+1)q}\right)(|f'(a)| + |f'(b)|)$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.3. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $I°$ de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b, n \in N$, $n \geq 1$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer$[a,b]$ aralığında $|f'(x)|^q$fonksiyonu GG −konveks ise $\forall u \in [a,b]$ için;

$$\left|b^n f(b) - a^n f(a) - n\int_a^b x^{n-1} f(x)dx\right|$$
$$\leq (lnu - lna)L^{\frac{1}{P}}\left(u^{(n+1)p}, a^{(n+1)p}\right)L^{\frac{1}{q}}(|f'(u)|^q, |f'(a)|^q)$$
$$+ (lnb - lnu)L^{\frac{1}{P}}\left(u^{(n+1)p}, b^{(n+1)p}\right)L^{\frac{1}{q}}(|f'(u)|^q, |f'(b)|^q)$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için geçerlidir.

İspat: Lemma 2.2, $|f'(x)|^q$ in GG −konveksliği ve Hölder integral eşitsizliği kullanılarak;

$$\left|b^n f(b) - a^n f(a) - n\int_a^b x^{n-1} f(x)dx\right|$$
$$\le (lnu - lna)\int_0^1 u^{(n+1)t} a^{(n+1)(1-t)} |f'(u^t a^{1-t})|dt$$
$$+ (lnb - lnu)\int_0^1 u^{(n+1)t} b^{(n+1)(1-t)} |f'(u^t b^{1-t})|dt$$
$$\le (lnu - lna)\int_0^1 u^{(n+1)t} a^{(n+1)(1-t)}\, |f'(u)|^t |f'(a)|^{(1-t)} dt$$
$$+ (lnb - lnu)\int_0^1 u^{(n+1)t} b^{(n+1)(1-t)} |f'(u)|^t |f'(b)|^{(1-t)} dt$$
$$= (lnu - lna)a^{(n+1)}|f'(a)|\int_0^1 \left(\frac{u}{a}\right)^{(n+1)t} \left|\frac{f'(u)}{f'(a)}\right|^t dt$$
$$+ (lnb - lnu)b^{(n+1)}|f'(b)|\int_0^1 \left(\frac{u}{b}\right)^{(n+1)t} \left|\frac{f'(u)}{f'(b)}\right|^t dt$$
$$\le (lnu - lna)a^{(n+1)}|f'(a)|\left[\int_0^1 \left(\frac{u}{a}\right)^{(n+1)tp} dt\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^1 \left|\frac{f'(u)}{f'(a)}\right|^{tq} dt\right]^{\frac{1}{q}}$$
$$+ (lnb - lnu)b^{(n+1)}|f'(b)|\left[\int_0^1 \left(\frac{u}{b}\right)^{(n+1)tp} dt\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^1 \left|\frac{f'(u)}{f'(b)}\right|^{tq} dt\right]$$
$$\le (lnu - lna)L^{\frac{1}{P}}\left(u^{(n+1)p}, a^{(n+1)p}\right)L^{\frac{1}{q}}(|f'(u)|^q, |f'(a)|^q)$$
$$+ (lnb - lnu)L^{\frac{1}{P}}\left(u^{(n+1)p}, b^{(n+1)p}\right)L^{\frac{1}{q}}(|f'(u)|^q, |f'(b)|^q)$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur

Teorem 2.4. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I° de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$, $n \in N$, $n \ge 1$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $[a, b]$ aralığında $|f'(x)|^q$fonksiyonu GA −konveks ise $\forall u \in [a, b]$ için

$$\left|b^n f(b) - a^n f(a) - n\int_a^b x^{n-1} f(x)dx\right|$$
$$\le \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left[(lnu - lna)L^{\frac{1}{q}}\left(u^{(n+1)q}, a^{(n+1)q}\right)(|f'(u)|, |f'(a)|)\right.$$
$$\left. + (lnb - lnu)L^{\frac{1}{q}}\left(u^{(n+1)q}, b^{(n+1)q}\right)(|f'(u)|, |f'(b)|)\right]$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için geçerlidir.

İspat: Lemma 2.2, $|f'(x)|^q$ in GA −konveksliği ve Hölder integral eşitsizliği kullanılarak

$$\left|b^n f(b) - a^n f(a) - n\int_a^b x^{n-1} f(x)dx\right|$$
$$\leq \left(\ln\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{a}}\right)\int_0^1 u^{(n+1)t}a^{(n+1)(1-t)}|f'(u^t a^{1-t})|dt$$
$$+\left(\ln\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{u}}\right)\int_0^1 u^{(n+1)t}b^{(n+1)(1-t)}|f'(u^t b^{1-t})|dt$$
$$\leq \left(\ln\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{a}}\right)\int_0^1 u^{(n+1)t}a^{(n+1)(1-t)}\left(t|f'(u)| + (1-t)|f'(a)|\right)dt$$
$$+\left(\ln\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{u}}\right)\int_0^1 u^{(n+1)t}b^{(n+1)(1-t)}\left(t|f'(u)| + (1-t)|f'(b)|\right)dt$$
$$= \left(\ln\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{a}}\right)a^{(n+1)}\left[|f'(u)|\int_0^1 t\left(\frac{u}{a}\right)^{(n+1)t}dt + |f'(a)|\int_0^1 (1-t)\left(\frac{u}{a}\right)^{(n+1)t}dt\right]$$
$$+\left(\ln\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{u}}\right)b^{(n+1)}\left[|f'(u)|\int_0^1 t\left(\frac{u}{b}\right)^{(n+1)t}dt + |f'(b)|\int_0^1 (1-t)\left(\frac{u}{b}\right)^{(n+1)t}dt\right]$$
$$\leq \left(\ln\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{a}}\right)a^{(n+1)}\left[|f'(u)|\left(\int_0^1 t^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left(\frac{u}{a}\right)^{(n+1)tq}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+|f'(a)|\left(\int_0^1 (1-t)^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left(\frac{u}{a}\right)^{(n+1)tq}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$
$$+\left(\ln\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{u}}\right)b^{(n+1)}\left[|f'(u)|\left(\int_0^1 t^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left(\frac{u}{b}\right)^{(n+1)tq}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+|f'(b)|\left(\int_0^1 (1-t)^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left(\frac{u}{b}\right)^{(n+1)tq}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$
$$\leq \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[(lnu - lna)L^{\frac{1}{q}}\left(u^{(n+1)q}, a^{(n+1)q}\right).\left(|f'(u)|, |f'(a)|\right)\right.$$
$$\left.+\left(\ln\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{u}}\right)L^{\frac{1}{q}}\left(u^{(n+1)q}, b^{(n+1)q}\right).\left(|f'(u)|, |f'(b)|\right)\right]$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.5. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I° de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$, $n \in N$, $n \geq 1$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $[a,b]$ aralığında $|f'(x)|^q$ fonksiyonu GA $-$konveks ise;

$$\left|b^n f(b) - a^n f(a) - n\int_a^b x^{n-1} f(x)dx\right|$$
$$\leq (lnb - lna)\left(\frac{1}{q+1}\right)^{\frac{1}{q}} L^{\frac{1}{p}}\left(a^{(n+1)p}, b^{(n+1)p}\right)\left(\frac{|f'(a)|^{(q+1)} - |f'(b)|^{(q+1)}}{|f'(a)| - |f'(b)|}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için geçerlidir.

İspat: Lemma 2.1 , $|f'(x)|^q$ in GA $-$konveksliği ve Hölder integral eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left|b^n f(b) - a^n f(a) - n\int_a^b x^{n-1} f(x)dx\right| \\
&\le \left(\ln\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\right)\int_0^1 a^{(n+1)t} b^{(n+1)(1-t)} |f'(a^t b^{1-t})| dt \\
&\le \left(\ln\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\right) b^{(n+1)}\left[\int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^{(n+1)t} (t|f'(a)| + (1-t)|f'(b)|)dt\right] \\
&\le \left(\ln\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\right) b^{(n+1)}\left(\int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^{(n+1)tp} dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 (t|f'(a)| + (1-t)|f'(b)|)^q dt\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer burada

$t|f'(a)| + (1-t)|f'(b)|$= u değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned}
&\left|b^n f(b) - a^n f(a) - n\int_a^b x^{n-1} f(x)dx\right| \\
&\le (lnb - lna)\left(\frac{1}{q+1}\right)^{\frac{1}{q}} L^{\frac{1}{p}}\left(a^{(n+1)p}, b^{(n+1)p}\right)\left(\frac{|f'(a)|^{(q+1)} - |f'(b)|^{(q+1)}}{|f'(a)| - |f'(b)|}\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.6. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I° de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b, n \in N$, $n \ge 1$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer$[a,b]$ aralığında $|f'(x)|^q$fonksiyonu GA $-$konveks ise $\forall u \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned}
&\left|b^n f(b) - a^n f(a) - n\int_a^b x^{n-1} f(x)dx\right| \\
&\le \left(\frac{1}{q+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left(\ln\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{a}}\right) L^{\frac{1}{p}}\left(u^{(n+1)p}, a^{(n+1)p}\right)\left(\frac{|f'(u)|^{(q+1)} - |f'(a)|^{(q+1)}}{|f'(u)| - |f'(a)|}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left. + \left(\ln\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{u}}\right) L^{\frac{1}{p}}\left(u^{(n+1)p}, b^{(n+1)p}\right)\left(\frac{|f'(u)|^{(q+1)} - |f'(b)|^{(q+1)}}{|f'(u)| - |f'(b)|}\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için geçerlidir.

İspat: Lemma 2.2 , $|f'(x)|^q$ in GA $-$konveksliği ve Hölder integral eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left|b^n f(b) - a^n f(a) - n\int_a^b x^{n-1} f(x)dx\right| \\
&\qquad \le (\ln\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{a}}) \int_0^1 u^{(n+1)t} a^{(n+1)(1-t)} |f'(u^t a^{1-t})| dt \\
&\qquad + \left(\ln\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{u}}\right) \int_0^1 u^{(n+1)t} b^{(n+1)(1-t)} |f'(u^t b^{1-t})| dt\, u \\
&\qquad \le (\ln\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{a}}) a^{(n+1)} \left[\int_0^1 \left(\frac{u}{a}\right)^{(n+1)t} (t|f'(u)| + (1-t)|f'(a)|) dt\right] \\
&\qquad + \left(\ln\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{u}}\right) b^{(n+1)} \left[\int_0^1 \left(\frac{u}{b}\right)^{(n+1)t} (t|f'(u)| + (1-t)|f'(b)|) dt\right] \\
&\qquad \le (\ln\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{a}}) a^{(n+1)} \left(\int_0^1 \left(\frac{u}{a}\right)^{(n+1)tp} dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (t|f'(u)| + (1-t)|f'(a)|)^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\qquad + \left(\ln\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{u}}\right) b^{(n+1)} \left(\int_0^1 \left(\frac{u}{b}\right)^{(n+1)tp} dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (t|f'(u)| + (1-t)|f'(b)|)^q dt\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer burada

$t|f'(a)| + (1-t)|f'(b)|$= u değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned}
&\left|b^n f(b) - a^n f(a) - n\int_a^b x^{n-1} f(x)dx\right| \\
&\qquad \le \left(\frac{1}{q+1}\right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\ln\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{a}}\right) L^{\frac{1}{p}}\left(u^{(n+1)p}, a^{(n+1)p}\right) \left(\frac{|f'(u)|^{(q+1)} - |f'(a)|^{(q+1)}}{|f'(u)| - |f'(a)|}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\qquad \left. + \left(\ln\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{u}}\right) L^{\frac{1}{p}}\left(u^{(n+1)p}, b^{(n+1)p}\right) \left(\frac{|f'(u)|^{(q+1)} - |f'(b)|^{(q+1)}}{|f'(u)| - |f'(b)|}\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.7. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu I° de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$, $n \in N$, $n \ge 1$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $[a,b]$ aralığında $|f'(x)|^q$ fonksiyonu GH −konveks ise;

$$\left|b^n f(b) - a^n f(a) - n\int_a^b x^{n-1} f(x)dx\right|$$

$$\le \left(\ln\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\right) \left(\frac{1}{-q+1}\right)^{\frac{1}{q}} |f'(a)||f'(b)| L^{\frac{1}{p}}\left(a^{(n+1)p}, b^{(n+1)p}\right) \left(\frac{|f'(a)|^{(-q+1)} - |f'(b)|^{(-q+1)}}{|f'(a)| - |f'(b)|}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için geçerlidir.

İspat: Lemma 2.1 , $|f'(x)|^q$ in GH −konveksliği ve Hölder integral eşitsizliği kullanılarak

$$\left|b^n f(b) - a^n f(a) - n\int_a^b x^{n-1} f(x)dx\right|$$

$$= \left(\ln\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\right)\int_0^1 a^{(n+1)t} b^{(n+1)(1-t)} |f'(a^t b^{1-t})| dt$$

$$\leq \left(\ln\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\right) b^{(n+1)} \left[\int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^{(n+1)t} \left(\frac{|f'(a)||f'(b)|}{t|f'(a)| + (1-t)|f'(b)|}\right) dt\right]$$

$$\leq \left(\ln\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\right) b^{(n+1)} |f'(a)||f'(b)| \left[\int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^{(n+1)tp} dt\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^1 \left(\frac{1}{t|f'(a)| + (1-t)|f'(b)|}\right)^q dt\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\ln\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\right)\left(\frac{1}{-q+1}\right)^{\frac{1}{q}} |f'(a)||f'(b)| L^{\frac{1}{p}}\left(a^{(n+1)p}, b^{(n+1)p}\right)\left(\frac{|f'(a)|^{(-q+1)} - |f'(b)|^{(-q+1)}}{|f'(a)| - |f'(b)|}\right)^{\frac{1}{q}}$$

ispat tamamlanmış olur

Teorem 2.8. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu I° de diferensiyellenebilen bir fonksiyon,$a < b, n \in N$, $n \geq 1$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $[a,b]$ aralığında $|f'(x)|^q$ fonksiyonu GH −konveks ise $\forall u \in [a,b]$ için;

$$\left|b^n f(b) - a^n f(a) - n\int_a^b x^{n-1} f(x)dx\right|$$

$$\leq \left(\frac{1}{-q+1}\right)^{\frac{1}{q}} \left|f'(u)\right| \left[\left|f'(a)\right| \left(\ln\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{a}}\right) L^{\frac{1}{p}}\left(u^{(n+1)p}, a^{(n+1)p}\right) \left(\frac{\left|f'(u)\right|^{(-q+1)} - \left|f'(a)\right|^{(-q+1)}}{\left|f'(u)\right| - \left|f'(a)\right|}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left. + \left|f'(b)\right| \left(\ln\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{u}}\right) L^{\frac{1}{p}}\left(u^{(n+1)p}, b^{(n+1)p}\right) \left(\frac{\left|f'(u)\right|^{(-q+1)} - \left|f'(b)\right|^{(-q+1)}}{\left|f'(u)\right| - \left|f'(b)\right|}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için geçerlidir.

İspat: Lemma 2.2 $|f'(x)|^q$ in GH −konveksliği ve Hölder integral eşitsizliği kullanılarak

$$\left|b^n f(b) - a^n f(a) - n\int_a^b x^{n-1} f(x)dx\right|$$
$$= (lnu - lna)\int_0^1 u^{(n+1)t} a^{(n+1)(1-t)} \left|f^{'}(u^t a^{1-t})\right| dt$$
$$+ (lnb - lnu)\int_0^1 u^{(n+1)t} b^{(n+1)(1-t)} \left|f^{'}\left(u^t b^{1-t}\right)\right| dt$$
$$\leq (lnu - lna)a^{(n+1)}\left[\int_0^1 \left(\frac{u}{a}\right)^{(n+1)t}\left(\frac{\left|f^{'}(u)\right|\left|f^{'}(a)\right|}{t\left|f^{'}(u)\right| + (1-t)\left|f^{'}(a)\right|}\right)dt\right]$$
$$+ (lnb - lnu)b^{(n+1)}\left[\int_0^1 \left(\frac{u}{b}\right)^{(n+1)t}\left(\frac{\left|f^{'}(u)\right|\left|f^{'}(b)\right|}{t\left|f^{'}(u)\right| + (1-t)\left|f^{'}(b)\right|}\right)dt\right]$$
$$\leq (lnu - lna)a^{(n+1)}\left|f^{'}(u)\right|\left|f^{'}(a)\right|\left[\int_0^1 \left(\frac{u}{a}\right)^{(n+1)tp} dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^1 \left(\frac{1}{t\left|f^{'}(u)\right| + (1-t)\left|f^{'}(a)\right|}\right)^q dt\right]^{\frac{1}{q}}$$
$$+ (lnb - lnu)b^{(n+1)}\left|f^{'}(u)\right|\left|f^{'}(b)\right|\left[\int_0^1 \left(\frac{u}{b}\right)^{(n+1)tp} dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^1 \left(\frac{1}{t\left|f^{'}(u)\right| + (1-t)\left|f^{'}(b)\right|}\right)^q dt\right]^{\frac{1}{q}}$$
$$= \left(\frac{1}{-q+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left|f^{'}(u)\right|\left[\left(\ln\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{a}}\right)\left|f^{'}(a)\right| L^{\frac{1}{p}}\left(u^{(n+1)p}, a^{(n+1)p}\right)\left(\frac{\left|f^{'}(u)\right|^{(-q+1)} - \left|f^{'}(a)\right|^{(-q+1)}}{\left|f^{'}(u)\right| - \left|f^{'}(a)\right|}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left. + \left(\ln\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{u}}\right)\left|f^{'}(b)\right| L^{\frac{1}{p}}\left(u^{(n+1)p}, b^{(n+1)p}\right)\left(\frac{\left|f^{'}(u)\right|^{(-q+1)} - \left|f^{'}(b)\right|^{(-q+1)}}{\left|f^{'}(u)\right| - \left|f^{'}(b)\right|}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

ispat tamamlanmış olur.

3. ELDE EDİLEN BULGULARA DAİR BAZI SONUÇ VE UYGULAMAR

Sonuç 3.1. Teorem 2.1 de n=1 seçilirse

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx\right| \leq (lnb - lna)L^{\frac{1}{p}}(a^{2p}, b^{2p})L^{\frac{1}{q}}(|f'(a)|^q, |f'(b)|^q)$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için elde edilir.

Sonuç 3.2. Teorem 2.2 de n=1 seçilirse

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx\right| \leq (lnb - lna)\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} L^{\frac{1}{q}}(a^{2q}, b^{2q})(|f'(a)| + |f'(b)|)$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için elde edilir.

Sonuç 3.3. Teorem 2.5 de n=1 seçilirse

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx \right| \leq (lnb - lna) \left(\frac{1}{q+1} \right)^{\frac{1}{q}} L^{\frac{1}{p}}(a^{2p}, b^{2p}) \left(\frac{|f'(a)|^{(q+1)} - |f'(b)|^{(q+1)}}{|f'(a)| - |f'(b)|} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için elde edilir.

Sonuç 3.4. Teorem 2.7 de n=1 seçilirse

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx \right| \leq (lnb - lna) \left(\frac{1}{-q+1} \right)^{\frac{1}{q}} |f'(a)||f'(b)| L^{\frac{1}{p}}(a^{2p}, b^{2p}) \left(\frac{|f'(a)|^{(q+1)} - |f'(b)|^{(q+1)}}{|f'(a)| - |f'(b)|} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için elde edilir.

Uygulama 3.1. $a, b \in \mathbb{R}^+$ve $a < b$ olsun. Bu durumda

$$|e^b(b-1) - e^a(a-1)| \leq (lnb - lna) L^{\frac{1}{p}}(a^{2p}, b^{2p}) L^{\frac{1}{q}}(e^{aq}, e^{bq})$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için geçerlidir.

İspat: Sonuç 3.1 de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = e^x$ $GG - konveks$ fonksiyonu seçilirse istenen sonuç elde edilir.

Uygulama 3.2. $a, b \in \mathbb{R}^+$ve $a < b$ olsun. Bu durumda

$$\left| \log \left[(e^{a-b}) \left(\frac{b+1}{a+1} \right) \right] \right| \leq (lnb - lna) \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} L^{\frac{1}{q}}(a^{2q}, b^{2q}) \left(\left| \frac{1}{a+1} \right| + \left| \frac{1}{b+1} \right| \right)$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için geçerlidir.

İspat: Sonuç 3.2 de $f: (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log(x+1)$ $GA - konveks$ fonksiyonu seçilirse istenen sonuç

elde edilir.

Uygulama 3.3. $a, b \in \mathbb{R}^+$ve $a < b$ olsun. Bu durumda

$$\left|\log\left[\left(e^{a-b}\right)\left(\frac{b+1}{a+1}\right)\right]\right| \leq (lnb-lna)\left(\frac{1}{q+1}\right)^{\frac{1}{q}} L^{\frac{1}{p}}\left(a^{2p},b^{2p}\right)\left(\frac{\left|\frac{1}{a+1}\right|^{(q+1)}-\left|\frac{1}{b+1}\right|^{(q+1)}}{\left|\frac{1}{a+1}\right|-\left|\frac{1}{b+1}\right|}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği $p>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için geçerlidir.

İspat: Sonuç 3.3 de $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log(x+1)$ $GA-konveks$ fonksiyonu seçilirse istenen sonuç elde edilir

Uygulama 3.4. $a,b\in\mathbb{R}^{+}$ ve $a<b$ olsun. Bu durumda

$$\frac{2}{3}\left(b^{3}-a^{3}\right) \leq (lnb-lna)\left(\frac{1}{-q+1}\right)^{\frac{1}{q}} 2abL^{\frac{1}{p}}\left(a^{2p},b^{2p}\right)\left(\frac{a^{(-q+1)}-b^{(-q+1)}}{a-b}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği $p>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için geçerlidir.

İspat: Sonuç 3.4 te $f:(-\infty,0)\to(0,\infty)$ ve $f(\ x)=x^{2}$ $GH-konveks$ fonksiyonu seçilirse istenen sonuç elde edilir.

KAYNAKÇA

M. Avcı-Ardıç, A.O.Akdemir, E.Set, New Ostrowski Like Inequalities for GG−Convex and GA−Convex Functions, Mathematical Inequalities and Applications, Volume 19, Number 4 (2016), 1159–1168.

G.D. Anderson , M.K. Vamanamurthy , M. Vuorinen , Generalized convexity and inequalities J. Math. Anal. Appl. 335 (2007) 1294–1308.

İ. İşcan, Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, Volume 43 (6) (2014), 935-942.

T-Y. Zhang, A-P. Ji and F. Qi, Sone inequalities of Hermite-Hadamard type for GA-convex functions with applications to means, Le Matematiche, Vol. LXVIII (2013) Fasc. I, pp. 229239, doi: 10.4418/2013.68.1.17.

X-M. Zhang, Y-M. Chu, and X-H. Zhang, The Hermite-Hadamard type inequality of GA-convex functions and its application, Journal of Inequalities and Applications, Volume 2010, Article ID 507560, 11 pages, doi:10.1155/2010/507560.

TURKISH JOURNAL OF SCIENCE
VOLUME III, ISSUE I, 32-39 http://dergipark.gov.tr/tjos
ISSN: 2587-0971

ON q-BERNOULLI INEQUALITY

q-BERNOULLI EŞİTSİZLİĞİ ÜZERİNE

MOHAMMAD W. ALOMARI

[1]Department of Mathematics, Faculty of Science and Information Technology, Irbid National University, 2600 Irbid 21110, Jordan

*Sorumlu yazar / Corresponding Author: mwomath@gmail.com

Geliş Tarihi / Received Date: 15 September 2018
Kabul Tarihi / Accepted Date: 30 December 2018

Abstract. In this work, the q–analogue of Bernoulli inequality is proved. Some other related results are presented.

Keywords q-Bernoulli inequality, q-Calculus, Combinatorial inequalities

1. Introduction

Throughout this work, we consider $q \in (0,1)$. The q-number is defined to be the number of the form

$$[\alpha]_q = \frac{q^\alpha - 1}{q-1}, \qquad \text{for any } \alpha \in \mathbb{C}.$$

In particular, if $\alpha = n \in \mathbb{N}$, then the positive q-integer is defined to be

$$[n]_q = \frac{q^n - 1}{q-1} = 1 + q + q^2 + \cdots q^{n-1}.$$

In special case, we have $[1]_q = 1$ and $[0]_q = \frac{1}{1-q} = [\infty]_q$.

We define the q-factorial of the number $[n]_q$ and the g-binomial coefficient by

$$[0]_q! = 1, \qquad [n]_q! = [n]_q [n-1]_q \cdots [2]_q \cdot [1]_q \qquad \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[j]_q! [n-j]_q!}$$

with the convention that

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_q = 1, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ j \end{bmatrix}_q = 0, \ \forall j \geq 1.$$

The q-Pochammer symbol is defined to be

$$(x-a)_q^n = \prod_{j=0}^{n-1} \left(x - q^j a\right), \text{ with } (x-a)_q^{(0)} = 1, \text{ and } (x-a)_q^{-n} = \frac{1}{(x - q^{-n} a)_q^n}.$$

This formula plays an important role in combinatorics. For instance, for $x = 1$ and $x = a$ this formula make sense as $n = \infty$:

$$(1+x)_q^n = \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 + q^j x\right).$$

The above infinite product converges if $q \in (0, \infty)$.

We adopt the symbol

$$(1+x)_q^\alpha = \frac{(1+x)_q^\infty}{(1+q^\alpha x)_q^\infty}$$

for any number α. Clearly, this definition coincides with definition of $(1+x)_q^n$ when $\alpha = n \in \mathbb{N}$.

Lemma 1. [2] *For any two numbers α and β, we have*

$$(1+x)_q^\alpha = \frac{(1+x)_q^{\alpha+\beta}}{(1+q^\alpha x)_q^\beta}$$

and

$$D_q (1+x)_q^\alpha = [\alpha]_q (1+qx)_q^{\alpha-1}.$$

The q-derivative of any real valued function f is defined to be

$$D_q f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x}, \qquad x \neq 0.$$

Clearly, as $q \to 1^-$ then $D_q f(x)$ tends to $f'(x)$, provided that f is differentiable.

Two fundamentals q-binomial formulas are well know in Literature. The q-Gauss binomial which has the form

$$(1+x)_q^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q q^{j(j-1)/2} x^j$$

and the q-Heine's binomial formula

$$\frac{1}{(1-x)_q^n} = \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q x^j.$$

However, since

$$\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^j)}$$

Applying this for q-Gauss and q-Heine's binomial formulas, we get two formal power series in x. Namely, we have

$$(1.1) \qquad (1+x)_q^\infty = \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \frac{x^j}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^j)},$$

and

$$(1.2) \qquad \frac{1}{(1-x)_q^\infty} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^j)}.$$

These two series are very useful in the theory of q-calculus, since they were used to define the q-analogue of exponential function. From (1.2)

$$\frac{1}{(1-x)_q^\infty} = \sum_{j=0}^{n} \frac{\left(\frac{x}{1-q}\right)^j}{\left(\frac{1-q}{1-q}\right)\left(\frac{1-q^2}{1-q}\right)\cdots\left(\frac{1-q^j}{1-q}\right)} = \sum_{j=0}^{n} \frac{\left(\frac{x}{1-q}\right)^j}{[1]_1 [2]_q \cdots [j]_q} = \sum_{j=0}^{n} \frac{\left(\frac{x}{1-q}\right)^j}{[j]_q!} = \mathrm{e}_q^{\frac{x}{1-q}},$$

or we write

$$\mathrm{e}_q^x = \frac{1}{(1-(1-q)\,x)_q^{\infty}}.$$

Similarly, if we use (1.1) the companion q-exponential function is defined to be

$$(1+x)_q^{\infty} = \sum_{j=0}^{n} \frac{q^{j(j-1)/2}\left(\frac{x}{1-q}\right)^j}{\left(\frac{1-q}{1-q}\right)\left(\frac{1-q^2}{1-q}\right)\cdots\left(\frac{1-q^j}{1-q}\right)} = \sum_{j=0}^{n} \frac{q^{j(j-1)/2}\left(\frac{x}{1-q}\right)^j}{[1]_1\,[2]_q\cdots[j]_q} = \sum_{j=0}^{n} \frac{\left(\frac{x}{1-q}\right)^j}{[j]_q!} = \mathrm{E}_q^{\frac{x}{1-q}}$$

or we write

$$\mathrm{E}_q^x = (1+(1-q)\,x)_q^{\infty}.$$

The derivatives of the above two q-exponential functions are given as

$$D_q\mathrm{E}_q^x = \mathrm{E}_q^{qx}, \qquad D_q\mathrm{e}_q^x = \mathrm{e}_q^x$$

We note that the additive property of the exponentials does not hold in general, i.e.,

$$\mathrm{e}_q^x\mathrm{e}_q^y = \mathrm{e}_q^{x+y}.$$

However, if x and y satisfy the commutation relation $yx = qxy$, then the additive property holds.

The two functions E_q^x and e_q^x are connected to each other by the relations

$$\mathrm{E}_q^{-x}\mathrm{e}_q^x = 1, \qquad \mathrm{e}_{1/q}^x = \mathrm{E}_q^x.$$

Naturally, it is important to know the relation between these q-quantities. One of the most effective method is to use inequalities. Among others, one of the most famous and applicable inequalities used in mathematics is the Bernoulli inequality, which is well known as:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \tag{1.3}$$

for every $x > -1$ and every positive integer $n \geq 1$. This was extended to more general form such as [3]:

$$(1+x)^{\alpha} \geq 1+\alpha x, \qquad \alpha \geq 1 \tag{1.4}$$

and

$$(1+x)^{\alpha} \leq 1+\alpha x, \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{1.5}$$

This inequality has important applications in proving some classical theorems in Analysis and Statistics. Due to its important role, in this work we prove the q-analogue of Bernoulli inequality and give some other related inequalities.

2. q-Bernoulli inequality

Let us begin with the following version of q-Bernoulli inequality for integers.

Theorem 1. *Let $q \in (0,1)$. If $x > -1$ then the q-Bernoulli inequality*

$$(1+x)_q^n \geq 1+[n]_q\,x, \tag{2.1}$$

is valid for every positive integer $n \geq 1$.

Proof. Our proof carries by Induction. Define the statement

$$\text{(2.2)} \qquad \mathrm{P}(n): \qquad (1+x)_q^n \geq 1 + [n]_q\, x.$$

Case I: If $x = 0$, then the we get equality for all n and thus (2.1) holds.

Case II: If $-1 < x < 0$. Let $x = -y$, $0 < y < 1$, so that (2.2) becomes

$$\mathrm{P}(n): \qquad (1-y)_q^n \geq 1 + [n]_q\, y.$$

For $n = 1$, we have

$$\mathrm{P}(1): \qquad (1-y)_q^1 = (1-y) \geq 1 - y = 1 - [1]_q\, y.$$

Assume $\mathrm{P}(n)$ holds for $n = k$, i.e.,

$$\mathrm{P}(k): \qquad (1-y)_q^k \geq 1 - [k]_q\, y \qquad \text{is true.}$$

We need to show that

$$\mathrm{P}(k+1): \qquad (1+y)_q^{k+1} \geq 1 - [k+1]_q\, y$$

is true?.

$$\begin{aligned}
(1-y)_q^{k+1} &= (1-y)_q^k \left(1 - q^k y\right) \\
&\geq \left(1 - [k]_q\, y\right)\left(1 - q^k y\right) \qquad \text{(follows by assumption (2.2) for } n = k\text{)} \\
&= 1 - q^k y - [k]_q\, y + q^k\, [k]_q\, y^2 \\
&\geq 1 - q^k y - [k]_q\, y \\
&\geq 1 - y - [k]_q\, y \qquad \text{(since } 0 > -q^k > -1\text{)} \\
&= 1 - \left(1 + [k]_q\right) y \\
&\geq 1 - [k+1]_q\, y \qquad \text{(since } ([k+1]_q = q\,[k]_q + 1 \leq [k]_q + 1\text{)}
\end{aligned}$$

which means the statement $\mathrm{P}(k+1)$ is true and thus by Mathematical Induction hypothesis the inequality in (2.1) holds for every $n \in \mathbb{N}$ and $-1 < x < 0$.

Case III: If $x > 0$. Then,

$$\mathrm{P}(1): \qquad (1+x)_q^1 = (1+x) \geq 1 + x = 1 + [1]_q\, x$$

Assume (2.2) holds for $n = k$, i.e.,

$$\mathrm{P}(k): \qquad (1+x)_q^k \geq 1 + [k]_q\, x \qquad \text{is true.}$$

We need to show that

$$\mathrm{P}(k+1): \qquad (1+x)_q^{k+1} \geq 1 + [k+1]_q\, x$$

is true?.

Starting with the left-hand side

$$
\begin{aligned}
(1+x)_q^{k+1} &= (1+x)_q^k \left(1+q^k x\right) \\
&\geq \left(1+[k]_q\, x\right)\left(1+q^k x\right) && \text{(follows by assumption (2.2) for } n=k) \\
&= 1+[k]_q\, x + q^k x + q^k [k]_q\, x^2 \\
&\geq 1+\frac{1}{q} q\, [k]_q\, x + \frac{q}{q} q^k x \\
&= 1+\frac{1}{q}\left([k+1]_q - 1\right) x + \frac{1}{q}\left(q^{k+1} x\right) && \left(\text{since } [k+1]_q = q\,[k]_q + 1\right) \\
&= 1+\frac{1}{q}\left([k+1]_q + q^{k+1} - 1\right) x \\
&= 1+\frac{1}{q}\left([k+1]_q + (q-1)\,[k+1]_q\right) x && \left(\text{since } q^{k+1}-1 = (q-1)\,[k+1]_q\right) \\
&= 1+[k+1]_q\, x,
\end{aligned}
$$

which means the statement $\mathrm{P}\,(k+1)$ is true and thus by Mathematical Induction hypothesis the inequality in (2.1) holds for every $n \in \mathbb{N}$ and $x > 0$. Combining all above three cases I, II and III the inequality (2.1) holds for all $n \geq 1$ and all $x > -1$. $\square$

Remark 1. *As $q \to 1$ in (2.1), then the q-Bernoulli inequality (2.1) reduces to the original version of Bernoulli inequality (1.3) for integer case.*

Remark 2. *For the case $-1 < x < 0$, we prefer to write (2.1) in the form*

$$(1-y)_q^n \geq 1 - [n]_q\, y$$

for every $0 < y < 1$ and $n \geq 1$.

Corollary 1. *Let $q \in (0,1)$. If $x > -1$, then the generalization q-Bernoulli inequality*

$$(1+x)_q^{m+n} \geq \left(1+[m]_q\, x\right)(1+q^m x)_q^n,$$

is valid for every $m \in \mathbb{N}$ and $n \in \mathbb{Z}$.

Proof. The result is an immediate consequence of Theorem 1, by substituting $(1+x)_q^m = \frac{(1+x)_q^{m+n}}{(1+q^m x)_q^n}$ in (2.1). So that the result follows for every $m \in \mathbb{N}$ and $n \in \mathbb{Z}$. $\square$

The following generalization of (2.1) is valid for any real number $\alpha \geq 0$.

Theorem 2. *Let $q \in (0,1)$. If $x \geq 0$ then the q-Bernoulli inequality*

$$(1+x)_q^\alpha \geq 1 + [\alpha]_q\, x, \qquad \alpha \geq 1 \tag{2.3}$$

and

$$(1+x)_q^\alpha \leq 1 + [\alpha]_q\, x, \qquad 0 < \alpha < 1 \tag{2.4}$$

is valid.

Proof. Let us recall that [1], for $0 < a < b$ (or $0 > a > b$), a function $f(x)$ is said to be q-increasing (respectively, q-decreasing) on $[a,b]$, if $f(qx) \leq f(x)$ (respectively, $f(qx) \geq f(x)$) whenever, $x \in [a,b]$ and $qx \in [a,b]$. As a direct consequence we have,

$f(x)$ is q-increasing (respectively, q-decreasing) on $[a,b]$ iff $D_q f(x) \geq 0$ (respectively, $D_q f(x) \leq 0$), whenever, $x \in [a,b]$ and $qx \in [a,b]$.

Let $f(x) = (1+x)_q^\alpha - [\alpha]_q x - 1$, $x \geq 0$. Since $(1+x)_q^\alpha = \frac{(1+x)_q^\infty}{(1+q^\alpha x)_q^\infty}$, inserting qx instead of x and replace α by $\alpha - 1$ we get $(1+qx)_q^{\alpha-1} = \frac{(1+qx)_q^\infty}{(1+q^\alpha x)_q^\infty}$. Therefore, we have

$$\begin{aligned}
D_q f(x) &= [\alpha]_q (1+qx)_q^{\alpha-1} - [\alpha]_q \\
&= [\alpha]_q \frac{(1+qx)_q^\infty}{(1+q^\alpha x)_q^\infty} - [\alpha]_q \\
&= [\alpha]_q \frac{\sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{q^{j(j-1)/2}}{\prod\limits_{k=1}^{j}(1-q^k)} q^j x^j}{\sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{q^{j(j-1)/2}}{\prod\limits_{k=1}^{j}(1-q^k)} q^{j\alpha} x^j} - [\alpha]_q \qquad \left(\text{with the convention } \prod_{k=1}^{0}\left(1-q^j\right) = 1\right) \\
&= [\alpha]_q \frac{1+\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{q^{j(j-1)/2}}{\prod\limits_{k=1}^{j}(1-q^k)} q^j x^j}{1+\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{q^{j(j-1)/2}}{\prod\limits_{k=1}^{j}(1-q^k)} q^{j\alpha} x^j} - [\alpha]_q \\
&= [\alpha]_q \frac{\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{q^{j(j-1)/2}}{\prod\limits_{k=1}^{j}(1-q^k)} \left(q^j - q^{j\alpha}\right) x^j}{1+\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{q^{j(j-1)/2}}{\prod\limits_{k=1}^{j}(1-q^k)} q^{j(\alpha-1)} x^j} \geq 0,
\end{aligned}$$

since $q \in (0,1)$ and $\alpha \geq 1$ then $\left(q^j - q^{j\alpha}\right) > 0$, and this implies that $D_q f(x) \geq 0$ for all $x \geq 0$, which means that f is q-increasing and thus the inequality (2.3) is proved.

The inequality (2.4) is deduced from the above proof by noting that $\left(q^j - q^{j\alpha}\right) < 0$ for all $0 < \alpha < 1$. $\square$

Remark 3. *Setting $\alpha = n \in \mathbb{N}$ in (2.3), then the inequality (2.3) reduces to the q-version of Bernoulli inequality (2.1) for integer case but for $x \geq 0$. Moreover, as $q \to 1$ (2.3) and (2.4) reduces to the classical versions (1.4) and (1.5); respectively.*

Testing the validity of (2.3) and (2.4) for $-1 < x < 0$ arbitrarily, we find that these inequalities can be extended but with additional restriction on $q \in (0,1)$, as given in the following result.

Theorem 3. *There exists $\widehat{q} \in (0,1)$ such that the inequalities (2.3) and (2.4) are hold for every $q \in (\widehat{q}, 1)$ and every $x > -1$.*

Proof. Firstly, we need to recall the q-Mean Value Theorem (q-MVT) given in [4], it states that: For a continuous function g defined on $[a,b]$ $(0 < a < b)$, there exist $\eta \in (a,b)$ and $\widehat{q} \in (0,1)$ such that

$$g(b) - g(a) = D_q g(\eta)(b-a) \tag{2.5}$$

for all $q \in (\widehat{q}, 1)$.

Case I. If $x \geq 0$. We consider the function $f(t) = (1+t)_q^{\alpha}$ defined for $t \geq 0$. Clearly f is continuous for $t \in [0,x] \subset [0,\infty)$, and $D_q f(c) = [\alpha]_q (1+qc)_q^{\alpha-1}$. Applying, (2.5) for $a = 0$ and $b = x$ then there exist $\eta \in (a,b)$ and $\widehat{q} \in (0,1)$

$$(1+x)_q^{\alpha} - 1 = [\alpha]_q (1+q\eta)_q^{\alpha-1} (x-0) \geq [\alpha]_q x \qquad \forall q \in (\widehat{q}, 1).$$

This yields that

$$(1+x)_q^{\alpha} \geq 1 + [\alpha]_q x$$

$\forall q \in (\widehat{q}, 1)$, and this proves (2.3).

Case II. If $-1 < x < 0$. Let us write (2.3) as follows:

$$1 - [\alpha]_q x \leq (1-x)_q^{\alpha}. \tag{2.6}$$

Consider the function $f(t) = (1-t)_q^{\alpha}$ defined for $0 \leq t \leq 1$. Clearly f is continuous for $t \in [0,x] \subset [0,1]$, and $D_q f(c) = [\alpha]_q (1+qc)_q^{\alpha-1}$. Applying, (2.5) for $a = 0$ and $b = x$ then there exist $\eta \in (0,x)$ and $\widehat{q} \in (0,1)$

$$(1-x)_q^{\alpha} - 1 = -[\alpha]_q (1-q\eta)_q^{\alpha-1} (x-0) \geq -[\alpha]_q x \qquad \forall q \in (\widehat{q}, 1). \tag{2.7}$$

This yields that

$$(1-x)_q^{\alpha} \geq 1 - [\alpha]_q x$$

$\forall q \in (\widehat{q}, 1)$ with $-1 < x < 0$, and this proves the inequality. The reverse inequality in (2.6) holds since the inequality in (2.7) is reversed for $0 < \alpha < 1$, which proves (2.4) $\square$

A generalization of (2.3) and (2.4) is given as follows:

Proposition 1. *Let $\beta \in \mathbb{R}$. There exists $\widehat{q} \in (0,1)$ such that for every $x > -1$ the inequalities*

$$(1+x)_q^{\alpha+\beta} \geq \left(1 + [\alpha]_q x\right) (1+q^{\alpha}x)_q^{\beta} \qquad \alpha \geq 1 \tag{2.8}$$

and

$$(1+x)_q^{\alpha+\beta} \leq \left(1 + [\alpha]_q x\right) (1+q^{\alpha}x)_q^{\beta} \qquad 0 < \alpha \leq 1 \tag{2.9}$$

are hold for every $q \in (\widehat{q}, 1)$.

Proof. From Lemma 1 we have $(1+x)_q^{\alpha} = \frac{(1+x)_q^{\alpha+\beta}}{(1+q^{\alpha}x)_q^{\beta}}$. Substituting in (2.3) we get the required result. $\square$

Remark 4. *Setting $\beta = 0$ in (2.8) and (2.9) we recapture (2.3) and (2.4), respectively.*

Corollary 2. *Let $\beta \in \mathbb{R}$. There exists $\widehat{q} \in (0,1)$ such that for every $x > -1$ the inequalities*

$$(1+x)_q^{\infty} \geq \left(1 + [\alpha]_q x\right) (1+q^{\alpha}x)_q^{\beta} \left(1+q^{\alpha+\beta}x\right)_q^{\infty} \qquad \alpha \geq 1 \tag{2.10}$$

and

$$(1+x)_q^{\infty} \leq \left(1 + [\alpha]_q x\right) (1+q^{\alpha}x)_q^{\beta} \left(1+q^{\alpha+\beta}x\right)_q^{\infty} \qquad 0 < \alpha \leq 1 \tag{2.11}$$

are hold for every $q \in (\widehat{q}, 1)$

Proof. Substituting $(1+x)_q^{\alpha+\beta} = \frac{(1+x)_q^\infty}{(1+q^{\alpha+\beta}x)_q^\infty}$ in (2.8) and (2.9); respectively, we get the required result. □

Remark 5. *Replacing* '$(1-q)x$' *instead of* 'x' *in* (2.10) *and* (2.11)*, we get inequalities for the exponential function* E^x *for all* $x > \frac{-1}{1-q}$*. Similarly, for* e^x *wit a bit changes in the substitution.*

Corollary 3. *There exists* $\widehat{q} \in (0,1)$ *such that for every* $x > -1$ *the inequalities*

$$(1+x)_q^\infty \geq \left(1 + [\alpha]_q\, x\right)(1+q^\alpha x)_q^\infty \qquad \alpha \geq 1 \tag{2.12}$$

and

$$(1+x)_q^\infty \leq \left(1 + [\alpha]_q\, x\right)(1+q^\alpha x)_q^\infty \qquad 0 < \alpha \leq 1 \tag{2.13}$$

are hold for every $q \in (\widehat{q}, 1)$

Proof. Setting $\beta = 0$ in (2.10) and (2.11); respectively, we get the required result. □

References

[1] H. Gauchman, Integral inequalities in q-calculus, *Computers and Mathematics with Applications*, **47** 2004, 281–300.

[2] V.G. Kac and P. Cheeung, Quantum calculus, Universitext, Springer-Verlag, New York, (2002).

[3] D.S. Mitrinović, J. Pečarić and A.M. Fink, Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic, Dordrecht, 1993.

[4] P.M. Rajković, M.S. Stanković and S.D. Marinković, Mean value theorems in q-calculus, *Matematički Vesnik*, **54** 2002, 171–178.

TURKISH JOURNAL OF SCIENCE
VOLUME III, ISSUE I, 40-50
ISSN: 2587-0971
http://dergipark.gov.tr/tjos

Katugampola Fractional Integrals within the Class of Convex Functions

s-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı için Katugampola Kesirli İntegraller

Hatice YALDIZ[1] and Ahmet Ocak AKDEMİR[2*]

[1] *Karamanoğlu Mehmetbey University, Kamil Özdağ Science Faculty, Department of Mathematics, Karaman-Turkey*
[2] *Ağrı İbrahim Çeçen University, Faculty of Science and Letters, Department of Mathematics, Ağrı -Turkey*
Sorumlu yazar / Corresponding Author:* **aocakakdemir@gmail.com

Geliş Tarihi / Received Date: 23 November 2018
Kabul Tarihi / Accepted Date: 27 December 2018

Öz: Bu çalışmanın amacı; Katugampola kesirli integraller yardımıyla birinci mertebeden türevlerinin mutlak değeri s-konveks olan fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikler elde etmektir.

Anahtar Kelimeler — s-konveks fonksiyon, Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler, Katugampola kesirli integraller.

Abstract: The aim of this paper is to the Hermite-Hadamard type inequalities for functions whose first derivatives in absolute value is s-convex through the instrument of generalized Katugampola fractional integrals.

Keywords — s-convex function, Hermite-Hadamard type inequalities, Katugampola fractional integrals.

1. INTRODUCTION

The most well-known inequalities related to the integral mean of a convex function are the Hermite-Hadamard inequalities. Let $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be convex function defined on the interval I of real number and $a, b \in I$, with $a < b$. Then the following double inequality is known in the literature as the Hermite-Hadamard's inequality for convex functions [7]:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{1.1}$$

The beginning fractional integral calculus accompanies the beginning of the integral calculus, developed by Riemann. It originates in the research of Liouville from 1832 related to practical technical problems. Now we point few stages in evolution of the fractional calculus, as needed in developing the new results. More details on the fractional differentiation and integration are in (see, [6, 11, 13]), for example. The Riemann-Liouville fractional integral is, from historic point of view, at the origin of the fractional calculus. It comes from the following Cauchy n −times iterative integration process,

$$\int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \ldots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt,$$

for $n \in \mathbb{N}$.

By formally replacing n by a number $\alpha > 0$, one gets the classical Riemann-Liouville fractional integral, defined by:

Definition 1.1. *Let $f \in L[a,b]$. The Riemann-Liouville integrals $J_{a^+}^{\alpha} f$ and $J_{b^-}^{\alpha} f$ of order $\alpha > 0$ with $a \geq 0$ are defined by*

$$\left(J_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \qquad (x > a), \tag{1.2}$$

and

$$\left(J_{b^-}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt \qquad (x < b), \tag{1.3}$$

where $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx$ is the Gamma function.

Hadamard developed in the second method of fractional integration based on the generalization of another iterative integral. Katugampola ([9] and [10]) considered the following iterative process in 2011:

$$\int_a^x t_1^{\rho} dt_1 \int_a^{t_1} t_2^{\rho} dt_2 \ldots \int_a^{t_{n-1}} t_n^{\rho} f(t_n) dt_n = \frac{(\rho+1)^{1-n}}{(n-1)!} \int_a^x \left(t^{\rho+1} - \tau^{\rho+1}\right)^{n-1} \tau^{\rho} f(\tau) d\tau,$$

for $n \in \mathbb{N}$. This generates Katugampola's concept of fractional integral, defined in [9] and also in [10].

Definition 1.2. *([9]) Let $f \in L[a,b]$, the left-sided Katugampola fractional integral ${}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha} f$ of order $\alpha \in \mathbb{C}$, $Re(\alpha) > 0$ is defined by*

$${}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{t^{\rho-1}}{\left(x^{\rho} - t^{\rho}\right)^{1-a}} f(t) dt, \quad x > a, \tag{1.4}$$

the right-sided Katugampola fractional integral ${}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha} f$ of order $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ is defined by

$${}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{t^{\rho-1}}{\left(t^{\rho} - x^{\rho}\right)^{1-a}} f(t) dt, \quad x < b. \tag{1.5}$$

Katugampola's operators are generalizations of A. Erdélyi and H. Kober operators introduced in 1940 (see [5] and [12]), as well. Other similar approaches on moving iterative integrals and derivatives into fractional framework in connection with theoretic and practical applications are in the mathematical literature of the last decade. For example, the results of Cristescu [4] in 2016.

Remark 1.1. *If $\rho = 1$ then the Katugampola fractional integrals become Riemann-Liouville fractional integrals.*

Now we reviewed some definitions and theorems which will be used in the proof of our main cumulative results.

Definition 1.3. *([1]) Let $s \in (0,1]$. A function $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ is said to be $s-$convex (in the second sense), or that f belongs to the class K_s^2, if*

$$f(\lambda x + (1-x)y) \le \lambda^s f(x) + (1-\lambda)^s f(y)$$

for all $x, y \in [0,\infty)$ and $\lambda \in [0,1]$.

An $s-$convex function was introduced in Breckner's paper [1] and a number of properties and connections with $s-$convexity in the first sense were discussed in paper [8].

The main purpose of this paper is to introduce new type Hermite Hadamard and midpoint integral inequalities with the aid of generalized Katugampola fractional integral for $s-$convex functions and establish some results connected with the them (see for example, [2], [3] and [14]).

2. MAIN RESULTS

In this section, we will give Hermite-Hadamard type inequalities for the Katugampola fractional integrals by using $s-$convex functions.

Theorem 2.1. *Let $f : [a^\rho, b^\rho] \to \mathbb{R}$ be a function on with $0 \le a < b$ and $f \in X_c^\rho(a^\rho, b^\rho)$. If f is also a $s-$convex on $[a,b]$, then the following inequalities hold:*

$$\frac{2^s}{\rho} f\left(\frac{a^\rho + b^\rho}{2}\right) \tag{2.1}$$

$$\le \frac{2^\alpha \rho^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}\left[{}^\rho I^\alpha_{\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)^+} f(b^\rho) + {}^\rho I^\alpha_{\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)^-} f(a^\rho)\right]$$

$$\le 2^{-s}\left[f(a^\rho) + f(b^\rho)\right]\left[\frac{1}{\rho(\alpha+s)} + \frac{2^{(\alpha+s)} B_{\frac{1}{2}}(\alpha, s+1)}{\rho}\right];$$

$$\left[\left(Re\left(2^{\frac{1}{\rho}} \ge 1\right) \vee Re\left(2^{\frac{1}{\rho}} \le 0\right) \vee 2^{\frac{1}{\rho}} \notin \mathrm{R}\right) \wedge Re(\rho) > 0 \wedge Re(\alpha\rho) > 0\right]$$

where

$$B_{\frac{1}{2}}(\alpha, s+1) = \int_0^{\frac{1}{2}} u^{\alpha+1}(1-u)^s\, du$$

the fractional integrals are considered for the function $f\left(x^{\rho}\right)$ and evaluated at a and b, respectively.

Proof. Since f is $s-$convex function on $[a,b]$, we have for $x,y\in[a,b]$

$$f\left(\frac{x^{\rho}+y^{\rho}}{2}\right)\leq\frac{f\left(x^{\rho}\right)+f\left(y^{\rho}\right)}{2^{s}}$$

for $x^{\rho}=\frac{t^{\rho}}{2}a^{\rho}+\frac{2-t^{\rho}}{2}b^{\rho}$ and $y^{\rho}=\frac{t^{\rho}}{2}b^{\rho}+\frac{2-t^{\rho}}{2}a^{\rho}$, we obtain

$$2^{s}f\left(\frac{a^{\rho}+b^{\rho}}{2}\right)\leq f\left(\frac{t^{\rho}}{2}a^{\rho}+\frac{2-t^{\rho}}{2}b^{\rho}\right)+f\left(\frac{t^{\rho}}{2}b^{\rho}+\frac{2-t^{\rho}}{2}a^{\rho}\right)\tag{2.2}$$

Multiplying both sides of (2.2) by $t^{\alpha\rho-1}$, $\alpha>0$ and then integrating with respect to t over $[0,1]$, we get

$$\frac{2^{s}}{\rho}f\left(\frac{a^{\rho}+b^{\rho}}{2}\right)\tag{2.3}$$

$$\leq\int_{0}^{1}t^{\alpha\rho-1}f\left(\frac{t^{\rho}}{2}a^{\rho}+\frac{2-t^{\rho}}{2}b^{\rho}\right)dt+\int_{0}^{1}t^{\alpha\rho-1}f\left(\frac{t^{\rho}}{2}b^{\rho}+\frac{2-t^{\rho}}{2}a^{\rho}\right)dt$$

$$=2^{\alpha}\left[\int_{0}^{\left(\frac{a^{\rho}+b^{\rho}}{2}\right)^{\frac{1}{\rho}}}\left(\frac{x^{\rho}-a^{\rho}}{b^{\rho}-a^{\rho}}\right)^{\alpha-1}\frac{x^{\rho-1}}{\left(b^{\rho}-a^{\rho}\right)}f\left(x^{\rho}\right)dx\right.$$

$$\left.+\int_{\left(\frac{a^{\rho}+b^{\rho}}{2}\right)^{\frac{1}{\rho}}}^{b}\left(\frac{b^{\rho}-x^{\rho}}{b^{\rho}-a^{\rho}}\right)^{\alpha-1}\frac{x^{\rho-1}}{\left(b^{\rho}-a^{\rho}\right)}f\left(x^{\rho}\right)dx\right]$$

$$=\frac{2^{\alpha}\rho^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{\left(b^{\rho}-a^{\rho}\right)^{\alpha}}\left[{}^{\rho}I^{\alpha}_{\left(\frac{a^{\rho}+b^{\rho}}{2}\right)^{+}}f\left(b^{\rho}\right)+{}^{\rho}I^{\alpha}_{\left(\frac{a^{\rho}+b^{\rho}}{2}\right)^{-}}f\left(a^{\rho}\right)\right]$$

and the first inequality is proved. For the proof of the second inequality (2.3), we first note that if f is a $s-$convex function, it yields

$$f\left(\frac{t^{\rho}}{2}a^{\rho}+\frac{2-t^{\rho}}{2}b^{\rho}\right)\leq\frac{t^{\rho s}}{2^{s}}f\left(a^{\rho}\right)+\frac{\left(2-t^{\rho}\right)^{s}}{2^{s}}f\left(b^{\rho}\right)$$

and

$$f\left(\frac{2-t^{\rho}}{2}a^{\rho}+\frac{t^{\rho}}{2}b^{\rho}\right)\leq\frac{\left(2-t^{\rho}\right)^{s}}{2^{s}}f\left(a^{\rho}\right)+\frac{t^{\rho s}}{2^{s}}f\left(b^{\rho}\right)$$

By adding these inequalities together, one has the following inequality:

$$f\left(\frac{t^{\rho}}{2}a^{\rho}+\frac{2-t^{\rho}}{2}b^{\rho}\right)+f\left(\frac{2-t^{\rho}}{2}a^{\rho}+\frac{t^{\rho}}{2}b^{\rho}\right)\leq 2^{-s}\left[t^{\rho s}+\left(2-t^{\rho}\right)^{s}\right]\left[f\left(a^{\rho}\right)+f\left(b^{\rho}\right)\right] \qquad (2.4)$$

Then multiplying both sides of and (2.4) by $t^{\alpha\rho-1}$ and integrating the resulting inequality with respect to t over $[0,1]$ we obtain

$$\frac{2^{\alpha}\rho^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{\left(b^{\rho}-a^{\rho}\right)^{\alpha}}\left[{}^{\rho}I^{\alpha}_{\left(\frac{a^{\rho}+b^{\rho}}{2}\right)^{+}}f\left(b^{\rho}\right)+{}^{\rho}I^{\alpha}_{\left(\frac{a^{\rho}+b^{\rho}}{2}\right)^{-}}f\left(a^{\rho}\right)\right]$$

$$\leq 2^{-s}\left[f\left(a^{\rho}\right)+f\left(b^{\rho}\right)\right]\left[\frac{1}{\rho(\alpha+s)}+\frac{2^{(\alpha+s)}B_{\frac{1}{2}}(\alpha,s+1)}{\rho}\right],$$

$$\left[\left(Re\left(2^{\frac{1}{\rho}}\geq 1\right)\vee Re\left(2^{\frac{1}{\rho}}\leq 0\right)\vee 2^{\frac{1}{\rho}}\notin \mathbb{R}\right)\wedge Re(\rho)>0\wedge Re(\alpha\rho)>0\right]$$

In this way the proof is completed.

Corollary 2.1. *If we write* $\rho=1$ *in inequality (2.1), we obtain;*

$$2^{s}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{2^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+}}f(b)+I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-}}f(a)\right]$$

$$\leq 2^{-s}\left[f(a)+f(b)\right]\left[\frac{1}{(\alpha+s)}+2^{(\alpha+s)}B_{\frac{1}{2}}(\alpha,s+1)\right]$$

with $Re(\alpha)>0$.

Remark 2.1. *Choosing* $s=1$ *in Corollary 2.1, we obtain following inequality*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+}}f(b)+I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-}}f(a)\right]\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

which was given by Sarıkaya and Yıldırım in [15].

Now, we need to give a lemma for differentiable functions which help us to prove our main theorems.

Lemma 2.1. *Let* $f:[a^\rho,b^\rho]\to\mathbb{R}$ *be a differentiable mapping on* (a^ρ,b^ρ) *with* $0\le a<b$*, then the following equality holds:*

$$\frac{2^{\alpha-1}\rho^\alpha\Gamma(\alpha+1)}{(b^\rho-a^\rho)^\alpha}\left[{}^\rho I^\alpha_{\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)^+}f(b^\rho)+{}^\rho I^\alpha_{\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)^-}f(a^\rho)\right]-f\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right) \tag{2.5}$$

$$=\frac{(b^\rho-a^\rho)\rho}{4}\left[\int_0^1 t^{\alpha\rho}f'\left(\frac{t^\rho}{2}a^\rho+\frac{2-t^\rho}{2}b^\rho\right)dt-\int_0^1 t^{\alpha\rho}f'\left(\frac{t^\rho}{2}b^\rho+\frac{2-t^\rho}{2}a^\rho\right)dt\right]$$

Proof. Integrating by parts gives

$$H_1=\int_0^1 t^{\alpha\rho}f'\left(\frac{t^\rho}{2}a^\rho+\frac{2-t^\rho}{2}b^\rho\right)dt \tag{2.6}$$

$$=\frac{-2}{\rho(b^\rho-a^\rho)}f\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)+\frac{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}{\rho^{1-\alpha}(b^\rho-a^\rho)^{\alpha+1}}\,{}^\rho I^\alpha_{\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)^+}f(b^\rho),$$

and

$$H_2=\int_0^1 t^{\alpha\rho}f'\left(\frac{t^\rho}{2}b^\rho+\frac{2-t^\rho}{2}a^\rho\right)dt \tag{2.7}$$

$$=\frac{2}{\rho(b^\rho-a^\rho)}f\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)-\frac{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}{\rho^{1-\alpha}(b^\rho-a^\rho)^{\alpha+1}}\,{}^\rho I^\alpha_{\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)^-}f(a)$$

by subtracting equation (2.7) from (2.6), we have

$$H_1-H_2=\frac{-4}{\rho(b^\rho-a^\rho)}f\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)$$

$$+\frac{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}{\rho^{1-\alpha}(b^\rho-a^\rho)^{\alpha+1}}\left[{}^\rho I^\alpha_{\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)^+}f(b)+{}^\rho I^\alpha_{\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)^-}f(a)\right].$$

By re-arranging the last equality above, we get the desired result.

Theorem 2.2. *Let $f:[a^\rho,b^\rho]\to\mathbb{R}$ be a differentiable mapping on (a^ρ,b^ρ) with $0\le a<b$. If $|f'|$ is $s-$convex on $[a^\rho,b^\rho]$, then the following inequality holds:*

$$\left|\frac{2^{\alpha-1}\rho^\alpha\Gamma(\alpha+1)}{(b^\rho-a^\rho)^\alpha}\left[{}^\rho I^\alpha_{\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)^+}f(b^\rho)+{}^\rho I^\alpha_{\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)^-}f(a^\rho)\right]-f\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)\right| \tag{2.8}$$

$$\le\frac{(b^\rho-a^\rho)}{2^{s+2}}\left[|f'(a^\rho)|+|f'(b^\rho)|\right]\left[\frac{\rho}{\rho(\alpha+s)+1}+2^{\left(\alpha+s+\frac{1}{\rho}\right)}B_{\frac{1}{2}}\left(\alpha+\frac{1}{\rho},s+1\right)\right];$$

$$[Re(\rho)\ge 0\wedge Re(\alpha\rho)>-1].$$

$B_{\frac{1}{2}}$ is defined as in Theorem 2.1.

Proof. Taking modulus of (2.5) and using $s-$convexity of $|f'|$, we have

$$\left|\frac{2^{\alpha-1}\rho^\alpha\Gamma(\alpha+1)}{(b^\rho-a^\rho)^\alpha}\left[{}^\rho I^\alpha_{\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)^+}f(b^\rho)+{}^\rho I^\alpha_{\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)^-}f(a^\rho)\right]-f\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)\right|$$

$$\le\frac{(b^\rho-a^\rho)\rho}{4}\left[\int_0^1 t^{\alpha\rho}\left|f'\left(\frac{t^\rho}{2}a^\rho+\frac{2-t^\rho}{2}b^\rho\right)\right|dt\right.$$

$$\left.+\int_0^1 t^{\alpha\rho}\left|f'\left(\frac{t^\rho}{2}b^\rho+\frac{2-t^\rho}{2}a^\rho\right)\right|dt\right]$$

$$\le\frac{(b^\rho-a^\rho)\rho}{4}\left[\int_0^1 t^{\alpha\rho}\left[\left(\frac{t^\rho}{2}\right)^s|f'(a^\rho)|+\left(\frac{2-t^\rho}{2}\right)^s|f'(b^\rho)|\right]dt\right.$$

$$\left.\int_0^1 t^{\alpha\rho}\left[\left(\frac{t^\rho}{2}\right)^s|f'(b^\rho)|+\left(\frac{2-t^\rho}{2}\right)^s|f'(a^\rho)|\right]dt\right]$$

$$\le\frac{(b^\rho-a^\rho)}{2^{s+2}}\left[|f'(a^\rho)|+|f'(b^\rho)|\right]\left[\frac{\rho}{\rho(\alpha+s)+1}+2^{\left(\alpha+s+\frac{1}{\rho}\right)}B_{\frac{1}{2}}\left(\alpha+\frac{1}{\rho},s+1\right)\right],$$

$$[Re(\rho)\ge 0\wedge Re(\alpha\rho)>-1].$$

where $B_{\frac{1}{2}}$ is defined above. Thus, the proof is completed.

Corollary 2.2. *If we write* $\rho=1$ *in inequality (2.8), we obtain;*

$$\left|\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+}}f(b)+I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-}}f(a)\right]-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq\frac{(b-a)}{2^{s+2}}\left[\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right]\left[\frac{1}{\alpha+s+1}+2^{(\alpha+s+1)}B_{\frac{1}{2}}(\alpha+1,s+1)\right].$$

Remark 2.2. *Choosing* $s=1$ *in Corollary 2.2, we obtain following inequality*

$$\left|\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+}}f(b)+I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-}}f(a)\right]-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq\frac{(b-a)}{4(\alpha+1)}\left[\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right]$$

which was given by Sarıkaya and Yıldırım in [15].

Theorem 2.3. *Let* $f:[a^{\rho},b^{\rho}]\to\mathbb{R}$ *be a differentiable mapping on* (a^{ρ},b^{ρ}) *with* $0\leq a<b$. *If* $\left|f'\right|^{q}$ *,* $q>1$, *is* $s-$*convex on* $[a^{\rho},b^{\rho}]$, *then the following inequality holds:*

$$\left|\frac{2^{\alpha-1}\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}\left[{}^{\rho}I^{\alpha}_{\left(\frac{a^{\rho}+b^{\rho}}{2}\right)^{+}}f(b^{\rho})+{}^{\rho}I^{\alpha}_{\left(\frac{a^{\rho}+b^{\rho}}{2}\right)^{-}}f(a^{\rho})\right]-f\left(\frac{a^{\rho}+b^{\rho}}{2}\right)\right| \tag{2.9}$$

$$\leq\frac{(b^{\rho}-a^{\rho})\rho}{4}\left(\frac{1}{\alpha\rho p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\frac{\left|f'(a^{\rho})\right|^{q}}{2^{s}(\rho s+1)}+\frac{2^{\left(\frac{1}{\rho}+s\right)}B_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\rho},s+1\right)\left|f'(b^{\rho})\right|^{q}}{2^{s}\rho}\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\times\left[\frac{2^{\left(\frac{1}{\rho}+s\right)}B_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\rho},s+1\right)\left|f'(a^{\rho})\right|^{q}}{2^{s}\rho}+\frac{\left|f'(b^{\rho})\right|^{q}}{2^{s}(\rho s+1)}\right]^{\frac{1}{q}},\quad (Re(\rho)\geq 0)$$

where $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ and $B_{\frac{1}{2}}$ is defined as in Theorem 2.1.

Proof. Taking modulus of (2.5) and using well-known Hölder inequality, we obtain

$$\left|\frac{2^{\alpha-1}\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{\left(b^{\rho}-a^{\rho}\right)^{\alpha}}\left[{}^{\rho}I^{\alpha}_{\left(\frac{a^{\rho}+b^{\rho}}{2}\right)^{+}}f\left(b^{\rho}\right)+{}^{\rho}I^{\alpha}_{\left(\frac{a^{\rho}+b^{\rho}}{2}\right)^{-}}f\left(a^{\rho}\right)\right]-f\left(\frac{a^{\rho}+b^{\rho}}{2}\right)\right| \tag{2.10}$$

$$\leq \frac{\left(b^{\rho}-a^{\rho}\right)\rho}{4}\left[\int_0^1 t^{\alpha\rho}\left|f'\left(\frac{t^{\rho}}{2}a^{\rho}+\frac{2-t^{\rho}}{2}b^{\rho}\right)\right|dt\right.$$

$$\left.+\int_0^1 t^{\alpha\rho}\left|f'\left(\frac{t^{\rho}}{2}b^{\rho}+\frac{2-t^{\rho}}{2}a^{\rho}\right)\right|dt\right]$$

$$\leq \frac{\left(b^{\rho}-a^{\rho}\right)\rho}{4}\left(\int_0^1 t^{\alpha\rho p}dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left[\left(\int_0^1\left|f'\left(\frac{t^{\rho}}{2}a^{\rho}+\frac{2-t^{\rho}}{2}b^{\rho}\right)\right|^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_0^1\left|f'\left(\frac{t^{\rho}}{2}b^{\rho}+\frac{2-t^{\rho}}{2}a^{\rho}\right)\right|^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

Since $\left|f'\right|^{q}$, $q>1$, is $s-$convex, we have

$$\int_0^1\left|f'\left(\frac{t^{\rho}}{2}a^{\rho}+\frac{2-t^{\rho}}{2}b^{\rho}\right)\right|^{q}dt \tag{2.11}$$

$$\leq \int_0^1\left[\left(\frac{t^{\rho}}{2}\right)^{s}\left|f'\left(a^{\rho}\right)\right|^{q}+\left(\frac{2-t^{\rho}}{2}\right)^{s}\left|f'\left(b^{\rho}\right)\right|^{q}\right]dt$$

$$=\frac{\left|f'\left(a^{\rho}\right)\right|^{q}}{2^{s}(\rho s+1)}+\frac{2^{\left(\frac{1}{\rho}+s\right)}B_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\rho},s+1\right)\left|f'\left(b^{\rho}\right)\right|^{q}}{2^{s}\rho},\ \left(Re(\rho)\geq 0\right)$$

and similarly

$$\int_0^1\left|f'\left(\frac{t^{\rho}}{2}b^{\rho}+\frac{2-t^{\rho}}{2}a^{\rho}\right)\right|^{q}dt \tag{2.12}$$

$$\leq \frac{2^{\left(\frac{1}{\rho}+s\right)}B_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\rho},s+1\right)\left|f'\left(a^{\rho}\right)\right|^{q}}{2^{s}\rho}+\frac{\left|f'\left(b^{\rho}\right)\right|^{q}}{2^{s}(\rho s+1)},\ \left(Re(\rho)\geq 0\right)$$

By substituting inequalities (2.11) and (2.12) into (2.10), we get the desired result (2.9).

Corollary 2.3. *If we write* $\rho=1$ *in inequality (2.9), we obtain;*

$$\left|\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+}} f(b)+I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-}} f(a)\right]-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq\frac{(b-a)}{4}\left(\frac{1}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\frac{\left|f'(a)\right|^{q}}{2^{s}(s+1)}+\frac{2^{(s+1)}B_{\frac{1}{2}}(1,s+1)\left|f'(b)\right|^{q}}{2^{s}}\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\times\left[\frac{2^{(s+1)}B_{\frac{1}{2}}(1,s+1)\left|f'(a)\right|^{q}}{2^{s}}+\frac{\left|f'(b)\right|^{q}}{2^{s}(s+1)}\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Remark 2.3. *Choosing* $s=1$ *in Corollary 2.3, we obtain following inequality*

$$\left|\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+}} f(b)+I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-}} f(a)\right]-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq\frac{(b-a)}{4}\left(\frac{1}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\frac{\left|f'(a)\right|^{q}}{4}+\frac{3\left|f'(b)\right|^{q}}{4}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left|f'(b)\right|^{q}}{4}+\frac{3\left|f'(a)\right|^{q}}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$\leq\frac{(b-a)}{4}\left(\frac{4}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right]$$

which is the same result given by Sarıkaya and Yıldırım in [15].

REFERENCES

[1] W.W. Breckner, *Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen Raumen*, Pupl. Inst. Math. 23(1978), 13-20.

[2] F. Chen, *A note on the Hermite-Hadamard inequality for convex functions on the coordinates*, J. of Math. Inequalities, 8(4), (2014) 915-923.

[3] H. Chen, U.N. Katugampola, *Hermite-Hadamard and Hermite-Hadamard-Fejer type inequalities for generalized fractional integrals*, J.Math. Anal. Appl., 446 (2017), 1274-1291.

[4] G. Cristescua, *Boundaries of Katugampola fractional integrals within the class of* $(h_1,h_2)-$convex functions, https://www.researchgate.net/publication/313161140.

[5] A. Erdélyi, *On fractional integration and its application to the theory of Hankel transforms,* The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford, Second Series, 11(1940), 293-303.

[6] R. Gorenflo and F. Mainardi, *Fractinal calculus: integral and differential equations of fractional order,* Springer Verlag, Wien (1997), 223-276.

[7] J. Hadamard, *Etude sur les proprietes des fonctions entieres et en particulier d'une fonction considree par*, Riemann, J. Math. Pures. et Appl. 58 (1893), 171-215.

[8] H. Hudzik and L. Maligranda, *Some remarks on* $s-$*convex functions,* Acquationes Math. 48 (1994), 100-111.

[9] U. N. Katugampola, *New approach to a generalized fractional integrals,* Appl. Math. Comput., 218 (4) (2011), 860-865.

[10] U. N. Katugampola, *New approach to a generalized fractional derivatives,* Bull. Math. Anal. Appl., Volume 6 Issue 4 (2014), Pages 1-15.

[11] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations,* North-Holland Mathematics Studies, 204, Elsevier Sci. B.V., Amsterdam, 2006.

[12] H. Kober, *On fractional integrals and derivatives,* The Quarterly J. Math. (Oxford Series), 11 (1) (1940), 193-211.

[13] S. Miller and B. Ross, *An introduction to the fractional calculusand fractional differential equations,* John Wiley & Sons, USA, 1993, p.2.

[14] M. Z. Sarıkaya, E. Set, H. Yaldiz, N. Ba s ak , *Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities,* Math Comput Model. 2013;57(9-10):2403-2407.

[15] M. Z. Sarıkaya and H. Yildirim, *On Hermite-Hadamard type inequalities for Riemann-Liouville fractional integrals,* Miskolc Mathematical Notes, Vol. 17 (2016), No. 2, pp. 1049-1059.