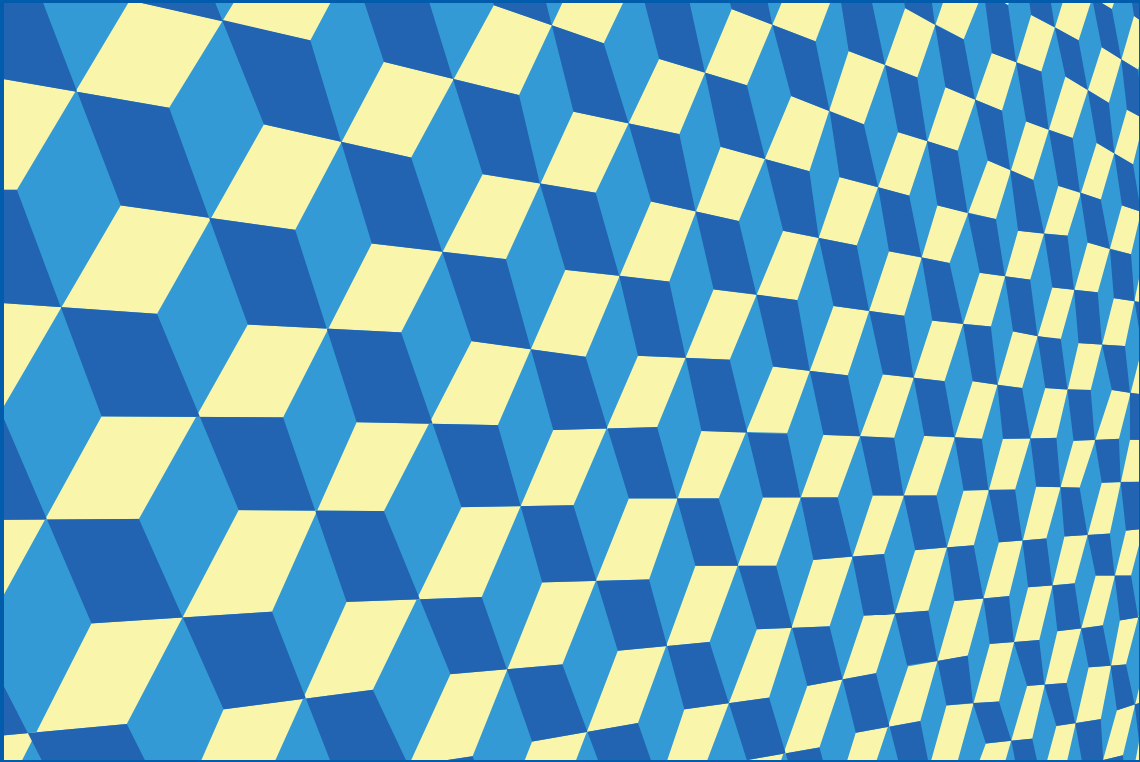




İSTATİSTİK ARAŞTIRMA DERGİSİ Journal of Statistical Research

**Cilt-Volume: 07 Sayı-Number: 01
Temmuz-July 2010**

ISSN 1303-6319



TÜRKİYE İSTATİSTİK KURUMU
Turkish Statistical Institute



İSTATİSTİK ARAŞTIRMA DERGİSİ Journal of Statistical Research

**Cilt-Volume: 07 Sayı-Number: 01
Temmuz-July 2010**

Yayın istekleri için For publication order

Döner Sermaye İşletmesi Revolving Fund Management

Tel: + (312) 425 34 23 - 410 05 96 - 410 02 85

Fax: + (312) 417 58 86

Yayın içeriğine yönelik sorularınız için For questions about contents of the publication

Dergi Editörlüğü Journal Editorship

Tel: + (312) 410 03 75 - 284 45 00/171

Fax: + (312) 425 34 05

İnternet Internet
http://www.tuik.gov.tr http://www.turkstat.gov.tr

E-posta E-mail
dergi@tuik.gov.tr journal@tuik.gov.tr

Yayın No Publication Number
3466

ISSN
1303-6319

Türkiye İstatistik Kurumu Turkish Statistical Institute

Yücestepe Mah. Necatibey Cad. No: 114 06100 Çankaya-ANKARA / TÜRKİYE

Bu yayının 5846 Sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu'na göre her hakkı Türkiye İstatistik Kurumu Başkanlığına aittir. Gerçek veya tüzel kişiler tarafından izinsiz çoğaltılamaz ve dağıtılamaz.

Turkish Statistical Institute reserves all the rights of this publication. Unauthorised duplication and distribution of this publication is prohibited under Law No: 5846.

Türkiye İstatistik Kurumu Matbaası, Ankara Turkish Statistical Institute, Printing Division, Ankara

Tel: 0312 410 01 64 * Fax: 0312 418 50 82

Haziran 2010 June 2010

MTB: 2010-563 - 435 Adet-Copies

İstatistik Araştırma Dergisi'nin Değerli Okuyucuları,

Dergi editörü ve editör yardımcıları olarak, İstatistik Araştırma Dergisi'nin yedinci cildi birinci sayısını yayımlamaktan ve sizlerin kullanımına sunmaktan dolayı kıvanç duymaktayız. Dergi'mizin bu sayısına, istatistik biliminin değişik alanlarında gerçekleştirdikleri kuramsal ve uygulamalı çalışmalarıyla katkıda bulunmuş bilim insanlarına ve araştırmacılara, Dergi'miz aracılığıyla görüşlerini bizimle paylaşma olanağı verdikleri için her birine teşekkür etmeyi bir borç biliriz.

Hemen her Dergi önsözünde gündeme getirdiğimiz bazı makale taslaklarının değerlendirme sürecinde görev almış hakemlerimizin, raporlarını öngörülen zamandan ya çok geç göndermeleri ya da hiç göndermemeleri konusu maalesef bu sayıda da yaşanmıştır. Hakem değerlendirme süreci için Kılavuz'da da belirtilen süreler esas alınarak beklenmekte ve öngörülen süreyi aşmış olan hakem veya hakemler telefonla ya da mesaj yolu ile aranarak, hatırlatmada bulunulmakta ya da yeni bir hakem ataması yapılmaktadır. Dolayısıyla, değerlendirme süreci bu gerekçelerle planlanan sürenin oldukça üzerine çıkmaktadır. Tüm olumsuzluklara rağmen Dergi'mize olan talebin artan bir eğilim içinde devam etmesi nedeniyle, 2007 yılı sayısında başlatılan yılda bir sayı yayımlanması uygulamasına son verilerek, yılda iki sayı biçiminde yayımlanma geleneğine dönülmesi planlanmaktadır.

Dergi'mizin bu sayısında yayımlanmasına karar verilen makale sayısı 13'tür. Önceki yıllarda ve geçtiğimiz yıl içinde gönderilen, hala bilimsel süreçte olan makale sayısı 24'tür. Yazarınca geri çekilen çalışma sayısı 1'dir. Reddedilen çalışma sayısı ise 3'tür. 2009-2010 döneminde gönderilmiş olan çalışma sayısı 15'tir. Bu istatistiklerden de anlaşılacağı gibi, çok sayıda makale taslağı hakem değerlendirme sürecindedir. Ancak, Dergi'mize olan talepteki artış da dikkati çekmektedir. Bu ilginin artan bir yapı içinde sürdürülebilmesi için bizlere ve siz değerli bilim insanlarımıza önemli görev ve sorumluluklar düşmektedir. Bu konuda yapacağınız her türlü yapıcı öneriye açık olduğumuzu ve önerilerinizi dergi@tuik.gov.tr e-posta adresine iletmenizi beklediğimiz hususlarını özellikle hatırlatmak isterim.

Dergi'mizin bu sayısında makalelerin bilimsel yönden değerlendirilmesinde büyük özveriyle katkı sağlamış olan tüm hakemlere minnet ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim. Dergi'nin her aşamasında vermiş olduğu destek ve katkılar için TÜİK Başkan Vekili Sayın A. Ömer TOPRAK'a, Dergi'nin basım sürecinin her aşamasında sağlamış olduğu katkılarından dolayı Editör Yardımcıları Sayın TÜİK Uzmanı Sevil UYGUR'a, Sayın Dr. Özlem İLK'e ve emeği geçen tüm TÜİK çalışanlarına içtenlikle teşekkür ederim.

Diğer sayılarda buluşmak dileğiyle saygılar sunarım.

Prof. Dr. Fetih YILDIRIM
Dergi Editörü

Sahibi Owner
Türkiye İstatistik Kurumu Adına On Behalf of Turkish Statistical Institute
A. Ömer TOPRAK A. Ömer TOPRAK
Türkiye İstatistik Kurumu Başkan Acting President, Turkish Statistical
Vekili Institute

Editör Editor
Fetih YILDIRIM Fetih YILDIRIM

Editör Yardımcısı ve Dil Editörü Assistant Editor and Language Editor
Sevil UYGUR Sevil UYGUR

Editör Yardımcısı Assistant Editor
Özlem İLK Özlem İLK

	Sayfa Page	
ÖNSÖZ	III	FOREWORD
İÇİNDEKİLER	VII	CONTENTS
AMAÇ, KAPSAM, İLKELER	IX	AIM, TARGET, PRINCIPLES
HAKEM LİSTESİ	XI	REFEREE LIST
Tabakalı Tesadüfi Örneklemde Doğrusal Olmayan Maliyet Kısıtları Altında Örnek Hacminin Tabakalara Dağıtılması <i>S. Tuğba ŞAHİN</i>	1	The Allocation of Sample Size into Strata in Stratified Random Sampling under Non-linear Cost Constraints <i>S. Tuğba ŞAHİN</i>
Kapsamlı Bir İçerikle Ön Dağılım Türleri <i>Oya EKİCİ</i>	18	Prior Distribution Classes with Comprehensive Coverage <i>Oya EKİCİ</i>
Kümeleme Çözümlemesinde Düzeltilmiş Tek Adım M-Tahmin Edicisinin Kullanılması <i>A. Fırat ÖZDEMİR, Engin YILDIZTEPE</i>	41	Cluster Analysis with Modified One-Step M-Estimator <i>A. Fırat ÖZDEMİR, Engin YILDIZTEPE</i>
Değişim Katsayılarının Eşitliğine İlişkin Testlerin I. Tip Hata ve Güç Bakımından Karşılaştırılması <i>Nihan POTAS, Hamza GAMGAM</i>	55	Comparison of the Tests for the Equality of Coefficients of Variation in Terms of Type I Error and Power <i>Nihan POTAS, Hamza GAMGAM</i>
Biyokimyasal Reaksiyonlar için Stokastik Simülasyon Algoritmalarına Genel Bir Bakış <i>Vilda PURUTÇUOĞLU</i>	70	An Overview to Stochastic Simulation Algorithms for Biochemical Systems <i>Vilda PURUTÇUOĞLU</i>
Çoklu Doğrusal Regresyonda Etkili Gözlem Gruplarının Saptanması için Kullanılan Tanı Yöntemlerinin Karşılaştırılması <i>Irmak ACARLAR, Hamza GAMGAM</i>	83	Comparison of Diagnostic Methods for Detecting Influential Sets in Multiple Linear Regression <i>Irmak ACARLAR, Hamza GAMGAM</i>
Türk Reel Sektörü için Karşılaştırmalı Etkinlik Ölçümü: Veri Zarflama Analizi Uygulaması <i>A. Argun KARACABEY, Fazıl GÖKGÖZ</i>	100	A Comparative Efficiency Measurement for the Turkish Real Sector: An Application of Data Envelopment Analysis <i>A. Argun KARACABEY, Fazıl GÖKGÖZ</i>
Yangın Ekiplerinin Konumlarının Yöneylem Araştırması ve Coğrafi Bilgi Sistemleri Kullanılarak Belirlenmesi: İzmir Örneği <i>Nurcan TEMİZ, Vahap TECİM</i>	117	Determination of Fire Crews Locations Using Operations Research and Geographical Information Systems: İzmir Case <i>Nurcan TEMİZ, Vahap TECİM</i>

	Sayfa Page	
Türkiye’de Enflasyon Katılığının Araştırılması: Parametrik Olmayan Bir Yaklaşım <i>Saygın ŞAHİNÖZ, Bedriye SARAÇOĞLU</i>	133	Investigating Inflation Persistence in Turkey: A Non-Parametric Approach <i>Saygın ŞAHİNÖZ, Bedriye SARAÇOĞLU</i>
Tekrar Satılabilir Ürünler için Gazeteci Çocuk Probleminin Çelişen Amaçlar Altında İncelenmesi <i>Umay UZUNOĞLU KOÇER, Mutlu KARA</i>	146	The Newsvendor Problem for Resalable Products with Conflicting Objectives <i>Umay UZUNOĞLU KOÇER, Mutlu KARA</i>
Malmquist Endeksi ile 25 Ülkenin Ortaöğretim Performansının Değerlendirilmesi <i>İbrahim DEMİR, Özer DEPREN</i>	164	Assessing Secondary School Performances of 25 Countries Using Malmquist Index <i>İbrahim DEMİR, Özer DEPREN</i>
Türkiye’de Matematik Başarısının İki Aşamalı Bernoulli Modeli Kullanılarak İncelenmesi <i>İbrahim DEMİR, Serpil KILIÇ</i>	175	Examining of Mathematics Achievement in Turkey Using Two Level Bernoulli Model <i>İbrahim DEMİR, Serpil KILIÇ</i>
Tek Değişkenli Zaman Serilerinde Model Seçim Ölçütleri Üzerine Bir İnceleme <i>Hilal GÜNEY, Reşat KASAP</i>	186	Examining Model Selection Criteria for Single Variable Time Series <i>Hilal GÜNEY, Reşat KASAP</i>

Amaç ve Kapsam

İstatistik Araştırma Dergisi (İAD), istatistiki araştırmaların niteliğinin yükseltilmesi, istatistik yöntem ve uygulamalarının geliştirilmesi, literatürde yer alan çalışmaların tartışılması, istatistik uygulamalarıyla ilgili anket çalışmalarının ele alınması, kuramsal ve uygulama alanındaki araştırmacılar arasında iletişimin ortak çalışma ve yayınlarla güçlendirilmesi amacıyla, yayımlanan bir dergidir.

İAD'nin kapsamında yer alan tematik konular aşağıda özet olarak verilmiştir.

- Bankacılık, Finans, Sigortacılık, Aktüerya ve Risk Yönetimi; Bayesci İstatistik; Benzetim Teknikleri; Bilgi Sistemleri; Biyoistatistik; Bulanık Teori; Demografi; Deney Tasarımı ve Varyans Analizi; Ekonometri; Genel Sayımlar ve Değerlendirmeleri; İstatistik Eğitimi; İstatistik Etiği; İstatistik Kuramı; İstatistiksel Kalite Kontrolü; Kamuoyu ve Piyasa Araştırmaları; Klinik Denemeler; Mühendislikte İstatistik Uygulamaları; Olasılık ve Stokastik Süreçler; Optimizasyon; Örnekleme ve Araştırma Tasarımları; Parametrik Olmayan İstatistiksel Yöntemler; Resmî İstatistikler; Toplum Bilimlerinde İstatistik; Veri Analizi ve Modelleme; Veri Madenciliği; Veri Yönetimi ve Karar Destek Sistemleri; Verimlilikte İstatistiksel Yaklaşımlar; Yönelimsel Süreçlerde Performans Analizi; Yöneylem Araştırması; Zaman Serileri; Diğer İstatistiksel Yöntemler gibi istatistiğin her dalında yeni bilgi üretimine yönelik tüm araştırmalar.

Makale Dili ve Genel Kurallar

- Bu yayının 5846 Sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu'na göre her hakkı Başbakanlık Türkiye İstatistik Kurumu Başkanlığına aittir. Gerçek veya tüzel kişiler tarafından izinsiz çoğaltılamaz ve dağıtılamaz.
- Makale taslakları WORD yazım dilinde, Times New Roman yazı tipinde, 12 punto büyüklükte, satırlar arasında bir satır boşluk bırakılarak yazılmalı, şekil ve grafikler JPG dosyaları olarak hazırlanmalıdır.
- Sayfa boyutunda; soldan 3,5 cm, sağdan, yukarıdan ve aşağıdan 2,5 cm boşluk bırakılmalıdır.
- **Ana bölüm başlıklarının** tümü büyük harf, 12 punto büyüklükte, koyu, ortalı ve Arap rakamları ile numaralandırılarak; **alt bölüm başlıklarında** ise sadece kelimelerin baş harfleri büyük diğerleri küçük harfle, 12 punto büyüklükte, koyu, sola dayalı ve ana bölüm başlığına endeksli olarak Arap rakamları ile numaralandırılarak yazılmalıdır.
- Makale taslağı yazımında, okuyucunun, çalışmanın her aşamasını anlama ve değerlendirmesine olanak verecek bir anlatım ve plâna uyulmalıdır.
- Anlatım olabildiğince sade, anlaşılabilir, öz ve kısa olmalıdır. Gereksiz tekrarlardan, desteklenmemiş ifadelerden ve konu ile doğrudan ilişkisi olmayan açıklamalardan kaçınılmalıdır.
- Yazımda çok genel ifadeler kullanılmamalıdır. Yargı veya kesinlik içeren ifadeler mutlaka verilerek/ referanslara dayandırılmalıdır.
- Araştırmacı/araştırmacılar tarafından probleme, hangi kuramsal/kavramsal açıdan yaklaşıldığı, gerekçeleri ile birlikte belirtilmelidir
- Kullanılan araştırma yönteminin seçilme gerekçesi açıklanmalıdır. Bütün veri toplama araçlarının geçerliliği ve güvenilirliği belirtilmelidir.
- Araştırma sonucunda elde edilen veriler bir bütünlük içinde sunulmalıdır
- Sadece elde edilen verilere dayanan sonuçlar sunulmalıdır
- Sonuçların yorumları, varsa, literatürdeki diğer kaynaklarla desteklenerek, değerlendirilmelidir.
- Yararlanılan kaynaklar, çalışmanın kapsamını yansıtacak zenginlik ve yeterlikte olmalıdır.
- Türkçe ve İngilizce özetler; çalışmanın amacı, yöntemi, kapsamı ve temel bulgularını içermelidir.

Ayrıntılı bilgi için, www.tuik.gov.tr adresinden "İstatistik Araştırma Dergisi Kılavuzu"na bakınız.

Aim and Scope

“*Journal of Statistical Research*” (JSR) is a refereed journal with a view to raise the quality of statistical researches, improve the statistical methodology and applications, discuss the related studies in literature, consider survey studies regarding statistical application and strengthen the communication between researchers in the field of theory and application by joint studies and publications.

The contents of the “*Journal of Statistical Research*” are summarized below:

- Researches aimed at producing new knowledge in every field of statistics such as Banking, Finance, Insurance Trade, Actuarial and Risk Management; Bayesian Statistics; Biostatistics; Clinic Tests; Data Analysis and Modeling; Data Management and Decision Support Systems; Data Mining; Demography; Econometrics; Experimental Design and Variance Analysis; Fuzzy Theory; General Census and Evaluation; Information Systems; Non-Parametric Statistical Methods; Official Statistics; Operational Research; Optimization; Sampling and Research Designs; Performance Analysis in Managerial Process; Probability and Stochastic Processes; Public Opinion and Market Researches; Statistical Applications in Engineering; Statistical Approaches in Efficiency; Statistical Ethics; Statistical Quality Control; Statistical Training; Statistics in Social Science; Statistics Theory; Simulation Techniques; Time Series; Other Statistical Methods.

Article Language and General Rules

- Prime Ministry, Turkish Statistical Institute reserves all the rights of this publication. Unauthorized duplication and distribution of this publication is prohibited under Law No: 5846.
- Article drafts should be prepared in WORD, using Times New Roman font, in 12 point size, with a blank line in between lines. Figures and tables should be prepared as JPG files.
- On an A4 paper size; from left 3,5 cm, from right, top and bottom 2,5 cm margins should be set.
- **Titles of the main sections** should be all capitalized, in 12 point size, bold, centered and numbered with Arabic numerals; only the first letter of the words in the **titles of the subsections** should be capitalized, with 12 point size, bold, left centered and numbered with Arabic numerals indexed to the titles of the main sections.
- In article draft writing, writer should follow such a plan that reader should be able to understand and evaluate all the steps of the study.
- Narration should be as plain as possible, as well as comprehensible, compact and short. Unnecessary repetitions, unsupported declarations and explanations that are not in direct relation to the topic should be avoided.
- General statements should be avoided in writing. Statements that include judgment or facts must be supported by data/references.
- It should be stated, with justifications, from which theoretical/conceptual angle the researcher/researchers have approached the problem.
- The reason of why the employed research methodology is chosen should be explained. The validity and reliability of all the data collection tools should be presented.
- Data obtained in conclusion of the research should be presented in unity.
- Results that only rely on the obtained data should be presented.
- The interpretation of the results should be supported and evaluated by the other resources, if any, in the literature.
- Used resources should be in good wealth and proficiency that will reflect the scope of the study.
- The Turkish and English abstracts should include; the goal, methodology, scope and main findings of the study.

Note: For detailed information, please see “A Guide for Journal of Statistical Research” at www.turkstat.gov.tr web site.

**DERGİ'NİN BU SAYISINA BİLİMSEL KATKI SAĞLAYAN HAKEMLER-
REFEREE WHO PROVIDE SCIENTIFIC CONTRIBUTIONS FOR THIS VOLUME**

1	Doç. Dr.	Ali Hakan BÜYÜKLÜ	Yıldız Teknik Üniversitesi
2	Prof. Dr.	Ali Taylan ULA	Yeditepe Üniversitesi
3	Prof. Dr.	Aydın ERAR	Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi
4	Prof. Dr.	Ayşen AKKAYA	Orta Doğu Teknik Üniversitesi
5	Prof. Dr.	Ayşen APAYDIN	Ankara Üniversitesi
6	Doç. Dr.	Birdal ŞENOĞLU	Ankara Üniversitesi
7	Doç. Dr.	Can Cengiz ÇELİKOĞLU	Dokuz Eylül Üniversitesi
8	Doç. Dr.	Cem KADILAR	Hacettepe Üniversitesi
9	Uzman	Cengiz ERDOĞAN	Türkiye İstatistik Kurumu
10	Dr.	Cevriye AYSOY	TC Merkez Bankası
11	Dr.	Ceylan YOZGATLIGİL	Orta Doğu Teknik Üniversitesi
12	Yrd. Doç. Dr.	Dicle CENGİZ	İstanbul Ticaret Üniversitesi
13	Prof. Dr.	Fatin SEZGİN	Bilkent Üniversitesi
14	Prof. Dr.	Fetih YILDIRIM	Çankaya Üniversitesi
15	Prof. Dr.	Haldun SÜRAL	Orta Doğu Teknik Üniversitesi
16	Prof. Dr.	Hamza GAMGAM	Gazi Üniversitesi
17	Prof. Dr.	İsmail SAĞLAM	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
18	Prof. Dr.	Kazım ÖZDAMAR	Osmangazi Üniversitesi
19	Doç. Dr.	Kıvılcım METİN ÖZCAN	Bilkent Üniversitesi
20	Doç. Dr.	Mehmet YAZICI	Çankaya Üniversitesi
21	Doç. Dr.	Mine ÇAĞLAR	Koç Üniversitesi
22	Prof. Dr.	Mustafa AYTAÇ	Uludağ Üniversitesi
23	Prof. Dr.	Olca ARSLAN	Çukurova Üniversitesi
24	Uzman	Sevil UYGUR	Türkiye İstatistik Kurumu
25	Yrd. Doç. Dr.	Suat KASAP	Hacettepe Üniversitesi
26	Prof. Dr.	Süleyman GÜNAY	Hacettepe Üniversitesi
27	Prof. Dr.	Ümit YÜCEER	Çankaya Üniversitesi
28	Dr.	Vilda PURUTÇUOĞU	Orta Doğu Teknik Üniversitesi
29	Prof. Dr.	Yılmaz AKDİ	Ankara Üniversitesi

TABAKALI TESADÜFİ ÖRNEKLEMEDE DOĞRUSAL OLMAYAN MALİYET KISITLARI ALTINDA ÖRNEK HACMİNİN TABAKALARA DAĞITILMASI

S. Tuğba ŞAHİN*

ÖZET

Bu çalışmada, Tabakalı Tesadüfi Örneklemeye kitleden seçilen n hacimli örneğin, sabit bir bütçe altında tabakalara optimum şekilde dağıtılması incelenmiştir. Bu dağıtım yapılırken iki farklı doğrusal olmayan maliyet fonksiyonu kullanılmıştır. Ayrıca ele alınan iki farklı doğrusal olmayan maliyet kısıtı altında hangi durumlarda örnek ortalaması istatistiğinin varyansının minimum olduğu incelenmiştir. Doğrusal olmayan maliyet kısıtları kullanıldığında örnek hacminin tabakalara dağıtılması, doğrusal maliyet kısıtı kullanıldığında duruma göre daha zor ve zaman alıcıdır. Bu çalışmada, hem amaç fonksiyonunun, hem de maliyet kısıtlarının doğrusal olmadığı durum dikkate alınarak, kitleden seçilen n hacimli örneğin tabakalara nasıl dağıtıldığı ve örnek ortalaması istatistiğinin varyansını nasıl etkilediği simülasyon çalışması ile incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Doğrusal olmayan maliyet fonksiyonu, Optimum dağıtım, Tabakalı tesadüfi örnekleme.

1. GİRİŞ

Tabakalı tesadüfi örneklemede en önemli problem kitleden seçilen n hacimli örneğin, örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapacak şekilde tabakalara dağıtılmasıdır. Bu dağıtım için bazı temel yöntemler verilmiştir. Tabaka büyüklükleri eşit olduğunda eşit dağıtım, tabaka büyüklükleri farklılık gösterdiğinde orantılı dağıtım, tabaka büyüklükleri ve tabaka varyansları birbirinden farklı ise Neyman dağıtımı, tabaka büyüklükleri ve tabaka varyanslarının farklı olmasının yanında her tabakadan birim seçme maliyeti ya da tabakadan tabakaya seyahat maliyeti farklılık gösteriyorsa en uygun dağıtım yöntemlerinin kullanılması önerilmektedir (Yamane, 1967). İyi bir dağıtım ile, minimum maliyete karşın maksimum duyarlılığın elde edilmesi kastedilmektedir.

Bazı durumlarda sabit bir bütçe ile alan çalışması yapmak gerekebilir. En uygun dağıtım yöntemi, n birimlik örneği belli bir maliyet fonksiyonu altında, varyansı minimum yapacak şekilde tabakalara dağıtım temeline dayanmaktadır. Örnek hacminin tabakalara dağıtımı için genellikle doğrusal maliyet kısıtı kullanılmaktadır. Doğrusal maliyet kısıtının kullanılmasının temelinde, tabakadan seçilecek bir birimin maliyet fonksiyonu üzerine etkisinin bir birim artış olarak dikkate alınması yatmaktadır. Bununla birlikte, her zaman her tabakadan bir birim seçmenin ya da her tabakaya seyahat etmenin, maliyet fonksiyonu üzerine etkisi bir birim artış olarak yansımayaabilir. Göz önüne alınması gereken ek maliyetlerle tabakalardan bir birim

* S. Tuğba Şahin, Gazi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, Teknikokullar, Ankara, e-posta: sinemsahin@gazi.edu.tr

seçmenin maliyet fonksiyonu üzerine etkisi, bir birim artıştan fazla ya da bir birim seçmenin maliyet fonksiyonu üzerine etkisi, bir birim artıştan az olabilir. Bu gibi durumlarda, kitleden seçilen n hacimli örneği doğrusal maliyet kısıtı altında tabakalara dağıtmak uygun olmayacaktır. Tabakalardan seçilecek örnek hacimlerinin belirlenmesi, eşitlik kısıtlı bir optimizasyon problemidir ve çözüm için genellikle Lagrange çarpanları yöntemi kullanılır. Maliyet fonksiyonu doğrusal olduğunda, örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapacak n_h değerlerinin belirlenmesi oldukça kolaydır. Bununla birlikte, maliyet fonksiyonları doğrusal olmadığına n_h değerlerinin belirlenmesi oldukça karmaşıktır. Bu çalışmada, doğrusal olmayan maliyet kısıtı altında, örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapacak n_h değerlerinin belirlenmesi ile ilgilenilecektir. Literatürde önerilen ve bu çalışmada kullanılacak doğrusal olmayan maliyet fonksiyonları aşağıdaki yapıdadır:

c : Araştırma için ayrılan toplam bütçe

c_0 : Sabit bütçe

t_h : h . tabakaya seyahat maliyeti

c_h : h . tabakadan bir birim seçme maliyeti

n_h : h . tabakadan seçilecek örnek hacmi

α : Tabakalara seyahat etmenin ya da tabakalardan bir birim seçmenin maliyet fonksiyonu üzerine etkisi

olmak üzere;

$$1. \quad c = c_0 + \sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha, \quad \alpha > 0$$

biçimindedir (Cochran, 1977, Bretthauer vd., 1999). Tabakalardan bir birim seçme maliyeti çok farklı değil fakat tabakadan tabakaya seyahat maliyeti önemli derecede farklılık gösteriyorken, bu maliyet fonksiyonunun kullanılması uygun olur.

$$2. \quad c = c_0 + \sum_{h=1}^L c_h n_h^\alpha, \quad \alpha > 0$$

biçimindedir (Chernyak, 2001). Tabakadan tabakaya seyahat maliyeti önemli derecede farklı değil fakat tabakalardan bir birim seçme maliyeti farklılık gösteriyorken, bu maliyet fonksiyonunun kullanılması uygun olur.

$$3. \quad c = c_0 + \sum_{h=1}^L t_h \ln(n_h)$$

biçimindedir (Chernyak, 2001). Tabakalardan bir birim seçme maliyeti çok farklı değil fakat tabakadan tabakaya seyahat maliyeti çok farklılık gösteriyorken, bu maliyet fonksiyonunun kullanılması uygun olur.

$$4. \quad c = c_0 + \sum_{h=1}^L c_h \ln(n_h)$$

biçimindedir (Chernyak, 2001). Tabakadan tabakaya seyahat maliyeti önemli derecede farklı değil fakat tabakalardan bir birim seçme maliyeti çok farklılık gösteriyorken, bu maliyet fonksiyonunun kullanılması uygun olur.

Literatürde uzun yıllardır tabakalı tesadüfi örneklemede, örnek hacminin tabakalara dağıtımını problemiyle ilgili çalışmalar yapılmaktadır. Bununla birlikte, yapılan çalışmaların çoğu doğrusal maliyet kısıtı altında örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapacak örnek hacimlerinin bulunması üzerinedir (Bretthauer ve Shetty, 1995; Valliant ve Gentle, 1997; Bretthauer vd., 1999; Clark ve Steel, 2000; Chernyak, 2001; Bosch ve Wildner, 2003; Khan vd., 2003; Khan ve Ahsan, 2003; Semiz, 2004; Diaz-Garcia ve Garay-Tapia, 2005; Diaz-Garcia, 2006; Judez vd., 2006).

2. YÖNTEM

Bu bölümde, çalışmada kullanılan optimizasyon teknikleri tanıtılmış ve doğrusal olmayan maliyet kısıtları altında örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapacak örnek hacimleri simülasyon deneyi yardımı ile elde edilmiştir.

2.1 Optimizasyon Teknikleri

Amaç fonksiyonu ya da kısıtlardan herhangi birisi doğrusal değil ise bu problem doğrusal olmayan programlama problemidir. Ele alınan çalışmada, hem örnek ortalaması istatistiğinin varyansı, hem de maliyet fonksiyonları doğrusal değildir. Doğrusal olmayan problemlerin çözümünde kullanılan pek çok optimizasyon yöntemi bulunmaktadır (Hamdy, 1982; Rao, 1991; Bal, 1995). Örnek hacminin tabakalara dağıtımında Lagrange çarpanları yöntemi kullanıldığında bazı olumsuzluklarla karşılaşıldığından, bu çalışmanın simülasyon deneyinde Kuhn-Tucker yöntemi kullanılmıştır.

Lagrange çarpanları yöntemi, ister amaç ister kısıt fonksiyonu doğrusal olsun ya da olmasın eşitlik kısıtlı optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılan en yaygın yöntemdir (Bal, 1995). Kuhn-Tucker yöntemi ise, eşitsizlik kısıtlı optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılmaktadır. Kuhn-Tucker yöntemi eşitsizlik kısıtlarını, eşitlik kısıtı haline getirerek, genel Lagrange fonksiyonu oluşturma temeline dayanır (Bal, 1995).

Kısıt olarak doğrusal olmayan maliyet fonksiyonları kullanıldığında, örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapacak örnek hacminin Lagrange çarpanları yöntemiyle elde edilmesi aşağıdaki teoremlerde verilmiştir. Bununla birlikte, Lagrange çarpanları yöntemi eşitlik kısıtlı bir optimizasyon yöntemi olduğundan $n_h \leq N_h$ kısıtını göz önüne alamadığı için elde edilen çözümlerde $n_h > N_h$ ya da $n > N$ gibi sonuçlarla karşılaşmak mümkündür. Kuhn-Tucker yönteminde $n_h \leq N_h$ ($h=1, 2, \dots, L$) eşitsizlik kısıtında göz önüne alındığından bu olumsuzluk ortadan kalkmış olur. Bu sebeple, bu çalışmanın simülasyon kısmında Kuhn-Tucker yöntemi kullanılmıştır.

Teorem 1: $c = c_0 + \sum_{h=1}^L c_h n_h^\alpha$, $\alpha > 0$ olmak üzere, tabakalı tesadüfi örneklemede

belirlenmiş bir maliyet için bir başka ifadeyle kısıt olarak maliyet fonksiyonu alındığında, örnek ortalaması istatistiğinin varyansı minimumdur ve her tabakadan seçilmesi gereken örnek hacmi (1) eşitliğinden elde edilir.

$C = c' = c - c_0$: Araştırma için ayrılan bütçeden, sabit giderler çıkarıldıktan sonra geriye kalan bütçe

W_h : h . tabakanın ağırlığı

S_h^2 : h . tabakanın varyansı olmak üzere;

$$n = \frac{C^{1/\alpha} \sum_{h=1}^L (W_h^2 S_h^2 / c_h)^{1/(1+\alpha)}}{\left[\sum_{h=1}^L (W_h^2 S_h^2 / c_h)^{\alpha/(1+\alpha)} \right]^{1/\alpha}} \quad (1)$$

Elde edilen n örnek hacmi, örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapacak şekilde tabakalara;

$$n_h = \frac{(W_h^2 S_h^2 / c_h)^{1/(1+\alpha)}}{\sum_{h=1}^L (W_h^2 S_h^2 / c_h)^{1/(1+\alpha)}} \times n \quad (2)$$

olarak dağıtılır (Chernyak, 2001).

Teorem 2: $c = c_0 + \sum_{h=1}^L c_h \ln(n_h)$ olmak üzere, tabakalı tesadüfi örneklemede belirlenmiş bir maliyet ($C = c - c_0$) için bir başka ifadeyle kısıt olarak maliyet fonksiyonu alındığında, örnek ortalaması istatistiğinin varyansı minimumdur ve her tabakadan seçilmesi gereken örnek hacmi (3) eşitliğinden elde edilir.

$$n = \exp \left\{ \frac{C - \sum_{h=1}^L c_h \ln(W_h^2 S_h^2 / c_h)}{\sum_{h=1}^L c_h} \right\} \times \sum_{h=1}^L W_h^2 S_h^2 / c_h \quad (3)$$

Elde edilen n örnek hacmi, örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapacak şekilde tabakalara;

$$n_h = \frac{W_h^2 S_h^2 / c_h}{\sum_{h=1}^L W_h^2 S_h^2 / c_h} \times n \quad (4)$$

olarak dağıtılır (Chernyak, 2001).

2.2 Simülasyon Deneyi

Simülasyon çalışması MATLAB programı kullanılarak yapılmıştır.

2.2.1 $c' = \sum_{h=1}^L t_h \ln(n_h)$ ve $c' = \sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha$ Kısıtları Altında $V(\bar{x})$ 'lerin Karşılaştırılması

Bu bölümde, $c' = \sum_{h=1}^L t_h \ln(n_h)$ ve $c' = \sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha$ kısıtları göz önüne alınarak oluşturulan modellerde hangi maliyet kısıtının, örnek ortalaması istatistiğinin varyansını nasıl etkilediği, araştırma için ayrılan bütçenin ne kadarının kullanıldığı ve problemlerin çözülme süreleri incelenmiştir. Bu araştırma için 1000 tekrarlı Monte Carlo simülasyonu kullanılmıştır. Simülasyon çalışmasında kitle hacmi (N), kitleden seçilecek örnek hacmi (n), bütçe ($c' = c - c_0$), tabakadan tabakaya seyahat maliyeti (t_h) ve α başlangıçta verilmiştir. Her zaman her tabakadan bir birim seçmenin ya da her tabakaya seyahat etmenin, maliyet fonksiyonu üzerine etkisi bir birim artış olarak yansımamaktadır. α değeri, tabakalara seyahat ya da tabakalardan bir birim seçmenin maliyet fonksiyonu üzerine etkisini yansıtmaktadır. Bu bölümde, $\alpha > 0$ olmak üzere; α 'ya bağlı maliyet kısıtına ilişkisinde simülasyon deneyi yapılarak, α 'nın hangi değerleri için yapılan örnek hacmi dağıtımının örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yaptığı da incelenmiştir. Belirlenen doğrusal olmayan maliyet kısıtları altında, örnek ortalaması istatistiğinin varyansının minimum yapılması için kullanılan modeller aşağıdaki gibidir.

Model 1:

$$\begin{aligned} & \text{Min } V(\bar{x})_1 \\ & \sum_{h=1}^L n_h = n \\ & \sum_{h=1}^L t_h \ln(n_h) \leq c' \\ & r_h \leq n_h \leq k_h \quad h = 1, \dots, L \end{aligned}$$

Model 2:

$$\begin{aligned} & \text{Min } V(\bar{x})_2 \\ & \sum_{h=1}^L n_h = n \\ & \sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha \leq c' \\ & r_h \leq n_h \leq k_h \quad h = 1, \dots, L \end{aligned}$$

Bu çalışmada, modelde tabaka varyanslarının ve tabakalara dağıtılacak örnek hacminin önceden bilindiği varsayılmaktadır. Bununla birlikte kitle hacmi büyük olduğunda tabaka varyanslarının ve kitleden seçilecek örnek hacminin belirlenmesi zordur. Bunun için kitleden seçilen bir pilot örnek yardımı ile tabaka varyansları tahmin edilip, kitleden seçilecek örnek hacmi belirlenebilir (Hansen vd., 1953; Yamane, 1967; Bretthauer vd., 1999). Model kısıtlarında bulunan $r_h \leq n_h \leq k_h$ kısıtında alt sınır $r_h = 2$ alınmıştır.

Bunun nedeni $s_h^2 = \frac{1}{n_h - 1} \sum_{i=1}^{n_h} (x_{hi} - \bar{x}_h)^2$ olması ve $n_h = 1$ durumunda s_h^2 'nin belirsiz

olmasıdır. Üst sınır için ise h . tabakadaki örnek hacminin alabileceği en büyük değer $k_h = N_h$ verilmiştir. Bundan sonraki işlemler aşağıdaki adımlara göre yapılmıştır.

Adım 1: Tabaka büyüklüklerinin belirlenmesi için Normal dağılımdan, N birimlik sayı üretilip, kullanılan Normal dağılımın ortalaması ve kaç tabaka olduğu dikkate alınarak belirlenen tabaka sınırları çerçevesinde tabaka büyüklükleri ve tabakalardaki birimler elde edilmiştir.

Adım 2: Belirlenen tabakadaki birimler yardımı ile tabaka varyansları hesaplanmıştır.

Adım 3: İki farklı maliyet kısıtı altında oluşturulan Model 1 ve Model 2'nin çözümleri yapılmış, varyans değerleri ve CPU time değerleri elde edilmiştir. Burada modellerin çözümü için gerekli olan başlangıç noktası, örnek hacmi için belirlenen alt ve üst sınır arasında ortalama bir değer olarak seçilmiştir.

Adım 4: Adım 1-2-3 1000 defa tekrar edilmiştir.

Adım 5: Sonuçların genellenebilmesi için 1000 tekrardaki varyans ve CPU time değerlerinin ortalaması alınarak, tabakalardan seçilecek optimum örnek hacimleri, varyans ve CPU time değerleri elde edilmiştir.

Simülasyon çalışması maliyetlerin farklı değerleri altında yapılmıştır. Simülasyon çalışması iki, üç, dört ve beş tabaka için yapılmış, sonuçlar dört tabaka için genellenebildiğinden daha fazla tabaka dikkate alınmamıştır. Sonuçlar Tablo 1- Tablo 10 arasında özetlenmiştir. Tablolarda yer alan n_{ih} gösterimi, i . modelden elde edilen h . tabakadaki örnek hacmini ve i . Kul. Bütçe ise i . modelden elde edilen optimum çözümler yerine yazıldığında araştırma için ayrılan toplam bütçenin ne kadarının kullanıldığını ifade etmektedir. Tablolarda koyu olarak gösterilen yerler ise, mümkün çözümün sağlanmadığı durumları ifade etmektedir.

Tablo 1. İki tabaka olması durumu $N = 500$, $n = 100$, $c' = 500$, $t_1 = 1$ ve $t_2 = 1$

α	n_{11}	n_{12}	n_{21}	n_{22}	$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
0,2	50,3630	49,6370	50,3630	49,6370	1,1739	1,1739	94,2500	94,4844	7,8240	4,3734
0,4	50,2000	49,8000	50,2000	49,8000	1,1603	1,1603	92,0156	95,0313	7,8240	9,5635
0,5	50,0630	49,9370	50,0630	49,9370	1,1469	1,1469	91,8594	94,2969	7,8240	14,1421
0,6	50,0650	49,9350	50,0650	49,9350	1,1561	1,1561	91,8750	93,7813	7,8240	20,9128
0,8	50,3190	49,6810	50,3190	49,6810	1,1640	1,1640	92,3125	94,6406	7,8240	45,7304
1	50,4640	49,5360	50,4640	49,5360	1,1648	1,1648	92,6094	95,2188	7,8240	100
1,2	50,0300	49,9700	50,0300	49,9700	1,1599	1,1599	96,3438	97,2813	7,8240	218,6724
1,5	50,0400	49,9600	39,6710	39,6360	1,1520	1,5275	92,1563	95,8438	7,8240	499,4043
1,8	49,6090	50,3910	21,3610	21,5810	1,1777	3,1344	98,5781	98,6094	7,8240	499,3123
2	50,2090	49,7910	15,8450	15,7740	1,1677	4,3291	92,3281	103,2013	7,8240	499,8831

Tablo 2. İki tabaka olması durumu $N = 500$, $n = 100$, $c' = 1000$, $t_1 = 1$ ve $t_2 = 50$

α	n_{11}	n_{12}	n_{21}	n_{22}	$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
0,2	49,9370	50,0630	49,9370	50,0630	1,1720	1,1720	92,3438	92,7969	199,5740	111,5499
0,4	50,1970	49,8030	50,1970	49,8030	1,1616	1,1616	90,8594	92,0781	199,3197	243,5002
0,5	49,9160	50,0840	49,9160	50,0840	1,1580	1,1580	89,0469	90,5938	199,5954	360,9154
0,6	50,5650	49,4350	50,5650	49,4350	1,1605	1,1605	91,0156	93,1094	198,9562	529,7941
0,8	50	50	59,0010	40,9990	1,1654	1,2199	92,9063	96	199,5132	1001,5
1	49,4820	50,5180	82	18	1,1812	2,2021	92,4688	99,0156	200,0118	982
1,2	49,6180	50,3820	62,6420	10,8570	1,1777	3,7888	92,5000	96,4688	199,8861	1017,9
1,5	50,0280	49,9720	31,1210	6,4740	1,1758	6,5564	90,7031	110,8281	199,4857	997,2363
1,8	49,8440	50,1560	18,8400	4,9810	1,1627	9,4628	92,5156	108,4844	199,6658	1097,1
2	50,1550	49,8450	14,6730	4,0000	1,1565	11,2856	91,2031	113,1250	199,3610	1015,3

Tablo 3. İki tabaka olması durumu $N = 500$, $n = 100$, $c' = 1000$, $t_1 = 50$ ve $t_2 = 1$

α	n_{11}	n_{12}	n_{21}	n_{22}	$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
0,2	50,3630	49,9370	50,3630	49,9370	1,1739	1,1739	96,4688	96,8281	199,8676	111,6780
0,4	50,2000	49,8000	50,2000	49,8000	1,1603	1,1603	92,5469	96,2500	199,7088	244,2443
0,5	50,0630	49,9370	50,0630	49,9370	1,1469	1,1469	92,2831	95,0781	199,5749	360,8427
0,6	50,0650	49,9350	50,0650	49,9350	1,1561	1,1561	92,6250	95,3750	199,5768	533,6757
0,8	50,3190	49,6810	41	59	1,1640	1,2210	90,5000	108,4063	199,8248	1001,5
1	50,4640	49,5360	18	82	1,1648	2,1679	93,8281	112,9219	199,9657	982
1,2	50,0300	49,9700	10,8310	63,2780	1,1599	3,6934	98,5625	103,2344	199,5426	1017,2
1,5	50,0400	49,9600	6,4880	31,0560	1,1520	6,4384	97,2969	101,7813	199,5524	999,3658
1,8	49,6090	50,3910	4,9810	19,0560	1,1777	9,4695	99,9063	104,0469	199,1284	1101,2
2	50,2090	49,7910	4,0000	14,5670	1,1677	11,4727	94,4844	113,7031	199,7175	1012,2

Tablo 4. İki tabaka olması durumu $N = 500$, $n = 100$, $c' = 1500$, $t_1 = 25$ ve $t_2 = 35$

α	n_{11}	n_{12}	n_{21}	n_{22}	$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
0,2	50,3630	49,6370	50,3630	49,6370	1,1739	1,1739	95,7188	96,4375	234,6472	131,1711
0,4	50,2000	49,8000	50,2000	49,8000	1,1603	1,1603	92,5938	95,2188	234,6809	286,8287
0,5	50,0630	49,9370	50,0630	49,9370	1,1469	1,1469	92,8594	94,7031	234,7087	424,2194
0,6	50,0650	49,9350	50,0650	49,9350	1,1561	1,1561	92,6094	94,8281	234,7083	627,3020
0,8	50,3190	49,6810	50,3190	49,6810	1,1640	1,1640	92,2500	96,9219	234,6564	1370,7
1	50,4640	49,5360	27,7030	23,0460	1,1648	2,5970	97,1563	106,0313	234,6260	1499,2
1,2	50,0300	49,9700	15,9240	13,6540	1,1599	4,6389	93,0625	100,5781	234,7154	1498,6
1,5	50,0400	49,9600	9,2250	8,0330	1,1520	8,0915	91,9844	103,8438	234,7134	1497,3
1,8	49,6090	50,3910	6,3150	5,8250	1,1777	11,9776	92,6406	106,0156	234,7977	1524,5
2	50,2090	49,7910	5,1940	4,9190	1,1677	14,2485	92,7656	106,9063	234,6791	1521,3

Tablo 5. Üç tabaka olması durumu $N = 10000$, $n = 500$, $c' = 550$, $t_1 = 1$, $t_2 = 1$ ve $t_3 = 1$

α	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{21}	n_{22}	n_{23}	$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
0,2	186,5460	127,0060	186,4490	186,5460	127,0060	186,4490	13,8894	13,8894	107,6094	115,4375	15,3011	8,3256
0,4	186,6440	126,7940	186,5600	186,6440	126,7940	186,5600	13,9021	13,9021	106,3594	114,0469	15,3015	23,1337
0,5	186,2860	126,9890	186,7600	186,2860	126,9890	186,7600	13,8790	13,8790	105,9063	113,3281	15,3012	38,5836
0,6	186,1960	126,8870	186,9200	186,1960	126,8870	186,9200	13,8953	13,8953	104,9844	115,3281	15,3008	64,3637
0,8	186,3820	127,0230	186,6150	186,3820	127,0230	186,6150	13,8931	13,8931	105,8750	114,6094	15,3012	179,2967
1	186,7010	126,9830	186,3440	186,7010	126,9830	186,3440	13,8871	13,8871	106,3906	113,0469	15,3012	500
1,2	186,5460	127,0060	186,4490	85,1090	60,0120	85,0800	13,8894	31,0984	103,0156	110,6875	15,3011	550,0242
1,5	186,6440	126,7940	186,5600	35,2420	25,8930	35,2280	13,9021	75,5283	101,9375	108,7188	15,3005	550,0604
1,8	186,6570	126,9600	186,3600	19,5890	14,9600	19,5370	13,9029	135,7264	101,0156	108,5000	15,3008	552,5732
2	186,6550	126,7820	186,5790	14,6180	11,0410	14,6220	13,8988	181,7803	101,6563	111,7969	15,3006	549,3925

Tablo 6. Üç tabaka olması durumu $N = 10000$, $n = 500$, $c' = 5000$, $t_1 = 15$, $t_2 = 75$ ve $t_3 = 50$

α	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{21}	n_{22}	n_{23}	$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
0,2	186,5450	127,0060	186,4490	186,5450	127,0060	186,4490	13,8894	13,8894	102,0781	110,3438	703,1556	382,5599
0,4	186,6440	126,7940	186,5600	186,6440	126,7940	186,5600	13,9021	13,9021	100,5313	108,2500	703,0680	1046,7
0,5	186,6980	127,0310	186,2950	186,6980	127,0310	186,2950	13,8839	13,8839	102,4512	106,1094	703,1412	1732,7
0,6	187,0180	126,8370	186,1330	187,0180	126,8370	186,1330	13,9213	13,9213	91,0221	99,0313	703,0088	2867,5
0,8	186,1960	126,8870	186,9200	206,0660	55,0040	105,9530	13,8953	22,4292	103,5469	133,8125	703,1833	5000,5
1	186,3820	127,0230	186,6150	76,6070	23,3190	42,0140	13,8931	57,1487	99,7969	117,0156	703,1970	4998,7
1,2	186,7010	126,9830	186,3440	39,1470	13,1250	22,6180	13,8871	106,0763	106,9063	112,8750	703,1263	4980,2
1,5	186,3340	126,8900	186,7890	19,7020	7,8140	12,0280	13,8912	197,4272	104,2031	105,6094	703,1611	5035,7
1,8	186,7360	126,8540	186,3740	12,1950	5,0000	8,0000	13,9086	299,2560	104,6406	113,8438	703,0610	4822,9
2	186,3810	126,8910	186,7240	9,9520	4,0330	6,6120	13,8840	368,1473	100,0313	120,8125	703,1481	4891,4

Tablo 7. Dört tabaka olması durumu $N = 10000$, $n = 2000$, $c' = 1000$, $t_1 = 1$, $t_2 = 1$, $t_3 = 1$ ve $t_4 = 1$

α	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{14}	n_{21}	n_{22}	n_{23}	n_{24}	$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
0,2	734,6620	265,9080	266,4560	732,9460	734,6620	265,9080	266,4560	732,9460	1,8033	1,8033	104,1563	111,7969	24,3648	13,5946
0,4	733,8060	266,0760	266,5110	733,5850	733,8060	266,0760	266,5110	733,5850	1,8031	1,8031	104,5156	115,1250	24,3654	46,6763
0,5	731,4390	266,3930	267,3550	734,8250	731,4390	266,3930	267,3550	734,8250	1,8010	1,8010	101,1094	111,1543	24,3681	86,8253
0,6	733,2090	266,3770	266,3230	734,0870	733,2090	266,3770	266,3230	734,0870	1,8048	1,8048	104,2344	114,6250	24,3657	161,8467
0,8	732,2990	266,2620	267,1280	734,3090	732,2990	266,2620	267,1280	734,3090	1,8020	1,8020	101,3128	112,3048	24,3673	566,4926
1	733,6430	266,0110	267,0500	733,3050	325,2410	174,7210	174,9070	325,1120	1,7996	3,9576	95,5000	115,5781	24,3666	999,9810
1,2	729,6830	267,1610	266,8520	736,2820	125,6260	71,7640	71,7200	126,2900	1,8019	10,8237	100,8906	138,1406	24,3688	999,9309
1,5	730,9580	266,3950	266,2990	736,3470	48,5340	29,5870	29,5890	48,7080	1,8004	28,2064	102,8750	112,5625	24,3657	999,9442
1,8	733,4450	266,9660	266,1480	733,4540	25,6970	16,5090	16,4830	25,7080	1,8010	52,9544	102,1406	110,8594	24,3667	1000,9
2	731,4930	267,0650	266,7760	734,6510	18,6860	12,2100	12,2030	18,7240	1,7995	72,3973	103,5156	104,2188	24,3684	997,7521

Tablo 8. Dört tabaka olması durumu $N = 10000$, $n = 2000$, $c' = 10000$, $t_1 = 75$, $t_2 = 80$, $t_3 = 65$ ve $t_4 = 90$

α	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{14}	n_{21}	n_{22}	n_{23}	n_{24}	$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
0,2	736,3190	266,6310	266,8390	730,1810	736,3190	266,6310	266,8390	730,1810	1,8008	1,8008	118,0469	129,6563	1898,5	1060,5
0,4	732,5030	266,2610	266,9820	734,2270	732,5030	266,2610	266,9820	734,2270	1,8049	1,8049	118,6563	130,1406	1898,6	3664,4
0,5	730,9740	267,8410	266,0630	735,1490	730,9740	267,8410	266,0630	735,1490	1,7980	1,7980	117,4321	128,1680	1898,7	6837,5
0,6	733,6580	266,2380	267,1600	732,9820	447,0330	205,5350	235,8910	426,2130	1,7999	2,8969	131,4219	163,0938	1898,6	10001
0,8	735,2740	266,1030	266,3980	732,2580	104,5720	50,4880	56,7730	94,2600	1,8016	14,1587	142,2969	187,9375	1898,4	10001
1	736,9780	266,3710	266,1370	730,4870	42,4210	22,0570	24,4110	38,5350	1,8045	34,8088	130,9219	138,8750	1898,4	10001
1,2	734,3160	266,6700	266,3120	732,6820	23,0830	12,8290	13,9980	21,2110	1,8040	62,9522	133	148,2344	1898,5	10012
1,5	734,5230	266,1310	265,6360	733,7180	12,5300	7,2690	8,0020	11,7520	1,8044	113,6566	136,4844	140,5313	1898,3	9991,5
1,8	735,0850	265,4700	266,2340	733,1950	8,0690	5,0000	5,8720	7,9940	1,8048	168,5614	101,1250	115,3281	1898,3	10034
2	734,7510	266,9310	267,1540	731,1570	6,9920	4,0290	4,9940	6,0510	1,7984	204,4272	128,9531	146	1898,6	9881,6

Tablo 9. Beş tabaka olması durumu $N = 12000$, $n = 3000$, $c' = 10000$, $t_1 = 1$, $t_2 = 1$, $t_3 = 1$, $t_4 = 1$ ve $t_5 = 1$

α	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{14}	n_{15}	n_{21}	n_{22}	n_{23}	n_{24}	n_{25}	$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
0,2	801,1160	237,8970	457,9500	700,4690	802,5070	801,1160	237,8970	457,9500	700,4690	802,5070	1,6389	1,6389	128,4063	138,1875	31,5241	17,7182
0,4	801,5010	237,8610	459,4280	700,8340	800,3640	801,5010	237,8610	459,4280	700,8340	800,3640	1,6377	1,6377	126,8906	138,5469	31,5255	63,2877
0,5	801,1000	238,0790	458,1730	702,6940	799,9360	801,1000	238,0790	458,1730	702,6940	799,9360	1,6352	1,6352	126,5156	137,1719	31,5253	119,9300
0,6	804,3730	237,6020	458,8380	701,0330	798,1500	804,3730	237,6020	458,8380	701,0330	798,1500	1,6368	1,6368	123,0156	134,5781	31,5242	227,6424
0,8	803,1290	237,1700	458,5760	701,6080	799,5120	803,1290	237,1700	458,5760	701,6080	799,5120	1,6373	1,6373	131,9531	145,3125	31,5228	824,0469
1	799,7370	237,9840	459,0290	702,7100	800,5340	799,7370	237,9840	459,0290	702,7100	800,5340	1,6362	1,6362	132,3281	143,0781	31,5258	3000
1,2	801,5740	237,6820	458,0160	701,4630	801,2520	712,2130	219,7880	493,4960	643,0620	712,1830	1,6367	1,8228	126,7344	191,7031	31,5238	9994,3
1,5	801,5320	238,2760	458,9450	699,9500	801,3040	191,3360	73,5740	143,1050	177,3550	191,3240	1,6358	8,2653	132,7969	183,6250	31,5261	9998
1,8	801,4120	237,7730	458,7060	699,6910	802,4330	80,1930	34,1640	61,8270	75,3460	80,2360	1,6400	20,4113	132,8750	155,2031	31,5244	9997,2
2	801,2420	237,8470	458,6550	701,6660	800,6120	51,8990	23,3900	40,7140	49,0570	51,8710	1,6372	31,6146	132,3438	135,0469	31,5249	9995,4

Tablo 10. Beş tabaka olması durumu $N = 12000$, $n = 3000$, $c' = 25000$, $t_1 = 40$, $t_2 = 50$, $t_3 = 30$, $t_4 = 45$ ve $t_5 = 60$

α	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{14}	n_{15}	n_{21}	n_{22}	n_{23}	n_{24}	n_{25}	$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
0,2	801,0610	238,0080	458,4530	702,4570	800,0170	801,0610	238,0080	458,4530	702,4570	800,0170	1,6362	1,6362	132,8594	144,5000	1420,9	799,2649
0,4	801,9430	238,4310	459,1970	702,3660	798,0370	801,9430	238,4310	459,1970	702,3660	798,0370	1,6342	1,6342	132,8438	143,4688	1420,9	2863,3
0,5	799,5520	238,0970	460,4520	701,9960	799,8810	799,5520	238,0970	460,4520	701,9960	799,8810	1,6339	1,6339	132,4515	145,1571	1420,9	5435,5
0,6	802,3910	237,9440	458,6230	700,2310	800,8220	802,3910	237,9440	458,6230	700,2310	800,8220	1,6366	1,6366	133,9219	143,5000	1420,9	10336
0,8	811,2830	237,6450	456,5170	697,8410	796,6690	511,3880	119,8740	403,2700	433,8070	410,0150	1,6425	3,0752	132,3125	196,0938	1420,7	25000,2
1	803,0120	238,0120	459,2530	700,4850	799,2040	150,9310	40,9740	121,0600	131,2320	122,9620	1,6362	11,6874	131,9219	153,2656	1420,9	25001
1,2	801,3360	237,5270	459,1040	700,7820	801,2410	66,6160	20,2960	54,4930	58,3930	55,3510	1,6362	26,8085	132,2500	172,9219	1420,9	24999
1,5	801,7120	237,8420	458,9440	700,3260	801,1970	29,2090	10,1650	24,4820	26,0150	24,8270	1,6383	60,5735	134,1875	153,5625	1420,9	24962
1,8	800,1830	237,9560	459,5050	704,4500	797,9020	16,8500	6,8250	14,2760	15,0760	14,5080	1,6323	103,4399	133,5625	148,0156	1420,9	24976
2	802,4740	237,8370	458,0980	700,8240	800,7540	12,8600	5,0500	11,0000	11,6840	11,0160	1,6362	135,8243	134,1563	141	1420,9	24945

Simülasyon çalışmasından elde edilen sonuçlardan görüldüğü gibi Tablo 1 için yapılan genellemeler, diğer Tablolar için de geçerlidir. $c' = \sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha$ kısıtının kullanıldığı Model

2'de α değeri büyüdükçe elde edilen mümkün çözümlerin sayısı azalmakta veya $\sum_{n_h = n}$ kısıtı ya da maliyet kısıtı sağlanmamaktadır. Ayrıca, araştırma için ayrılan bütçe çok fazla değilken, α 'nın büyük durumları çözüm vermemektedir. α büyük iken mümkün çözüm elde etmek için maliyet kısıtının sağ taraf sabiti, araştırma için ayrılan bütçe miktarı arttırılmalıdır. Tablolardan görüldüğü gibi mümkün çözümleri sağlayan α değerleri içinde örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapan $\alpha = 0.5$ 'tir. $c' = \sum_{h=1}^L t_h \ln(n_h)$ kısıtının kullanıldığı Model 1, çözüm olan α değerleri için

Model 2 ile aynı sonuçları vermektedir. Ayrıca, 1. maliyet kısıtı, 2. maliyet kısıtı ile mümkün olmayan çözümleri de sağlamaktadır. α 'nın küçük olduğu durumlar için 2. maliyet kısıtı bütçenin daha azını kullanmakla birlikte, α büyüdükçe 2. maliyet kısıtı neredeyse sağlanmamaktadır. 1. maliyet kısıtı ise, tabakalara seyahat maliyetinden etkilenmemekte ve bütçe kısıtını sağlayarak, araştırma için ayrılan bütçenin çok azını kullanmaktadır. Ayrıca, Model 1 kullanıldığında elde edilen çözümler, Model 2 kullanıldığı duruma göre daha kısa sürede tamamlanmaktadır. Kuhn-Tucker algoritması ile 1. maliyet kısıtı kullanıldığında, 2. maliyet kısıtına göre daha fazla mümkün çözüm elde edildiği, araştırma için ayrılan bütçenin daha azı kullanıldığı ve çözümler daha kısa sürede elde edildiği için örnek ortalaması istatistiğinin varyansı minimum yapılırken

$c' = \sum_{h=1}^L t_h \ln(n_h)$ kısıtının kullanılması daha avantajlı olacaktır. Çünkü bu kısıt, α 'ya

bağlı değildir ve tabakalara seyahat maliyetinden $c' = \sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha$ kısıtı kadar

etkilenmemektedir. Tablolardan görüldüğü gibi, Model 2'nin mümkün çözümlerini sağlayan α değerleri için, $c' = \sum_{h=1}^L t_h \ln(n_h)$ ve $c' = \sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha$ maliyet kısıtları altında

oluşturulan Model 1 ve Model 2'den elde edilen çözümler büyük çoğunlukla aynıdır. Bu durumun neden böyle olduğu aşağıdaki örnekle gösterilmiştir.

Örnek: Kitle iki tabakadan oluşsun. 1. tabakada 11, 2. tabakada 9 birim olduğu ve yapılan bir pilot çalışmayla 1. tabakanın varyansının 81659, 2. tabakanın varyansının 60942 olarak tahmin edildiği varsayalım. 1. ve 2. tabakaya seyahat maliyetlerinin 1 TL. olduğu düşünülürse, araştırma için 10 TL. ayrılmışken, 5 hacmindeki örnek

$c' = \sum_{h=1}^L t_h \ln(n_h)$ ve $c' = \sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha$ maliyet kısıtları altında tabakalara dağıtılsın. $\alpha = 1$

durumu için Kuhn-Tucker algoritması kullanılsın.

$N = 20$, $N_1 = 11$, $N_2 = 9$, $n = 5$, $c' = 10$, $t_1 = t_2 = 1$, $s_1^2 = 81659$, $s_2^2 = 60942$ ve $\alpha = 1$ olmak üzere örnek ortalaması istatistiğinin varyansı;

$$V(\bar{x}) = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^L N_h^2 \frac{N_h - n_h}{N_h} \frac{s_h^2}{n_h} = \frac{1}{N^2} \left[\sum_{h=1}^L \frac{N_h^2 s_h^2}{n_h} - \underbrace{\sum_{h=1}^L N_h s_h^2}_{\text{sabit}} \right]$$

$$V(\bar{x}) = \frac{1}{20^2} \left[\frac{11^2(81659)}{n_1} + \frac{9^2(60942)}{n_2} - \text{sabit} \right]$$

$$V(\bar{x}) = \frac{24701,8475}{n_1} + \frac{12340,755}{n_2} - \text{sabit}$$

Model 1: $c' = \sum_{h=1}^L t_h \ln(n_h)$ kısıtı altında örnek ortalaması istatistiğinin varyansının minimum yapılması (Kolaylık olması açısından problem maksimum probleme dönüştürülmüştür).

$$\max(V(\bar{x})) = \max \left[-\frac{24701,8475}{n_1} - \frac{12340,755}{n_2} + \text{sabit} \right]$$

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 = 5 & \Rightarrow n_1 + n_2 = 5 \\ 1 \times \ln(n_1) + 1 \times \ln(n_2) \leq 10 & \Rightarrow \ln(n_1) + \ln(n_2) + s_1^2 = 10 \\ n_1 \leq 11 & \Rightarrow n_1 + s_2^2 = 11 \\ n_2 \leq 9 & \Rightarrow n_2 + s_3^2 = 9 \end{aligned}$$

Lagrange fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned} L(n_1, n_2, \lambda, s) = & -\frac{24701,8475}{n_1} - \frac{12340,755}{n_2} + \text{sabit} - \lambda_1(n_1 + n_2 - 5) \\ & - \lambda_2(\ln(n_1) + \ln(n_2) + s_1^2 - 10) - \lambda_3(n_1 + s_2^2 - 11) \\ & - \lambda_4(n_2 + s_3^2 - 9) \end{aligned}$$

Lagrange fonksiyonunda λ_1 serbest, $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0$ 'dır. Lagrange fonksiyonunun, $n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, s_1, s_2$ ve s_3 'e göre türevi alınıp, sıfıra eşitlendikten sonra Kuhn-Tucker algoritmasında mümkün çözümler aranırken Lagrange çarpanları λ_i 'lerin farklı değerleri incelenir.

* $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ olsun.

$$\frac{24701,8475}{n_1^2} - \lambda_1 = 0 \Rightarrow n_1 = \frac{157,168214}{\sqrt{\lambda_1}}$$

$$\frac{12340,755}{n_2^2} - \lambda_1 = 0 \Rightarrow n_2 = \frac{111,0889508}{\sqrt{\lambda_1}}$$

$$n_1 + n_2 = 5 \Rightarrow \frac{157,168214}{\sqrt{\lambda_1}} + \frac{111,0889508}{\sqrt{\lambda_1}} = 5$$

$$\sqrt{\lambda_1} = 53,65143297 \Rightarrow \lambda_1 = 2878,47$$

$$n_1 = 2,929431803 \cong 3$$

$$n_2 = 2,070568197 \cong 2$$

Buradan, Model 1'in mümkün çözümü

(2,929431803 \cong 3; 2,070568197 \cong 2; 2878,47; 0; 0; 0) olarak elde edilir.

Model 2: $c' = \sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha$ kısıtı altında örnek ortalaması istatistiğinin varyansının minimum yapılması ($\alpha = 1$).

$$\max(V(\bar{x})) = \max \left[-\frac{24701,8475}{n_1} - \frac{12340,755}{n_2} + \text{sabit} \right]$$

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 &= 5 & \Rightarrow n_1 + n_2 &= 5 \\ 1 \times n_1^1 + 1 \times n_2^1 &\leq 10 & \Rightarrow n_1 + n_2 + s_1^2 &= 10 \\ n_1 &\leq 11 & \Rightarrow n_1 + s_2^2 &= 11 \\ n_2 &\leq 9 & \Rightarrow n_2 + s_3^2 &= 9 \end{aligned}$$

Lagrange fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned} L(n_1, n_2, \lambda, s) &= -\frac{24701,8475}{n_1} - \frac{12340,755}{n_2} + \text{sabit} - \lambda_1(n_1 + n_2 - 5) \\ &\quad - \lambda_2(n_1 + n_2 + s_1^2 - 10) - \lambda_3(n_1 + s_2^2 - 11) \\ &\quad - \lambda_4(n_2 + s_3^2 - 9) \end{aligned}$$

Model 1’de olduğu gibi, Model 2’de de Lagrange fonksiyonunda λ_1 serbest, $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0$ ’dır. Model 2 için oluşturulan Lagrange fonksiyonunun, $n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, s_1, s_2$ ve s_3 ’e göre türevi alınıp, sıfıra eşitlendikten sonra Kuhn-Tucker algoritmasında mümkün çözümler aranırken Lagrange çarpanları λ_i ’lerin farklı değerleri incelenir.

* $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ olsun.

$$\begin{aligned} \frac{24701,8475}{n_1^2} - \lambda_1 &= 0 & \Rightarrow n_1 &= \frac{157,168214}{\sqrt{\lambda_1}} \\ \frac{12340,755}{n_2^2} - \lambda_1 &= 0 & \Rightarrow n_2 &= \frac{111,0889508}{\sqrt{\lambda_1}} \\ n_1 + n_2 &= 5 & \Rightarrow \frac{157,168214}{\sqrt{\lambda_1}} + \frac{111,0889508}{\sqrt{\lambda_1}} &= 5 \\ \sqrt{\lambda_1} &= 53,65143297 & \Rightarrow \lambda_1 &= 2878,47 \\ n_1 &= 2,929431803 \cong 3 \\ n_2 &= 2,070568197 \cong 2 \end{aligned}$$

Buradan, problemin mümkün çözümü

(2,929431803 \cong 3; 2,070568197 \cong 2; 2878,47; 0; 0; 0) olarak elde edilir.

Görüldüğü gibi, her iki modelde de aynı sonuçlar elde edilmiştir. Bunun nedeni, her iki modelde de maliyet kısıtlarına karşı gelen Lagrange çarpanı λ_2 ’nin 0 olmasıdır. Maliyet kısıtlarına karşı gelen $\lambda_2 = 0$ olduğu durumlarda Kuhn-Tucker algoritması ile her iki maliyet kısıtı kullanılarak aynı mümkün çözümler elde edilir. Bununla birlikte,

mümkün çözümü sağlayan Lagrange çarpanlarında, maliyet kısıtlarına karşı gelen çarpan λ_2 , 0'dan farklı olduğunda her iki modelden elde edilecek çözümler birbirinden farklı olacaktır. Bu durum Tablo 2'nin 6. ve Tablo 3'ün 6. satırlarında $\alpha = 1$ olduğu durumda görülmektedir. Maliyet kısıtlarına karşı gelen Lagrange çarpanları farklı olduğu için, Tablo 2 ve Tablo 3'ün 6. satırlarında, Model 1 ve Model 2'den elde edilen çözümler ve örnek ortalaması istatistiğinin varyans değerleri oldukça farklı bulunmuştur. Ayrıca, λ_2 , 0'dan farklı olduğunda elde edilen çözümlerde $V(\bar{x})_1 < V(\bar{x})_2$ olduğu görülmektedir.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, tabakalı tesadüfî örneklemede doğrusal olmayan maliyet fonksiyonları altında kitleden seçilen n hacimli örneğin, optimum şekilde tabakalara dağıtılması ve örnek ortalaması istatistiğinin varyansının minimum yapılması ile ilgilenilmiştir. Bu amaçla ele alınan iki farklı doğrusal olmayan maliyet fonksiyonundan

$$c = c_0 + \sum_{h=1}^L c_h \ln(n_h) \text{ biçiminde ifade edilen maliyet fonksiyonu, } c = c_0 + \sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha \quad \alpha > 0$$

şeklinde ifade edilen maliyet fonksiyonuna göre daha fazla mümkün çözüm vermekte, bütçe kısıtlarından çok fazla etkilenmemekte, çözümler daha kısa sürede tamamlanmakta, örnek hacmini tabakalara daha optimum şekilde dağıtmakta ve mümkün çözümler içinde örnek ortalaması istatistiğinin varyansını ya aynı ya da daha küçük olarak elde etmektedir. Elde edilen simülasyon deneyi sonuçlarından, örnek hacmini tabakalara optimum şekilde dağıtan ve örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapan doğrusal olmayan maliyet kısıtının $c = c_0 + \sum_{h=1}^L t_h \ln(n_h)$ olduğu görülmüştür.

5. KAYNAKLAR

Bal, H., 1995. Optimizasyon teknikleri. Gazi Üniversitesi, Ankara.

Bosch, V., Wildner, R., 2003. Optimum allocation of stratified random samples designed for multiple mean estimates and multiple observed variables. Communications in Statistics, Vol. 32, No. 10, 1897-1909.

Brethauer, K. M., Ross, A., Shetty, B., 1999. Non-linear integer programming for optimal allocation in stratified sampling. European Journal of Operational Research, 116, 667-680.

Brethauer, K. M., Shetty, B., 1995. The non-linear resource allocation problem. Operations Research, Vol. 43, No. 4, 670-683.

Chernyak, A., 2001. Optimal allocation in stratified and double random sampling with a non-linear cost function. *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 103, No. 4, 525-528.

Clark, R. G., Steel, D. G., 2000. Optimum allocation of sample to strata and stages with simple additional constraints. *The Statistician*, 49, Part 2, 197-207.

Cochran, W.G., 1977. *Sampling techniques* 3rd Ed.. John Wiley and Sons Inc., New York.

Diaz-Garcia, J. A., 2006. Optimum allocation in multivariate stratified sampling: Multi-objective programming. *I-06-07(PE)*, 1-22.

Diaz-Garcia, J. A., Garay-Tapia M. M., 2005. Optimum allocation in stratified surveys. *I-05-14(PE)*, 1-16.

Hamdy, A. T., 1982. *Yöneylem araştırması* 6. Basım. Baray, Ş. A. ve Esnaf, Ş., Literatür Yayıncılık, İstanbul.

Hansen, M. H., Hurwitz, W. N., Madow, W. G., 1953. *Sample survey methods and theory*. Wiley, New York.

Judez, L., Chaya, C., Miguel, J. M., Bru, R., 2006. Stratification and sample size of data sources for agricultural mathematical programming models. *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 43, 530-535.

Khan, M. G. M., Ahsan, M. J., 2003. A note on optimum allocation in multivariate stratified sampling. *S. Pac. J. Nat. Sci.*, Vol. 21, 91-95.

Khan, M. G. M., Khan, E. A., Ahsan, M. J., 2003. An optimal multivariate stratified sampling design using dynamic programming. *Australian&New Zeland Journal of Statistics*, 45(1), 107-113.

Rao, S. S., 1991. *Optimization: Theory and applications*. Wiley Eastern, New Delhi.

Semiz, M., 2004. Determination of compromise integer strata sample sizes using goal programming. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, Vol. 33, 91-96.

Valliant, R., Gentle, J. E., 1997. An application of mathematical programming to sample allocation. *Computational Statistics & Data Analysis*, Vol. 25, 337-360.

Yamane, T., 1967. *Elementary sampling theory*. Prentice Hall, USA.

THE ALLOCATION OF SAMPLE SIZE INTO STRATA IN STRATIFIED RANDOM SAMPLING UNDER NON-LINEAR COST CONSTRAINTS

ABSTRACT

In this study, optimum allocation of n sized sample, which is selected from a population by Stratified Random Sampling under fixed budget, is examined. While doing this allocation, two different non-linear cost functions are used. Besides the situations, in which the variance of sample mean statistics is minimum under two different non-linear cost constraints are examined. The allocation of sample size into strata is harder and more time consuming when non-linear cost constraints rather than linear cost constraints are used. In this study, by taking into consideration of the situations in which neither objective function nor cost constraints are linear, the allocation of n sized sample that is selected from a population and its effect on the variance of sample mean statistics are examined by a simulation study.

Keywords: Non-linear cost function, Optimum allocation, Stratified random sampling.

PRIOR DISTRIBUTION CLASSES WITH COMPREHENSIVE COVERAGE

Oya EKİCİ *

ABSTRACT

The Bayes' theorem which is the kernel of today's Bayesian world incorporates prior knowledge in analysis. Regarding its level, form or application restrictions, the challenging part can be seen as "prior" especially for joiners in this world. In various areas, concerning the requirements, there are various prior distributions suggested to be used. However the studies that give a generic look and review on prior distributions classes are not seen in the literature. With this motivation, the paper discusses prior distributions with comprehensive coverage. Thus it's aimed to introduce prior distribution classes and to give a review on them.

Keywords: Classes of prior distributions, Informative priors, Non-informative priors.

1. INTRODUCTION

Bayesian literature is imperiously growing either due to pragmatic or conservative reasons. But whatever the reason is, the developments imply that the method works, and is found useful, and gathers most of the efforts on this field.

Certainly, science has various questions. In statistical methods as a tool of scientific investigations, executing "objective" estimation and analysis process is probably one of the most critical one of these questions. Bayesian methods by permitting prior beliefs to be involved with a proper way rather than ad hoc manners-inevitably as being in almost all empirical studies-accomplish the objectivity goal indeed. However it should be said that Bayesian principle is criticized also just for this reason, that is "not being objective". If these critics are moved through philosophical basis, another aspect can be proposed here. In Bayesian statistics, probability is induction probability and the purpose is to attain to highest probability; namely accuracy. Actually, impossibility of achieving "perfect information" justifies adopting the induction method within Bayesian philosophy. So, it is reasonable to update the probabilities by following justification process in each step of it. Regarding the beginning of the mentioned process, there is no need for initial assumptions in Bayesian approach. Instead prior information is employed here. The processes followed by Bayesian and Classical approaches can be summarized with the table below.

* Res. Ass., Faculty of Economics, Istanbul University, Istanbul. e-mail:oyaekici@istanbul.edu.tr

Table 1. Philosophically, probability processes for Bayesian and Classical approaches

<i>Bayesian approach</i>	<i>Classical approach</i>
Without assumptions ↓ Trials ↓ Justification ↓ $\frac{1}{2} \ll p(t, g) < 1$	With assumptions ↓ Trials ↓ Falsification ↓ $p(t, g) = 0$

where “ t ” is a theory and “ g ” is the relevant observations. As Popper (2003) also asserts, Classical approach follows deduction method as seen from the table above. But the point here is that Classical approach begins with initial assumptions, and a part of subjectivity penetrates to analysis from there in a way. Hence, on the contrary, it can be claimed that these assumptions in fact distort the objectivity goal. It is out of purpose to go through a further discussion on the distinctions between them from philosophical aspect. As being in Bayesian literature, independently prior distributions themselves can be discussed; whether they lead an objective analysis or not. However, using prior information for the analysis incontrovertibly constitutes Bayesian approach’s original part. Due to its demanding nature in describing and fitting to data, “prior information” notion evolves as a fundamental issue within the Bayesian context and this key role leads the studies to effort on this area of the literature. A useful study on prior distribution, Kass and Wasserman (1996), presents a search on selecting prior distribution.

The most challenging part can be seen as “prior” especially for joiners. Owing to all motives mentioned above, to see the whole picture, an extensive study of prior distributions that summarizes the literature has been aimed in this paper. And the subject is generically presented with classification rather than a whole discussion. There is no granted end in discussion of which prior is accurate to employ for most of modeling issues. Hence instead guiding which one to be used, a summary for almost all class of priors is tried to be given.

In this paper, the classes are given under two general titles; non-informative and informative prior distributions. The basis of this categorization and the other proposed classifications are briefly discussed in Section 2. The rest of it is organized accordingly. Section 3 is about non-informative prior classes. Section 4 is on informative prior distribution classes. In the final section some concluding remarks are provided.

2. ON THE CLASSIFICATIONS OF PRIOR DISTRIBUTIONS

As Bayes’ theorem refers, the prior distribution of a parameter is combined with the probability distribution of current related data to obtain the posterior distribution which is then used for making inferences about the parameter. In the analysis with this principle, prior distributions are the tools to reflect the information that the researcher has. While determination of the tool, namely while choosing or constituting prior

distribution, we meet a series of types and classifications that will shed light on these choices. Diaconis and Ylvisaker (1985) divide Bayesians by considering prior distributions that is preferred to use. So the prior distribution classification done accordingly is as in the following.

Classical Bayesians approve choosing non-informative priors as flat or uniform prior. Modern Parametric Bayesians choose conjugate priors which have designed properties. Subjective Bayesians use elicited priors those especially gathered from an expert opinion or impressions from a similar area. (Gill, J., 2002, p.114). Indeed, this classification done by Diaconis and Ylvisaker (1985) is not clear in practice both for the priors and for the approaches. Another classification is given by Gelman (2002); non-informative, highly informative and moderately informative prior distributions, even his study's main focus is other than making classification.

Actually, as a loosening factor for any grouping like mentioned above, it would be needed to express the degree of belief in the prior information of each parameter separately. For this reason, there are methods which make possible to assign some parameters as informative and some others as non-informative in the same prior distribution. For categorical data, Demirhan and Hamurkaroğlu (2008) propose a method that one can represent one's degree of belief in prior information on each of log odds ratios separately and also show that representation of very weak belief in prior information on the relevant parameters using this approach is successful.

Some characteristic of prior distributions can be considered as a class. For instance realistic prior distribution, the name "realistic" here reflects the characteristic of prior distributions rather than being a class of them. If a prior is realistic, it successfully represents the uncertainty on prediction in a realistic way. For this reason, realistic prior improves forecast accuracy. Similarly, improper prior distribution also can be considered as a class, (mentioned below under non-informative priors) it is again a characteristic of prior distributions, essentially concluding probability of the relevant parameter is infinite. In the paper, prior distribution classes are referred considering these principles. And a conventional classification done for prior distributions is adopted; non-informative and informative prior distributions. For this reason, the categorization reflects probable priors' attitudes with general insight helps to capture classes' diversities and to clarify the transition between them. However, their behaviors can change for some cases, these situations -when non-informative prior turns out to informative or informative prior turns out to non-informative- are enlightened in the related part of the paper.

3. NON-INFORMATIVE PRIOR DISTRIBUTIONS

They are poor to explain the parameter, but these kinds of priors eliminate the subjectivity criticism of Bayesian view. Though, in general it should be said that none of the non-informative priors reflects the ignorance. And in some circumstances, its non-informative trait becomes informative.

With a different aspect Berger (1985, p. 406-409) noted, there seem alternatively two viewpoints to handle the problem; non-informative prior approach and invariance approach. He remarked that the studies on invariance suggest reasonable choice for the non-informative prior, namely the right invariant Haar density, the right Haar measure, gives the best invariant decision rule. Besides many relevant advantages of invariance, non-informative prior approach is preferred most of the time.

The priors that might be located under non-informative are flat (or uniform) priors, Jeffreys prior, reference prior, diffuse (vague, weak or locally uniform) prior, maximum entropy prior, intrinsic prior and integral prior distributions.

3.1 Uniform Prior (Flat Priors) Distributions

In case of using uniform prior, the same probability values are assigned to the parameter for a determined interval. While $p(\theta) = c = 1/m$ and $0 \leq \theta \leq m$, at every point of determined interval, the probability density of the parameter is equal to “c”.

This is attributed as Bernoulli named “principle of insufficient reason”. If there is no reason to believe that any one of these is more likely to be true than another, then we should assign the same probability to all (Sivia, 1996, p.106-7, 120).

Generally when the parameter lies within a specific interval, when it is able to be limited, and when it’s a proportion as its nature, this class of prior can be employed. It can not be said that it ensures the situation of “Ignorance”. For instance, if we say the parameter belongs to the interval $[0 - m]$, as m goes to infinity, prior distribution becomes less informative. However in this situation, the probability of parameter $p(\theta)$ converges to zero. No value of θ will be increasingly probable.

On extended real line $[-\infty, \infty]$, for all values of θ , while $p(\theta) = c$, the uniform priors are improper. That means when the probability of pdf (probability density function) is integrated, the result is infinite and violates the axiom of “probability sum equals to 1”, whereas it equals to “1” in proper distributions. Improper priors have computational difficulties. But it should be remarked here that the posterior distribution which is derived from this kind of priors doesn’t have to be improper.

Other drawback of uniform prior is not possessing invariance property. When the parameter is transformed, the new prior distribution derived from it might not be uniform. It might lose non-informative characteristic and might violate its equal probabilities feature. Uniform priors have strong sides as well, as the sample size increases the effect of settling on uniform distributions becomes slight. Nuisance parameters are easily reduced from the posterior distribution after it’s integrated out. Additionally, Gill (2002, p.121-3) pointed out some conjugate prior distributions become the same with uniform priors in the limit.

3.2 Jeffreys Prior Distribution

Jeffreys's philosophical point of view leans on the concepts of "necessarianism" or objectivism. For his objectivist view he believes in the state of ignorance and based his view on "principle of insufficient reason". He thinks that there should be an explanation for an event being more or less probable if the probabilities are not assigned equal. It can be said that the idea of basing on a definite reason is the extension of necessarianism. Besides according to him, it's not essential to represent the ignorance with merely one prior distribution (Kass and Wasserman, 1996).

With the motivation mentioned above, Jeffreys makes prior distribution equal to a constant, whether parameter is restricted with a specific interval $([-\infty, \infty]$ or $[0, \infty])$ or not, which means the defined uniform prior distribution has the form improper. In his studies' further step, he uses Fisher information matrix, supposing normal distribution;

$$I(\theta) = -E_{\theta} \left[\frac{\partial^2 \log f(y \setminus \theta)}{\partial \theta^2} \right] \quad (1)$$

$$f(y \setminus \theta) = \sigma^{-1} f\left(\frac{y - \theta}{\sigma}\right), \quad (\theta \in R \quad \text{and} \quad \sigma > 0)$$

Here to cover all possible results, with most general form, a location-shape density function that involves location and shape parameters are determined as likelihood function. Information matrix derived from this kind of likelihood function is as in the following (Berger, 1985, p.88);

$$I(\theta) = -E_{\theta} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(-\log \sigma - \frac{(y - \theta)^2}{2\sigma^2} \right) & \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \sigma} \left(-\log \sigma - \frac{(y - \theta)^2}{2\sigma^2} \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \sigma} \left(-\log \sigma - \frac{(y - \theta)^2}{2\sigma^2} \right) & \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \left(-\log \sigma - \frac{(y - \theta)^2}{2\sigma^2} \right) \end{array} \right]$$

$$= -E_{\theta} \left[\begin{array}{cc} -\frac{1}{\sigma^2} & \frac{2(\theta - y)}{\sigma^3} \\ \frac{2(\theta - y)}{\sigma^3} & \frac{1}{\sigma^2} - \frac{3(y - \theta)^2}{\sigma^4} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sigma^2} \end{array} \right] \quad (2)$$

Prior distribution is the square root of the determinant of this derived information matrix: $\pi(\theta) = \det(I(\theta))^{1/2}$. If the result stated above is expanded with some operations;

$$\pi(\theta) = \left(\frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{2}{\sigma^2} \right)^{1/2} \quad \text{and} \quad \pi(\theta) \propto \frac{1}{\sigma^2} \quad (3)$$

prior distribution reaches finally to the form above. When the likelihood function is a pdf in which just has location parameter as (θ) , the computed information matrix becomes equal to a constant. Hence the prior distribution becomes equal to a constant, too.

The main argument of Jeffreys in preferring this kind of prior distribution is possessing invariance property against power transformation of the parameter, as Hartigan (1964) proposed;

$$\pi_{\gamma}(\gamma) \cdot \left(\frac{d\gamma}{d\theta} \right) = \pi_{\theta}(\theta), \quad \gamma = h(\theta) \quad (4)$$

While $\gamma = \sigma^n$, the following equations and proportion are attained; $d\gamma = n \cdot \sigma^{n-1} d\sigma$, $\frac{d\gamma}{\gamma} = \frac{n \cdot \sigma^{n-1} d\sigma}{\sigma^n}$, $\frac{d\gamma}{\gamma} \propto \frac{d\sigma}{\sigma}$. So, the invariance property for prior distribution is proved by considering variable transformation formula. By the way a model can be parameterized in terms of standard deviation, variance and precision parameters.

In Jeffreys prior which is produced from Fisher information matrix, logarithm of posterior distribution yields the exponent -that involves the parameters- of the distribution. The multi-differential of it gives the marginal of parameters (and leave parameter alone), then the expectation of this attained parameter's function or value is taken. In geometrical aspect, taking the determinant of Fisher information matrix that involves all parameter information, gives the region (volume or hyper volume) that vectors of parameter span in the parameter space. By the way, regarding the existing parameter information, in parameter space, the probability region of parameter is determined.

3.3 Reference Prior Distribution

Bernardo, J. M. (1979) nominated a prior distribution, "reference prior". The term reference prior distribution mostly has been used in a narrow sense. For Box and Tiao (1992, p. 22-23) and most of others reference prior is convenient to use as a standard and it has the form dominated by the likelihood function. Besides if there is dominant likelihood, the attained posterior distribution is still a convenient distribution. Actually the form in which the prior distribution dominates is also possible. So in case of dominant prior, it can be said that the yielding form is informative. In this context, a reference prior doesn't have to be a non-informative prior distribution.

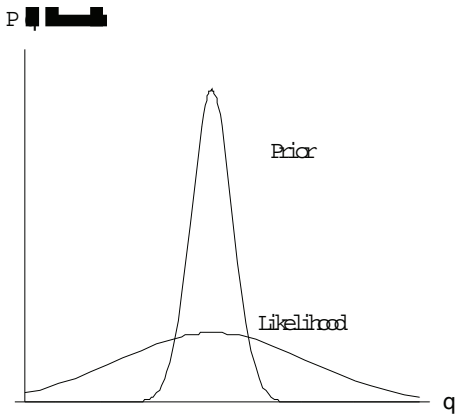


Figure 1. Dominant Prior

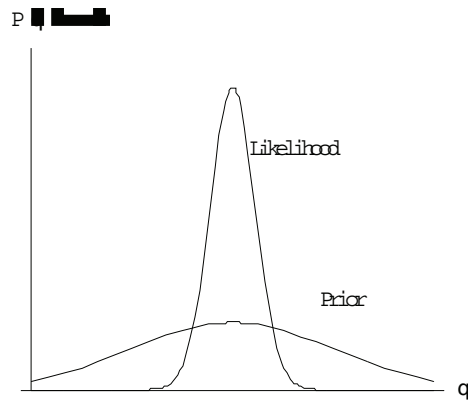


Figure 2. Dominant Likelihood

Berger (1985) and Bernardo (1979) have used “reference prior distribution” in general sense. With Bernardo’s words (1996), the reference prior is that which maximizes the missing information. According to the method that they developed reference prior for relevant parameter can be found by maximizing the Kullback-Leibler distance between prior and posterior distribution.

The i.i.d. random variables $Y_1^n = (Y_1, \dots, Y_n)$ are seen in the form of Kullback-Leibler distance $K_n(\pi(\theta \setminus y_1^n), \pi(\theta))$. Where $\pi(\theta \setminus y_1^n)$ is posterior, $\pi(\theta)$ is prior distribution. Accordingly, Kass and Wasserman (1996) provided,

$$K_n(\pi(\theta \setminus y_1^n), \pi(\theta)) = \int \log \left[\frac{\pi(\theta \setminus y_1^n)}{\pi(\theta)} \right] \pi(\theta \setminus y_1^n) d\theta \tag{5}$$

Here the logarithm of the ratio of these two distributions is taken and multiplied with posterior distribution. $K_n^\pi = E(K_n(\pi(\theta \setminus y_1^n), \pi(\theta)))$ is the expected value of Kullback-Leibler distance. The purpose here is to maximize the expression; $K_\infty^\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} K_n^\pi$. But in general K_∞^π is infinite and to handle this problem firstly the prior distributions (π_n) that will maximize a finite distance K_n^π are attained. Then limit value of the posterior distributions calculated with this prior distributions are attained. As a result, the prior distribution attained in this manner becomes a distribution that yields a posterior in limit with Bayes theorem. After some simplifications, this prior distribution (for a continuous parameter space) turns into Jeffreys prior (Kass and Wasserman, 1996). Moreover, as Bernardo (1996) also noted, in one-parameter problems, the reference prior reduces to Jaynes (1968) maximum entropy prior if the parameter space has a finite number of points, and it reduces to Jeffreys’ prior in the continuous regular case.

Reference prior is successful in handling nuisance parameter. More specifically, while w is the parameter of interest and λ is nuisance parameter, if it is differentiated as $\theta = (w, \lambda)$, reference prior is well enough in making inference about θ . When there is not nuisance parameter and some specific conditions hold, reference prior becomes the same with Jeffreys prior. That means if there is “parameters of interest” and “nuisance

parameters” distinction, this method gives different results than Jeffreys’ (Kass and Wasserman, 1996).

As to computation of reference priors in practice, Bernardo (1996) expresses that reference priors only depend on the model through its asymptotic behavior; essentially, if the asymptotic of a model is known, than its associated reference priors may be easily found. Under regularity conditions for asymptotic normality, any reference prior may be obtained from a relatively simple algorithm in terms of Fisher’s matrix (Berger and Bernardo, 1992). Though, for non-regular or complex models, the derivation of reference priors may be a difficult mathematical problem.

3.4 Diffuse Prior Distribution

Some other denominations seen in the literature of this kind of prior are “vague prior”, “weak prior” or “locally uniform prior”. As is known, depending on a parameter’s (thinking as a random variable within Bayesian principle) distribution, the parameter that determines the scale of this distribution changes. For instance, for location and shape parameter respectively normal distribution and gamma distribution can be assumed. Based on the idea of large variances means uncertainty, such a large value assigned for the shape parameter of this distribution that extending on considerably wide interval, makes the distribution almost flat as uniform prior and non-informative prior constitutes (Raiffa and Schlaifer, 1968, p.63).

$$p(\theta) \sim N(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2), \text{ large values are assigned to } \bar{\sigma}^2.$$

$$p(\sigma) \sim G(\alpha, \beta), \text{ very small values are assigned to } \alpha \text{ and } \beta \text{ (as 0,001).}$$

The strongest argument of diffuse prior distribution attained as above is being a proper distribution. Assuming diffuse prior distribution instead of uniform prior is assuring the advantage of easy calculation.

Diffuse prior distributions have also weakness. Let’s assume likelihood function with a broad peak, the situation of the posterior distribution is improper and number of observations is small. Even diffuse prior distribution used with a normal distribution - has a large variance- it doesn’t produce good solutions since the obtained posterior distribution becomes sensitive to the new prior distribution (Kass and Wasserman, 1996). Actually the situation of limited sample size is the mostly encountered problem in applications.

3.5 Maximum Entropy Prior Distribution

Entropy is a term that belongs to physics discipline. It exists in statistics, since it has direct relationship to information theory and in a sense measures the amount of uncertainty inherent in the probability distribution (Berger, 1985, p.91). In other words it quantifies the uncertainty of observations.

Entropy prior introduced by E.T. Jaynes (1968) identifies relative level of uncertainty about prior distribution parameters' distributions. Similarly uncertainty or precision that is supplied by different prior distribution are modeled and so it may be said that it is flexible. But transformation result of parameter doesn't have invariant property. So its application is limited (Gill, J., 2002, p.135-6).

For a discrete parameter $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$, when entropy is $H(\theta)$;

$$H(\theta) = -\sum P(\theta_i) \log P(\theta_i) \quad (6)$$

Here by taking logarithm of probability, with the intuition of information exponentially increases, makes the information monotonically increase. Negative sign represents "ignorance" as a reverse of information. Two extreme situations can be identified with the equation above. One signifies entropy's minimum (the situation of full information), other signifies entropy's maximum (the situation of ignorance).

In the first case, while $P(\theta_k) = 1$ that is when the probability of the parameter having a particular value is "1", and $i \neq k$, it's stated as $P(\theta_i) = 0$, means it is assigned "0" for the probability of this parameter having any other value. By the way full information is given about the parameter and so ignorance being "0",

$$H(\theta) = -\sum_{i=1}^n P(\theta_i) \log P(\theta_i) = 0 \quad (7)$$

In the second case, if the prior distribution is specified as uniform prior, say $P(\theta_i) = \frac{1}{n}$ is assigned; the entropy of this prior reaches its maximum.

$$H(\theta) = -\sum \frac{1}{n} \log \left(\frac{1}{n} \right) = \log n \quad (8)$$

Entropy given above is identical with the non-informative prior distribution. As the observed value of parameter increases ($n \rightarrow \infty$), the value of $P(\theta_i) = \frac{1}{n}$ decreases (Actually, ever more it turns to a situation that no value of parameter will be possible, namely in limit $P(\theta_i) = 0$. So it is a contradiction to reach an informative form. However, defining θ as finite can make one avoid this contradiction). Also regarding these two forms, entropy constitutes the restriction $H(\theta) \leq \log n$ for prior distribution (Berger, J.O., 1985, p.91).

3.6 Intrinsic Prior – Integral Prior

In Bayesian analysis, inference is based on posterior distribution. Here in model selection case, it's not satisfactory to compare models through their individual posterior distributions. Because different models have different unobservable parts. Instead, the performance of model is evaluated by leaning on directly probability of data. Model selection as a common concern brings further considerations in assigning prior

distribution. When needed to use non-informative structure, since the standard non-informative priors are improper, prior evaluations give a ratio of constants, that is, again a constant. Within Bayesian principle, the Bayes Factor is multiplied with this arbitrary constant. For the models M_1 and M_2 , the posterior probabilities ratio;

$$\frac{P(M_2 \setminus y)}{P(M_1 \setminus y)} = \frac{P(y \setminus M_2)}{P(y \setminus M_1)} \cdot \frac{P(M_2)}{P(M_1)}$$

$$\frac{P(M_2 \setminus y)}{P(M_1 \setminus y)} = B_{21}(y) \cdot \frac{P(M_2)}{P(M_1)} \quad (9)$$

Bayes factor B_{21} is described as below, and where θ_1 and θ_2 are the parameters of interest for the data y ,

$$B_{21} = \frac{m_2(y)}{m_1(y)} = \frac{\int f_2(y \setminus \theta_2) \pi_2(\theta_2) d\theta_2}{\int f_1(y \setminus \theta_1) \pi_1(\theta_1) d\theta_1} \quad (10)$$

and there say $m_2(y)$ is the marginal density of y for M_2 . Here B_{21} equals to an arbitrary constant in case an improper prior assignment. To deal with the problems Berger and Pericchi (1996) introduced “intrinsic prior”. It gives a Bayes factor free of arbitrary constants and tends to correspond to actual Bayes factor. There is no need to compute training samples[√], on the contrary, the process with intrinsic priors’ implement imaginary training samples in a sense. $\pi_1^I(\theta_1)$ and $\pi_2^I(\theta_2)$ denote intrinsic priors and are handled by solving functional equations below (Cano et al, 2004, p.446-7);

$$E_{\theta_1}^{M_1} B_{12}^N(y(\ell)) = \frac{\pi_2^I(\psi_2(\theta_1)) \pi_1^N(\theta_1)}{\pi_2^N(\psi_2(\theta_1)) \pi_1^I(\theta_1)} \text{ and}$$

$$E_{\theta_2}^{M_2} B_{12}^N(y(\ell)) = \frac{\pi_2^I(\theta_2) \pi_1^N(\psi_1(\theta_2))}{\pi_2^N(\theta_2) \pi_1^I(\psi_1(\theta_2))} \quad (11)$$

where $y(\ell) = (y_1, \dots, y_\ell)$ is a minimal training sample, a random vector of minimal size ℓ such that $0 < m_i^N(y(\ell)) < \infty$, $i = 1, 2$, $\psi_2(\theta_1)$ denotes the limit of the MLE $\hat{\theta}_2(y)$ under M_1 at point θ_1 , and $\psi_1(\theta_2)$ the limit of $\hat{\theta}_1(y)$ under model M_2 at point θ_2 . Here the expectations above are taken with respect to $f_1(y(\ell) \setminus \theta_1)$ and $f_2(y(\ell) \setminus \theta_2)$. To sum up, there is possibility to get solutions which is not unique from these equations in nested models, however, as Cano et al (2004) and Cano et al (2007) demonstrates, in non-nested models solutions are exactly not unique. Another problem in non-nested models is that intrinsic prior cannot deal with improper solutions while intrinsic priors are well established for nested models. Prior construction for non-nested models are developed by Cano et al (2007) named integral priors. The integral equation systems (Cano et al, 2007, p.60) offered to be solved is as below;

[√] a sample constituted just by using a part of the data.

$$\begin{aligned}\pi_1(\theta_1) &= \int_y \pi_1^N(\theta_1 \setminus y) m_2(y) dy \text{ and} \\ \pi_2(\theta_2) &= \int_y \pi_2^N(\theta_2 \setminus y) m_1(y) dy\end{aligned}\quad (12)$$

where $\pi_1^N(\theta_1 \setminus y)$ and $\pi_2^N(\theta_2 \setminus y)$ are posterior distributions for the data y . They found that under some assumptions, integral priors are unique. Further discussions on the subject are beyond the purpose of this paper.

4. INFORMATIVE PRIOR DISTRIBUTIONS

In some cases, it is inevitable to use information, for instance in the political science, information needs to come in, whether as regression predictors or regularization (that is, prior distributions) on parameters (Gelman, 2009). Here the problem is how to form this prior information. Zellner (1971) described the nature of prior information with a classification; data-based and non-data-based. When the past data is available for the study, it is termed as data-based prior. Even if it is not possible to employ past data, researcher's personal observations or theories can be regarded as alternative sources. This kind of prior information is termed as non-data-based prior. In case of having specific parameter prior knowledge or a restriction for it, the analysis becomes easier. For this reason, the dangers seen during the modification of prior beliefs is vanished. Conversely, in some other cases the researcher can be under the situation that should be eliciting the prior (distribution, parameter). All these efforts are intentionally to impose the prior information to the analysis.

For some cases non-informative structure turns out to be informative. In time series modeling prior distribution appears as a subject to be cautious in this sense. Ekici and Yorulmaz (2008) briefly discussed the issue; uniform prior distribution of which parameters are assigned the same probability values for a given interval, Jeffreys prior obtained from information matrix and diffuse prior don't give dissimilar results. Besides each of the three distributions are non-informative. They also produce similar results with Classical approach. However, this is not so for non-stationary time series. In non-stationary time series, even a non-informative prior employed, Bayesian and Classical approaches produce different results. Sims (1988) and Zellner (1971, p.186) employed uniform prior for a non-informative prior. But Phillips (1991) notifies that uniform prior turns out to have informative form and suggests Jeffreys prior or diffuse prior in case of non-informative prior distribution is preferred. For this reason, sample about autoregressive parameter in different intervals provides more information. Thus, choosing uniform prior implies making all values of this parameter equally likely and reflects ignorance actually despite of having slight weights but large values of the parameter (Maddala and Kim, 2002, p.266). So in time series context prior distribution preference is primary issue as well.

Under informative prior distribution section, conjugate prior, subjective prior, Minnesota prior, power prior, g-prior, first-difference prior and second-difference prior distributions are referred.

4.1 Conjugate Prior Distributions

Conjugate prior distributions can be determined on the bases of distribution structure of the likelihood function. The likelihood function is divided into its multiplications in terms of sufficient statistics, and this process named as “Neyman’s Factorization Theorem” (Lindley, 1965, p.47, 50). Resulting sufficient statistics’ distributions become a base to conjugate prior distribution that will be constituted.

Some of the reasons about determining a conjugate prior as a prior distribution are given by Raiffa and Schlaifer (1968, p.44) as follows; it should be easy to obtain the posterior distribution from the determined prior distribution and likelihood function. Conjugate prior distribution should be rich. What’s meant by rich is existence of a distribution element that is useful in expressing researcher’s prior information and beliefs.

Beyond these reasons, from the perspective of proposed utility, it is always possible to get new sample information from the same space by preferring to use conjugate prior. By the way the prior information about allied parameter can be explored and obtained more consistent results (Yardımcı, 1992). Prior distribution that is chosen on the bases of sample distribution family has algebraic convenience to join with likelihood. Particularly, it’s easy to compute for the exponential distribution family since probability distributions that belong to an exponential family have natural conjugate prior distributions (Gelman et, 1995, p.38). Furthermore conjugate prior distribution is a proper pdf.

However, conjugate prior should be handled with care. Since this prior distribution is evidence for very specific parametric prior knowledge (Gill, J., 2002, p.120).

So it is critical which conjugate prior will be used with different likelihood functions (Raiffa and Schlaifer, 1968, p.53-4). The generated posterior distribution is required to have a known functional form. This can be exemplified in Table 2 below.

Table 2. Conjugate prior distributions for likelihood functions and yielding posteriors

Likelihood	Prior	Posterior
Binomial	Beta	Beta
Negative Binomial	Beta	Beta
Normal	Normal	Normal
Poisson	Gamma	Gamma
Exponential	Gamma	Gamma
Gamma	Gamma	Gamma

At this point there appear two definitions about conjugate priors; “natural conjugate prior” and “conjugate prior”. When conjugate prior combines with likelihood, yielded posterior again has the same distribution class with conjugate prior. Alternatively, when

natural conjugate prior combines with likelihood, yielded posterior has the same distribution with natural conjugate prior distribution, and also has the same distribution with likelihood (Raiffa and Schlaifer, 1968, p.48-49).

As an example for the factorization procedure of conjugate prior of θ , suppose $P(y|\theta)$ is likelihood function in form of binomial distribution;

$$P(y|\theta) \propto \theta^y (1-\theta)^{n-y} \quad \text{for } 0 \leq \theta \leq 1,$$

Say, if $y=a$ and $n-y=b$, sufficient statistics would be here a and b . Through the factorization, conjugate prior distribution for $p(\theta)$ is (in Beta form);

$$P(\theta) \propto \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1} \quad \text{for } 0 \leq \theta \leq 1, \quad (13)$$

with Bayesian principle,

$$P(\theta \setminus y) \propto \theta^y (1-\theta)^{n-y} \cdot \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1} \quad (14)$$

yielding posterior density $P(\theta \setminus y)$ again reaches Beta distribution;

$$P(\theta \setminus y) \propto \theta^{y+\alpha-1} (1-\theta)^{n-y+\beta-1} \quad (15)$$

Naturally most of the distributions can be appointed as a prior; however they all do not emerge as one of prior classes. Since having a special weight among the others, the two of distributions, Wishart and Dirichlet distributions, are regarded here as a class of prior distributions under conjugate priors.

4.1.1 Wishart Prior

Under the assumption of the unknown variance case, Wishart distribution can be assigned as prior. That is Wishart prior is the conjugate prior distribution for the inverse covariance matrix under a multivariate normal distribution assumption for the parameter say in a linear model. Similarly, Inverse-Wishart prior is the conjugate prior distribution at this time for the multivariate normal covariance matrix.

4.1.2 Dirichlet Prior

Dirichlet distribution is a multivariate generalization of the beta distribution. So the prior established with this distribution, called as Dirichlet prior, is the conjugate prior distribution for the parameters of the multinomial distribution.

4.2 Subjective Prior Distributions

In Bayesian approach, objectivity-subjectivity debate begins with assessing of probability and is earlier than prior distribution specification. De Finetti who supports subjectivity defines probability from different aspects. One is built on odds ratio, one another is score rule based on punishment (Galavotti, 2001, p.161-3). Quantifying of uncertainty is complicated. So as in determination of probability, while subjectively determining prior distribution, also numerous methods that the study entails can be employed.

Most of the time, since the process of data analysis typically involves a host of subjective choices, there exist problems about being objective during these statistical analysis (Berger, 2006). The distinction between objective and subjective analysis in Bayesian approach then appears with prior distribution specification for parameters of statistical model. So this signs its key role again. If the phrase “objective Bayesian analysis” corresponds too many investigators in this field, as a general agreement on objectivity, Jeffrey’s prior, reference prior and maximum entropy prior are said to be objective priors. In fact there are views standing out against objective Bayesian analysis. One critique to objective Bayesian school done by Wasserman (2006) is that he interpreted “objective Bayesian inference” to mean “Bayesian methods that have good frequency properties” and refer to these methods as “Frequentist-Bayes”. But going through the views on this debate here would take the purpose of the paper far afield.

Depending on the nature of subject, eliciting prior would be needed. Within the context of statistical analysis, expert opinion provides the structure that Bayesian analysis needed where the prior parameters cannot be based on previous studies and data or where they don’t exist. The difficulties during elicitation process are quantifying the uncertainty and reflecting personal judgment to a parameter, an interval or a distribution. It’s obvious that the process bias and various methods can be employed in elicitation process for several empirical studies. But it is said to be the elicited prior conceptually and practically is the closest prior to definition of subjective prior than the other informative prior classes. Here in this section some of the subjective prior distributions are brought up.

4.2.1 Histogram Approach

When θ represents an interval on real line, histogram method can be used for prior specification. In this method, θ is divided into intervals and subjective probabilities are assigned to each interval. Then histogram plot that falls upon these probabilities is done. This histogram provides prior probability density, $p(\theta)$. There is no rule for the number or width of interval. Moreover prior distribution can be in a challenging form for the study. These are the weaknesses of the method. Another weakness of it is the

probability of not having a tail of this constituted prior distribution. This means extreme values may not fall upon any quantity in prior distribution (Berger, 1985, p.77).

4.2.2 Relative Likelihood Approach

When θ is a subset of a real line, this method is used. Plotting is done on the basis of intuitively how many times one parameter value probable to another. Then prior distribution can be specified from this draft.

More parameter values can be involved in more sensitive analysis during comparison. Produced prior distribution may not be a proper distribution. Consistency of the statement such as “parameter θ has equal probability in having separate values θ_1 and θ_3 ” (in the figure above as well) should be checked (Berger, 1985, p.78).

4.2.3 Matching a Given Functional Form

A functional form is defined depending on researcher’s opinion. Then the distribution that is the best fit to this functional form is chosen. For instance, a functional form as in Figure 3 brings the idea of Gamma distribution for prior distribution representation, and the researcher makes the assumption of Gamma distribution $G(\alpha, \beta)$. In this step, α and β parameters of distribution of Gamma prior are subjectively specified. It has several ways. One way is calculating from the estimated prior moments. That is, mean and variance are computed from specified functions. Then, α and β values are achieved from the equalities; $Mean = \alpha.\beta$ and $Variance = \alpha.\beta^2$. Another way is dividing the prior distribution into its fractals (Berger, 1985, p.80-1). Researcher assigns the values to these divided fractiles leaning on his/her subjective beliefs. The probability areas are computed that fall upon these fractiles.

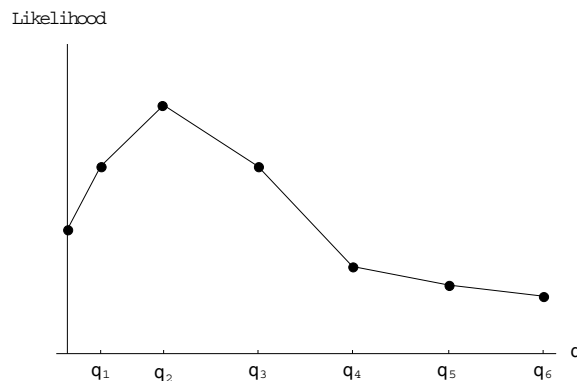


Figure 3. A Draft Plot for Relative Likelihood

4.3 Hierarchical Prior Distributions

One way to handle the uncertainty on prior parameters' values is to assign an additional prior distribution to these parameters. This additional prior distribution's parameters are known as hyper parameters. For this reason, hierarchical prior distribution is called as hyper prior distribution in some relevant texts. Formation of hierarchical prior distribution can be described here with an example (Gill, J., 2002, p.354-5).

While y_i are observations, it's assumed that these observations are Poisson distributed. In the distribution, the parameter is λ . When there is a need to specify a prior for λ , Gamma distribution can be selected since the Gamma distribution is the conjugate of Poisson and has a flexible parameter form as well. Gamma prior distribution is also defined by the two parameters α and β . Gamma parameters α and β (like in λ) are restricted with positive real numbers. For the parameters α and β assigning Gamma distribution is also reasonable. Hyper parameter values (A, B, C, D) for Gamma distribution is set to begin the process. Reviewing of the process;

$$y_i \sim Poi(\lambda_i) \Rightarrow \lambda_i \sim G(\alpha, \beta) \Rightarrow \alpha \sim G(A, B) \text{ and } \beta \sim G(C, D)$$

where y_i are conditionally independent, α and β are assumed independent, too. Actually as Berger (1985, p.107-8) noted, this is just a gradually comprising process that conveniently represents the prior.

If structural information and subjective prior information is available at the same time, it will be easy to set them in stages like above. While the researcher's assigning Gamma distribution to reflect the structural information, he/she also adds the subjective prior information by imposing hyper parameter values to them.

Beyond this, it is possible to assemble the joint distribution multiplicatively using Bayes' law and the definition of conditional probability. Then joint posterior distribution is obtained (Gill, J., 2002, p.355). It can be defined as;

$$p(y, \lambda, \alpha, \beta) = \prod_{i=1}^n p(y_i \setminus \lambda_i) p(\lambda_i \setminus \alpha, \beta) p(\alpha \setminus A, B) p(\beta \setminus C, D) \quad (16)$$

If distributions are defined for A, B, C and D despite setting values for them, a stage would be added to hierarchy. As Gill pointed out, there is no constraint about number of stages in defining hierarchical prior distribution. But in practice, more than two stages are rarely useful.

It should be noted here that modeling with hierarchical prior distribution is started to be employed extensively by the improvement of MCMC technique.

4.4 Minnesota Prior Distributions

"Minnesota prior" was introduced by Litterman (1986). This class of prior is one of the beneficial and commonly used informative prior in a Bayesian Vector autoregression (VAR) analysis. Minnesota prior assumes random walk process as in many of time series and has a symmetric form. To begin a brief description for Minnesota prior, a VAR model considered;

$$x_t = A_0 + A_1 x_{t-1} + \dots + A_p x_{t-p} + u_t \quad (17)$$

u_t is white noise disturbances vector, A_0 is vector of intercept terms, A_1, \dots, A_p are autoregressive matrices, x_t is vector of n variables included in VAR. Here x_t in which the prior mean incorporated with is in the following;

$$x_t = A_0 + x_{t-1} + u_t \quad (18)$$

In setting diagonal elements of A_1 as "1", "0" to rest of coefficients, prior belief is imposed and settled on which variables desired in the model. Mean and variance coefficient for prior distribution are represented as below;

$$E(A_1) = 1 \quad \text{var}(A_1)_{ij} = \lambda \gamma^2 \frac{\sigma_i^2}{\sigma_j^2} \quad (19)$$

Hereafter two hyper parameters γ and λ become to have key role in specification of Minnesota prior. γ is the tightness parameter of the prior distribution, and gives the measurement of the confidence in prior. That means smaller γ value is higher confidence level. Conversely a high value of this parameter makes a VAR analysis Non-Bayesian. λ is the cross lag term and takes the values between 0 and 1. When λ equals to "1", this implies the lags of other variables have the same importance with its own lags. Then again as λ approaches to "0", the model reaches to univariate autoregression form.

4.5 Power Prior Distributions

The power prior is introduced by Ibrahim and Chen (2000). It is a useful general class of priors that can be used for arbitrary classes of regression models, including generalized linear models, generalized linear mixed models semi-parametric survival models with censored data, frailty models, multivariate models, and non-linear models (Ibrahim et al, 2003). But, this class is especially convenient to model selection issue. In constructing power prior, previously observed historical data would be needed. A

general discussion of the power prior and process developed for it are sited in examining a regression model for simplicity. For the purpose $D = (n, y, X)$ is the data collected for current analysis. Here n is the number of observation, y indicates the $n \times 1$ vector of dependent variable and X indicates the $n \times p$ matrix of independent variables of the regression model. $L = (\theta \setminus D)$ is likelihood function of this model. Let $D_0 = (n_0, y_0, X_0)$ be the historical data from previous study and $\pi_0 = (\theta \setminus \cdot)$ be prior for θ before historical data been observed. For a given a_0 , power prior distribution of θ ;

$$\pi(\theta \setminus D_0, a_0) \propto L(\theta \setminus D_0)^{a_0} \cdot \pi_0(\theta \setminus c_0) \quad (20)$$

c_0 is the hyper parameter for the initial prior. a_0 helps to signify the importance of the historical data, so for this intention a_0 is defined in the interval $0 \leq a_0 \leq 1$. When a_0 equals to "1", historical data become to have weight to the extent that it has on likelihood. In contrast when a_0 equals to "0" it makes the analysis free from the historical data and just done with a priori specification. For a full Bayesian analysis a prior specification is done for a_0 as well and with this addition joint power prior distribution gets to the form;

$$\pi(\theta, a_0 \setminus D_0) \propto L(\theta \setminus D_0)^{a_0} \cdot \pi_0(\theta \setminus c_0) \cdot \pi(a_0 \setminus \gamma_0) \quad (21)$$

γ_0 is hyper parameter vector. As Ibrahim and Chen (2000) suggest, the prior $\pi(a_0 \setminus \gamma_0)$ can be in form of Beta, truncated Gamma or Normal distribution. With this form of it, the power prior has numerous advantageous. Briefly it can be said that it's flexible in weighting historical data, reflects the impact of historical data combining with the prior set up, and constitutes a proper prior. Once the power prior is constructed, then it is easy to generalize to the multiple forms.

$$\pi(\beta, a_0 \setminus D_0) \propto \left(\prod_{k=1}^{L_0} [L(\beta \setminus D_{0k})]^{a_{0k}} \cdot \pi(a_{0k} \setminus \gamma_0) \right) \cdot \pi_0(\beta \setminus c_0) \quad (22)$$

where $k = 1, 2, \dots, L_0$ and L_0 shows historical datasets, a_{0k} denotes powers for these historical datasets.

As a recent corroborative study done by Ibrahim et al (2003) provides a strong motivation for using the power prior in Bayesian inferences, since it indicates that it is an optimal class of informative priors in the sense that it successfully minimizes a convex sum of Kullback-Leibler (KL) divergences between two specific posterior densities, in which one density is based on no incorporation of historical data and the other density is based on pooling the historical and current data.

4.6 g – Prior Distributions

Zellner (1986) proposed a prior that reflects unit-information, named as g-prior. This class of prior provides prior covariance matrix for regression parameters. Here with g

chosen correspondingly the prior variance is proportional to inverse of a design matrix for a data set and specified according to prior information can be imposed to analysis is defined by this g constant. For β and σ (that is, for the coefficients of a regression model), a conjugate prior distribution is specified and resulting posterior distribution mean is the weighted mean with g . As explicit explanation for the distribution class, the prior is assumed as;

$$p(\beta, \sigma) = p(\sigma) \cdot p(\beta \setminus \sigma) \quad (23)$$

and the prior covariance matrix is assumed as,

$$\text{Var}(\beta \setminus \sigma) \propto (D'D)^{-1} \quad (24)$$

where D is design matrix for the given data set. As regards conjugate normal prior represented,

$$\beta \sim N(0, g \cdot \sigma (D'D)^{-1}) \quad (25)$$

4.7 First-Difference Prior and Second-Difference Prior Distributions

This class of prior distribution designed for GLMMs (Generalized Linear Mixed Models). In GLMMs two parts occur to reflect fixed and random effects of the linear model. In Bayesian analysis of GLMMs there is no need to define two separate matrices, instead, one matrix is defined as in GLM and these two effects are reflected by means of precision matrix in the prior. In other words, effects are modeled in the prior model. Here as an extension of this subject, there may be possible first-difference and second-difference prior. For first-difference prior which is also called “random walk prior”, if the categories are in a natural order, one can model the prior for parameters just as affected by previous category and a random term;

$$(\beta_k \setminus \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{k-1}) = \beta_{k-1} + e_k \quad (26)$$

If the categories are from 1 to i , $k = 2, \dots, i$ and where $e_k \sim N\left(0, \frac{1}{\theta}\right)$.

Hence if there is an order, the previous category is the most probable one, and this previous category is made to be added to the prior model. No distribution is assigned for β_1 , merely matrix structure is specified.

Another prior model structure here is second-difference prior also called as “stochastic-trend prior”. It is designed as parameter affected by two previous categories and a random term;

$$(\beta_k \setminus \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{k-1}) = 2\beta_{k-1} - \beta_{k-2} + e_k, \text{ where } k = 3, \dots, i \quad (27)$$

5. CONCLUDING REMARKS

The choice of the prior distribution for a model's parameters appears as one of the essential problem in implementing Bayesian estimation and it is distinguishing property of Bayesian approach. There are many priors have been proposed in the literature and while introducing priors, there is a need to provide a base about the methods that shape the researcher's prior knowledge in Bayesian context. This paper renders a reassessment of these prior distribution classes under the classification non-informative and informative priors. Its content is composed of a comprehensive coverage so that most of the classes are included. However it should be noted that some key discussions on prior distributions as prior sensitivity, objectivity-subjectivity debate are left out of the paper. So there are many questions not answered yet; to what extent the prior distribution used in the analysis sensitive to other prior distribution choices? To be objective does one should use non-informative priors? Beyond all these discussions, the paper is mainly a review of the prior distribution classes, a generic representation of them.

6. REFERENCES

- Berger, J. O., 1985. *Statistical decision theory and Bayesian analysis*. 2.ed., New York, Springer-Verlag Inc., 617.
- Berger, J., 2006. The case for objective Bayesian analysis. *Bayesian Analysis*, 1(3):385-402.
- Berger, J. O., Bernardo, J. M., 1992. On the development of reference priors. *Bayesian Statistics 4* (J. M. Bernardo, J. O. Berger, A. P. Dawid and A. F. M. Smith, eds.). Oxford: University Press, 35–60 (with discussion).
- Berger, J. O., Pericchi, L. R., 1996. "The intrinsic Bayes factor for model selection and prediction." *J. Amer. Statist. Assoc.*, 91: 109-122.
- Bernardo, J. M., 1979. Reference posterior distributions for Bayesian inference. *Journal of the Royal Statistical Society*, B(41): 113-147.
- Bernardo, J. M., 1996. Noninformative priors do not exist: A discussion with Jose M. Bernardo. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 5 December 1996.
- Box, G. E. P, Tiao, G. C., 1992. *Bayesian inference in statistical analysis*. Wiley Classics Library Edition, New York, John Wiley & Sons, 588.
- Cano, J. A., Kessler, M., Salmeron, D., 2007. Integral priors for the one way random effects model. *Bayesian Analysis*, 2(1): 59-68.

Cano, J. A., Kessler, M., Moreno, E., 2004. On intrinsic priors for nonnested models. *Test*, 13(2): 445-463.

Cano, J. A., Salmeron, D., Robert, C. P., 2007. Integral equation solutions as prior distributions for Bayesian model selection. *Test*, Published online March 2007, DOI name 10.1007/s11749-006-0040-8.

Demirhan, H., Hamurkaroğlu, C., 2008. Bayesian estimation of log odds ratios from $R \times C$ and $2 \times 2 \times K$ contingency tables. *Statistica Neerlandica*, 62(4): 405–424.

Diaconis, P., Ylvisaker, D., 1985. Quantifying prior opinion, in *Bayesian statistics 2*, J.M. Bernardo, M.H. DeGroot, D.V. Lindley and A.F.M. Smith (eds.), Amsterdam: North Holland Press.

Ekici, O., Yorulmaz, Ö., 2008. The relationship of aberrant observation and structural break point: Determination with Bayesian autoregressive process. *Doğuş University Journal*, 9(2):146-157.

Galavotti, M. C., 2001. Subjectivism, Objectivism and Objectivity in Bruno de Finetti's Bayesianism. *Foundations of Bayesianism*, Ed. David Corfield and Jon Williamson, Kluwer Academic Publishers, 413.

Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S., Rubin, D. B., 1995. *Bayesian data analysis*, London, Chapman & Hall, 526.

Gelman, A., 2002. Prior distribution. *Encyclopedia of Environmetrics*, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 3: 1634–1637

Gelman, A., 2009. Prior distributions for Bayesian data analysis in political science. *Frontier of Statistical Decision Making and Bayesian Analysis*, in honor of James O. Berger.

Gill, J., 2002. *Bayesian methods*, New York, Chapman & Hall, 2002, 459.

Hartigan, J., 1964. Invariant prior distributions. *The Annals of Mathematical Statistics*, 35: 836-845.

Ibrahim J. G., Chen, M. H., 2000. Power prior distributions for regression models. *Statistical Science*, 15(1): 46-60.

Ibrahim J. G., Chen M.-H., Sinha D., 2003. On optimality properties of the power prior. *Journal of the American Statistical Association*, 98: 204-213.

Jaynes, E. T., 1968. Prior probabilities. *IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics*, SSC-4, 227-241, (Reprinted in Roger D. Rosenkrantz, Compiler. (1983 . E. T. Jaynes: *Papers on Probability, Statistics and Statistical Physics*. Dordrecht, Holland: Reidel Publishing Company, 116-130).

Kass, R. E., Wasserman, L., 1996. The selection of prior distributions by formal rules. *Journal of the American Statistical Association*, 91(435): 1343-1362.

Lindley, D. V., 1965. Introduction to probability and statistics from a Bayesian viewpoint, Part 2, London, Cambridge University Press, 292.

Litterman, R. B., 1986. Forecasting with Bayesian vector autoregressions-five years of experience. *Journal of Business & Economic Statistics*, 4: 25-38.

Maddala, G. S., Kim, M., 2002. Unit roots, cointegration and structural change. Cambridge University Press, 505.

Phillips, P. C., 1991. To criticize the critics: An objective Bayesian analysis of stochastic trends. *Journal of Applied Econometrics*, 6(4):333-364.

Popper, K.R., 2003. Bilimsel araştırmanın mantığı, Çev. İlknur Aka, İbrahim Turan, 2.B, İstanbul, Yapı Kredi Yayınları, Kazım Taşkent Klasik Yapıtlar Dizisi, 2003, 596.

Raiffa, H., Schlaifer, R., 1968. Applied statistical decision theory. America, MIT Press, 356.

Sims, C. A., 1988. Bayesian skepticism on unit root econometrics. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12: 463-474.

Sivia, D. S., 1996. Data analysis, a Bayesian tutorial. New York, Oxford Univ. Press, 189.

Wasserman, L., 2006. Frequentist Bayes is objective (Comment on Articles by Berger and by Goldstein). *Bayesian Analysis*, 1(3):451-456.

Yardımcı, A., 1992. Çoklu bağlantılı çoklu doğrusal regresyonda Bayes yaklaşımı. Y.L., Fen Bilimleri Enstitüsü, Hacettepe Ün., 72.

Zellner, A., 1971. An introduction to Bayesian inference in econometrics. New York, John Wiley & Sons, 431.

Zellner, A., 1986. On assessing prior distributions and Bayesian regression analysis with g-prior distributions. In Goel, P. and Zellner, A. (eds.), *Bayesian Inference and Decision Techniques*, 233-243. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V.

Acknowledgements

This paper based on part of the author's Thesis (2005) written at the University of Istanbul.

KAPSAMLI BİR İÇERİKLE ÖN DAĞILIM TÜRLERİ

ÖZET

Bayesyen analizlerin özünü oluşturan Bayes Teoremi, analizlere ön bilgiyi dahil ederek istatistiksel süreci gerçekleştirir. Ön bilginin düzeyi, yapısı ve uygulama sınırları gözönüne alınca, özellikle bu alanda yeni çalışan araştırmacılar için en zorlayıcı kısmı "ön dağılım" olarak görülebilir. Farklı alanlarda ihtiyaç doğrultusunda önerilen çeşitli ön dağılım türleri vardır. Öte yandan ön dağılımlar üzerine jenerik bir bakışı yansıtan ve gözden geçirme niteliğinde çalışma literatürde mevcut değildir. Bu motivasyonla, çalışma ön dağılım türlerini kapsamlı bir içerikle ele almaktadır. Böylelikle araştırmacılara ön dağılım türlerinin tanıtımı ve bunlarla ilgili genel bir bakış kazandırmak amaçlanmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Ön dağılım türleri, Bilgi veren ön dağılımlar, Bilgi vermeyen ön dağılımlar.

KÜMELEME ÇÖZÜMLEMESİNDE DÜZELTİLMİŞ TEK ADIM M-TAHMİN EDİCİSİNİN KULLANILMASI

Abdullah Fırat ÖZDEMİR*

Engin YILDIZTEPE**

ÖZET

Kümeleme çözümlemesi, yaygın olarak kullanılan çok değişkenli istatistiksel yöntemlerden biridir. Düzeltilmiş tek adım M-tahmin edicisi ise Huber'in (Huber, 1964) önerdiği M-tahmin edicisi üzerinde Wilcox tarafından yapılan değişiklik ile elde edilmiştir (Wilcox, 2003a). Düzeltilmiş tek adım M-tahmin edicisi, 2003 yılından bugüne kadar varyans çözümlemesi (Wilcox ve Keselman, 2003) ve çoklu karşılaştırmalar (Wilcox, 2003b) gibi alanlarda kullanılmıştır. Hiyerarşik olmayan kümeleme yöntemi olarak sınıflandırılan k-ortalama yöntemini konu alan bu çalışmada, ortalama yerine düzeltilmiş tek adım M-tahmin edicisi (Modified one-step M-estimator-MoM) kullanılarak geliştirilen kümeleme algoritması tanıtılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Düzeltilmiş tek-adım M-tahmin edicisi, k-Ortalama kümeleme, Kümeleme çözümlemesi.

1. GİRİŞ

Kümeleme çözümlemesinin genel amacı, gruplanmamış verileri benzerliklerine göre sınıflandırmak (gruplamak) ve araştırmacıya uygun, işe yarar özetleyici bilgiler elde etmede yardımcı olmaktır (Tatlıdil, 2002, 329). Kümeleme çözümlemesinde küme sayısı önceden bilinmemekte ve sadece verilerin mevcut durumuna ilişkin sonuçlar alınmaktadır. Benzerlik ölçüsü olarak veriler arasında hesaplanan uzaklık değerleri kullanılmaktadır. Literatürde Minkowski, Mahalanobis, Canberra, Hotelling T^2 ve Öklit gibi uzaklık türleri kullanılmakla beraber bu çalışmada Öklit uzaklığı kullanılmıştır (Dallas, 1998; Han ve Kamber, 2001; Tatlıdil, 2002). Kümeleme çözümlemesi çoğunlukla resim tanıma, veri madenciliği, metin madenciliği, uzaysal veritabanı uygulamaları, müşteri ilişkileri yönetimi, sağlık ve biyoloji gibi alanlarda kullanılmaktadır.

Kümeleme çözümlemesinde kullanılan kümeleme yöntemleri, hiyerarşik olan ve hiyerarşik olmayan yöntemler olarak ikiye ayrılır. Küme sayısı konusunda bir ön bilgi var ise veya araştırmacı anlamlı olacak küme sayısına karar vermiş ise kuramsal dayanakları daha güçlü olan hiyerarşik olmayan yöntemler tercih edilmektedir (Tatlıdil, 2002, 338). Bu çalışmada konu edilen k-ortalama yöntemi en çok tercih edilen hiyerarşik olmayan yöntemlerden biridir.

* Yrd. Doç. Dr. A. Fırat Özdemir, Dokuz Eylül Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü, e-posta: firat.ozdemir@deu.edu.tr

** Öğr. Gör. Dr. Engin Yıldıztepe, Dokuz Eylül Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Bilgisayar Bilimleri Bölümü, e-posta: engin.yildiztepe@deu.edu.tr

Çalışmanın 2. bölümünde k-ortalama algoritması, düzeltilmiş tek adım M-tahmin edicisi ve k-MoM algoritması tanıtılmıştır. 3. bölümde, önerilen algoritma için geliştirilen yazılım ve kullanılan veri setleri tanıtılmış, 4. bölümde ise bu veri setleri ile yapılan uygulamaların sonuçları verilmiştir. Son bölüm, elde edilen sonuçlar ile yapılan tartışmaları içermektedir.

2. YÖNTEM

2.1 K-Ortalama Algoritması, Düzeltilmiş Tek Adım M-Tahmin Edicisi ve K-MoM Algoritması

2.1.1 k-Ortalama Algoritması

Algoritma 1967 yılında J.B. MacQueen tarafından geliştirilmiştir (MacQueen, 1967). En çok kullanılan algoritmalarından birisidir ve her veri sadece bir kümeye dâhil olabilir. Eşit büyüklükte küresel kümeler bulma eğiliminde olan algoritma 4 adımda uygulanır;

1. İlk küme merkezleri olarak birimler arasından rastgele küme sayısı kadar (k) başlangıç noktası belirlenir.
2. Her birimin seçilen merkez noktalara olan uzaklıkları hesaplanır. Sonuçlara göre tüm birimler k adet kümeden kendilerine en yakın olan kümeye atanır.
3. Oluşan kümelerin yeni merkez noktaları o kümedeki tüm birimlerin aritmetik ortalamaları ile değiştirilir.
4. Merkez noktalar değişmeye kadar 2. ve 3. adımlar tekrarlanır.

k-ortalama algoritmasının daha çok büyük veri setlerinde etkili sonuçlar verdiği bilinmektedir (Han ve Kamber, 2001). Algoritmanın en büyük dezavantajlarından birisi aykırı değerlerden çok etkilenmesidir (Richard ve Dean, 1992; Fasulo, 1999; Han ve Kamber, 2001). Literatürde, kümelemenin daha güvenilir yapılabilmesi için veri seti içinde yer alan aykırı değerlerin, oluşan kümelerin dışında tutulabileceğini belirten çalışmalar görülmektedir (Guha vd., 1998; Hautamäki vd., 2005). Bu çalışmada k-ortalama algoritmasında üçüncü adımda yer alan aritmetik ortalama yerine Wilcox tarafından önerilen (Wilcox, 2003a) düzeltilmiş tek adım M-tahmin edicisi kullanılmış ve sonuçları tartışılmıştır.

2.1.2 Düzeltilmiş Tek Adım M-Tahmin Edicisi

Bir serinin merkezi, o serideki gözlem değerlerinin serinin merkezine olan uzaklıklarını en küçükleyen yerdendir. X_1, \dots, X_n n birimlik rassal örneklem,

$\psi(x)$: seride yer alan değerlerin merkeze olan uzaklığını ölçen fonksiyon ve
c: konum ölçüsü (merkez nokta) olmak üzere,

$$\psi(X_1 - c) + \psi(X_2 - c) + \dots + \psi(X_n - c) = 0 \quad (1)$$

eşitliği kullanılarak türetilen konum ölçüleri M-tipi konum ölçüsü ya da kısaca seri merkezinin M-tahmin edicisi olarak adlandırılır (Huber, 1964). Burada $\psi(x) = x$ fonksiyonu kullanılırsa aranan c konum ölçüsü,

$$\begin{aligned} (X_1 - c) + (X_2 - c) + \dots + (X_n - c) &= 0 \\ X_1 + X_2 + \dots + X_n &= nc \\ \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} &= c \end{aligned} \quad (2)$$

biçiminde görüldüğü gibi aritmetik ortalamaya eşit olur. Huber'in önerdiği $\psi(x)$ fonksiyonu ile M-tahmin edicisi Newton-Raphson gibi adimsal yöntemler ve bilgisayar yardımı ile hesaplanabilir. Yöntemin bir adım çalıştırılması ile elde edilen tek-adım M-tahmin edicisi

$$\hat{\mu}_{os} = \frac{K(MADN) + (i_2 - i_1) \sum_{i=i_1+1}^{n-i_2} X_{(i)}}{n - i_1 - i_2} \quad (3)$$

biçimindedir. Burada i_1 ve i_2 aşağıda eşitlik 5 ve 6'da verildiği gibidir ve K değeri 1.28'e eşittir. Wilcox, küçük örneklem genişliği ile çalışılması durumunda uygulamada karşılaşılan problemleri gidermek amacı ile yaptığı bir değişiklik ile düzeltilmiş tek-adım M-tahmin edicisini önermiştir (Wilcox, 2003a).

$X_{(i)}, X_i$ serisinin küçükten büyüğe sıralanmış biçimi olmak üzere düzeltilmiş tek-adım M-tahmin edicisi,

$$\hat{\mu}_{mom} = \frac{\sum_{i=i_1+1}^{n-i_2} X_{(i)}}{n - i_1 - i_2} \quad (4)$$

eşitliği ile hesaplanır. Burada,

$$i_1 : \left(\frac{(X_i - M)}{MADN} \right) < -2.24 \quad (5)$$

şartını sağlayan gözlem sayısı ve

$$i_2 : \left(\frac{(X_i - M)}{MADN} \right) > 2.24 \quad (6)$$

şartını sağlayan gözlem sayısıdır. Burada M medyan olmak üzere,

$$MADN = \frac{MAD}{0,6745} \quad (7)$$

ve

$$MAD = med(|X_1 - M|, \dots, |X_n - M|) \quad (8)$$

olarak tanımlanır.

2.1.3 k-Düzeltilmiş Tek-Adım M-Tahmin Edicisi Algoritması

Çalışmada önerilen k – düzeltilmiş tek-adım M-tahmin edicisi (k-MoM) algoritması beş adımdan oluşmaktadır. k-ortalama algoritmasından farklı olarak beşinci adımda

$$\frac{|(X_i - M)|}{MADN} > 2.24 \quad (9)$$

biçiminde tanımlanan ve Hampel belirteci olarak bilinen bir aykırı değer belirleme kuralı kullanılmıştır. Algoritma, ilk iki adımı 2.1.1 nolu alt başlıkta verilen algoritma ile aynı olmak üzere, 3. adımdan itibaren aşağıda verilmiştir.

3. Oluşan kümelerin yeni merkez noktaları o kümedeki tüm birimlerin düzeltilmiş tek adım M-tahmin edicisi ile değiştirilir.
4. Merkez noktalar değişmeyene kadar 2. ve 3. adımlar tekrarlanır.
5. Her bir küme için küme içi kareler toplamı hesaplanır. $|X_i - M| / MADN > 2.24$ koşulu gerçekleşen gözlem değerleri bu hesaplama katılmaz ve çizilen küme grafiğinde bu kümeye ait bir gözlem olarak görünmez.

2.2 Kullanılan Bilgisayar Yazılımı ve Veri Setleri

Önerilen k-MoM kümeleme algoritması için geliştirilen bilgisayar yazılımında k-ortalama algoritması da çalıştırılabilmektedir. k-MoM yazılımı Delphi 7.0 uygulama geliştirme aracı ile geliştirilmiştir.

2.2.1 Veri Kaynağının Seçilmesi

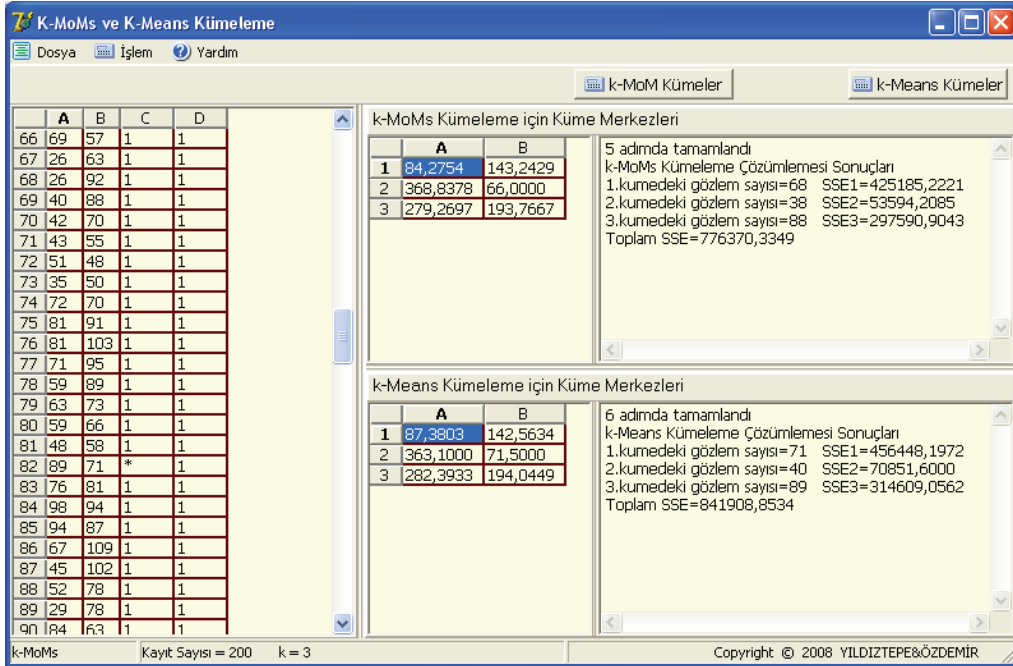
Yazılım çalıştırıldığında kullanıcının karşısına ilk olarak Şekil 1’de görülen pencere gelir. Kullanıcı bu pencereyi kullanarak öngördüğü küme sayısını (k) ve veri kaynağını belirler. Küme sayısı alanına ancak tamsayı değerler girilebilir ve birden küçük değer girilemez. Yazılımda, değişken ve kayıt sayıları belirtilerek veri girişi yapılabileceği gibi metin dosyalarında bulunan veriler de kullanılabilir. Eğer veriler bir dosyada kayıtlı ise “Dosyadan” seçeneği seçilerek “Tamam” butonuna basılır, böylece verileri içeren csv uzantılı (veriler virgülle ayrılmış) dosya kullanılabilir. Değişken ve kayıt sayılarını belirterek veri girişi yapmak için “Veri Girişi” seçeneği işaretlenmelidir. Daha sonra aktif hale gelen “Değişken Sayısı” ve “Kayıt Sayısı” alanlarına veri kümesindeki değişken sayısının ve kayıt sayısının yazılması gereklidir. “Veri Girişi” seçeneği işaretlendiğinde; değişken sayısı ve kayıt sayısı alanları boş geçilemez, değişken sayısı olarak birden, kayıt sayısı olarak ikiden küçük bir sayı girilemez. Bu alanlarda belirtilen değişken ve kayıt sayılarına göre, veriler açılan ana form üzerindeki tabloya girilebilir.

Şekil 1. Veri Kaynağı Seçimi

2.2.2 Yazılımın Kullanılması

Veri kaynağı seçildikten sonra Şekil 2’de verilen ana formda kümeleme algoritması çalıştırılabilir. Eğer veri kaynağı olarak bir dosya seçilmişse, veriler formun sol tarafındaki tabloya aktarılır. Başlangıç kümeleri bu veriler arasından belirtilen küme sayısı kadar rastgele seçilir ve k-MoM ve k-ortalama algoritmalarında kullanılmak üzere sağ tarafta bulunan tablolara aktarılır. Veri kaynağı seçimi formunda veri girişi seçilmişse, sol taraftaki tabloya veriler ve sağ taraftaki tablolara başlangıç kümeleri girilmelidir.

Veri girişi tamamlandıktan veya istenilen veri dosyası seçildikten sonra kullanıcı algoritmaları çalıştırabilir. k-MoM kümeler butonu k-MoM algoritmasını, k-Means kümeler butonu k-ortalama algoritmasını çalıştırır. Algoritma sonucunda bulunan kümelerdeki eleman sayıları, küme içi değişim değerleri ve bunların toplamı son küme merkezi değerlerini gösteren tabloların sağında belirtilir. Formun sol tarafında verilerin bulunduğu tabloda başlangıçta iki boş sütun daha vardır. Bunlardan birincisi k-MoM kümeleme sonucu, ikincisi k-ortalama kümeleme sonucu o gözlemin hangi kümeye ait olduğunu gösterir. k-MoM kümeleme sonucunda gözlemin ait olduğu kümeyi belirten sütundaki ‘*’ işareti o gözlemin aykırı değer olarak işaretlendiğini belirtir.



Şekil 2. k-MoM ve k-ortalama Kümeleme Yazılımı Ana Form

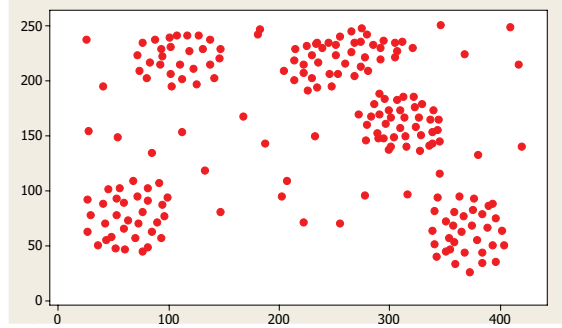
Şekil 3'te gösterilen dosya menüsü kullanılarak yeni bir veri kaynağı seçilebilir. Kaydet menüsü ile veri dosyası csv (veriler virgülle ayrılmış), algoritma sonuçları ise metin dosyası olarak kaydedilebilir. Algoritmaları çalıştırma komutları işlem menüsünden de verilebilir.



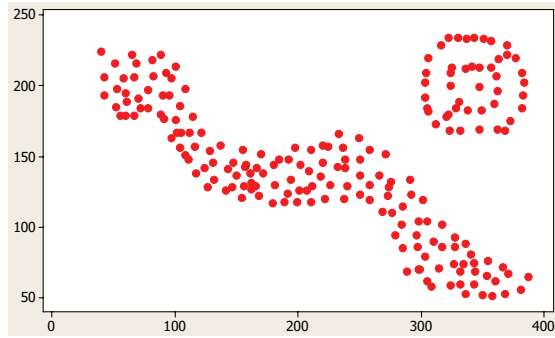
Şekil 3. Dosya Menüsü Seçenekleri

2.2.3 Kullanılan Veri Setleri

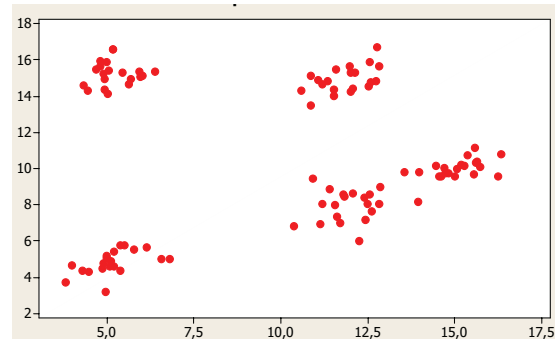
Çalışmada dört adet veri seti kullanılmıştır. Document_Sim (Şekil 4, $k=5$) ve Image Extraction (Şekil 5, $k=2$) isimli sentetik veri setleri Ösmar Zaiane ve Yalling Pei tarafından hazırlanmış veri tabanlarından alınmıştır (Zaiane ve Pei, 2008). Sentetik I (Şekil 6, $k=5$) ve Sentetik II (Şekil 7, $k=3$) ismi verilen diğer iki veri seti ise tarafımızdan MINITAB yazılımının 14. sürümü kullanılarak üretilmiştir. Bu veri setlerinden image extraction dışındakiler aykırı değer içeren veri setleridir. Sentetik I, kümelerde az sayıda gözlem olacak şekilde, Sentetik II ise kümelerde farklı sayıda gözlem olacak şekilde üretilmiştir.



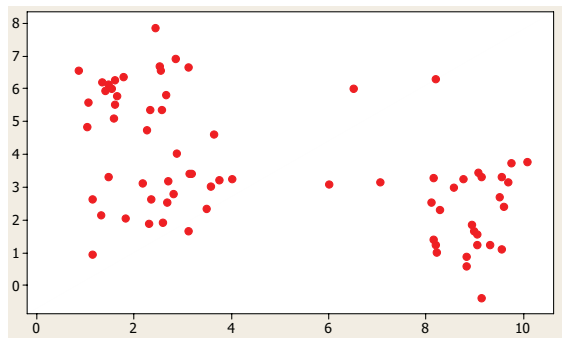
Şekil 4. Document_Sim Veri Seti



Şekil 5. Image Extraction Veri Seti



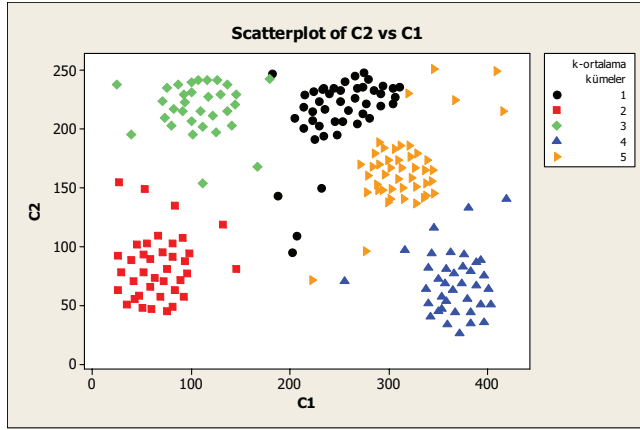
Şekil 6. Sentetik I Veri Seti



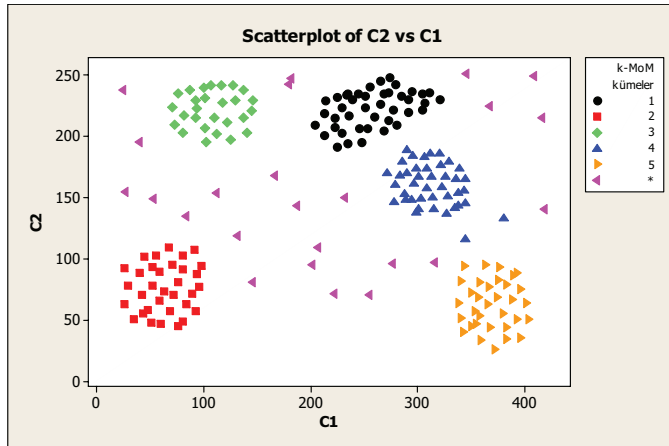
Şekil 7. Sentetik II Veri Seti

3. BULGULAR

Bu bölümde yapılan uygulamaların amacı; gerçekte kaç kümeye sahip olduğu bilinen veri setleri kullanarak hem önerilen algoritmanın bu kümeleri tespit etmedeki başarısının gözlenmesi, hem de alınan sonuçların k-ortalama algoritmasından alınan sonuçlar ile karşılaştırılmasıdır. Her iki algoritma için Şekil 4, 5, 6 ve 7’de verilen veri setleri ile gerçekleştirilen uygulamalar ve elde edilen kümeleme sonuçları bu bölümde verilmiştir.

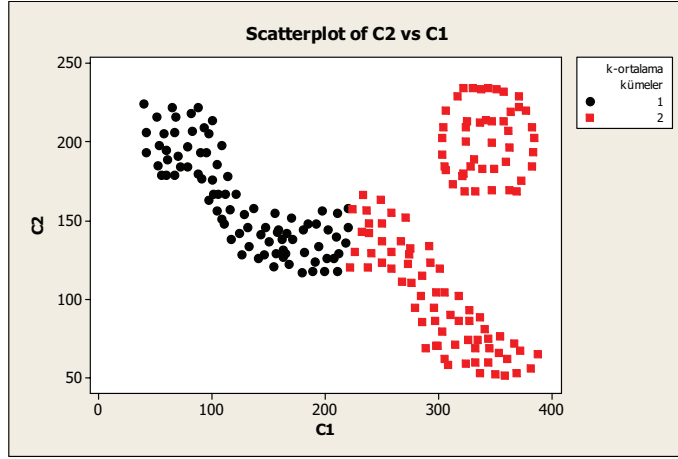


Şekil 8. Document_Sim Veri Setinde k=5 için k-ortalama Algoritması ile Elde Edilen Sonuç

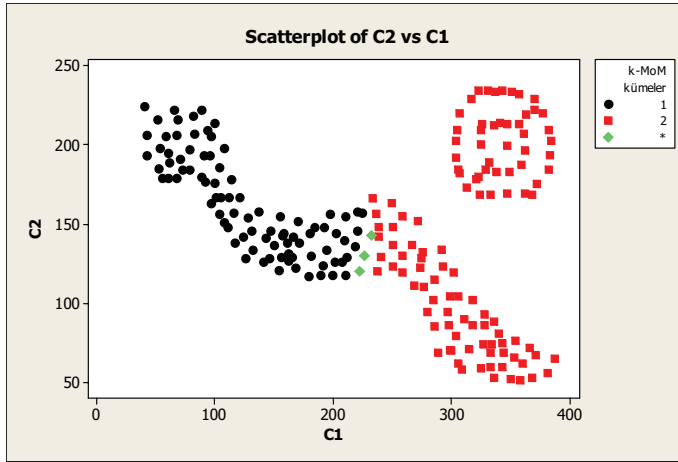


Şekil 9. Document_Sim Veri Setinde k=5 için k-MoM Algoritması ile Elde Edilen Sonuç

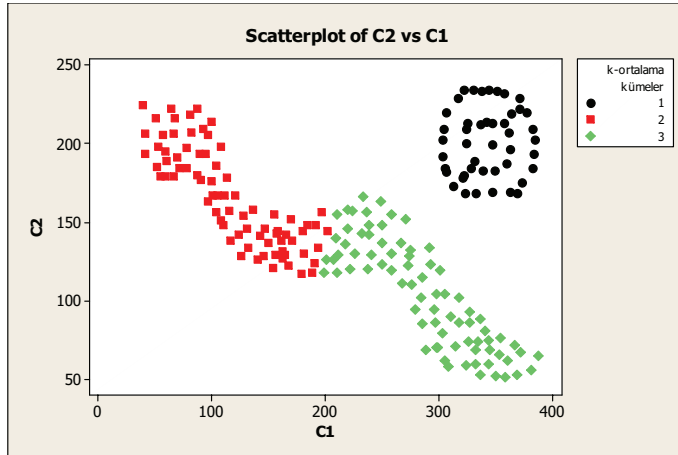
K-ortalama algoritması için Şekil 8 ve k-MoM algoritması için Şekil 9 incelendiğinde document_Sim isimli veri setinin uygulamasında k-ortalama algoritmasının aykırı değerlerden etkilendiği ve aykırı değer olduğu görülen gözlem değerlerini de kümelere dahil ettiği, k-MoM algoritmasının ise aykırı değerleri tespit etmede başarılı olduğu gözlenmektedir. Küme içi kareler toplamı (KİKT), k-ortalama için KİKT=352798,2733 değerini alırken k-MoM için KİKT=151919,4792 çıkmıştır.



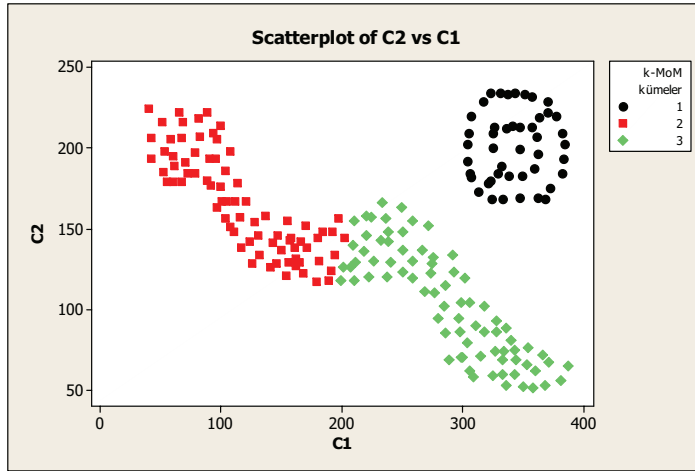
Şekil 10. Image Extraction Veri Setinde $k=2$ için k -ortalama Algoritması ile Elde Edilen Sonuç



Şekil 11. Image Extraction Veri Setinde $k=2$ için k -MoM Algoritması ile Elde Edilen Sonuç

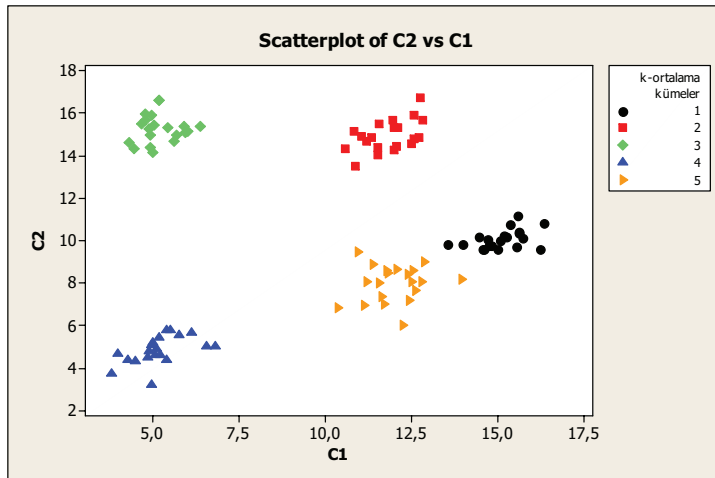


Şekil 12. Image Extraction Veri Setinde $k=3$ için k -ortalama Algoritması ile Elde Edilen Sonuç

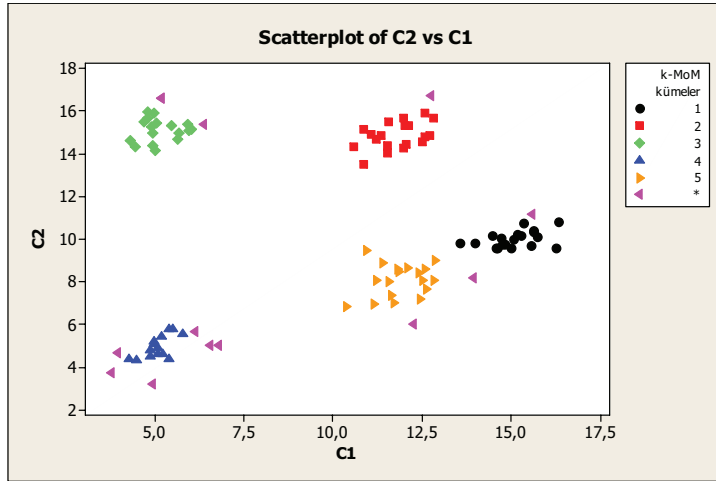


Şekil 13. Image Extraction Veri Setinde $k=3$ için k-MoM Algoritması ile Elde Edilen Sonuç

Image Extraction veri setinin 2 kümeden oluşan bir veri seti olduğu bilinmesine rağmen Şekil 5 incelendiğinde $k=2$ ve $k=3$ olmak üzere 2 farklı küme sayısı için uygulama yapılmasının faydalı olacağı düşünülmüştür. Şekil 12 ve Şekil 13 incelendiğinde $k=3$ için ortaya çıkan kümelerin aynı olduğu gözlenmiştir. Bu iki şekil için küme içi kareler toplamı değerleri de aynı çıkmıştır. $k=2$ için Şekil 10 (k-ortalama) ve Şekil 11 (k-MoM) incelendiğinde k-MoM algoritmasının 3 gözlemi aykırı değer olarak tespit ettiği, ancak her iki algoritma tarafından belirlenen kümelerin oldukça benzer olduğu görülmüştür. Burada k-ortalama için $KİKT=899176,5369$ ve k-MoM için $KİKT=874216,4064$ olarak hesaplanmıştır. Elde edilen $KİKT$ değerlerinin yakınlığı ve her iki algoritma tarafından belirlenen kümelerin benzerliği düşünüldüğünde k-MoM algoritmasının aykırı değer içermeyen veri setlerinde, k-ortalama algoritması ile benzer sonuçlar verdiği söylenebilir.

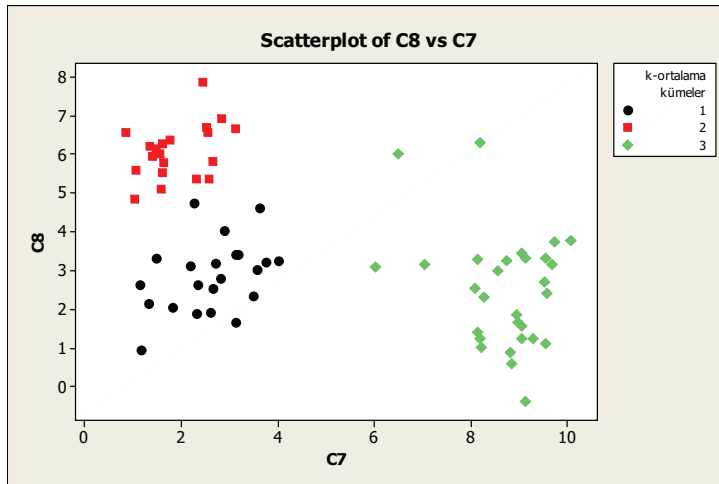


Şekil 14. Sentetik I Veri Setinde $k=5$ için k-ortalama Algoritması ile Elde Edilen Sonuç

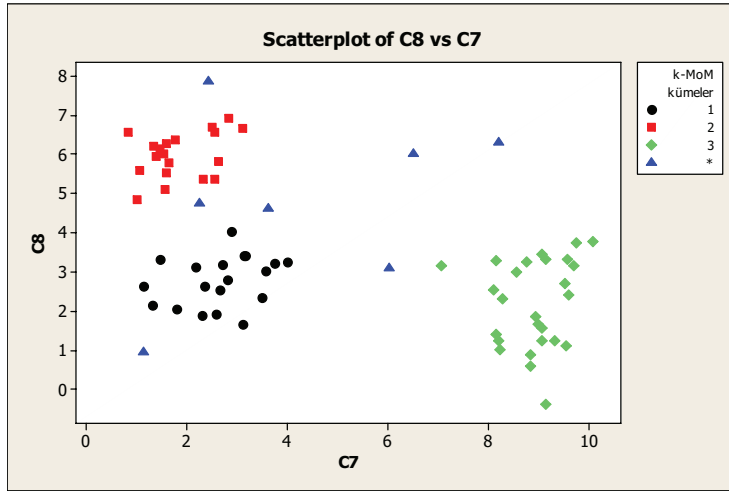


Şekil 15. Sentetik I Veri Setinde $k=5$ için k-MoM Algoritması ile Elde Edilen Sonuç

Sentetik I veri setinde içerdikleri gözlem sayısı az olan, aykırı değer içeren ve birbirinden aykırık 5 küme bulunmaktadır. Şekil 14 ve Şekil 15 incelendiğinde her iki algoritmanın da genel olarak bu kümeleri tespit etmede başarılı olduğu görülmüştür. Ancak, k-MoM algoritması kümeleri doğru tespit etmesinin yanında veri setinde yer alan aykırı değerleri de belirlemiştir ve $KİKT=60,3685$ ile k-ortalama yöntemine ait $KİKT=93,5886$ değerinden daha düşük bir küme içi değişime sahiptir.



Şekil 16. Sentetik II Veri Setinde $k=3$ için k-ortalama Algoritması ile Elde Edilen Sonuç



Şekil 17. Sentetik II Veri Setinde k=3 için k-MoM Algoritması ile Elde Edilen Sonuç

Sentetik II veri seti, farklı sayıda gözlem içeren ve aykırı değerlerin yer aldığı kümelerden oluşmaktadır. k-ortalama algoritması için Şekil 16, k-MoM algoritması için Şekil 17 incelendiğinde bu veri setinde de algoritmaların aykırı değerleri tespit etmedeki farklılığı gözlenmektedir. k-ortalama algoritmasının KİKT değeri aykırı değerleri tespit edemediği için 143,0664, k-MoM algoritmasının KİKT değeri ise 76,8795 olarak hesaplanmıştır.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

k-ortalama algoritması, veri seti içindeki aykırı değerlerden çok etkilenen bir algoritmadır. Algoritma gereği her nesne mutlaka bir küme içinde yer almaktadır. Bunun sonucu olarak, oluşan kümelerin homojen yapısı bozulmakta ve belirlenen küme merkezleri, küme içinde yer alan aykırı değerlere doğru kaymaktadır. k-MoM algoritması içinde yer alan aykırı değer belirleme adımı nedeniyle veri seti içinde yer alan bir aykırı değerın ortaya çıkan bir kümedeki homojenlik yapısını bozması ve merkezi kendine doğru çekmesi engellenmiştir.

Geliştirilen yazılım ile yapılan denemelerde k-MoM algoritmasının küme merkezlerini bulmada ve kümeleri oluşturmada, k-ortalama algoritmasına göre başlangıç noktalarının değişmesinden daha az etkilendiği gözlenmiştir. KİKT değerleri aynı başlangıç noktaları ile uygulama yapıldığında k-ortalama algoritmasına göre her zaman daha küçük çıkmıştır. k-MoM algoritması, tercih edilen küme sayısına bağlı olarak aykırı değer içermeyen veri setlerindeki homojen yapıları, k-ortalama algoritması ile benzer biçimde tespit edebilmesinin yanında, aykırı değer içeren veri setlerine uygulandığında homojen yapıların tespit edilmesi ile beraber aykırı değerleri de belirlemektedir. k-MoM algoritması ve geliştirilen yazılım, aykırı değer içeren veri setlerinde kümeleme çözümlemesi yapılırken, aykırı değerlerden etkilendiği bilinen geleneksel k-ortalama algoritmasına bir seçenek olarak önerilmektedir.

5. KAYNAKLAR

- Dallas, E.J., 1998. Applied multivariate methods for data analysts. Duxbury Press.
- Fasulo, D., 1999. An analysis of recent work on clustering algorithms. Technical Report, 01-03-02. Department of Computer Science and Engineering, University of Washington. (in English).
- Guha, S., Rastogi R., Shim, K., 1998. CURE an efficient clustering algorithm for large databases. Proceedings of the 1998 ACM SIGMOD International Conference on Management of Data, L. M. Haas, A. Tiwary (eds.), Seattle, Washington. 73–84.
- Han, J., Kamber M., 2001. Data mining concepts and techniques. Morgan Kauffmann Publishers Inc. San Fransisco.
- Hautamäki, V., Cherednichenko, S., Kärkkäinen, I. Kinnunen, T., Fränti, P., 2005. Improving K-Means by outlier removal. Lecture Notes in Computer Sciences, Springer/Heidelberg. 978–987.
- Huber, P.J., 1964. Robust estimation of location parameters. Annals of Mathematical Statistics, 35, 73–101.
- MacQueen, J., 1967. Some methods for classification and analysis of multivariate observations. University of California Pres, Berkeley.
- Richard, A.J, Dean, W.W., 1992. Applied multivariate statistical analysis. Prentice-Hall, New Jersey.
- Tatlıdil, H., 2002. Uygulamalı çok değişkenli istatistiksel analiz. Ziraat Matbaacılık, Ankara.
- Wilcox R.R., 2003a. Applying contemporary statistical techniques. Academic Pres.
- Wilcox, R.R. 2003b. Multiple comparisons based on a modified one-step M-estimator. Journal of Applied Statistics, 37, 1231–1241.
- Wilcox, R.R., Keselman, H.J., 2003. Repeated measure one-way ANOVA based on a modified one-step M estimator. British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 56, 15–25.
- Zaiane, O., Pei, Y., 2008. <http://www.cs.ualberta.ca/~yaling/Cluster/Applet/Code/Cluster.html>, Temmuz 2008.

CLUSTER ANALYSIS WITH MODIFIED ONE-STEP M-ESTIMATOR

ABSTRACT

Cluster analysis is one of the most widespread multivariate statistical analysis methods. Modified one-step M-estimator is developed with a modification on Huber's M-estimator (Huber, 1964) by Wilcox (Wilcox, 2003a) which is used in analysis of variance (Wilcox and Keselman, 2003) and multiple comparisons (Wilcox, 2003b) since then. In this study, k-means method which is classified as non-hierarchical clustering method has been presented with an algorithm that uses modified one-step M-estimator instead of mean.

Keywords: Modified one-step M-estimator, k-Means clustering, Cluster analysis.

DEĞİŞİM KATSAYILARININ EŞİTLİĞİNE İLİŞKİN TESTLERİN I. TİP HATA VE GÜÇ BAKIMINDAN KARŞILAŞTIRILMASI

Nihan POTAS*

Hamza GAMGAM**

ÖZET

Bu çalışmada değişim katsayılarının eşitliğine ilişkin hipotezler için bazı test istatistikleri tanıtılmış ve karşılaştırılmıştır. Karşılaştırmalar için bir simülasyon çalışması yapılmıştır. Simülasyon çalışması her biri normal dağılımlı farklı yığın sayıları ($k = 2, 4$ ve 6), farklı örnek hacimleri ($n=10, 30, 50$ ve 100) ve farklı I. tip hata düzeyleri ($\alpha=0,01$ ve $0,05$) için tasarlanmıştır. Simülasyon çalışmasında değişim katsayılarının eşitliği hipotezini test etmede kullanılan bazı test istatistiklerinin, I. tip hata ve testin gücü bakımından karşılaştırması yapılmış ve özellikle, testin gücüne ilişkin sonuçların istatistik kuramıyla uyum sağladığı görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Bennett testi, Değişim katsayısı, Karesel rank testi, Olabilirlik oran testi, Wald testi.

1. GİRİŞ

Ortalama birim başına düşen standart sapmaya değişim katsayısı denir. Bir başka deyişle değişim katsayısı, standart sapmanın ortalamaya göre ne kadar değişim gösterdiğini belirtir. Bu nedenle görelî değişkenliğin bir ölçüsüdür. İlgilenilen yığınların ortalama ve varyansları farklı olsa bile, aynı görelî değişkenliğe sahip olabilirler.

Değişim katsayısı klimatoloji, mühendislik, psikiyatri, biyoloji, fizik, finans, sağlık gibi birçok alanda önemli bir kavramdır. Örneğin, finans alanında değişim katsayıları görelî riski hesaplamada kolaylık sağlamaktadır. İki hisse senedi değişim katsayılarının eşitliği hipotezinin testi ile bu hisse senetlerinin aynı riske sahip olup olmadığı çok rahat belirlenebilir (Miller, 1991a).

Değişim katsayılarının eşitliği hipotezinin testi için bir başka örnek psikiyatri alanından verilebilir. Paranoit sizofrenler, Paranoit olmayan sizofrenler ve bir de kontrol grubu olacak şekilde üç grup olduğu varsayalım. Hastaların verilen görevlere karşı gösterdikleri tepki zamanlarıyla ilgili ortalama ve varyansların oldukça farklı, fakat görelî değişkenliklerinin aynı olduğu düşünölsün. Böyle bir durumda bağımlı değişkene uygulanacak bir dönüşüm ile grupların varyanslarının homojenliği sağlanıp, ortalamaların eşitliği hipotezi test edilebilir. Ancak bazen uygulanacak dönüşüm ile varyanslar homojen hale getirilemeyebilir. İşte bu durumlarda görelî değişkenliğin karşılaştırılması önemlidir ve değişim katsayılarının eşitliği hipotezinin testini kullanmak doğru bir yaklaşımdır (Shafer ve Sullivan, 1986).

*Gazi Üniversitesi, Ticaret ve Turizm Eğitim Fakültesi, Bilgisayar Uygulamaları Eğitimi Bölümü, Ankara, e-posta: nihanp@gazi.edu.tr

** Gazi Üniversitesi, Fen ve Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, Ankara, e-posta: gamgam@gazi.edu.tr

Bennett (1976), k sayıda normal dağılımlı yığınların değişim katsayılarının eşitliği hipotezi için Bennett Testini önermiştir. Bu çalışmada, McKay (1932) tarafından önerilen örnek değişim katsayısının dağılımı yaklaşımı kullanılmıştır .

Daha sonra Bennett (1977) k sayıda normal dağılımlı yığınlar için Olabilirlik Oran Testini önermiştir. Bu test istatistiği Miller ve Karson (1977) tarafından önerilen Olabilirlik Oran Test istatistiğinin benzeridir (Shafer ve Sullivan, 1986).

Normal dağılımlı yığınlarda değişim katsayılarının eşitliği hipotezinin testi için Doornbos ve Dijkstra (1983), Bennett (1977) tarafından önerilen Olabilirlik Oran Testi ve Merkezi Olmayan t Testini simülasyon yöntemi kullanarak karşılaştırmıştır. Ancak, Olabilirlik Oran Testi iki örnekten fazlası için cebirsel olarak çözümü olmayan denklemler içermektedir. Nairy ve Rao (2003), Lehmann ve Casella (1998) tarafından önerilen ikinci derece tahmin edicileri kullanarak bu denklemler için önerilerde bulunmuşlardır.

Genelde örneklerin geldiği yığınların dağılımlarının normal olduğuna dayanan değişim katsayılarının eşitliği hipotezinin testi için test istatistikleri önerilmiştir. Ancak, Conover ve Iman (1978) tarafından geliştirilen Karesel Rank Testini, Miller (1991b) ham veri kümesine uygulanan basit bir dönüşüm ile k sayıda normal dağılım göstermeyen yığınların değişim katsayılarının eşitliği hipotezinin testi için kullanmıştır.

Normal dağılımlı iki yığının değişim katsayılarının eşitliği hipotezinin testi için Rao ve Vidya (1992) Wald Testini geliştirmişlerdir .

İzleyen bölümde değişim katsayılarının eşitliği hipotezinin testi için Bennett Testi, Wald Testi, Olabilirlik Oran Testi ve Karesel Rank Testi tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde bu test istatistiklerini I. tip hata ve testin gücü bakımından karşılaştırmak için yapılan simülasyon çalışmasına yer verilmiştir. Son bölümde de sonuç ve öneriler üzerinde durulmaktadır.

2. YÖNTEM

Bu bölümde değişim katsayılarının eşitliği hipotezini test etmede kullanılan; Bennett, Wald, Olabilirlik Oran ve Karesel Rank Testleri tanıtılmıştır.

Her biri n_i , $i = 1, 2, \dots, k$, hacimli k sayıda bağımsız örnekler $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i}$ olsun. Bu örneklerin μ_i ortalamalı ve σ_i^2 varyanslı normal dağılımlardan geldiği varsayalım. $E(X_{ij}) = \mu_i$ ve $Var(X_{ij}) = \sigma_i^2$ $j = 1, 2, \dots, n_i$ biçiminde gösterelim.

Yığın için değişim katsayısı

$$R_i = \sigma_i / \mu_i \quad (1)$$

ve örnek için değişim katsayısı

$$r_i = s_i / \bar{x}_i \quad (2)$$

olarak tanımlanır. Burada s_i ve \bar{x}_i sırasıyla örnek standart sapması ve örnek ortalamasıdır.

$$H_0 : R_i = R, i = 1, 2, \dots, k, \quad (3)$$

hipotezi

$$H_1 : R_i \neq R_j, i \neq j \text{ en az bir } (i, j) \text{ çifti için,}$$

hipotezine karşı test edilmek istenmektedir. İzleyen bölümde değişim katsayılarının eşitliği hipotezinin testi için önerilen test istatistiklerinden bazıları verilmiştir.

2.1 Bennett Testi (BT)

Bennett (1976), Pitmann (1939) tarafından önerilen hipotez testi yöntemine, McKay'ın yaklaşımını uygulayarak BT'yi önermiştir. McKay (1932)'ın yaklaşımı örnek varyansının serbestlik derecesinin n olarak alınmasına yöneliktir (Bennett, 1976).

BT için örnek ortalaması ve örnek varyansı, sırasıyla,

$$\bar{x}_i = \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} / n_i \quad (4)$$

ve

$$s_i^2 = \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{x}_i)^2 / n_i \quad (5)$$

olsun. McKay (1932), $d_i = n_i r_i^2 / (r_i^2 + 1)$ ve $D_i = (R_i^2 + 1) / R_i^2$ olmak üzere; $B_i = D_i d_i$ olarak tanımlanan istatistiğinin $n_i - 1$ serbestlik dereceli χ^2 dağıldığını göstermiştir. Bennett (1976) $H_0 : D_1 = D_2 = \dots = D_k$ hipotezini test etmenin, eşitlik 3'te verilen hipotezi test etmeye eşit olduğunu göstermiştir. Bu hipotezin testi için Bennett (1976) tarafından önerilen Olabilirlik Oran Test istatistiği olan λ istatistiği, $n = \sum_{i=1}^k n_i$ olmak üzere,

$$-2 \ln \lambda = (n - k) \ln \sum_{i=1}^k (d_i / (n - k)) - \sum_{i=1}^k ((n_i - 1) \ln d_i / (n_i - 1)) \quad (6)$$

olarak tanımlanmıştır. McKay (1932)'ın B_i istatistiğinin dağılımından yola çıkarak Bennett (1976) bu test istatistiğinin $k - 1$ serbestlik dereceli χ^2 dağılımına sahip olduğunu göstermiştir (Bennett, 1976).

2.2 Wald Testi (WT)

$R = [R_1, R_2, \dots, R_k]'$ bilinmeyen parametreler vektörü ve $r = [r_1, r_2, \dots, r_k]'$ vektörü de bu parametrelerin kısıtsız en çok olabilirlik tahmin edicisi olsun.

Yokluk hipotezi

$$H_o : h(R) = [h_1(R), h_2(R), \dots, h_{k-1}(R)]' = 0 \quad (7)$$

ya da bir başka gösteriş şekliyle

$$H_o : h(R) = [R_1 - R_2, R_2 - R_3, \dots, R_{k-1} - R_k]' = 0$$

olsun. $h(R)$ için kısıtsız en çok olabilirlik tahmin edicisi $h(r)$ ile gösterilsin.

Elemanları

$$H(R) = \partial h_i(R) / \partial R_{j^{**}}, \quad i = 1, 2, \dots, k-1, \quad j^{**} = 1, 2, \dots, k$$

olan $(k-1) \times (k)$ boyutlu $H(R)$ matrisi

$$H(R) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}_{(k-1) \times (k)}$$

olsun ve bunun tahmin edicisi $H(r)$ ile gösterilsin. Kısıtsız en çok olabilirlik tahmin edicisi olan r_i istatistiğinin varyansı $Var(r_i) = n_i^{-1}(r_i^4 + 1/2r_i^2)$ olur (Kendall ve Stuart, 1977). Buna göre, $Var(r) = diag[Var(r_1), \dots, Var(r_k)]$ olmak üzere, WT istatistiği

$$W = h'(r)[H(r)Var(r)H'(r)]^{-1} h(r) \quad (8)$$

olarak tanımlanır (Rao ve Vidya, 1992; Gupta ve Ma, 1996).

W test istatistiği asimptotik olarak $k-1$ serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahiptir. Rao ve Vidya (1992) Wald test istatistiğini eşit örnek hacimleri için önermiştir. Ancak, Gupta ve Ma (1996) bu test istatistiği üzerine değişiklikler yapıp genel bir hale getirerek, eşit olmayan örnek hacimleri için öneride bulunmuşlardır.

2.3 Olabilirlik Oran Testi (ONR)

H_o hipotezinin doğruluğu varsayımı altında, L_o olabilirlik fonksiyonu

$$L_o = \prod_{i=1}^k (1/\sqrt{2\pi}\mu_i R)^{n_i} \exp \left[-\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \mu_i)^2 / 2\mu_i^2 R^2 \right] \quad (9)$$

olarak gösterilsin. H_o hipotezinin doğruluğu varsayımı altında Doornbos ve Dijkstra (1983) bu olabilirlik fonksiyonundan yararlanarak olabilirlik eşitliklerini

$$\sum_{i=1}^k n_i (1 + \sqrt{1 + 4(1 + r_i^2)R^2}) / 2(1 + r_i^2) - \sum_{i=1}^k n_i = 0 \quad (10)$$

ve

$$\mu_i = \left[(1 + \sqrt{1 + 4(1 + r_i^2)R^2}) / 2(1 + r_i^2) \bar{x}_i \right]^{-1} \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (11)$$

olarak elde etmişlerdir. Bu eşitlikler için Doornbos ve Dijkstra (1983) kompleks çözümler önermişlerdir. Bu eşitliklerin $k > 2$ için cebirsel çözümü mümkün

olmadığından, Doornbos ve Dijkstra (1983), Miller ve Karson (1977)'nin önerdikleri yöntemle benzer bir yöntem sunmuşlardır. Ancak, Nairy ve Rao (2003) $k > 2$ için cebirsel çözümü olmayan bu eşitlikler için alternatif bir çözüm yolu sunmuşlardır. Bu eşitliklerin çözümü için Lehmann ve Casella (1998) teoreminden faydalanmışlardır. Bu teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.3.1 (Lehmann ve Casella, 1998)

θ bir parametre olsun ve $\hat{\theta}_n$ istatistiğinde, θ 'nın \sqrt{n} tutarlı kestiricisi olsun. Buna göre $\hat{\theta}_n$ istatistiği, θ parametresine yaklaşıırken, $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$ en az $n^{-1/2}$ oranında sınırlanır. O zaman,

$$\delta_n = \hat{\theta}_n - L''(\hat{\theta}_n)/L'''(\hat{\theta}_n) \quad (12)$$

tahmin edicisi asimptotik olarak etkindir.

Eşitlik 10 ve 11'de verilenler birinci dereceden tahmin edicilerdir. Lehmann teoremindeki eşitlikte sağ taraftaki δ_n ile $\hat{\theta}_n$ yer değiştirmesiyle ikinci dereceden tahmin edici bulunur. Bu tahmin ediciler tıpkı birinci dereceden tahmin ediciler gibi ikinci sıralı etkinliğe sahiptir. Bu bilgilere göre Nairy ve Rao (2003) tarafından önerilen yöntem; her bir yığından alınan örnek hacimleri n_i ve toplamları $n = \sum n_i$ olduğunda, Eşitlik 2'de verilen örnek için değişim katsayısı olan r_i istatistiğinin dağılımının asimptotik normalliğinde,

$$\tilde{R}_n = \sum n_i r_i / \sum n_i$$

istatistiği R 'nin $n^{1/2}$ tutarlı tahmin edicisidir, biçiminde ifade edilebilir.

$$G(\tilde{R}_n) = \sum_{i=1}^k n_i (1 + \sqrt{1 + 4(1 + r_i^2)\tilde{R}_n^2}) / 2(1 + r_i^2) - \sum_{i=1}^k n_i \quad (13)$$

ve

$$G'(\tilde{R}_n) = \sum_{i=1}^k 2n_i \tilde{R}_n (1 + 4(1 + r_i^2)\tilde{R}_n^2)^{1/2} (1 + r_i^2) / (1 + r_i^2) \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (14)$$

olmak üzere, R parametresinin ikinci dereceden tahmin edicisi

$$\hat{R} = \tilde{R}_n - G(\tilde{R}_n)/G'(\tilde{R}_n) \quad (15)$$

olur (Nairy ve Rao, 2003). Burada Lehmann ve Casella (1998)'in teoreminden faydalanarak ikinci dereceden tahmin edici \hat{R} kullanılmaktadır. \hat{R} 'yi eşitlik 11'de R 'nin yerine koyarak μ_i parametresinin ikinci dereceden tahmin edicisi olan

$$\hat{\mu}_i = \left[(1 + \sqrt{1 + 4(1 + r_i^2)\hat{R}^2}) / 2(1 + r_i^2)\bar{x}_i \right]^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (16)$$

bulunur. λ olabilirlik oran istatistiği olmak üzere,

$$-2\ln\lambda = \sum_{i=1}^k n_i \ln \left(\hat{\mu}_i^2 \hat{R}^2 / S_i^2 \right) \quad (17)$$

eşitliği yazılabilir. $-2 \ln \lambda$ istatistiği asimptotik olarak $k-1$ serbestlik dereceli χ^2 dağılır (Cox ve Hinkley, 1974; Silvey, 1975).

2.4 Karesel Rank Testi (KRT)

Daha önce bahsedilen testler örneklerin geldikleri yığınların, dağılımlarının normal olduğu durumda önerilen test istatistikleridir. Ancak, KRT parametre dışı bir test olup örneklerin geldikleri yığınların dağılımlarının normal olma varsayımının sağlanmasını gerektirmez. Her biri n_i hacimli k sayıda bağımsız örnekler

$X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$, olarak gösterilsin. Bu örnekler için

$$Y_{ij} = X_{ij} / \mu_i, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad \text{ve} \quad j = 1, 2, \dots, n_i \quad (18)$$

olarak tanımlansın.

Bütün i, j için $E(Y_{ij}) = 1$ ve $Var(Y_{ij}) = (\sigma_i / \mu_i)^2 = R_i^2$ olur (Miller, 1991a).

Varyansların eşitliği hipotezinin testi için Conover (1980) KRT'yi önermiştir. Bu test istatistiğini Miller (1991) değişim katsayılarının eşitliği hipotezinin testinde kullanabilmek için $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$ ham veri kümesine eşitlik 18'de verilen dönüşümü uygulayarak, $Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{in_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$ verisini kullanmıştır (Miller, 1991). Bu dönüşümden elde edilen yeni veri kümesi, ham veri kümesiyle aynı performansa sahiptir. Conover (1980), $i = 1, 2, \dots, k$, $j = 1, 2, \dots, n_i$ olmak üzere, U_{ij}

değişkenini $U_{ij} = |X_{ij} - \mu_i|$ olarak tanımlamıştır.

Miller (1991) ise U_{ij} değişkenini,

$$U_{ij} = |Y_{ij} - 1|, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad \text{ve} \quad j = 1, 2, \dots, n_i$$

olarak tanımlamıştır ve Conover (1980) gibi bu U_{ij} 'lere büyüklük sıra sayıları atayarak bunları $R(U_{ij})$ ile göstermiştir. i . örnek için bu sıra sayılarının karelerinin toplamı için

$$T_i = \sum_{j=1}^{n_i} [R(U_{ij})]^2, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

eşitliği yazılabilir. $n = \sum_{i=1}^k n_i$ olmak üzere, sıra sayılarının karelerinin ortalaması

$$\bar{T} = \sum_{i=1}^k T_i / n$$

olarak bulunur. Bu sıra sayılarının karelerinin varyansı,

$$D^2 = \left[\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} [R(U_{ij})]^4 - n(\bar{T})^2 \right] / (n-1)$$

olarak bulunmuştur (Miller, 1991). $H_0 : R_1 = R_2 = \dots = R_k$ hipotezinin testi için önerilen KRT istatistiği

$$KRT = \left[\sum_{i=1}^k \frac{T_i^2}{n_i} - n\bar{T}^2 \right] / D^2 \quad (19)$$

olarak tanımlanmıştır (Conover ve Iman, 1978). Bu istatistik $k-1$ serbestlik dereceli χ^2 dağılımına sahiptir.

3. BULGULAR

Bu bölümde önceki bölümde tanıtılan testlerin karşılaştırması için simülasyon çalışmasına yer verilmiştir. Bu simülasyon çalışması iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda çalışmada yer alan 4 test istatistiğinin birinci tip hata bakımından karşılaştırması yapılmıştır. İkinci kısımda ise bu testlerin güç karşılaştırmalarına yer verilmiştir. Simülasyon çalışmasında her bir durum için iterasyon (tekrar) sayısı 10000 olarak alınmıştır ve her bir test yöntemi için bir MATLAB program kodu hazırlanmıştır. Elde edilen sonuçlar tablo ve şekillerle verilmiştir.

Gerek I. tip hataların karşılaştırılmasında, gerekse testin gücüne ilişkin karşılaştırmalarda herbiri normal dağılıma sahip olmak üzere, yığın sayısı (k) 2, 4, 6 ve örnek hacimleri de 10, 30, 50 ve 100 olarak alınmıştır. I. tip hata bakımından karşılaştırmalar, nominal $\alpha = 0,01$ ve $0,05$ olmak üzere iki farklı düzey için yapılmıştır.

3.1 I. Tip Hata Bakımından Karşılaştırmalar

Bu kısımda I. tip hata bakımından karşılaştırmalarda farklı k , n ve nominal α değerleri için deneysel I. tip hata değerleri elde edilmiştir. Bu değerler, nominal α değerleri olan 0,01 ve 0,05 ile karşılaştırılmıştır. Her bir test için deneysel I. tip hata değerinin nominal α değerine yakınsama durumu incelenmiştir.

Bu inceleme için değişim katsayısı %10 olan ortalaması ve varyansı farklı normal dağılımlı yığınlardan 10000 defa rassal örnekler türetilmiş ve değişim katsayılarının birbirine eşit olduğu şeklindeki yokluk hipotezi test edilmiştir. Bu şekilde yokluk hipotezinin reddedilme oranı hesaplanmıştır. Bu oran deneysel I. tip hata olarak alınmıştır. Elde edilen sonuçlar nominal α 'nın 0,01 ve 0,05 değerleri için Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1. Farklı k ve n değerleri durumunda nominal $\alpha=0,01$, $\alpha=0,05$ ve $R_i = 0,1$ ($i = 2, 4, 6$) için deneysel I. tip hata değerleri

I. tip hata		nominal $\alpha = 0,01$				nominal $\alpha = 0,05$			
k	n	BT	WT	ONR	KRT	BT	WT	ONR	KRT
2	10	0,0113	0,0070	0,0217	0,0111	0,0585	0,0429	0,0734	0,0646
	30	0,0093	0,0098	0,0133	0,0110	0,0497	0,0513	0,0568	0,0517
	50	0,0118	0,0100	0,0106	0,0128	0,0475	0,0491	0,0558	0,0562
	100	0,0099	0,0097	0,0109	0,0120	0,0492	0,0518	0,0497	0,0544
4	10	0,0136	0,0319	0,0233	0,0103	0,0631	0,0880	0,0815	0,0622
	30	0,0122	0,0139	0,0140	0,0117	0,0541	0,0580	0,0597	0,0561
	50	0,0117	0,0140	0,0120	0,0115	0,0504	0,0582	0,0556	0,0574
	100	0,0097	0,0119	0,0117	0,0124	0,0488	0,0545	0,0514	0,0535
6	10	0,0110	0,0429	0,0231	0,0132	0,0567	0,1071	0,0926	0,0648
	30	0,0102	0,0209	0,0140	0,0111	0,0505	0,0736	0,0620	0,0596
	50	0,0102	0,0170	0,0123	0,0124	0,0519	0,0636	0,0558	0,0540
	100	0,0112	0,0134	0,0101	0,0103	0,0491	0,0553	0,0570	0,0524

nominal $\alpha=0,01$ için iki yığının ($k=2$) olduğu durum incelendiğinde, $n=10$ iken en iyi test yönteminin KRT olduğu görülmektedir. $n=10$ durumunda KRT'den elde edilen deneysel birinci tip hata değeri 0,0111'dir. Bu değer nominal α değeri olan 0,01'e oldukça yakındır. $n=10$ durumunda ONR ise nominal α değeri olan 0,01'e en uzak değeri vermiştir. $n=10$ durumunda yığın sayısına göre incelemeler yapıldığında en istikrarlı sonuçları BT'nin verdiği görülmektedir. Tüm k durumlarında örnek hacmi arttıkça, deneysel I. tip hata değeri nominal α değeri olan 0,01'e yakınsamaktadır. $k=2$ ve örnek hacmi 100 iken KRT testinden elde edilen sonuç 0,01 değerinin uzağında kalmaktadır. k değeri arttıkça WT'ye ait sonuçlardaki kötüleşme de çok belirgindir. $n=10$ durumunda ONR testi iyi olmayan sonuçlar verirken, WT testi k arttıkça kötüleşen sonuçlar vermektedir. Genel olarak tüm k durumlarında testlerin hepsinde örnek hacmi arttıkça, sonuçlarda bir iyileşme gözlenmektedir.

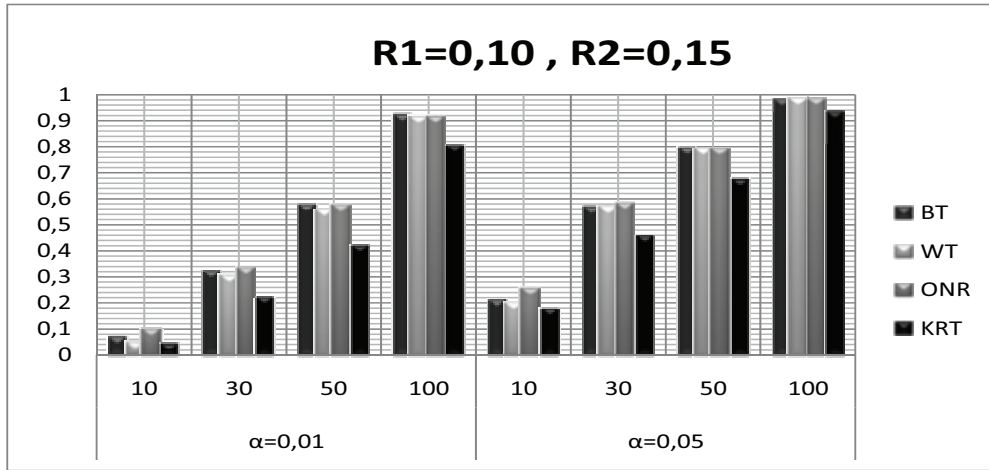
3.2 Güç Karşılaştırmaları

Güç karşılaştırmalarında farklı k , n ve α değerleri için testin gücüne ilişkin sonuçlar verilmiştir. Bu inceleme için değişim katsayıları farklı olan k sayıda yığından rassal örnekler 10000 defa seçilmiş ve değişim katsayılarının birbirine eşit olduğu şeklindeki yokluk hipotezi test edilmiştir. k sayıda değişim katsayısının eşitliğini ifade eden yokluk hipotezinin reddedilme sayısı toplam iterasyon sayısına bölünerek, testin gücü hesaplanmıştır. k sayıda yığının olduğu durumda değişim katsayısı farklı olan $1, 2, \dots, k-1$ yığın için tüm durumlar incelenmiştir. Örneğin $k=4$ olduğunda değişim

katsayısı farklı olan 1 yığın, değişim katsayısı farklı olan 3 yığın, olmak üzere tüm durumlar incelenmiştir.

k sayıda yığının olduğu durumda değişim katsayıları birbirinden farklı olan yığın sayısı arttıkça, dağılımdaki farklılaşmayı yakalamak daha kolay olacağından testin gücünün artması beklenir. Böylece değişim katsayıları birbirinden farklı olan yığın sayılarına göre de testlerin karşılaştırılması mümkün olmaktadır. Bir test istatistiği için testin gücünün yüksek olması arzulanan bir durumdur. Bilindiği gibi testin gücü, dağılımdaki farklılaşma miktarı, örnek hacmi ve I. tip hatanın bir fonksiyonudur. I. tip hatanın karşılaştırılmasında olduğu gibi elde edilen sonuçlar verilerek yorumlanmıştır.

$k = 2$ durumu için testin gücüne ilişkin sonuçlar incelendiğinde $\alpha = 0,01$ durumunda $n = 10, 30$ değerleri için ONR testi en iyi sonuçları vermiştir. $n = 50$ durumunda ONR ve BT testleri en iyi sonucu vermektedir. Örnek hacmi arttıkça KRT testindeki kötüleşme daha net bir şekilde görülmektedir. $n = 30$ ve daha büyük iken KRT testinden elde edilen sonuçlar, diğer testlerinden elde edilen sonuçlardan daha düşüktür. $n = 50$ ve 100 değerleri için KRT testi hariç, diğer tüm test sonuçları Şekil 1'de görüldüğü gibi birbirine çok yakındır.

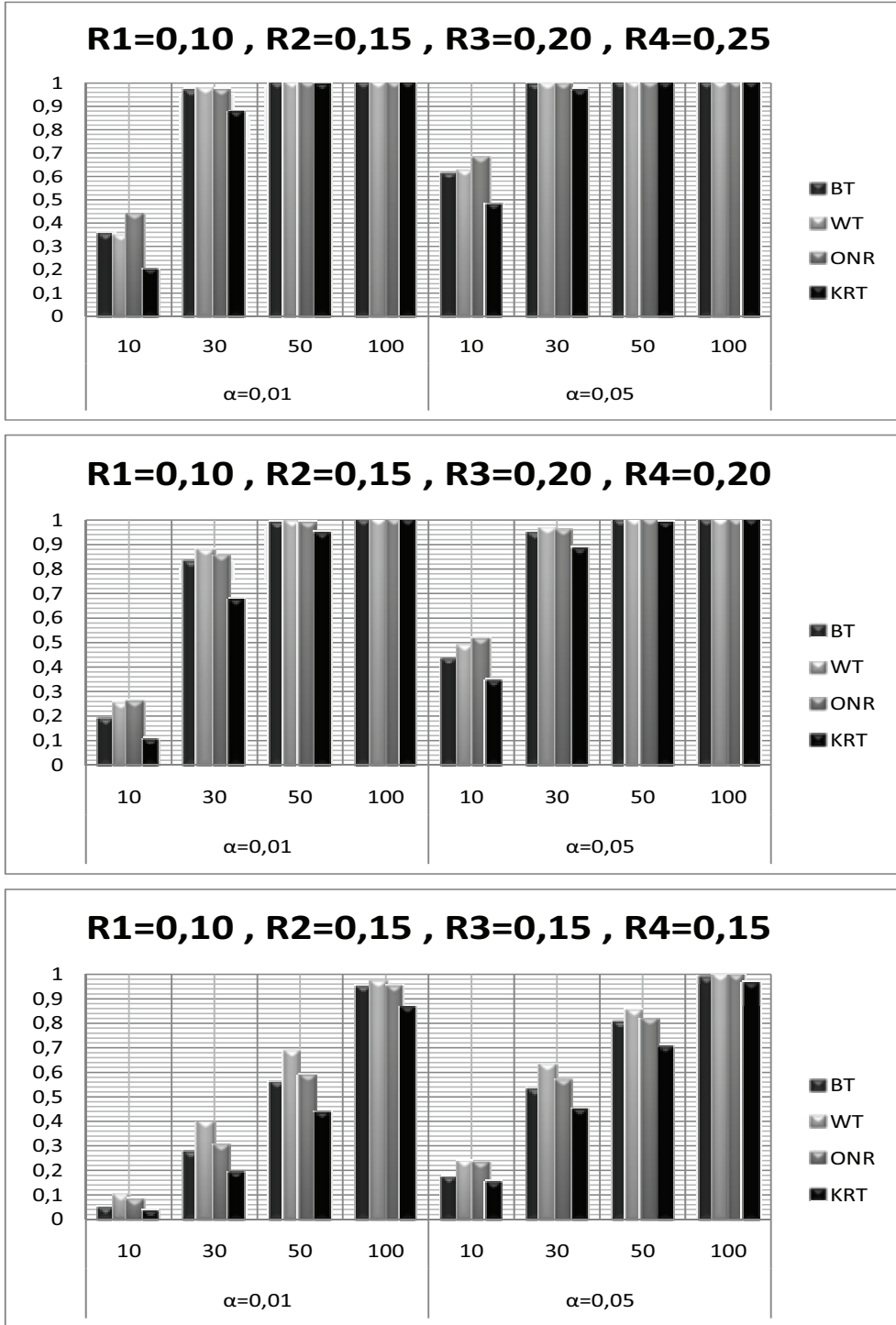


Şekil 1. $k = 2$ Durumunda Testin Gücüne İlişkin Sonuçlar

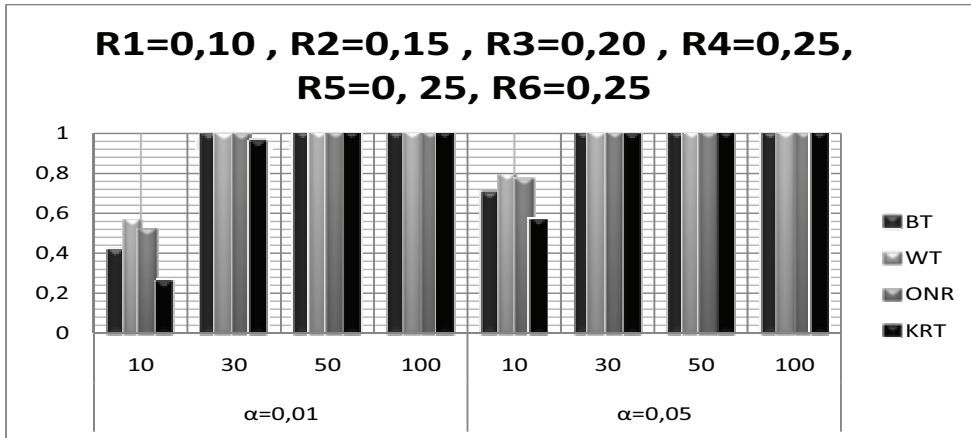
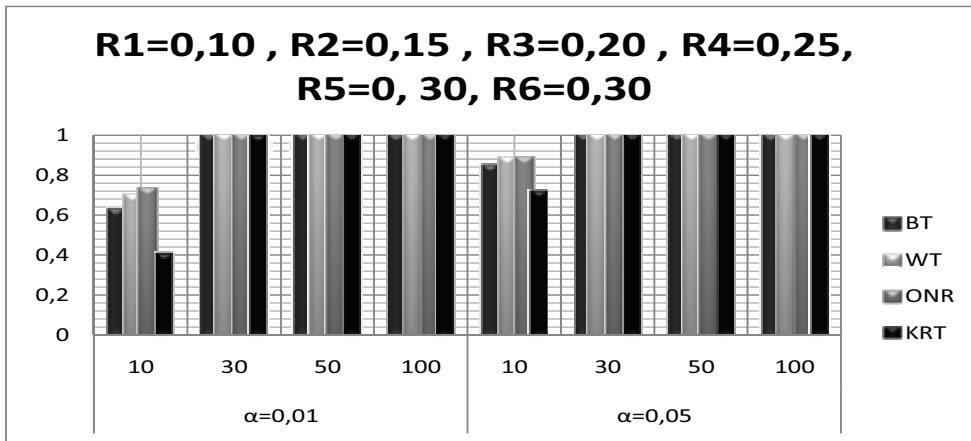
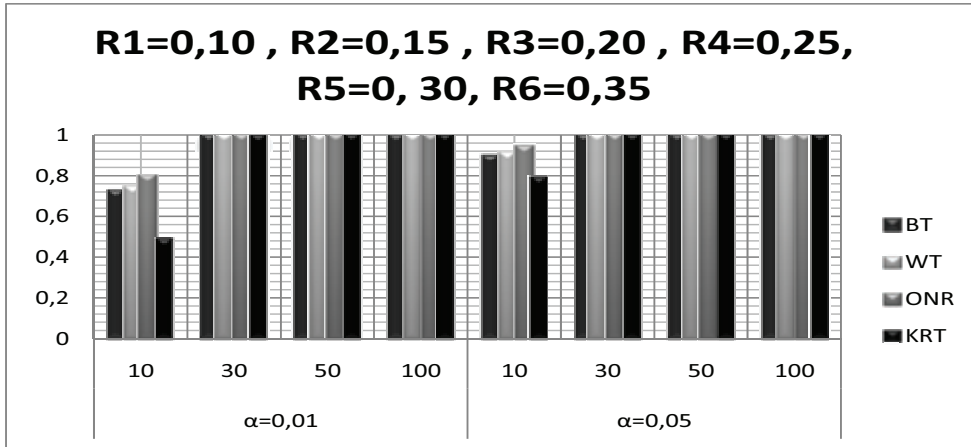
4 değişim katsayısının da birbirinden farklı olduğu durum ile 4 değişim katsayısından üç tanesinin farklı olduğu duruma ilişkin sonuçlar bakımından, test istatistikleri karşılaştırıldığında dikkat çekici bazı durumlar görülmektedir. $\alpha = 0,01$ ve 4 değişim katsayısı da birbirinden farklı olduğunda Şekil 2'de görüldüğü gibi örnek hacminin 30 ve daha küçük olduğu durum için en iyi sonuçları ONR testi verirken, daha büyük örnek hacimlerinde bu test istatistiğine KRT test istatistiğinin dışındaki diğer test istatistikleri de katılmaktadır. Diğer yandan 4 değişim katsayısından üç tanesinin farklı olduğu durum incelendiğinde; örnek hacmi 50 ve daha küçük iken en iyi testin WT olduğu görülmektedir. $\alpha = 0,05$ için de sonuçlar değişmemektedir ve aynı yorumları yapmak mümkündür. Ayrıca şekillerden görüldüğü gibi birbirinden farklı olan yığınların sayısı azaldıkça, farklılaşmayı tespit etmek zorlaşmakta ve testin gücü düşmektedir. Yine grafiklerden görüldüğü gibi I. tip hata arttıkça testin gücü de artmaktadır. Son olarak

örnek hacmi arttıkça testin gücünün arttığı açık bir şekilde görülmektedir ve bu sonuç beklenen bir sonuçtur. $\alpha = 0,01$ için 4 değişim katsayısından üç tanesinin farklı olduğu durum da ise Şekil 2’de görüldüğü gibi $n=50$ durumunda KRT en kötü sonuçları vermektedir. $n=100$ durumunda KRT diğer testlere göre oldukça düşük değerler vermektedir. $\alpha = 0,05$ için de benzer yorumları yapmak mümkündür.

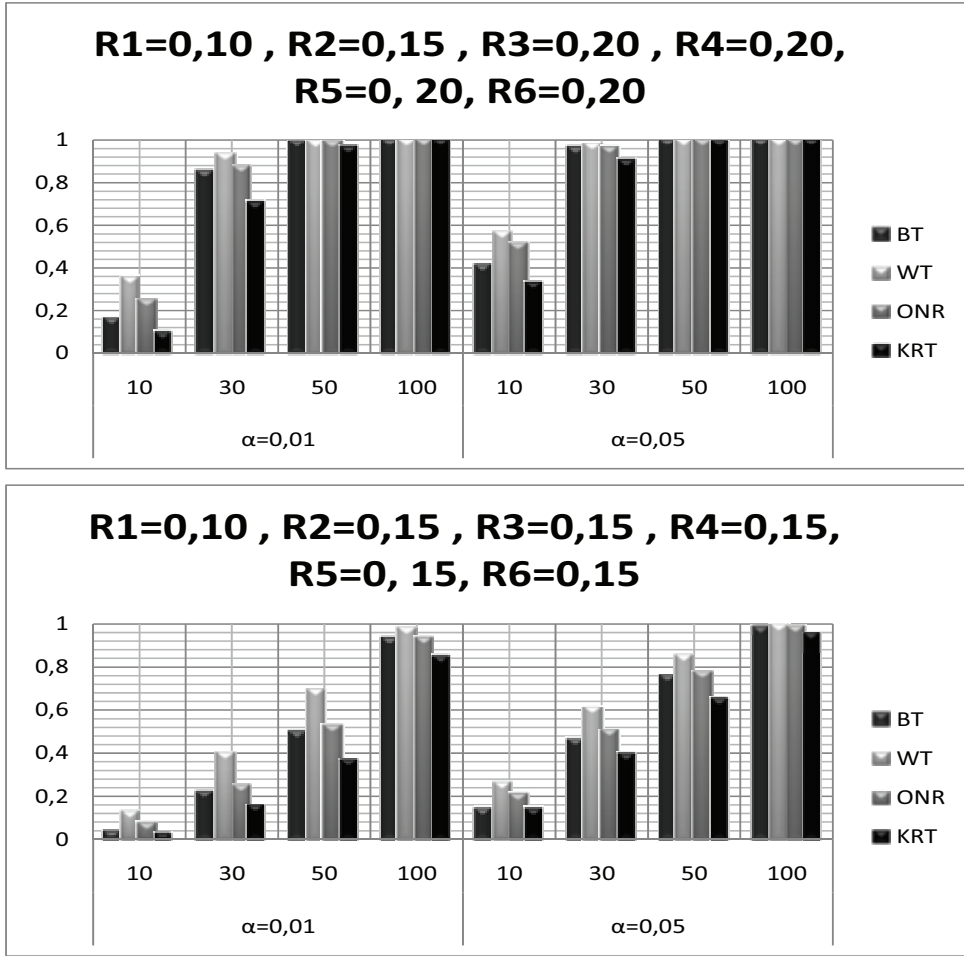
$k = 6$ durumun da benzer sonuçlar elde edilmiştir. Bu durumlarda yığın sayısına göre test istatistiklerinin davranışları daha belirgin olarak görülmektedir. Yığın sayısı arttıkça testin gücündeki artış ve birbirinden farklı yığınların sayısı azaldıkça testin gücündeki azalış Şekil 3’de görüldüğü gibi daha belirgin bir şekilde ortaya çıkmaktadır.



Şekil 2. $k = 4$ Durumunda Testin Gücüne İlişkin Sonuçlar



Şekil 3. $k = 6$ Durumunda Testin Gücüne İlişkin Sonuçlar



Şekil 3. $k = 6$ Durumunda Testin Gücüne İlişkin Sonuçlar (Devamı)

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada değişim katsayılarının eşitliğine ilişkin hipotezlerin test edilmesinde kullanılan: BT, WT, ONR ve KRT tanıtılmış ve bu testlerin karşılaştırması yapılmıştır.

Birinci tip hataya ilişkin karşılaştırmalardan ulaşılan sonuçlar özet olarak: İki değişim katsayısının eşitliğine ilişkin hipotezin test edilmesinde özellikle örnek hacminin 10 gibi küçük bir değer olduğu durumda iyi test yönteminin KRT olduğu ve bu özelliğin $k < 6$ için devam ettiği görülmektedir. Bu örnek hacminde ONR ise diğer testlere göre oldukça kötü sonuçlar vermektedir. k değeri arttıkça WT'ye ait sonuçlardaki kötüleşme çok belirgindir. Örnek hacminin 30'dan küçük olduğu durumlarda, tüm k değerlerinde ONR'ye ait sonuçlarda iyileşme gözükmemektedir. KRT testi hariç, diğer tüm testlerde örnek hacmi arttıkça sonuçlarda bir iyileşme gözlenmektedir. Tüm k durumlarında örnek hacminin artmasına göre en az iyileşmeyi gösteren test, KRT testidir.

Testin gücüne ilişkin olarak yapılan tüm karşılaştırmalarda KRT testi en kötü sonuçları vermiştir. Dolayısıyla bu testlerin yerine alternatifleri olan başka testleri kullanmak daha uygun olacaktır. Örneğin k sayıda değişim katsayısının birbirinden farklı olduğu durumlarda ONR testi oldukça iyi sonuçlar vermektedir. Ancak k sayıda değişim katsayısından bazıları birbirine eşit olduğunda görülmüştür ki WT testinde testin gücü daha yüksektir. k sayıda değişim katsayısından sadece birkaç tane değişim katsayısı farklılık gösteriyorsa, WT testinin kullanılması önerilebilir sonucunun çıkarılması mümkündür. Örnek hacminin büyük olduğu durumlarda ($n=50$ ve 100) bile KRT'nin sonuçlarının diğer testlere göre daha kötü olduğu görülmüştür. Bu durum KRT'nin parametrik olmayan bir yöntem olmasının bir sonucu olabilir. İstatistik teorisinden şu üç sonuç iyi bilinmektedir; i) dağılımdaki farklılaşma miktarı ve örnek hacmi sabit olmak üzere birinci tip hata arttıkça testin gücünün artması beklenir, ii) dağılımdaki farklılaşma miktarı ve I. tip hata sabit olmak üzere örnek hacmi arttıkça testin gücünün artması beklenir, iii) örnek hacmi ve I. tip hata sabit olmak üzere dağılımdaki farklılaşma miktarı arttıkça testin gücünün artması beklenir. Bu çalışmada testin gücüne ilişkin olarak yapılan karşılaştırmalarda elde edilen sonuçlar istatistik kuramıyla da uyum göstermektedir.

5. KAYNAKLAR

Bennett, B. M., 1976. On an approximate test for homogeneity of coefficients of variation. Contributions to Applied Statistics, 169-171.

Bennett, B. M., 1977. LR tests for homogeneity of coefficients of variation in repeated samples. Sankhya, 39B: 400-405.

Conover, W. J., Iman, R. L., 1978. Some exact tables for the squared ranks test. Commun. Statist-Simula.Computa., 7(5):491-513.

Conover, W. J., 1980. Practical nonparametric statistics 2ed. John Wiley and Sons, New York.

Cox, D. R., Hinkley, D. V., 1974. Theoretical statistics. Chapman and Hall, London.

Doornbos, R., Dijkstra, J. B., 1983. A multi sample test for the equality of coefficients of variation in normal population. Commun. Statist-Simula. Computa., 12 (2): 147-158.

Gupta, R. C., Ma, S., 1996. Testing the equality of coefficients of variation in k normal population. Commun. Statist-Theory Meth., 25 (1): 115-132.

Kendall, M., Stuart, A., 1977. The advanced theory of statistics. Charles Griffin and Co, London.

Lehmann, E. L., Casella, G., 1998. Theory of point estimation 2nd. Springer-Verlag, New York.

- McKay, A. T., 1932. Distribution of the coefficient of variation and the extend 't' distribution. Journal of the Royal Statistical Society, 95: 695-698.
- Miller, G. E., Karson, M. J., 1977. Testing the equality of two coefficients of variation. American Statistical Association, Proc. Bus. Eco. Statist. S., Part I: 278-283.
- Miller, G. E., 1991a. Asymptotic test statistics for coefficients of variation. Commun. Statist-Theory Meth., 20(10): 3351-3363.
- Miller, G. E., 1991b. Use of the squared ranks test to test for the equality of the coefficients of variation. Commun. Statist-Simula. Computa., 20: 743-750.
- Nairy, K. S., Rao, K. A., 2003. Test of coefficients of variation of normal population. Commun. Statist-Simula. Computa., 32(3): 641-661.
- Pitmann, E. J. G., 1939. Test of Hypotheses Concerning Location and Scale Parameters. Biometrika, 31: 200-215.
- Rao, K. A., Vidya, R., 1992. On performance of a test for coefficients of variation. Calcutta Statistical Association Bulletin, 42: 87-95.
- Shafer, N. J., Sullivan, J. A., 1986. A simulation study of a test for the equality of the coefficients of variation. Commun. Statist-Simula. Computa., 15(3): 681-695.
- Silvey, S. D., 1975. Statistical inference. Chapman & Hall, London.

COMPARISON OF THE TESTS FOR THE EQUALITY OF COEFFICIENTS OF VARIATION IN TERMS OF TYPE I ERROR AND POWER

ABSTRACT

In this study some test statistics for hypotheses regarding the equality of coefficients of variation were introduced and compared with each other. A simulation study was carried on for these comparisons. The simulation study was designed for different populations ($k=2, 4$ and 6) each having a normal distribution, different sample sizes ($n=10, 30, 50$ and 100) and different type I error levels ($\alpha=0,01$ and $0,05$). In the simulation study some test statistics that were used to test the hypothesis of equality of variation coefficients were compared in terms of the type I error and the test power and it was observed that especially the results related to the test power was coherent with the statistics theory.

Keywords: Bennett test, Coefficients of variation, Squared rank test, Likelihood ratio test, Wald test.

BİYOKİMYASAL REAKSİYONLAR İÇİN STOKASTİK SİMÜLASYON ALGORİTMALARINA GENEL BİR BAKIŞ

Vilda PURUTÇUOĞLU*

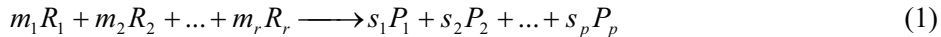
ÖZET

Biyolojik bir sistemi anlayabilmek için hangi genlerin/proteinlerin organizmanın neresinde, ne zaman ve nasıl reaksiyonda olduğunu bilmemiz gerekmektedir. Bu kadar detaylı, karmaşık ve metabolik seviyede rassal olan reaksiyonları içeren biyokimyasal bir mekanizmada, hücresel aktivitelerin deneysel olarak ispatlanması, teknolojik imkanların sınırlı olması sebebiyle çoğu kez mümkün olmamakta veya yüksek deney maliyetine sebep olmaktadır. Biyokimyasal modelleme; bir sistemin elemanlarının farklı zaman ve şartlar altındaki durumunu, sistemi oluşturan proteinler ve moleküller arasındaki etkileşimi sistemin bilinen özellikleri yardımıyla ifade etmenin matematiksel yoludur. Bu çalışmada; reaksiyonların nasıl formülize edildiği ve bu reaksiyonlardan oluşan sistemin stokastik modellemelerinin biyoinformatik ve matematiksel biyoloji alanlarında hangi simülasyon algoritmalarıyla yapıldığı tanıtılmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Matematiksel modelleme, Simülasyon, Stokastik algoritmalar.

1. GİRİŞ

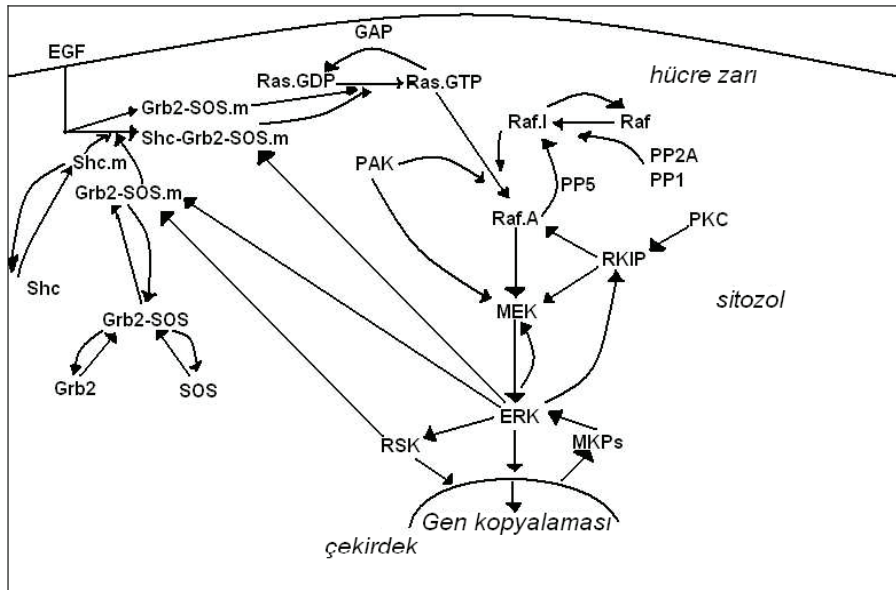
Biyokimyasal reaksiyon, bir biyokimyasal işlemin nitel veya nicel olarak tanımlanmasıdır. Basit bir biyokimyasal reaksiyon (1) nolu ifadede verilen biçimde gösterilebilir:



Burada R ile gösterilen soldaki terimlere “reaksiyona girenler” ve P ile gösterilen sağdaki terimlere “reaksiyondan üretilenler” denir. m_i ($i = 1, \dots, r$) ve s_j ($j = 1, \dots, p$) katsayıları, sırasıyla i . reaksiyona girenin “stokometrik katsayısını” (stoichiometric coefficients) ve bu reaksiyondan üretilenin “stokometrik katsayısını” göstermektedir. r , reaksiyona girenlerin sayısı ve p bunun sonucunda üretilenlerin sayısını gösterir. Dolayısıyla bu eşitliğin kimyasal yorumu; moleküller Brownian hareketiyle rassal olarak hareket ederken, R_i cinsinden m_i kadar molekül birbiriyle çarpışır ve P_j cinsinden s_j kadar molekül üretir şeklindedir. Bir başka ifade ile bir kimyasal reaksiyon, sıcaklık dengesi altında ve sabit bir hacimde hangi moleküllerin, hangi oranda birbiriyle reaksiyona girdiklerini ve sonucunda ne üretildiğini ifade eder (Wilkinson, 2006).

* Öğretim Görevlisi Dr., Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, e-posta: vpurutcu@metu.edu.tr

İfade (1) aynı zamanda $MY \rightarrow SY$ şeklinde vektör formu ile de tanımlanabilir. Burada $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ ve n , sırasıyla sistemin o andaki “durum vektörünü” (state vectors) ve molekül cinslerinin sayısını verir. $M = (m_1, \dots, m_n)$ ve $S = (s_1, \dots, s_n)$ ise, sırasıyla reaksiyona girenlerin ve reaksiyondan üretilenlerin stokometri vektörleridir. Burada da önceki açıklamaya benzer şekilde, bir reaksiyon gerçekleştiği zaman Y_g ($g = 1, \dots, n$)’nin molekül sayısı m_g kadar azalır ve s_g kadar artar. Sonuç olarak, molekül transferi sistemde $V = S - M$ kadarlık net değişime sebep olur. Bu ifadede v , n boyutlu “net etki vektörünü” (net effect vector) anlatır (Bower ve Bolouri, 2001).

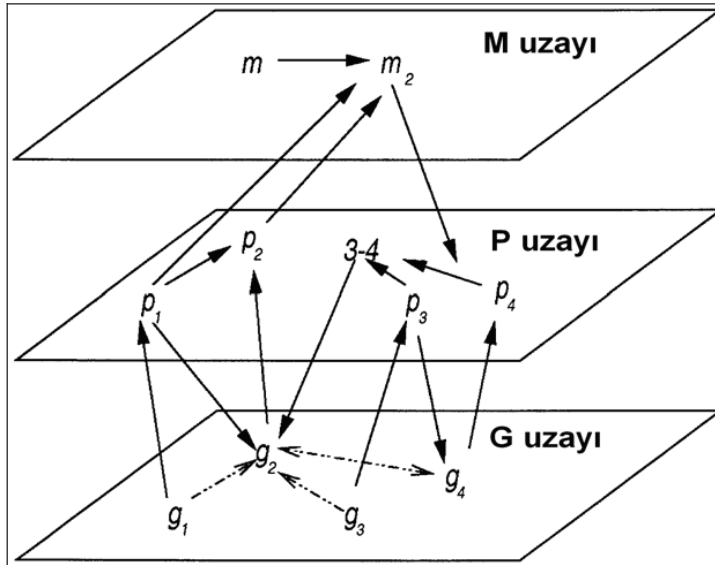


Şekil 1. Mitojen Aktivleyici Protein Kinezi (MAPK) Sisteminin Şemasal Olarak Basit Gösterimi

Eğer bir kimyasal aktiviteyi anlatan r tane eşitlik varsa, bu reaksiyon seti Şekil 1’de gösterildiği gibi bir biyolojik sistemi oluşturur (Purutçuoğlu ve Wit, 2008). Gelişen teknoloji, biyolojik sistemlerin daha yakından tanınmasında büyük kolaylıklar getirmiştir. Bu alanda özellikle son yıllarda yapılan araştırmalar bu sistemlerdeki karmaşık ve çok seviyeli yapının ortaya çıkmasını sağlamıştır. Şekil 2 farklı seviyelerdeki biyolojik sistem yapısını basitçe göstermektedir (Khanin ve Wit, 2006). Şekildeki her seviye birbiriyle ilişkili ve yakın biçimde bağımlı olmalarına rağmen araştırmalarda birbirinden bağımsız seviyeler olarak ele alınır. Burada G uzayı gen (g_i) etkileşim uzayını, P uzayı protein (p_i) etkileşim uzayını ve M uzayı molekül (m_i) etkileşim uzayını temsil etmektedir. Koyu renkli oklar direkt etkileşim bağlantılarını, buna karşın noktalı oklar genlerin dolaylı etkileşimlerini sembolize etmektedir. Karmaşık biyolojik yapıların çözülmesi, bir çok biyolojik aktivitenin daha iyi anlaşılmasında ve özellikle kanser, kalp rahatsızlığı gibi ciddi hastalıklarda kilit rol oynayan proteinlere yönelik yeni tedavi yöntemlerinin geliştirilmesinde çok büyük

öneme sahiptir. Matematiksel modelleme yöntemleri bu yapıların henüz deneysel olarak gün ışığına çıkmamış özelliklerini bulmada ve biyolojik açıdan yeni soruların ortaya çıkmasında ilgili alanlarda çalışan araştırmacılara yeni kapılar açmaktadır (Endy ve Brent, 2001; Brent, 2004).

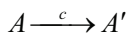
Farklı matematiksel modeller altında bir sistemi meydana getiren reaksiyon seti farklı şekillerde tahmin edilebilir. Bir biyokimyasal sistemi modellemek için üç temel teknik vardır: Bunlar Boolean, diferansiyel eşitlikler ve stokastik metodlardan meydana gelen saf veya katıksız teknikler; kinetik mantık ve sürekli mantık sistemlerini (continuous logical networks) içeren ara teknikler (intermediate methods) ve son olarak Langevin ve Fokker-Planck yaklaşımlarını ifade eden, melez tekniklerdir (Bower ve Bolouri, 2001; Jong, 2002). Bu çalışmada, saf/katıksız tekniklerden biri olan, stokastik metodlar ve onların simülasyon algoritmalarının üzerinde durulacaktır.



Şekil 2. Farklı Seviyelerdeki Biyolojik Sistem Yapısının Genel Anlamda Gösterimi

2. STOKASTİK METODLAR

Stokastik metodlar, reaksiyonda moleküllerin sayısının tam olarak bilindiği durumlarda kullanılır. Bu modelde durumlar (states), olasılıksal olarak sistemin sonraki duruma geçmesine neden olan her bir molekül cinsinin o anki sayısını gösterir. Diğer bir deyişle hangi değişimin olduğu ve bunun ne zaman olduğu olasılık yaklaşımıyla ifade edilir. Örneğin;



şeklindeki kimyasal ifade, verilen bir tane A molekülü için bir tane A' molekülü oluşturmasının, dt zamanı içindeki olasılığını $c \times dt$ olarak tanımlar. c , bir biyokimyasal olayın bir birim zaman başına olma olasılığını gösteren “reaksiyon oran sabitidir” (reaction rate constant). Buna bağlı olarak kısa bir zaman aralığı içinde A ’dan A' ’a dönüştürülmüş molekül olasılığı $c[A]dt$ ile gösterilir. $[A]$, A ’nın o anki molekül sayısıdır (Bower ve Bolouri, 2001; Wilkinson, 2006).

Stokastik modeller, durum değişikliğini olasılıksal olarak gösterdiği için aynı şartlar altındaki reaksiyonlardan farklı cevaplar alınabilir. Bu rassallık altında işlemin bazı istatistiklerini bulmak için, rassal sayıların üretilmesine dayanan Monte Carlo teknikleriyle sistemin simülasyonu yapılabilir (Wilkinson, 2006).

Stokastik sistemlerde her bir molekül cinsinin molekül sayısı, denge halindeki sistemin sıradan diferansiyel eşitliklerdeki (Ordinary Differential Equations – ODE) gibi çözülmesiyle bulunamaz. Çünkü her oluşan reaksiyon, molekül sayısını değiştirir. Buna karşın sistemin mümkün olan bütün molekül sayısı üzerinden olasılık dağılımı hesaplanabilir (Bower ve Bolouri, 2001). Bu olasılığı hesaplamak için de “verilen molekülün, sabit hacim içerisinde her hangi bir yerde bulunması eşit olasılığa sahiptir” varsayımı yapılabilir.

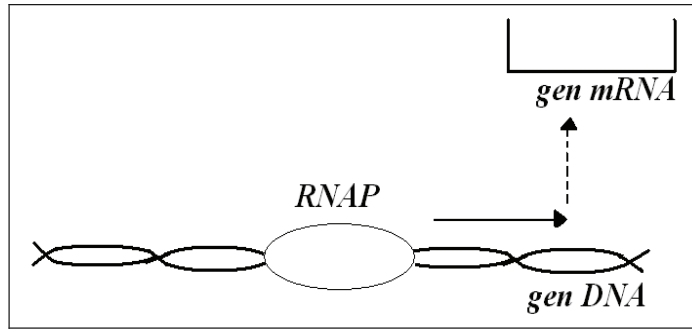
3. STOKASTİK SİMÜLASYON ALGORİTMALARI

Gen düzenleri (gene regulation) genellikle ODE ile modellenir. ODE modelleri kütle hareket kanununa (mass actian laws) ve her bir kimyasal proteinin sürekli konsantrasyonuna dayanır (Lok, 2002; Lok ve Brent 2005). Her ne kadar bu metodlar lineer üretim ve parçalanma reaksiyonları (reaction of degradation) gibi bazı reaksiyonları ifade etmede başarılı olsalar da, gerçek reaksiyonların küçük sistem çeşitliliğini açıklayamazlar. Biyokimyasal sistemleri modellemek için stokastik işlemler bu sebeple doğal bir tercih olmuştur (Fedoroff ve Fontana, 2002; Turner vd., 2004). Nitekim bu şekildeki dinamik modelleme, biyolojik zamanda az sıklıkla oluşan, İfade (2)’de basitçe anlatılan ve Şekil 2’de de gösterilen protein kopyalanması gibi farklı biyolojik reaksiyonların olasılıksal durumlarını ele alabilir (Hume, 2000).



İfade (2)’de ilk reaksiyon, ilgilenilen gene RNA polimerazının ($RNAP$) bağlanması, dolayısıyla DNA-RNAP kompleksinin oluşmasını ($DNA.RNAP$), ikinci reaksiyon ise DNA’sı okunan genin kopya RNA’sının ($mRNA$) oluşturulmasını göstermektedir.

Kimyasal sistemlerin stokastik algoritmaları “master denklemlerine” (master equations), diğer bir isimle “Chapman-Kolmogorov denklemlerine” dayanır (Kampen, 1981; Jong, 2002). Master denklemleri sistemin stokastik davranışını aşağıdaki eşitlikle gösterir:



Şekil 2. DNA Kopyalanmasının Basit Bir Gösterimi

$$\frac{\partial P(Y, t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^r \{h_j(Y - v_j)P(Y - v_j, t) - h_j(Y)P(Y, t)\} \quad (3)$$

Bu eşitlikte r , sistemdeki reaksiyon sayısını verir. v_j , $(r \times n)$ boyutlu net etki matrisi V 'nin j . satırını ifade eder. Buna bağlı olarak $h_j(Y)$ "risk fonksiyonunu" (hazard function), diğer bir adla "reaksiyonun oran kanununu" (reaction rate laws) anlatır. $h_j(Y)$, j . reaksiyon için stokastik oran sabiti c_j ile Y durumunda elde bulunan ve reaksiyona giren moleküllerin farklı kombinasyonlarının çarpımıdır. Matematiksel ifadeyle ve Eşitlik (1)'deki terimlerle $h_j(Y) = a_j(Y)c_j$, ($j = 1, \dots, r$) ve

$a_j = \binom{R_1}{m_1} \times \binom{R_2}{m_2} \dots \times \binom{R_r}{m_r}$ 'dir. Buradan Eşitlik (2)'deki $h_j(Y - v_j)P(Y - v_j, t)dt$ ifadesinin $[t, t + dt]$ zaman aralığında sistemin $Y - v_j$ durumundan Y durumuna geçerken j . reaksiyonunun olma olasılığını verdiği sonucu çıkar.

Master denklemleri iki aşamalı olarak kurulur:

- i) Tüm olası reaksiyonlar olma olasılıkları ile sıralanır,
- ii) Sistem birim zaman ve birim molekül başına sabit reaksiyon riskleri ile birlikte lineer diferansiyel denklemler biçiminde ifade edilir.

Master denklemleri, olası durum sayısının küçük olduğu sistemlerde çözülebilir denklemlerdir. Buna karşın büyük sistemlerde, bu denklemlerin çözümleri, değişkenlerin sayısı, dolayısıyla her bir durumda bulunma olasılıkları hızlı bir biçimde arttığı için farklı Monte Carlo algoritmalarıyla yapılır. Bu algoritmalar temelde, gerçek olasılık dağılımının yaklaşık sonucunu, yaklaşık dağılımlardan tekrarlı örneklem seçerek bulur. Bu örnekler bilgisayarların rassal sayı yaratan üreteçleri sayesinde oluşturulur (Wilkinson, 2006; Turner vd., 2004).

Stokastik simülasyon yapan dört temel metod vardır. Bu dört metod da Eşitlik (3)'de verilen master denklemini sağladıkları için üretilen değerler yaratılmak istenen biyolojik sistemi tam olarak yansıtır. Dolayısıyla aşağıda detaylarıyla tanıtılacak metodlar arasında değerlerin doğrulukları (accuracy) ve sapmaları (deviation) açısından homojen bir sistem için fark yoktur. Ancak özellikle hesaplama süreleri, kullanıcı kolaylığı ve işlemler için kullanılan zaman aralıklarının sürekli veya kesikli olmaları bakımından

kendi içinde farklılıklar göstermektedir. Bu farklılıklar algoritmaların tanıtılması sırasında belirtilmekle beraber Tablo 1’de de özet halinde sunulmaktadır.

3.1 Direkt Metot (Gillespie Algoritması)

Gillespie algoritma olarak da bilinen direkt metot (Gillespie, 1977), Eşitlik (3)’te verilen kimyasal master denklemlerine dayanan en yaygın ve fazla karmaşık olmayan sistemlerde hesaplama süresi açısından genellikle en hızlı simülatördür.

Algoritma, reaksiyon olasılık dağılım fonksiyonunu, zaman rassal değişkeni τ ($0 \leq \tau < \infty$) uzayında ve kesikli reaksiyon belirleyici (discrete reaction indicator) değişkeni j ($j = 1, \dots, r$) ile aşağıda verilen fonksiyon yarımıyla tanımlar.

$$P(\tau, j) = h_j(Y) \exp\{-h_0(Y)\tau\}; \quad (0 \leq \tau < \infty). \quad (4)$$

Bu ifadede $h_0(Y) = \sum_{j=1}^r h_j(Y) = \sum_{j=1}^r a_j(Y)c_j$ ’dir. Gillespie algoritması özet olarak şu adımları takip eder.

(1) Sisteme başlangıç zamanı olan $t = 0$ durumu için, c_1, \dots, c_r reaksiyon oran sabitleri ve her bir türün (proteinin, molekülün veya genin) başlangıç zamanındaki Y_1, Y_2, \dots, Y_n olan türleri için molekül popülasyon sayıları verilir. r ve n , sırasıyla sistemdeki toplam reaksiyon ve tür sayısını göstermektedir.

(2) Türlerin reaksiyon riskleri, her reaksiyon için $h_j(Y) = a_j(Y)c_j$ ($j = 1, \dots, r$) ile hesaplanır.

(3) Rassal olarak oluşacak bir sonraki reaksiyonun ne kadar sürelik zaman aralığında olduğunu bulmak için, olası zaman aralığını gösteren τ , $h_0(Y)$ oranlı üstel dağılımdan ($\tau \sim \text{Exp}\{h_0(Y)\}$) oluşturulur ve bu zaman aralığında hangi reaksiyonun olacağı $h_j(Y)/h_0(Y)$ ($j = 1, \dots, r$) olasılığı ile, her olay birbirinden bağımsız kabul edilerek seçilir.

(4) Zaman değişkenini güncellemek için son bulunan zaman birimi t , τ kadar artırılır ($t := t + \tau$) ve tür popülasyonunun seviyesi, reaksiyonların stokometri katsayıları yardımıyla güncellenir. Eğer güncellenen t başta verilen zaman aralığı T ’den küçükse ($t < T$), ikinci adıma geri dönülür ve algoritma $t \geq T$ olana kadar tekrarlanır. T simülasyon için başlangıçta belirlenen toplam süredir.

Gillespie algoritması her ne kadar yüksek doğruluğa sahip sonuçlar verse de ve sistemi tam olarak oluştursa da uzaysal heterojenlik veya lokalizasyonluk gerektiren durumlarda uygulanması zordur (Gillespie, 1992; Kitano, 2001). Ayrıca her ne kadar küçük sistemleri yaratmada oldukça başarılı olsa da karmaşık ve büyük sistemlerde, yarattığı zaman aralıklarının sadece tek bir reaksiyonun olmasını sağlayacak kadar küçük olması sebebiyle hesaplama süresi açısından avantajlı değildir (Gibson ve Bruck, 2000; Bower ve Bolouri, 2001; Turner vd., 2004).

3.2 İlk Reaksiyon Metodu

İlk reaksiyon metodu, Gillespie metodunun karmaşık sistemlerdeki hesaplama zamanını kısaltmak için önerilen ve temelde aynı hesaplama mantığını kullanan alternatif bir saf simülasyon metodudur. Fakat Gillespie, reaksiyon belirleyici j ve zaman değişkeni τ 'u direkt olarak üretirken, ilk reaksiyon metodu, oluşabilecek ilk reaksiyon j için tahmin edilen zamanı τ_j 'yi üretmesi yönünden farklıdır (Gillespie, 1992; Gibson ve Bruck, 2000; Wilkinson, 2006). Ayrıca her ne kadar her iki metod da j ve τ 'yu seçmek için aynı olasılık dağılımını kullanıyor olsalar da, ilk reaksiyon metodu her tekrarlama (iteration) bir yerine, r tane reaksiyon yaratır.

Bu algoritmanın aşamaları aşağıdaki gibi sıralanabilir:

- (1) Her bir tür (protein, molekül veya gen) için başlangıç değeri olan türlerin popülasyon sayıları verilir ve zaman göstergesi t 'nin başlangıç değeri sıfıra eşitlenir.
- (2) $h_j(Y) = a_j(Y)c_j$ risk fonksiyonu tüm j 'ler için hesaplanır.
- (3) $h_j(Y)$ parametrelili üstel fonksiyondan her bir j için tahmin edilen zaman τ_j yaratılır ($\tau_j \sim \text{Exp}\{h_j(Y)\}$).
- (4) En küçük τ_j sonraki reaksiyon için zaman adımı olarak seçilir ($\tau = \tau_j$).
- (5) j ve τ 'ya göre türlerin popülasyon sayıları güncellenir.
- (6) t , τ kadar artırılır ($t := t + \tau$). Eğer $t < T$ ise algoritma ikinci adımdan itibaren tekrarlanır.

Genel olarak bu metod, Gillespie metod gibi heterojenlik veya lokalizasyonluk gerektiren durumlar için bir çözüm üretememektedir. Ancak hesaplama süresi açısından karmaşık sistemlerde Gillespie'ye göre biraz daha hızlıdır. Kullanım yaygınlığı açısından ise Gillespie'den daha yaygın değildir. Çünkü bu metodun üstünlüğü ancak sistem karmaşıklıktıkça gözükmekte, avantajlı olduğu durumlarda ise Gillespie'nin algoritmadaki basitliği sebebiyle yine de göreceli olarak daha az tercih edilmektedir.

3.3 Sonraki Reaksiyon Metodu (Gibson-Bruck Algoritması)

“Sonraki reaksiyon metodu” olarak da bilinen Gibson-Bruck algoritması özellikle karmaşık sistemler için Gillespie ve ilk reaksiyon algoritmalarından daha hızlı ve etkili olan bir metoddur (Gibson ve Bruck, 2000; Lok ve Brent, 2005; Cao vd., 2006). Algoritma her bir reaksiyon için sadece risk fonksiyonu $h_j(Y)$ 'yi kullanmak yerine, hem zaman adımı olan τ_j , hem de $h_j(Y)$ ($j = 1, \dots, r$)'yi birlikte kullanan etkili bir hesaplama yöntemi geliştirmiştir. Temel olarak bu metod sistem için oluşturulan bir bağlantı grafiği ζ (dependency graph) yardımıyla $h_j(Y)$ 'yi hesaplar. Bahsedilen bağlantı grafiği j . reaksiyonunun olması halinde $h_j(Y)$ değerinden etkilenen türleri (protein, molekül veya gen) gösterir. Bu işlem, algoritma tarafından j türünün, j 'nin değişmesi halinde j 'ye bağlı olan ve kendi risk fonksiyonlarının da güncellenmesi gereken diğer tüm proteinleri birbirine bağlayan bir yapının kurulmasıyla sağlanır. Bu

amaçla bağlantı grafiği yerine Petri net gösterimi de alternatif yöntem olarak kullanılabilir (Wilkinson, 2006). Bu şekilde sistem lokal olarak güncellenebildiği için simülasyon hızı artar. Diğer yandan bu lokal alt gruplar arasındaki bağlantılar “endeksli öncelik sırası” (indexed priority queue) adı verilen bir grafik yapısıyla sağlanır. Bu grafik iki temel eleman içerir:

- i) (j, τ_j) çifti şeklinde sıralı ağaç yapısı. Burada j reaksiyon sayısını, τ_j ise, j reaksiyonunun oluşması durumunda tahmin edilen zaman aralığını ifade eder.
- ii) (j, τ_j) içeren ağaç yapısında j . elemanın yerini gösteren endeks yapısı.

Sırayı oluşturan bu ağaç yapısı içinde her reaksiyon kendisine bağlı olan alt grup reaksiyonlardan daha küçük τ_j 'ye sahiptir.

Gibson-Bruck algoritması şu şekilde çalışmaktadır:

(1) Reaksiyon sabitlerine c_j ($j=1, \dots, r$) ve türlerin (protein, molekül veya gen) popülasyon sayılarını gösteren Y 'ye başlangıç değerleri verilir. Bunlara bağlı olarak risk fonksiyonu $h_j(Y)$ hesaplanır. Bu risk değerleri $h_j(Y)$ parametresiyle üstel dağılımdan yaratılan ve ilk yaratılan zaman aralıkları olan τ_j 'leri hesaplamada kullanılır ($\tau_j \sim \text{Exp}\{h_j(Y)\}$).

(2) Endeksli öncelik sırası içinde en küçük τ_j , k . endeks sırasını alır ve t , τ_k 'ya eşitlenir ($t = \tau_k$).

(3) k . reaksiyonun oluşmasıyla durum vektörü Y güncellenir.

(4) Yeni durum Y 'ye göre $h_k(Y)$ güncellenir. Yeni tahmin edilen zaman aralığı üstel $\text{Exp}\{h_k(Y)\}$ 'dan üretilir ve $\tau_k := t + \text{Exp}\{h_k(Y)\}$ olarak hesaplanır.

(5) Reaksiyon k ve risk fonksiyonu, değişen her j reaksiyonu için ($j \neq k$)

a. $h_j'(Y) = h_j(Y)$ olarak güncellenir ve eski $h_j(Y)$ geçici süreyle tutulur.

b. $\tau_j := t + (h_j(Y) / h_j'(Y))(\tau_j - t)$ olarak hesaplanır.

c. Eski $h_j(Y)$ sistemden silinir.

(6) Her j reaksiyonu için ($j = k$) dördüncü adım tekrarlanır.

(7) Eğer t istenilen toplam T 'den küçükse, $t < T$, algoritma ikinci adımdan itibaren tekrarlanır.

Bu algoritma saf stokastik simülasyon metodları içinde, büyük ve oluşan her bir reaksiyonun sistemdeki diğer reaksiyonların çoğunluğunu etkilemediği (loosely-coupled) biyolojik sistemlerde hesaplama süresi açısından en etkin metottur (Cao vd., 2006). Ancak, algoritmanın yazılım dilinin C olması sebebiyle kullanıcı kolaylığı açısından daha teknik donanım bilgisine gereksinim duymaktadır. Dolayısıyla Gillespie ve ilk reaksiyon metodlarına göre daha az yaygınlıkta kullanılmaktadır. Buna rağmen heterojenlik, lokalizasyonluk gibi sistem problemlerini çözebilmesi ve oldukça büyük sistemlerin “loosely-coupled” şartını sağladığı durumlarda, özel koşullar için tercih edilen bir algoritmadır.

3.4 Stokastik Simülator (StochSim)

Stokastik Simülator, kısaca StochSim (Morton-Firth ve Bray, 1998), Gillespie, ilk reaksiyon veya Gibson-Bruck algoritmalarında uygulanan “reaksiyonu simülasyon etme” mantığı yerine, kesikli ve belli bir zaman aralığı içinde look-up tablosu denilen hazır tablolar ve sahte türler (pseudo proteins, molecules or genes) yardımıyla her bir türü (protein, molekül veya gen) ayrı ayrı yaratan bir yöntemdir.

Algoritma, Vol hacminde n tane proteine/moleküle sahip bir sistem için her adımda iki tür seçerek, tekli ve ikili tür içeren reaksiyonların olasılığını hesaplar. İlk seçim her zaman gerçek bir türdür ve sistemdeki n tanecik içinden seçilir. İkinci seçimden önce sisteme n_0 sahte tür ilave edilir ve ikinci seçim ($n + n_0$) tür arasından yapılır. Bu ikinci seçimde eğer ikinci seçilen bir sahte tür ise algoritma tek proteinli/moleküllü bir reaksiyon, şayet gerçek bir tür ise iki proteinli/moleküllü bir reaksiyon yaratır. Örnek olarak A türünden sistemde n_A adet protein/molekül varsa t zamanı için tek proteinli/moleküllü bir reaksiyon olması

$$\frac{d[A]}{dt} = -c_1[A]$$

ile ifade edilir. Bu eşitlikte c_1 , tek tür içeren reaksiyonun reaksiyon oran sabiti ve $[A]$, A ’nın o andaki popülasyonudur. Bu durumda çok kısa bir zaman aralığı içinde A ’nın popülasyonundaki n_A değişimi $\Delta n_A = -c_1 n_A \tau$ olarak bulunur ve p_1 tek tür içeren reaksiyon oranı olmak üzere

$$-\Delta n_A = \frac{n_A}{n} \times \frac{n_0}{n + n_0} \times p_1 \quad (5)$$

olarak hesaplanır.

Eğer sistem A ve B türleri arasında iki proteinli/moleküllü bir reaksiyon yaratıyorsa, bu reaksiyon

$$\frac{d[A]}{dt} = -c_2[A][B]$$

olarak gösterilir. c_2 , iki tür içeren reaksiyonun reaksiyon oran sabitidir. $[A]$ ve $[B]$ ise, sırasıyla, A ve B türlerinin popülasyonlarıdır. Tekli reaksiyona benzer şekilde burada da çok kısa bir zaman aralığı τ içinde A ’nın popülasyonundaki n_A değişimi

$\Delta n_A = -\frac{c_2 n_A n_B \tau}{N_A Vol}$ olarak bulunur. Bu eşitlikte N_A Avogadro sabitidir ve n_B , B ’nin popülasyonudur. p_2 , iki proteinli/moleküllü reaksiyon olasılığını göstermek üzere

$$-\Delta n_A = 2 \times \frac{n_A}{n} \times \frac{n_B}{n + n_0} \times p_2 \quad (6)$$

şeklinde formüle edilir. Eşitlik (5) ve (6)'nın birlikte çözülmesiyle, sırasıyla,

$$p_1 = \frac{c_1 n(n + n_0)\tau}{n_0} \quad \text{ve} \quad p_2 = \frac{c_2 n(n + n_0)\tau}{2N_A Vol} \quad (7)$$

biçiminde bulunur.

Eşitlik (7)'deki matematiksel ifadedeki n_0 sayısı, en hızlı tekli ve ikili protein/molekül reaksiyonlarının olasılıklarının yaklaşık olarak eşit olabileceği şekilde ayarlanır. Bu da

$$n_0 = INT\left(2N_A \frac{c_{1,max}}{c_{2,max}}\right)$$

ifadesiyle hesaplanır. Burada $INT(x)$, x 'e en yakın pozitif tamsayıyı verir. $c_{1,max}$ ve $c_{2,max}$ ise, sırasıyla, maksimum tekli ve maksimum ikili protein/molekül reaksiyonlarının, reaksiyon oran sabitleridir.

StochSim simülatörü hazır tablo elemanlarını Eşitlik (7)'deki olasılık değerleriyle oluşturur. Eğer standart uniform ($U \sim (0,1)$) 'dan üretilen rassal sayı, bulunan p_1 veya p_2 'den küçük ise o türler arasındaki reaksiyon oluşmuş kabul edilir. Aksi takdirde reaksiyonun gerçekleşmediği sonucuna varılır. Son aşamada simülatör, türlerin bağlanıp bağlanamamasına göre sistemi günceller. Simülasyon, sonraki zaman aralığının belirlenmesi ve yeni bir protein/molekül çiftinin seçilmesiyle tekrar başlatılır.

Bu özelliği ile StochSim enzim sistemlerinin modellenmesine daha uygundur ve özellikle küçük bir hacim içerisinde çok sayıda reaksiyonun olması durumunda hesaplama zamanı açısından daha verimlidir (Bower ve Bolouri, 2001).

Table 1. Biyokimyasal reaksiyonlar için önerilen saf simülasyon algoritmalarının karşılaştırılması

Karşılaştırma kriterleri	Direkt metod (Gillespie)	İlk reaksiyon metodu	Sonraki reaksiyon metodu (Gibson-Bruck)	Stokastik simülatör (StochSim)
Doğruluk	Tam	Tam	Tam	Tam
Hesaplama süresi	Uzun	Kısa	Çok kısa	Çok kısa
Kullanıcı kolaylığı	Çok yaygın	Yaygın	Az yaygın	Çok yaygın
İşlemsel zaman aralığı	Sürekli zaman	Sürekli zaman	Sürekli zaman	Kesikli zaman
Uygulandığı reaksiyon türleri	Protomik/moleküler reaksiyonlar	Protomik/moleküler reaksiyonlar	Protomik/moleküler reaksiyonlar	Enzim reaksiyonları
Heterojen ve lokalizasyonlu reaksiyon performansı	Etkili değil	Etkili değil	Etkili	Etkili

4. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu çalışmada stokastik simülasyon teknikleriyle biyolojik organizmalardaki karmaşık sistemlerin bilgisayar yardımıyla oluşturulması, kullanılan algoritmalar tanıtılarak ve birbirleriyle kıyaslanarak (Tablo 1) açıklanmıştır. Bahsedilen dört yöntem, verdiği cevapların doğruluğu açısından oldukça etkili yöntemlerdir. Buna karşın ilgilenilen sistemlerdeki yapının büyüklüğü, sistem biyoloji ve hesaplamalı biyoloji alanlarındaki araştırmaların yerine, yaklaşık cevaba yönelik olan ancak, işlemsel olarak çok daha hızlı olan algoritmaların geliştirilmesi ihtiyacını ortaya çıkarmaktadır. Bu konuda da yine son yıllarda farklı metodlar önerilmiş ve kıyaslamalı çalışmalar yapılmıştır (Turner vd., 2004, Cao vd., 2005; Auger vd., 2006; Puruçcuoğlu ve Wit, 2006; Puruçcuoğlu, 2010). Önerilen yaklaşık simülasyon metodlarında ise performans kriteri, bahsedilen bu dört metodun, özellikle kullanıcı yaygınlığı ve kolaylığı açısından avantajlı olan Gillespie algoritmasının verdiği sonuçlara göre, yüksek doğruluk ve düşük standard sapmaya sahip olması olarak değerlendirilir (Turner vd., 2004, Cao vd., 2005; Auger vd., 2006). Analizler, hala farklı boyutlardaki sistemleri modellemede kabul edilebilir hesaplama süresi önerebilen yeni tam/katıksız veya yaklaşık stokastik simülasyon tekniklerine ihtiyaç olduğunu göstermektedir.

5. KAYNAKLAR

Auger, A., Chatelain, P., Koumoutsakos, P., 2006. R-leaping: Accelerating the stochastic simulation algorithm by reaction leaps.

- Bower, J. M., Bolouri, H., 2001. Computational modelling of genetic and biochemical networks. Massachusetts Institute of Technology.
- Brent, R., 2004. A partnership between biology and engineering. *Nature Biotechnology*, 22:469–482.
- Cao, Y., Gillespie, D. T., Petzold, L. R., 2005. Avoiding negative populations in explicit poisson Tau-Leaping. *Journal of Chemical Physics*, 123:054104.1-054104.8.
- Cao, Y., Li, H., Petzold, L., 2006. Efficient formulation of the stochastic simulation algorithm for chemically reacting system. *Journal of Chemical Physics*, 121 (9): 4059-4067.
- Endy, D., Brent, R., 2001. Modelling cellular behaviour. *Nature*, 409:391–395.
- Fedoroff, N., Fontana, W., 2002. Genetic networks: Small numbers of big molecules. *Science*, 297:1129–1131.
- Gibson, M. A., Bruck, J., 2000. Efficient exact stochastic simulation of chemical systems with many species and many channels. *Journal of Physical Chemistry, A*(104):1876–1889.
- Gillespie, D. T., 1977. Exact stochastic simulation of coupled chemical reactions. *Journal of Physical Chemistry*, 81(25):2340–2361.
- Gillespie, D. T., 1992. A rigorous derivation of the chemical master equation. *Physica A*, 188:404–425.
- Hume, D. A., 2000. Probability in transcriptional regulation and its implications for leukocyte differentiation and inducible gene expression. *Blood*, 96:2323–2328.
- Jong, H. D., 2002. Modeling and simulation of genetic regulatory systems: A literature review. *Journal of Computational Biology*, 9 (1), 67-103.
- Kampen, N. G. V., 1981. *Stochastic Processes in physics and chemistry*. Elsevier.
- Khanin, R., Wit, E., 2006. How scale-free are biological networks. *Journal of Computational Biology*, 13 (3), 810-818.
- Kitano, H., 2001. *Foundations of systems biology*. Massachusetts Institute of Technology.
- Lok, L., 2002. Pathfinder and other tools for analyzing signal transduction networks. *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, 971:589–594.
- Lok, L., Brent, R., 2005. Automatic generation of cellular reaction networks with molecularizer 1.0. *Nature Biotechnology*, 23(1):131–136.
- Morton-Firth, C., Bray, D., 1998. Predicting temporal fluctuations in an signalling pathway. *Journal of Theoretical Biology*, 192:117–128.

Purutçuoğlu, V., Wit, E., 2006. Exact and approximate stochastic simulations of the MAPK pathway and comparisons of simulations' results. *Journal of Integrative Bioinformatics*, 3, 231-243.

Purutçuoğlu, V., Wit, E., 2008. Bayesian inference for the MAPK/ERK pathway by considering the dependency of the kinetic parameters. *Bayesian Analysis*, 3 (4), 851-886.

Purutçuoğlu, V., 2010. Stochastic simulation of large biochemical systems by approximate Gillespie algorithm. *Proceeding of the 5rd International Symposium on Health, Informatics and Bioinformatics*, IEEE Xplore, 181-186.

Turner, T. E., Schnell, S., Burrage, K., 2004. Stochastic approaches for modelling in vivo reactions. *Computational Biology and Chemistry*, 28:165–178.

Wilkinson, D. J., 2006. *Stochastic modelling for systems biology*. Chapman and Hall/CRC.

AN OVERVIEW TO STOCHASTIC SIMULATION ALGORITHMS FOR BIOCHEMICAL SYSTEMS

ABSTRACT

In order to understand a biological system, we should know which genes/proteins react together, where, when, and how they react in the organisms. In such a biochemical mechanism which is detailed, complex, and stochastic in metabolic level, the experimental validations of cellular activations cannot be typically applicable due to the current technological limitations or the high expenses of the possible experiments. The biochemical modelling is a mathematical way to describe the elements of a system, their proteomic and metabolic interactions, their states under different time points and various conditions by using the known theories about that system. In this study we review how formalize the biochemical reactions and which simulation algorithms can be performed to stochastically model a system whose components are described by these biochemical reactions in the frameworks of bioinformatics and mathematical biology.

Keywords: Mathematical modelling, Simulation, Stochastic algorithms.

ÇOKLU DOĞRUSAL REGRESYONDA ETKİLİ GÖZLEM GRUPLARININ SAPTANMASI İÇİN KULLANILAN TANI YÖNTEMLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

Irmak ACARLAR*

Hamza GAMGAM**

ÖZET

Regresyonda etkili gözlem ve gözlem grupları, tahmin değerlerinde önemli derecede farklılaşmalara neden olabilir. Bu farklılaşmalar modelin açıklanabilirliğini azalttığı için veri kümesindeki etkili gözlem veya gözlem gruplarının saptanması regresyon analizinin verimliliği açısından önemlidir. Bu çalışmada etkili gözlem gruplarının saptanması için kullanılan COVRATIO, Cook Uzaklığı istatistikleri ve grafik yöntemi incelenmiştir. Bu yöntemler, iki gözlemden oluşan etkili bir gözlem grubu içeren veri kümesinde bu gözlem grubunu etkili olarak saptama oranı bakımından karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Etkili gözlem, Simülasyon, Tanı istatistikleri.

1. GİRİŞ

Regresyonda, gözlemlerden biri veya birkaçı veri kümesinin geneline uymayabilir. Bu tip gözlemler aykırı gözlemler (outliers) olarak adlandırılır. Bazı aykırı gözlemler ise mutlak değerce anormal büyüklükte artıklara sahip olabilir ve bunlar regresyon sonuçlarını olumsuz yönde etkileyebilir. Bir veri kümesinde, regresyon parametrelerinin En Küçük Kareler (EKK) tahminlerinde önemli derecede farklılaşmalara neden olan gözlemler, etkili gözlemler olarak tanımlanır. Etkili gözlemler için bir başka tanım ise, veri kümesinde bir etkili gözlem mevcutken ilgili gözlemin veri kümesinden çıkartılması sonucu regresyon tahminleri farklılaşıyorsa bu gözlem etkili gözlemdir biçiminde verilebilir (Cook, 1977; Montgomery vd., 2001).

Etkili gözlemlerin artıkları mutlak değerce oldukça büyük oldukları için, bunlar artık kareler toplamı değerinin büyümesine neden olur. Bundan dolayı bu gözlemler, belirleme katsayısı ve regresyon katsayılarının standart hataları gibi modele ilişkin istatistikler üzerinde olumsuz yönde etkide bulunur. Bu yüzden etkili gözlemlerin saptanması ve saptandıktan sonra, bu gözlemlerin etkisinin azaltılması için gerekli ağırlıklandırmaların yapılması, yapılan regresyon analizinin daha verimli olması açısından önemlidir.

Etkili gözlemler üzerinde ilk kez Cook (1977) tarafından çalışılmıştır. Son otuz yılda bu alanda birçok çalışma yapılmıştır. Bu süreç içerisinde etkili gözlemlerin saptanması için birimlerin tek tek incelenmesinin yanı sıra birimlerin gruplar halinde incelenmesinin de

* Gazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, Teknikokullar, Ankara,
e-posta: irmakacarlar@gazi.edu.tr

** Prof. Dr., Gazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, Teknikokullar, Ankara,
e-posta: gamgam@gazi.edu.tr

önemi ortaya çıkmıştır. Literatürde etkili gözlemlerin saptanması için önerilen tanı istatistikleri beş başlık altında toplanabilir. Bunlar

- Artıklara dayalı,
- Şapka (Projeksiyon, Hat) matrisine dayalı,
- Güven elipsoitlerinin hacmine dayalı,
- Etki eğrisine dayalı ve
- Kısmi etkililiğe dayalı tanı istatistikleridir (Chatterjee ve Hadi, 1986).

Bu tanı istatistiklerinin çoğunda gözlem silme tekniği kullanılmaktadır. Gözlem silme tekniğinde, bir gözlem veya gözlem kümesi veri kümesinden çıkartıldıktan sonra regresyon modeline ilişkin istatistiksel sonuçların nasıl etkilendiği incelenir.

Bilinen e_i artıklarına dayalı olan ve aykırı gözlemlerin saptanmasında kullanılan tanı istatistiklerinden biri Student-Türü Artıklar'dır. Student-Türü Artıklar, aykırı gözlemleri belirlemenin yanında, etkili gözlemlerin belirlenmesi için de kullanılır. Bu yöntemde önemli derecede büyük değerli Student-Türü Artıklar'a sahip gözlemler etkili gözlemler olarak değerlendirilebilir. Dahili ve R-Student Türü olarak ikiye ayrılan Student-Türü Artıklar, Margolin (1977) ve David (1981) tarafından tartışılmıştır.

Hoaglin ve Welsch (1978) aykırı gözlemlerin ve etkili gözlemlerin belirticisi olan yüksek dereceli kaldıraç noktalarını (high leverage points) saptamak için projeksiyon matrisi olarak da bilinen, Şapka Matrisi'nin köşegen elemanlarının kullanılabileceğini belirtmişlerdir. Bu matrisin köşegen elemanları h_{ii} ile gösterilir ve kaldıraç değeri olarak bilinir.

Güven elipsoitlerinin hacmine dayalı tanı istatistiklerine Andrews-Pregibon (1976) tarafından önerilen Andrews-Pregibon istatistiği örnek verilebilir. Ayrıca Belsley vd. (1980) tarafından önerilen kovaryans oranlarına dayalı *COVRATIO* istatistiği de oldukça kullanışlıdır. Cook ve Weisberg (1982) tarafından geliştirilen iki tanı istatistiği olan; Ençok Olabilirlik Uzaklığı ve Cook-Weisberg İstatistiği de güven elipsoitlerin hacmine dayalı istatistiklerdendir.

Uygulamada sıkça kullanılan ve Cook (1977) tarafından önerilen Cook Uzaklığı, etki eğrisi (influence curve/function) kavramının örnek uyarlaması olan örnek etki eğrisi (sample influence curve/function) kavramına dayalı bir istatistiktir. Gözlem silme tekniğine dayalı olan Cook Uzaklığı hem tek başına etkili olan gözlemleri, hem de ortak etkililiğe sahip gözlem kümelerini saptamada kullanılır. Ayrıca bu tanı istatistiğinin değiştirilmiş bir biçimi olan Düzeltilmiş Cook Uzaklığı da etkili gözlemlerin tespit edilmesinde kullanılan diğer bir istatistiktir (Cook ve Weisberg, 1982). Bunlara ek olarak etkili gözlemlerin saptanmasında Belsley vd. (1980) tarafından geliştirilen ve gözlem silme tekniğine dayalı iki kullanışlı tanı istatistiği olan *DFBETAS* ve *DFFITs* istatistikleri de etki eğrisinden türetilmiş istatistiklerdir.

Yüksek dereceli kaldıraç noktalarının ve etkili gözlemlerin incelenmesinde, şapka matrisinin ayrıştırılmasıyla elde edilen j . değişkenin, i . gözlemin h_{ii} değerine katkısı ölçmeye yarayan kısmi kaldıraç değeri (partial leverage) ve bu katkının görsel olarak incelenebildiği kısmi artık grafiği (partial residuals plot) de kullanılmaktadır. Hoaglin ve Welsch (1978) ve Chatterjee ve Hadi (1986) kısmi kaldıraç değerleri ve kısmi artık grafiği ile etkili gözlemlerin bulunması konusu üzerine çalışmışlardır.

Altunkaynak ve Ekni (2002), çok değişkenli doğrusal regresyonda etkili gözlem vektörlerinin saptanması için, doğrusal sınırlamalar, izdüşüm teorisi ve genelleştirilmiş Cook Uzaklığı'ndan oluşan üç aşamalı bir yöntem önermişlerdir. Bu yönteme dayalı olarak Altunkaynak (2003) çoklu doğrusal regresyonda etkili gözlemlerin saptanması için yeni ve hesaplama kolaylığı sağlayan bir yöntem geliştirmiştir.

Etkili gözlemlerin saptanması için bir başka yöntem de bağımlı değişkene karşı bağımsız değişken için oluşturulan serpme diyagramının incelenmesidir. Basit doğrusal regresyonda bu serpme diyagramı iki boyutlu olduğu için etkili gözlemler açık bir şekilde belirlenir. Fakat bağımsız değişken sayısı iki olduğunda, bağımlı değişkene karşı bağımsız değişken için oluşturulan üç boyutlu serpme diyagramından, gözlemlerin genel eğilimine uymayan noktalar görsel olarak saptanamayabilir. Çünkü bu üç boyutlu diyagramda bir hacim söz konusudur. Bağımsız değişken sayısının ikiden fazla olduğu durumlarda ise serpme diyagramı boyut sorunundan dolayı oluşturulamaz. Bu zorluluğu gidermek için Li vd. (2001) çoklu doğrusal regresyonda etkili gözlemlerin saptanması için bir grafiksel yöntem geliştirmişlerdir. Bu yöntemdeki ana fikir yüksek boyutlu bir regresyon problemini iki boyutlu tanı grafiklerinin bir setine indirgeyerek, bu grafiklerin görsel olarak incelenmesine dayanır. Li vd. (2001) bu metodolojiyi hem daha kolay bir yorumlamayı elde etmek, hem de hesaplamalarla diğer yöntemlere göre daha az uğraşmak amacıyla geliştirmişlerdir.

Etkili gözlem grupları incelenirken veri kümesinde regresyon tahminleri üzerinde ortak etkisi olan gözlemler mevcut olabileceği gibi bu tahminler üzerinde koşullu olarak etkili olan gözlemler de bulunabilir. Son yıllarda ortak etkililik (joint influence) ve koşullu etkililik (conditional influence) kavramlarına bağlı olarak maskeleyme (masking) ve sürüklenme (yanılgıya-düşürme, swamping) sorunları üzerinde durulmaktadır. Maskeleyme, iki ya da daha fazla etkili gözlemin bulunduğu bir veri kümesinde, bu etkili gözlemlerden birinin, diğer etkili gözlem veya gözlemleri veri kümesinden tamamen atmadan etkili olarak saptanamaması durumudur. Sürüklenme ise etkili bir gözlemlerle, verinin geneline uyan bir başka gözlemin etkili gözlem grubu olarak saptanmasıdır. Lawrance (1995) etkili gözlemlerin analizinde maskeleymeyi ve sürüklenme sorunlarını incelemiştir ve etkili gözlemler için bu sorunların aykırı gözlemlerdeki orijinal tanımlarıyla aynı olmadığını vurgulamıştır.

Çalışmanın ikinci bölümünde regresyonla ilgili temel kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde etkili gözlem gruplarının saptanması için kullanılan Cook uzaklığı, *COVRATIO* tanı istatistikleri ve yeni bir yöntem olan grafik yöntemi tanıtılmıştır. Dördüncü bölümde ise bu yöntemler, literatürde tanı yöntemlerinin incelenmesi için sıklıkla kullanılan bir veri kümesi üzerinde incelenmiştir. Cook Uzaklığı, *COVRATIO* istatistikleri ve grafik yönteminin simülasyon çalışmasıyla karşılaştırılması beşinci bölümde verilmiştir. Son olarak altıncı bölümde de sonuç ve öneriler sunulmuştur.

2. YÖNTEM

Bu bölümde çoklu doğrusal regresyon modeli, tanı yöntemlerine ilişkin temel kavramlar ve bazı tanı yöntemleri verilmiştir.

2.1 Çoklu Doğrusal Regresyon Modeli

Hata terimi ile ilgili bilinen varsayımlar altında regresyon modeli Eşitlik (1)'de verilen biçimde tanımlanır.

$$Y = X\beta + \varepsilon \quad (1)$$

Bu modelde $n \times 1$ boyutlu yanıt vektörü Y , $n \times p$ boyutlu ve p ranklı tasarım matrisi X , $p \times 1$ boyutlu parametre vektörü β ve $n \times 1$ boyutlu 0 ortalamalı ve σ^2 varyanslı hata vektörü de ε ile gösterilir. β parametre vektörünün EKK tahmin edicisi olan $\hat{\beta}$ için,

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (2)$$

olduğu bilinir. Tahmin değerlerinin vektörü \hat{Y} olmak üzere, artık vektörü olan e aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} e &= Y - \hat{Y} = Y - X\hat{\beta} \\ &= (I - X(X^T X)^{-1} X^T)Y \\ &= (I - H)Y \end{aligned} \quad (3)$$

Burada H , şapka matrisi olarak bilinir. $n \times n$ boyutlu olan şapka matrisinin köşegen elemanları (h_{ii}) aykırı ve etkili gözlemleri saptamada kullanılır (Hoaglin ve Welsch, 1978). Böylece şapka matrisi,

$$H = X(X^T X)^{-1} X^T \quad (4)$$

ile verilir. Simetrik ve eşgüçlü bir matris olan H matrisinin i . köşegen elemanına karşılık gelen değer h_{ii} ile gösterilir ve kaldırmaç değeri olarak adlandırılır. Hoaglin ve Welsch (1978) i . gözleme karşılık gelen kaldırmaç değerinin $2p/n$ 'den büyük olması durumunda, bu gözlemi yüksek dereceli kaldırmaç noktası olarak tanımlamışlardır.

i . gözleme karşılık gelen kaldırmaç değerinin hesaplanması için alternatif bir formül,

$$h_{ii} = x_i (X^T X)^{-1} x_i^T, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

olarak verilir. Burada x_i vektörü, X matrisinin i . satırıdır. h_{ii} değerlerinin özelliği toplamlarının tahmin edilecek parametre sayısı olan p 'ye eşit ve $0 \leq h_{ii} \leq 1$ olmasıdır (Hoaglin ve Welsch, 1978).

Veri kümesinin geneline uymayan gözlemlerin belirlenmesinde kullanılan diğer istatistiklerden ikisi Dahili ve R-Student Türü Artıklar'dır. Bunlardan Dahili Student-Türü Artık, r_i ile gösterilir ve

$$r_i = \frac{e_i}{\hat{\sigma} \sqrt{(1-h_{ii})}} \quad , \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (6)$$

ile verilir. Doğrusal bir modelde, Dahili Student-Türü Artıklar ortalaması 0 ve varyansı 1 olan normal dağılıma sahiptir (Margolin, 1977).

R-Student Türü Artıklar ise gözlem silme tekniğine dayalıdır. Hataların normalliği varsayımı altında i . gözlemin silinmesiyle hesaplanan varyansın tahmin edicisi $\hat{\sigma}_{(i)}^2$ olmak üzere bu gözleme ilişkin R-Student Türü Artık değeri,

$$t_i = \frac{e_i}{\sqrt{\hat{\sigma}_{(i)}^2 (1-h_{ii})}} \quad , \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (7)$$

ile verilir. t_i istatistiği $n-p$ serbestlik dereceli Student-t dağılır. Bu durumda bu istatistik için kritik değer olarak $t_{\alpha, n-p}$ kullanılır (David, 1981).

2.2 Etkili Gözlem Gruplarının Saptanması için Tanı Yöntemleri

Etkili gözlemlerin saptanması için kullanılan tanı yöntemlerinden üçü, Cook Uzaklığı, *COVRATIO* istatistikleri ve yeni bir yöntem olan grafik tekniğidir. Bu tanı yöntemlerinden Cook Uzaklığı ve *COVRATIO* istatistikleri gözlem silme tekniğine dayalıdır. Ayrıca bu istatistikler, veri kümesindeki gözlemleri teker teker inceleme imkanı sağlamasının yanı sıra veri kümesindeki gözlemleri gruplar halinde de inceleme imkanı sağlamaktadır. Bu bölümde bu üç yöntem tanıtılmıştır.

2.2.1 Cook Uzaklığı İstatistiği

Tüm veri kümesine dayalı EKK tahmin vektörü $\hat{\beta}$ ile i . gözlemin veya veri kümesinin bir alt kümesinin veri kümesinden atılmasıyla elde edilen EKK tahmin vektörü $\hat{\beta}_{(i)}$ arasındaki karesel uzaklığın bir ölçüsü olan Cook Uzaklığı istatistiği, Cook (1977) tarafından önerilmiştir. Cook Uzaklığı, D_i ile gösterilir ve

$$D_i(X^T X, p\hat{\sigma}^2) = \frac{(\hat{\beta}_{(i)} - \hat{\beta})^T X^T X (\hat{\beta}_{(i)} - \hat{\beta})}{p\hat{\sigma}^2} \quad i=1,2,\dots,n \quad (8)$$

ile verilir. Veri kümesinin m büyüklüğünde bir alt kümesi olan ve I ile gösterilen gözlem grupları incelenmek istenirse bu istatistik,

$$D_I(X^T X, p\hat{\sigma}^2) = \frac{(\hat{\beta}_{(I)} - \hat{\beta})^T X^T X (\hat{\beta}_{(I)} - \hat{\beta})}{p\hat{\sigma}^2} \quad (9)$$

ile verilir. Literatürde D_i istatistiğine ilişkin kritik değer $F_{0.50,p,n-p}$ olarak bilinir. Bu durumda $D_i > F_{0.50,p,n-p}$ koşulunun sağlanması, i . gözlemin veya I ile gösterilen gözlem grubunun etkili olduğunu işaret eder.

2.2.2 COVRATIO İstatistiği

Etkili gözlemlerin saptanmasında kullanışlı olan bir diğer tanı istatistiği, i . gözlemin silinmesiyle geri kalan veriden elde edilen varyans-kovaryans matrisinin determinantının, tüm veriden elde edilen varyans-kovaryans matrisinin determinantına oranı olan $COVRATIO_i$ istatistiğidir. $X_{(i)}$, i . gözlemin silinmesiyle geri kalan veriyi temsil eden tasarım matrisi olmak üzere $COVRATIO_i$,

$$COVRATIO_i = \frac{\det\left\{\hat{\sigma}_{(i)}^2 (X_{(i)}^T X_{(i)})^{-1}\right\}}{\det\left\{\hat{\sigma}^2 (X^T X)^{-1}\right\}} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (10)$$

olarak tanımlanır. $\det(X_{(i)}^T X_{(i)}) = (1 - h_{ii}) \det(X^T X)$ olduğundan dolayı $COVRATIO_i$ istatistiği, Student-Türü artıklar cinsinden de yazılabilir (Belsley vd., 1980).

$$\begin{aligned} COVRATIO_i &= \left(\frac{\hat{\sigma}_{(i)}^2}{\hat{\sigma}^2}\right)^p \left(\frac{1}{1 - h_{ii}}\right) \\ &= \frac{1}{\left(\frac{n-p-1}{n-p} + \frac{t_i^2}{n-p}\right)^p (1 - h_{ii})} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (11)$$

Veri kümesinin m büyüklüğünde bir alt kümesi olan ve I ile gösterilen gözlem grupları incelenmek istenirse bu istatistik,

$$COVRATIO_i = \frac{\det\left\{\hat{\sigma}_{(i)}^2 (X_{(i)}^T X_{(i)})^{-1}\right\}}{\det\left\{\hat{\sigma}^2 (X^T X)^{-1}\right\}} \quad (12)$$

ile verilir. Belsley vd. (1980), $|COVRATIO_i - 1| > 3p/n$ olması durumunda, i . gözlemin etkili olduğunu öne sürmüşlerdir.

2.2.3 Grafik Tekniği

Etkili gözlem veya gözlem gruplarının saptanması için kullanılan bir diğer yöntem Li vd. (2001) tarafından önerilen grafik tekniğidir. Bu yöntemin benzer grafiksel yöntemlere göre iki avantajı; hem daha kolay yorumlayabilmeyi sağlamak, hem de

hesaplamalarla daha az uğraşmaktır. Bu yöntem adimsal bir yöntemdir ve her bir öz değere karşılık gelen tanı grafiğinin belli bir algoritmaya göre oluşturulup, ayrı ayrı incelenmesine dayanır. Tanı grafiklerini elde etmek için önerilen algoritma $l=1,2$ ve $j=1,2,\dots,p$ için, j . özdeğer a_j olmak üzere aşağıdaki gibidir.

Adım 1: X matrisinin faktöriyel QR ayrıştırması, $n \times n$ boyutlu $Q = [Q_1, Q_2]$ matrisi için $X = QR$ biçiminde elde edilir. Burada tüm elemanları sıfır olan matris O olmak üzere $R = [R_1^T, O_{(n-p) \times p}^T]^T$ matrisi $n \times n$ boyutlu bir üst üçgen matrisi, R_1 tekil olmayan $p \times p$ boyutlu bir üst üçgen matrisi ve Q_1 matrisi $n \times p$ boyutlu bir dik matristir.

Adım 2: $p \times p$ boyutlu R_1 matrisinin tekil değer ayrıştırması,

$$R_1^T = P_1 \text{diag} \{a_1^{-1/2}, \dots, a_p^{-1/2}\} P_2^T$$

ile hesaplanır. Burada $p \times p$ boyutlu P_1 ve P_2 matrisleri dik matrislerdir.

Adım 3: $\phi = Q \text{diag} \{O_{p \times p}, I_{(n-p) \times (n-p)}\} Q^T Y$ ve $\phi_0 = \phi / (\phi^T \phi)^{1/2}$ hesaplanır.

Adım 4: Keyfi olarak belirlenen $s_j \times 1$ boyutlu r_j vektörü için, $u_j = Q_1 [G_j^T, O^R]^T r_j$ hesaplanır. Burada G_j vektörü P_1 matrisinin j . sütunudur.

Adım 5: $w_1^{(j)} = (\phi_0 + u_j) / 2^{1/2}$ hesaplanır.

j . tanı grafiği, bu adımlar doğrultusunda elde edilen $w_1^{(j)}$ ve $w_2^{(j)}$ vektörleri için serpm diyagramı oluşturularak elde edilir. Özdeğer sayısı kadar olan tanı grafiklerinden etkili gözlemi veya etkili gözlem gruplarını en açık bir şekilde sunan grafiği belirlemek için Li vd. (2001) tarafından önerilen bir karar değişkeni Göreli Duyarlılık Faktörü (Relative Sensitivity Factor, RSF) olarak tanımlanır ve

$$\lambda^{(j)} = \frac{a_j^{1/2}}{\sum_{j=1}^p a_j^{1/2}}, \quad (j=1,2,\dots,p) \quad (13)$$

ile verilir.

Li vd. (2001) tanı grafiklerinde veri kümesinin geneline uymayan gözlemlerin tespit edilebilmesi için ρ yarıçaplı deneysel güven elipslerinin oluşturulabileceğini belirtmişlerdir. Deneysel güven elipsleri,

$$(w - w_0^{(j)})^T [M^{(j)}]^{-1} (w - w_0^{(j)}) = \rho \quad (14)$$

ile elde edilir. Burada 2×1 boyutlu olan $w_0^{(j)}$ vektörünün elemanları $w_1^{(j)}$ ve $w_2^{(j)}$ vektörlerinin elemanlarının konum parametrelerinden oluşmaktadır. $M^{(j)}$ ise bu iki vektörün elemanları için oluşturulan kovaryans matrisidir.

3. BULGULAR

Bu bölümde etkili gözlem gruplarının saptanması için kullanılan Cook Uzaklığı, COVRATIO istatistikleri ve grafik tekniğine ilişkin bir uygulamaya yer verilmiştir. Sonra bu üç tanı yöntemi, bir simülasyon çalışmasıyla karşılaştırılmıştır.

3.1 Uygulama

Etkili gözlemlerin saptanması için önerilen bu üç yöntem küçük bir uygulama üzerinden gösterilmek istenirse, literatürde etkili gözlemlerin saptanması için kullanılan yöntemlerin değerlendirilmesi için yaygın olarak kullanılan ve etkili gözlem içeren Fare Verisi (Rat Data) ele alınabilir (Cook ve Weisberg, 1982). Veri kümesi, farelerin karaciğerine uygulanan bir ilacın miktarının incelenmesi suretiyle yapılan bir deneyden elde edilmiştir. 19 fare rastgele seçilmiştir ve yanıt değişkeni karaciğerdeki dozun oranı (y) ve üç bağımsız değişken vücut ağırlığı (x_1), karaciğer ağırlığı (x_2) ve vücuda verilen doz oranı (x_3) olarak belirlenmiştir. Cook ve Weisberg (1982) bu veri kümesi için aşağıdaki doğrusal modeli oluşturmuşlardır.

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \varepsilon_i \quad , \quad i = 1, \dots, 19 \quad (15)$$

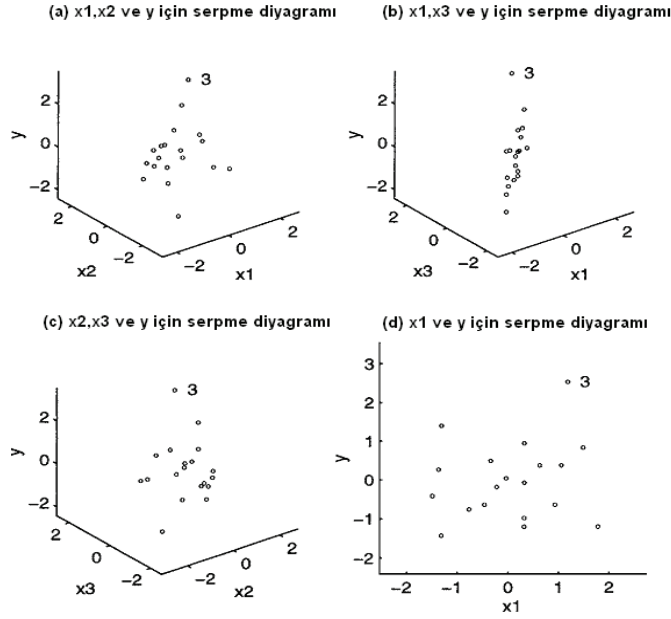
Gözlemlerin, Cook Uzaklığı ve COVRATIO değerleri Tablo 1’de verilmiştir. Tablo 1 incelendiğinde üçüncü gözleme ilişkin Cook Uzaklığı değeri olan D_3 değerinin, diğer gözlemlere ilişkin Cook Uzaklığı değerlerinden oldukça büyük olduğu gözlenmektedir. Ayrıca $D_3 > F_{0.50,3,16}$ olduğundan dolayı ilgili gözlem etkili gözlem olarak saptanır. Bu veri kümesindeki gözlemlerin COVRATIO değerleri, ilgili karar kuralına göre incelendiğinde ise üçüncü gözlemin etkili gözlem olduğu saptanır.

Tablo 1. Fare verisi için hesaplanan Cook Uzaklıkları ve COVRATIO değerleri

Gözlem No	D_i	$COVRATIO_i$
1	0,16883	0,63100
2	0,08854	1,01641
3	0,92962	7,40080
4	0,05718	0,8599
5	0,20292	1,52416
6	0,00049	1,56674
7	0,02462	1,28928
8	0,04686	1,52005
9	0,00049	1,40225
10	0,00005	1,49636
11	0,04144	1,06564
12	0,01890	1,44373
13	0,27260	0,97225
14	0,00537	1,46055
15	0,00373	1,35882
16	0,05099	1,37492
17	0,00425	1,60711
18	0,03163	1,27008
19	0,19994	0,51736

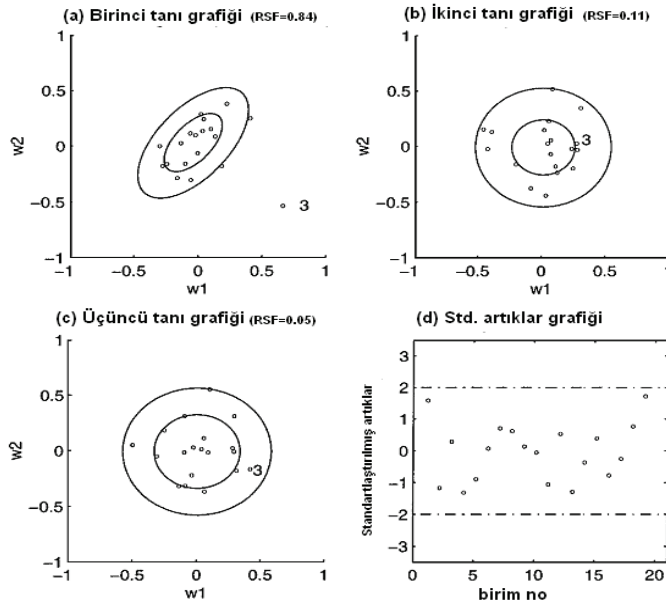
m hacimli etkili bir gözlem grubu, o grubu oluşturan etkili gözlemlerin genelleştirilmiş bir haline karşılık geldiği için bu gözlem grubunu saptamada aynı işlemler dizisi uygulanır.

3. gözlemi etkili olan bu veri kümesi için serpme diyagramları Şekil 1’de verilmiştir. İlk üç diyagram, bağımsız değişkenlerin ikili kombinasyonları ile yanıt değişkeni dikkate alınarak oluşturulan üç boyutlu diyagramlardır. Bu diyagramların üçünde de üçüncü gözlem etkili gözlem olmasından ziyade, aykırı gözlem olarak görülmektedir. İki boyutlu serpme diyagramında ise bu gözlemin etkili veya aykırı gözlem olduğuna kesin olarak karar vermek zordur.



Şekil 1. Fare Verisi için Serpme Diyagramları

Tanı grafikleri oluşturulmadan önce ham veri standartlaştırılmıştır. Li vd. (2001) tarafından önerilen algoritmaya göre oluşturulan tanı grafikleri Şekil 2'deki gibi elde edilmiştir. Grafikler incelendiğinde RSF değeri en büyük olan grafik birinci grafikdir. Bu durumda etkili gözlemleri en açık sunan grafiğin, bu grafik olduğu sonucuna varılır.



Şekil 2. Fare Verisi için Tanı Grafikleri

Birinci grafik incelendiğinde $w_1^{(1)}$ ve $w_2^{(1)}$ arasında doğrusal ilişki olduğu açık bir şekilde görülebilir. Ayrıca bu grafikteki noktalar incelendiğinde 3. gözlem veri kümesinin geneline uymadığı gözlenmektedir. Li vd. (2001) tarafından önerilen karar kuralına göre, bu nokta oluşturulan deneysel güven elipsinin dışında olduğu için regresyon tahminlerini değiştirme potansiyeline sahiptir. Diğer grafiklerde ise gözlemler düzgün bir yayılım göstermektedir. Bir başka ifade ile diğer grafiklerde 3. gözlem dışında veri kümesinin geneline uymayan başka gözlem yoktur. Bu durumda 3. gözlemin veri kümesindeki tek etkili gözlem olduğu sonucuna varılır.

3.2 Simülasyon Çalışması

Bu bölümde önce etkili gözlemlerin saptanması için kullanılan Cook Uzaklığı, *COVRATIO* istatistikleri ve grafik yöntemi, örnek hacminin ve bağımsız değişken sayısının farklı durumları için simülasyon kullanılarak, etkili gözlem grubu içeren veri kümesindeki etkili gözlem grubunu saptama oranı bakımından karşılaştırılmıştır. Sonra örnek hacmi ve bağımsız değişken sayısı sabit iken bu gözlemlere ilişkin hata terimleri mutlak değer olarak daha da büyütülerek bunların verinin merkezinden uzaklaştırıldığı durumda, bu yöntemler etkili gözlem grubu içeren veri kümesindeki etkili gözlem grubunu saptama oranı bakımından karşılaştırılmıştır.

Simülasyon çalışmasında veri kümesini üretmek için Hadi ve Simonoff (1993) tarafından yapılan çalışmadaki veri üretme yönteminden yararlanılmıştır. Hadi ve Simonoff (1993) tarafından yapılan çalışmada veri kümesi aykırı gözlem içermek amacıyla üretildiği için bu çalışmada, aynı yöntemle veri kümesi etkili gözlem içerecek biçimde MATLAB2008a programı kullanılarak üretilmiştir.

Birden fazla etkili gözlemin bulunduğu bir veri kümesinde etkili gözlem veya gözlem grupları tanı istatistikleri kullanılarak saptanırken karşılaşılabilecek sorunlardan ikisi maskeleye ve sürüklemedir. Bu çalışmada, simülasyon maskeleye ve sürüklemeye karşılaşılmayacak biçimde tasarlanmıştır.

Etkili bir gözlemin kaldıraç değeri etkili olmayan gözlemlerinkine göre daha büyüktür. Bu tanımdan yararlanarak 1 ve 2 indisleri ile gösterilen ve veri kümesindeki etkili gözlem grubunu oluşturan iki etkili gözlem için kaldıraç değerlerini büyütme amacıyla bu gözlemlerin $p-1$ sayıda bağımsız değişkenlerin değerleri, veri kümesinin geneline uyan gözlemlere ilişkin bağımsız değişkenlerin değerlerinin tekdüze dağılımdan türetildiği $[0,15]$ aralığının en uç değeri olan 15 olarak belirlenmiştir. Bu gözlemlerin hata değişken değerleri ise sırasıyla $\varepsilon_1 = -5$ ve $\varepsilon_2 = -5.5$ olarak alınmıştır. Buradaki amaç bu gözlemlerin hata değişken değerini mutlak değerce arttırarak, bunların artık değerlerini de mutlak değerce büyütmeektir. Sonra parametrelerinin değerleri 1 olan,

$$Y_i = 1 + X_{i1} + \dots + X_{i,p-1} + \varepsilon_i \quad (16)$$

modeline göre etkili grubunu oluşturan gözlemlerin bağımlı değişken değeri türetilmiştir. Simülasyon boyunca bu gözlemlere ilişkin bağımsız değişkenlerin değerleri ve bağımlı değişken değerleri sabit kalmıştır.

Veri kümesinin geneline uyan $n-2$ sayıda gözlem için $p-1$ sayıda bağımsız değişken değerleri $[0,15]$ aralığında tekdüze dağılımdan türetilmiştir. Sonra simülasyon aşığıdaki adımlar doğrultusunda yapılmıştır.

Adım 1: Bağımsız değişken sayısı $p-1$ olmak üzere, $p \times 1$ boyutlu β parametre vektörünün tüm elemanlarına 1 değeri atanır.

Adım 2: Veri kümesinin geneline uyan gözlemler için hata değişkenlerinin değerleri, $\varepsilon_i \sim N(0,1)$ dağılımından üretilir.

Adım 3: $p-1$ sayıda bağımsız değişkenlerin değerleri ve hata değişkenlerinin değerleri kullanılarak,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \dots + \beta_{p-1} X_{i,p-1} + \varepsilon_i \quad (i = 3, 4, \dots, n) \quad (17)$$

modeline göre veri kümesinin geneline uyan gözlemler için bağımlı değişken değerleri türetilir.

Adım 4: Türetilen veri kümesindeki her bir gözlem için *COVRATIO* ve D_i istatistiklerinin değerleri hesaplanır ve her bir tanı istatistiğine ilişkin karar kuralına göre 1 ve 2 indisi ile gösterilen gözlemlerin etkili bir gözlem grubu olup olmadığına karar verilir.

Adım 5: Aynı veri kümesi için grafik yöntemine göre tanı grafikleri oluşturulur. (13) eşitliğinde verilen ve görelî duyarlılık faktörü olarak tanımlanan karar değişkenine göre etkili gözlem grubunu belirleme gücü en yüksek olan grafik alınır. Bu grafikte etkili gözlem grubunu oluşturan gözlemler haricindeki diğer gözlemlere ilişkin noktaların merkeze uzaklıkları,

$$r = (w - w_0^{(j)})^T [M^{(j)}]^{-1} (w - w_0^{(j)})$$

ile hesaplanıp en büyük uzaklık deneysel güven elipsinin yarıçap uzunluğu olan ρ olarak alınır. Eğer 1 ve 2 indisleri ile gösterilen gözlemlere ilişkin noktaların elipsin merkezine uzaklıkları, ρ değerinden büyük ise bu noktalar deneysel güven elipsinin dışındadır ve grafik yöntemine göre bu gözlem grubu etkili bir gözlem grubudur.

Her 1 000 tekrarda veri kümesinin geneline uyan gözlemler için bağımsız değişkenlerin değerleri yeniden üretilmek üzere bu deneme 100 000 kez tekrarlanmıştır. Sonra etkili gözlem grubu içeren veri kümesinde, bu tanı yöntemlerinin etkili bir gözlem grubunu tespit etme oranları hesaplanmıştır.

3.2.1 Bağımsız Değişken Sayısı ve Örnek Hacminin Farklı Değerleri için Etkili Gözlem Gruplarını Saptamaya Dayalı Tanı Yöntemlerinin Karşılaştırılması

Bağımsız değişken sayısının iki olduğu, $p = 3$ olan durum için etkili gözlem grubu içeren bir veri kümesinde etkili gözlem gruplarını saptamak için kullanılan üç tanı yöntemine ilişkin simülasyon sonuçları Tablo 2’de verilmiştir.

Tablo 2. $p = 3$ iken Tanı Yöntemlerinin Veri Kümesinde Etkili Gözlem Grubunu Saptama Oranları

$p = 3$			
	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
$D_{\{1,2\}}$	0,9989	0,9997	0,9998
$COVRATIO_{\{1,2\}}$	0,9790	0,9991	0,9995
Grafik Yöntemi	0,7450	0,8913	0,9253

Tablo 2’deki sonuçlar incelendiğinde Cook Uzaklığı ve $COVRATIO_{\{1\}}$ istatistiklerinin bu etkili gözlem grubunu saptama oranlarının ele alınan tüm örnek hacimlerinde oldukça büyük olduğu görülmektedir. Bununla birlikte tüm örnek hacimleri için diğer yöntemlere nazaran grafik yöntemin etkili gözlem grubunu saptama oranının düşük olduğu gözlenmektedir. Ayrıca örnek hacmi arttıkça grafik yönteminin, bu etkili gözlem grubunu saptama oranı da artmaktadır.

Bağımsız değişken sayısının üç olduğu durumda, $p = 4$ durumu için etkili gözlem gruplarını saptamaya dayalı tanı yöntemlerine ilişkin simülasyon sonuçları Tablo 3’te verilmiştir.

Tablo 3. $p = 4$ iken Tanı Yöntemlerinin Veri Kümesinde Etkili Gözlem Grubunu Saptama Oranları

$p = 4$			
	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
$D_{\{1,2\}}$	0,9992	0,9996	0,9998
$COVRATIO_{\{1,2\}}$	0,9389	0,9937	0,9993
Grafik Yöntemi	0,3130	0,5917	0,7232

Tablo 3’teki sonuçlar incelendiğinde Cook Uzaklığı istatistiğine ilişkin etkili gözlem grubunu saptama oranının örnek hacminin tüm durumları için yüksek olduğu açıkça görülmektedir. $COVRATIO_{\{1\}}$ istatistiği ve grafik yöntemine ilişkin etkili gözlem grubunu saptama oranları ise örnek hacmi arttıkça artmaktadır. Buna ek olarak grafik yöntemi $n = 20$ iken etkili gözlem grubunu oldukça küçük bir oranla saptamaktadır.

Bağımsız değişken sayısının dört olduğu, $p = 5$ durumu için etkili gözlem grupları için tanı yöntemlerine ilişkin simülasyon sonuçları Tablo 4’te verilmiştir.

Tablo 4. $p = 5$ iken Tanı Yöntemlerinin Veri Kümesinde Etkili Gözlem Grubunu Saptama Oranları

$p = 5$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
$D_{\{1,2\}}$	0,9986	0,9991	0,9996
$COVRATIO_{\{1,2\}}$	0,8733	0,9855	0,9980
Grafik Yöntemi	0,1826	0,3340	0,5654

Tablo 4'teki sonuçlar incelendiğinde, farklı örnek hacimleri altında Cook Uzaklığı istatistiğinin etkili gözlem grubunu saptama oranının dikkate değer biçimde büyük olduğu görülmektedir. Bununla birlikte $COVRATIO_{\{t\}}$ istatistiği ve grafik yöntemine ilişkin oranlar farklı örnek hacimleri altında Cook Uzaklığı istatistiği için elde edilen oranlara göre daha küçüktür. Ayrıca bu iki yöntem için elde edilen etkili gözlem grubunu saptama oranları örnek hacmi arttıkça sayısal olarak büyümektedir.

Örnek hacmi $n = 20$ iken etkili gözlem gruplarını saptamak için kullanılan tanı yöntemlerine ilişkin Tablo 2, Tablo 3 ve Tablo 4'teki sonuçlar incelendiğinde bağımsız değişken sayısı arttıkça, $COVRATIO_{\{t\}}$ istatistiği ve grafik yöntemi için bulunan etkili bir gözlem grubunu saptama oranlarının küçüldüğü gözlenmektedir. Özellikle bu küçülme grafik yöntemi için daha da açık bir şekilde görülmektedir. Bununla birlikte ele alınan tüm örnek hacimleri ve bağımsız değişken sayıları için Cook Uzaklığı istatistiğine ilişkin etkili gözlem grubunu saptama oranları diğer yöntemler göre büyüktür.

Cook Uzaklığı istatistiğinin etkili bir gözlem grubunu saptama oranının ele alınan tüm örnek hacimleri ve bağımsız değişken sayıları için yüksek olması, m hacimli etkili bir gözlem grubunun bulunduğu veri kümesinde bu etkili gözlem grubunun silinmesiyle geri kalan gözlemlerden elde edilen EKK tahmini $\hat{\beta}_{(t)}$ ile tüm gözlemlere dayalı olarak elde edilen $\hat{\beta}$ arasındaki karesel uzaklığın oldukça büyük olmasından kaynaklanmaktadır. Dolayısıyla bu istatistik, β parametre vektörünün EKK tahminindeki büyük değişimi sayısal olarak diğer iki yöntemle nazaran açıkça göstermektedir. Bağımsız değişken sayısı sabitken, örnek hacmi arttıkça $COVRATIO_{\{t\}}$ istatistiği için bulunan etkili gözlem grubunu saptama oranlarının artmasının nedeni ise bu istatistiğe ilişkin karar kuralında yer alan kritik değerlerin örnek hacminin azalan bir fonksiyonu olmasıdır.

Grafik yöntemi, çok boyutlu bir regresyon problemini iki boyutlu bir probleme dönüştürmek suretiyle oluşturulan p sayıda tanı grafikleri setinin, her bir grafikteki noktalar için oluşturulan güven bölgesi kriterine bağlı olarak incelemesine dayalıdır. Veri kümesinde bir etkili gözlem grubu bulunduğunda bu etkili gözlem grubunu saptama oranı bakımından grafik yönteminin incelenmesi, bu yöntemin regresyon problemini nasıl dönüştürdüğünü değerlendirmek açısından önemlidir. Bağımsız değişken sayısı sabitken grafik yöntemiyle etkili gözlem grubunu saptama oranlarına ilişkin sonuçlar incelendiğinde örnek hacminin artmasıyla bu yöntemin etkili gözlem grubunu daha iyi saptadığı açıkça görülmektedir. Fakat örnek hacmi sabit iken bağımsız

değişken sayısı arttıkça, grafik yönteminin etkili gözlem grubunu saptama oranı düşmektedir. Buna bağlı olarak regresyon probleminin boyutu arttıkça, grafik yönteminin regresyon problemini dönüştürme eğiliminin azaldığı sonucuna varılır.

3.2.2 Bağımsız Değişken Sayısı ve Örnek Hacmi Sabitken Etkili Gözlem Gruplarını Saptamaya Dayalı Tanı Yöntemlerinin Karşılaştırılması

Bu simülasyonda, bağımsız değişken sayısı ve örnek hacmi sabit iken etkili gözlem grubunu oluşturan gözlemlerin hata değişkenlerinin değerleri mutlak değerce artırılarak, bunların verinin merkezinden uzaklaştırıldığı durumlarda, tanı yöntemlerinin etkili gözlem grubu içeren veri kümesinde bu gözlem grubunu saptama oranları elde edilmiştir. Buradaki amaç etkili gözlem grubundaki gözlemlerin, hata değişken değerlerinin daha da arttığı durumlarda tanı yöntemlerini karşılaştırmaktır.

$n = 20$ ve $p = 3$ iken etkili gözlem gruplarını saptamak için kullanılan tanı yöntemlerine ilişkin simülasyon bir öncekine benzer biçimde bölümün başında belirtilen adımlar doğrultusunda yapılmıştır. Simülasyon yapılırken etkili gözlem grubunu oluşturan iki gözlemin hata değişkeni değerleri sırasıyla $\varepsilon_1 = -5$ ve $\varepsilon_2 = -5,5$ alınıp bu gözlemlerin bağımsız değişken değerleri de kullanılarak bağımlı değişken değerleri elde edilmiştir. Sonra bölümün başında verilen adımlar doğrultusunda, her 1 000 tekrara da verinin geneline uyan gözlemlerin bağımsız değişkenlerinin değerleri yeniden üretilmek üzere,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \dots + \beta_{p-1} X_{i,p-1} + \varepsilon_i \quad (i = 3, 4, \dots, n)$$

modeli dikkate alınıp, bu deneme 100 000 kez tekrar edilmiştir ve etkili bir gözlem grubu içeren veri kümesinde etkili gözlem gruplarını saptamak için kullanılan tanı yöntemlerinin bu etkili gözlem grubunu saptama oranları elde edilmiştir. Aynı simülasyon bu iki gözlemin hata değişkeni değerleri önce $\varepsilon_1 = -7$, $\varepsilon_2 = -7,5$ için sonra $\varepsilon_1 = -10$, $\varepsilon_2 = -10,5$ için yapıлып sonuçlar Tablo 5'te verilmiştir.

Tablo 5. $n = 20$ ve $p = 3$ iken Tanı Yöntemlerinin Farklı Hata Değişken Değerlerine göre Üretilen İki Etkili Gözlemin Oluşturduğu Etkili Gözlem Grubunu Saptama Oranları

	$n = 20, p = 3$		
	$\varepsilon_1 = -5$ $\varepsilon_2 = -5,5$	$\varepsilon_1 = -7$ $\varepsilon_2 = -7,5$	$\varepsilon_1 = -10$ $\varepsilon_2 = -10,5$
$D_{\{1,2\}}$	0,9989	1	1
$COVRATIO_{\{1,2\}}$	0,9790	0,9987	1
Grafik Yöntemi	0,7450	0,8829	0,9094

Tablo 5'teki sonuçlar incelendiğinde veri kümesindeki etkili gözlem grubunu oluşturan gözlemlerin hata değişkeni değerlerinin artmasıyla $COVRATIO_{(t)}$, Cook Uzaklığı istatistikleri ve grafik yönteminin bu gözlem grubunu saptama oranlarının arttığı gözlenmektedir. $COVRATIO_{(t)}$ ve Cook Uzaklığı istatistiklerinin etkili gözlem grubunu saptama oranlarının ele alınan tüm örnek hacimlerinde yüksek olmasıyla birlikte grafik yöntemi için deneysel olarak elde edilen oran bu iki istatistiğe göre daha küçüktür.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Sonuç olarak Cook Uzaklığı İstatistiği etkili gözlem gruplarını saptamak için kullanılan yöntemler içinde bu gözlem gruplarını saptama bakımından en iyi yöntemdir. Bundan başka $COVRATIO$ istatistiği de etkili gözlem gruplarına duyarlıdır. Yüksek boyutlu bir regresyon probleminin iki boyutlu bir probleme indirgenmesi amacıyla veri kümesine bir dönüşümün uygulandığı grafik yöntemi ise regresyon probleminin boyutu arttıkça etkili gözlem gruplarını saptama bakımından duyarlılığı azalmaktadır.

5. KAYNAKLAR

Altunkaynak, B., Ekni, M., 2002. Detection of influential observation vectors for multivariate linear regression. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 31: 139-151.

Altunkaynak, B., 2003. Doğrusal sınırlamalar ve izdüşüm teorisi yardımıyla çoklu doğrusal regresyonda etkili gözlemlerin tespiti. Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, 16(3): 457-466.

Andrews, D. F., Pregibon, D., 1976. Finding outliers that matter. J. Roy. Statist. Soc., Ser. B. 40: 85-93.

Belsley, D. A., Kuh, E., Welsch, R.E., 1980. Regression diagnostics: Identifying influential data and sources of collinearity. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, New York, 6-84.

Chatterjee, S., Hadi, A. S., 1986. Influential observations, high leverage points and outliers in linear regression. Statistical Science, 1(3): 379-416.

Cook, R. D., 1977a. Detection of influential observations in linear regression. Technometrics, 19 (1): 15-18.

Cook, R. D., Weisberg, S., 1982. Residuals and influence in regression. Chapman and Hall, New York, 10-20, 101-156.

David, H. A., 1981, Order statistics, 2nd Edn. Wiley, New York, 110-150.

Hadi, A. S., Simonoff, J. S., 1993. Procedures for the identification of multiple outliers in linear models. *Journal of the American Statistical Association*, 88(424): 1264-1272 .

Hoaglin, D. C., Welsch, R. E., 1978. The hat matrix in regression and ANOVA. *The American Statistician*, 32 (1): 17-22.

Lawrance, A. J., 1995. Deletion influence and masking in regression. *Journal of the Royal Statistical Society Series B (Methodological)*, 57(1): 181-189.

Li, B., Martin, E. B., Morris, A. J., 2001. A graphical technique for detecting influential cases in regression analysis. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 30(3): 463-483.

Margolin, B. H., 1977. The distribution of internally studentized statistics via laplace transform inversion. *Biometrika*, 64: 573-582.

Montgomery, D. C., Peck, E. A., Vining, G. G., 2001. *Introduction to linear regression analysis*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, New York, 207-219.

COMPARISON OF DIAGNOSTIC METHODS FOR DETECTING INFLUENTIAL SETS IN MULTIPLE LINEAR REGRESSION

ABSTRACT

In regression, an influential observation and influential sets would cause noticeable differentiations on fitted values. Since these differentiations decrease explicability of model, detecting the influential observation or the influential sets in data is important for efficiency of regression analysis. In this study COVRATIO, Cook Distance statistics and graphical technique used for detecting influential sets are examined. These methods are compared with regard to ratios of detecting influential set in data which includes two influential observations.

Keywords: Influential observation, Simulation, Diagnostics.

TÜRK REEL SEKTÖRÜ İÇİN KARŞILAŞTIRMALI ETKİNLİK ÖLÇÜMÜ: VERİ ZARFLAMA ANALİZİ UYGULAMASI

A. Argun KARACABEY* Fazıl GÖKGÖZ**

ÖZET

Bu çalışmada, Türkiye Cumhuriyet Merkez Bankası bünyesindeki 16 farklı sektörün etkinlik analizleri, sektörlerin 2006 yılı finansal rasyoları kullanılarak doğrusal programlama tabanlı bir yöntem olan "Veri Zarflama Analizi" yardımıyla gerçekleştirilmiştir. Charnes vd., (1978)'in CCR modeli ile Banker vd., (1984)'in BCC modeli dikkate alınarak tüm sektörlerin teknik, saf teknik etkinlik değerleri ile ölçek etkinlikleri belirlenmiştir. Analizler sonucunda, CCR modeline göre; Ticaret, Sağlık, Kamu, İnşaat ve Emlak sektörlerinin tam etkin oldukları, BCC modeline göre ise; Madencilik, Tarım, İmalat Sanayii, Balıkçılık sektörleri dışında kalan tüm sektörlerin etkin olduğu tespit edilmiştir. Etkinlik farkı analizleri Emlak, İnşaat, Kamu, Sağlık ve Ticaret sektörlerinin optimal ölçekte faaliyet sürdürdüğünü göstermiştir. Karar değişkenlerinin gerçekleşen ve öngörülen ağırlıkları bağlamında, CCR modelinde değişkenlerin, BCC modeline göre daha yüksek oranlarda geliştirilmesi gerektiği sonucuna varılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Etkinlik ölçümü, Reel sektör, Veri zarflama analizi.

1. GİRİŞ

Literatürde araştırmacılar inceledikleri konu için gerçekleşen olumlu ve olumsuz durum arasında belirli bir sınır belirlemek suretiyle etkinliği (*performansı*) ölçmektedir. Nicel yöntemlerin gelişimi sayesinde işletmelerin üretim birimlerinin etkinliklerinin belirlenmesine yönelik olarak parametrik olan ve parametrik olmayan yöntemler geliştirilmiştir. Diğer yandan, işletme yöneticileri için üretim birimlerinin etkinliklerinin karşılaştırmalı olarak analizi büyük önem taşıdığından, bu konuda araştırmalar yoğun olarak sürmektedir.

Parametrik yöntemlerde üretim teknolojisine ilişkin parametre sayısı sonlu olmakla beraber, bu yöntemlerdeki temel varsayımlar, ilgili fonksiyonun fonksiyonel yapısı belirlenmiş olan bir sınıfa² dahil olması ile etkin sınırın doğrusal ve kırksız yapıda olmasıdır. Etkinlik ölçümündeki parametrik yöntemlerde, üretim sınırına ilişkin fonksiyonun sahip olduğu parametrelerin belirlenmesi hedeflenmektedir. Bu durum parametrik olmayan yöntemlerde söz konusu değildir (Tarım, 2001).

* Prof. Dr., Ankara Üniversitesi, Siyasal Bilgiler Fakültesi, İşletme Bölümü, Sayısal Yöntemler ABD, Ankara

** Doç. Dr., Ankara Üniversitesi, Siyasal Bilgiler Fakültesi, İşletme Bölümü, Sayısal Yöntemler ABD, Ankara, e-posta: fgokgoz@politics.ankara.edu.tr

Yazarlar, görüş ve önerilerinden dolayı Dergi yöneticilerine ve Hakemlere teşekkür eder

² Bu duruma örnek olarak Cob-Douglas üretim fonksiyonu verilebilir.

Diğer yandan, parametrik olan yöntemlerde genelde bir gözlem kümesi bulunmakta olup, anılan küme içerisinde yer alan elemanlardan en yüksek performansa sahip olanın regresyon doğrusu üzerinde yer aldığı varsayılmakla birlikte regresyon doğrusundan sapma gösterenler “etkin olmayan (*etkinsiz*)”, sapma göstermeyenler ise “etkin” olarak belirlenmektedir. Bu sebeple, parametrik olan yöntemlerde etkinlik sınırının gözlem noktaları ile uyuşmaması durumu söz konusu olabilmektedir (Tarım, 2001; İnan, 2000).

Yöneticiler için etkinlik belirleme sürecinde, diğer işletmeler ile rekabet altında olduklarından dolayı firmalarının sektörde yer alan rakip firmaları da dikkate alarak göreceli bir performans analizi gerçekleştirmesi yarar sağlamaktadır. Bu sayede, işletme yöneticileri performans bağlamında sektör içerisindeki konumlarını belirleyebilmekte olup, olası karar alternatiflerini³ devreye koyması mümkündür.

Kula ve Özdemir (2007)’ye göre büyüme gösteren işletmelerin rekabet edebilirlikleri etkin performans göstermelerine bağlı olmakta, benzer imkanlara sahip işletmelerin rekabet şansları için kaynaklarını etkin kullanmaları gerekmektedir. Yine aynı araştırmacılar, işletmelerin sektörel performans durumlarını değerlendirmeleri gerektiğine işaret ederek, etkinlik sınırlarına ulaşmada referans almaları gereken işletmeleri belirleyerek stratejiler üretmeleri gerektiğini vurgulamaktadır.

Parametrik olmayan yöntemler arasında en fazla ilgi gösterilen tekniklerden biri literatürde “Veri Zarflama Analizi (*Data Envelopment Analysis*)” olarak bilinen yöntemdir (Karacabey, 2001).

İşletmelerin etkinliklerini yükseltebilmesi amacıyla sahip olduğu girdilerin en uygun seviyede kullanılabilmesi büyük önem taşımaktadır. Bu bağlamda, Veri Zarflama Analizi sadece işletmelerin değil, çeşitli sektörlerde faaliyet gösteren eğitim ve spor kurumları ile kamu kuruluşları arasındaki göreceli etkinliğin⁴ tespitinde geniş kullanım alanı bulabilmektedir.

Veri Zarflama Analizinin genel kullanım alanı bulunduğu alanlar incelendiğinde, Banker vd., (1986) tarafından hastanelerde, Banker ve Morey (1986) tarafından restoranlarda, Chilingerian ve Sherman (1989) tarafından sağlık işletmelerinde, Smith ve Mayston (1987) ile Thanassoulis ve Dunstan (1994) tarafından orta öğretim okullarında, Athanassopoulos ve Shale (1997) ile Johnes ve Johnes (1993) tarafından üniversitelerde, Alp ve Gölcüklü (2000) tarafından resmi basketbol liglerinde, Cingi ve Tarım (2000) tarafından bankalarda etkinlik seviyelerinin belirlenmesinde kullanıldığı belirlenmiştir.

Veri Zarflama Analizi benzer özellikteki karar verme birimlerinin göreceli etkinlik seviyelerinin belirlenmesinde parametrik olmayan ve bir çeşit doğrusal programlama tekniği özelliği taşıyan faydalı bir yöntem olup, bu yöntemin en yengin olarak kullanım alanı bulunduğu yerlerden biri finans kurumlarının etkinliklerinin değerlendirilmesidir.

Berger ve Humprey (1997) tarafından Veri Zarflama Analizinin 21 ülkede 130 farklı finans kuruluşunda başarıyla uygulandığı ifade edilerek, finansal kurumların

³ Yöneticilerin karar alternatiflerinden, üretim girdi ve/veya çıktı parametrelerinin değiştirilmesi suretiyle uygulayabilecekleri stratejiler kastedilmektedir.

⁴ Benzer karar verme birimlerinin sahip olduğu etkinlik değerlerinin karşılaştırılmasıdır.

etkinliklerinin artırılması amacıyla kurumsal politika ve hedeflerin belirlenmesine büyük destek sağlayabildiği belirtilmektedir.

Bu çalışmanın amacı, Türkiye Cumhuriyet Merkez Bankası (TCMB) tarafından açıklanan reel sektör bilançolarındaki 16 farklı sektörün finansal rasyoları dikkate alınarak, Veri Zarflama Analizi yardımıyla karşılaştırmalı etkinlik analizlerinin gerçekleştirilmesidir. Öncelikle, Veri Zarflama Analizi hakkında genel bilgiler sunulacak olup, izleyen kısımda TCMB bünyesindeki alt sektörlerin Veri Zarflama Analizlerinden elde edilen sonuçları verilecektir.

Çalışmanın sonuç ve değerlendirme kısmında, TCMB'nin alt sektörlerinin sahip olduğu etkinlik düzeyinin artırılabilmesi için ilgili sektörün gelişme kaydetmesi gereken parametreler belirlenerek, etkin bir sektör yapısına ulaşabilmesi için kaynakların hangi seviyede bulunması gerektiği ortaya konularak tartışılacaktır.

2. YÖNTEM

2.1 Veri Zarflama Analizi

Farrell (1957) işletmeler için modern anlamda ilk defa etkinlik ölçümünü başlatan araştırmalar yapmıştır. Yine aynı araştırmacıya göre, belirli bir işletme için etkinlik seviyesi; “teknik etkinlik” ve “tahsis etkinliği” olarak iki temel kısma ayrılmaktadır.

Coelli (1996) teknik etkinliği belirli seviyede girdi kullanmak suretiyle mümkün olan en fazla çıktının alınabilmesi, tahsis etkinliğini ise süreçteki maliyetler de dikkate alınarak en uygun seviyede girdi kullanma davranışı olarak tanımlamaktadır. Diğer yandan Coelli (1996) ayrıca, tahsis ve teknik etkinlikler birleştiğinde ekonomik etkinlikten söz edilebileceğine işaret etmektedir.

Karacabey (2001) Veri Zarflama Analizi'ni benzer Karar Verme Birimleri (KVB)'nin etkinlik seviyelerinin analizinde kullanılan doğrusal programlama tabanlı bir yöntem olarak tanımlamaktadır.

Diğer yandan, Veri Zarflama Analizi'nde analizde kullanılacak değişkenlerin aynı ölçü tabanına getirilmesine ihtiyaç olmaksızın, farklı birimler cinsinden ifade edilebilme kabiliyeti söz konusu olduğundan dolayı, bu yöntemin özellikle parametrik olan yöntemlere kıyasla önemli bir avantajının bulunduğu değerlendirilmektedir.

Ulucan ve Karacabey (2002) herhangi bir Karar Verme Biriminin etkinliğinin değerlendirilmesinde, bir birimin tüm girdi ve çıktıları yerine yararlı çıktıların, yine yararlı girdilerine oranlanmasının söz konusu olduğuna değinerek, Veri Zarflama Analizi'nin bu anlamda uygulamacılara büyük kolaylık sağlayabildiği ifade edilmekte ve ölçü büyüklüğü ile ölçü biriminden bağımsız olarak girdi ve çıktı değişkenlerinin analize kolaylıkla dahil edilebildiğini belirtmektedir.

Oral vd., (1992) tarafından Farrell (1957)'in tek çıktı için belirlenen göreceli etkinlik kavramının Veri Zarflama Analizi'nde birçok sayıda çıktı için tanımladığı ifade edilmektedir.

Veri Zarflama Analizi'nin temel felsefesinde bulunan göreceli etkinlik, sadece karar verme birimlerinin birbiriyle ilgili olan etkinlik seviyesi olmaktadır. Başka bir ifadeyle veri seti içerisinde yer almayan bir karar verme biriminin analize konu edilmiş birimlere kıyasla daha yüksek veya düşük etkinliğe sahip olabilmesi söz konusudur.

Analizde karar verme birimlerinin girdi ve çıktı verileri dikkate alınarak işletmedeki anılan birimler arasından, en yüksek etkinliğe sahip olan birimlerden yola çıkılarak "etkin sınır (*efficient frontier*)" çizilmektedir. Buradan hareketle, karar verme birimleri dikkate alınarak çizilen etkin sınıra göre birimlerin sınırdan olan göreceli uzaklıklarına göre sıralama yapılmakta olup, sonuçta karar verme birimlerinin etkinlik sıralamaları yapılabilmektedir.

Diğer yandan, Veri Zarflama Analizi için kullanılacak olan verinin, karar verme birimlerinin etkinliğini doğrudan etkileme özelliğine sahip olmaları gerekmektedir. Bu bağlamda, karar verme birimlerinin durumunu en iyi şekilde yansıtacak olan uygun veri setinin hazırlığı da önem taşımaktadır.

Ganley ve Cubbin (1992) tarafından literatürde gerek kavramsal yönü ağır basan Kesirli Veri Zarflama Modeli'nin (FP_o) ve gerekse karar birimlerinin doğrudan oransal olarak etkinlik seviyelerinin belirlenmesinde kullanılan Doğrusal Veri Zarflama Modeli'nin (LP_o) mevcut olduğu ifade edilmektedir.

Veri Zarflama Analizi kapsamında genel olarak en çok başvurulan iki temel model bulunmaktadır. Bunlardan birincisi, ilk defa Charnes vd., (1978) tarafından ortaya konulan ve ölçeğe göre sabit getiri (*Constant Return to Scale*) varsayımına sahip olan CRS modeli veya CCR (*Charnes, Cooper, Rhodes*) modeli olarak bilinen Veri Zarflama Analizi Modeli'dir. Diğeri ise, Banker vd. (1984) tarafından geliştirilen ve ölçeğe göre değişen getiri (*Variable Return to Scale*) varsayımına (*VRS*) sahip olan BCC (*Banker, Charnes, Cooper*) Modeli'dir. Söz konusu modeller aşağıda tanıtılmaktadır.

2.1.1 Ölçeğe göre Sabit Getiri Varsayımına Dayanan Veri Zarflama Analizi Modeli (CCR Modeli)

Charnes vd., (1978) tarafından karar verme birimlerinin rasyonel bağlamda etkinliklerinin belirlenebilmesi için söz konusu etkinlik düzeylerinin maksimize edilerek her birime ilişkin en uygun (*optimal*) ağırlıkların belirlenmesi gerektiğine işaret edilmektedir.

CCR modelinde her karar verme birimi için aşağıda sunulduğu gibi sanal girdi ve çıktı ağırlıkları tanımlanmakta olup, söz konusu ağırlıkların aldığı değerler analiz öncesinde bilinmemektedir (Gökgöz, 2009).

$$\text{Sanal girdi} = v_1x_{1o} + \dots + v_mx_{mo}$$

$$\text{Sanal çıktı} = u_1y_{1o} + \dots + u_sy_{so}$$

Cooper vd., (2006)'ya göre Kesirli Veri Zarflama Analizi modeliyle tanımlanan etkinlik düzeyi⁵, Eşitlik (1)'de sunulan formülasyondaki amaç fonksiyonunun maksimize edilmesi sonucunda sanal girdi ve çıktı ağırlıklarının belirlenebilmesi yoluyla ortaya konulmaktadır. Diğer yandan, modelin çalıştırılması sonucunda elde edilen optimal ağırlıklar genel olarak karar verme birimine göre farklı değerler alabilmektedir.

⁵ Etkinlik düzeyi, Sanal Çıktı / Sanal Girdi olarak ifade edilmektedir.

$$(FP_o) \quad \text{Max}_{v,u} \theta \quad \frac{(u_1 y_{1o} + \dots + u_s y_{so})}{(v_1 x_{1o} + \dots + v_m x_{mo})} \quad (1)$$

$$\frac{(u_1 y_{1j} + \dots + u_s y_{sj})}{(v_1 x_{1j} + \dots + v_m x_{mj})} \leq 1 \quad (j = 1, \dots, n) \quad (2)$$

$$v_1, v_2, \dots, v_m \geq 0$$

$$u_1, u_2, \dots, u_s \geq 0$$

Burada:

θ : Optimal değeri,

x: Girdi değerlerini,

y: Çıktı değerlerini,

u: Çıktı ağırlıklarını,

v: Girdi ağırlıklarını ifade etmektedir.

Yukarıda sunulan formülasyondan da anlaşılacağı üzere, “n” adet karar verme birimi için “s” adet çıktı ve “m” adet girdi kullanılarak, sanal çıktı toplamı ile sanal girdi toplamı birbirine oranlanarak, karar birimleri için etkinlik seviyeleri ortaya konulmaktadır.

Diğer taraftan, her karar verme birimi için bulunan etkinlik oranı kısıtlılık gereğince “1” değerini aşmamaktadır. Burada temel amaç, ilgili karar verme birimi için etkinlik düzeyinin maksimizasyonu sonucunda, çıktıların ağırlıkları (u_j) ile girdilerin ağırlıklarının (v_i) tespit edilebilmesidir. Burada amaç fonksiyonunun alabileceği optimal değer (θ^*) en fazla “1” seviyesine ulaşabilmektedir.

Cooper vd., (2006)’ya göre etkinliği belirlenmek istenen ilgili karar verme biriminin söz konusu kısıtlılıklar kapsamında etkinlik seviyesi ile gereken girdi ve çıktı ağırlıkları, elde edilen kesirli yapıdan (FP_o), Doğrusal Veri Zarflama Analizi modeline (LP_o) dönüşüm sağlanması suretiyle Eşitlik (3)’de olduğu gibi modellenmektedir.

$$(LP_o) \quad \text{Max}_{u,v} \theta \mu_1 y_{1o} + \dots + \mu_s y_{so} \quad (3)$$

$$v_1 x_{1o} + \dots + v_m x_{mo} = 1 \quad (4)$$

$$\mu_1 y_{1j} + \dots + \mu_s y_{sj} \leq v_1 x_{1j} + \dots + v_m x_{mj} \quad (j = 1, \dots, n) \quad (5)$$

$$v_1, v_2, \dots, v_m \geq 0$$

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s \geq 0$$

Doğrusal formdaki “CCR” modelinin tüm karar verme birimleri için ayrı ayrı olmak üzere “n” defa çözülmesi sonucunda, optimal girdi ve çıktı ağırlıklarına (v^*, u^*) ulaşılmaktadır. Charnes vd., (1978) tarafından ortaya konulan doğrusal programlama modelinin matris formundaki genel kabul gören hali aşağıda sunulmaktadır.

$$\text{Max } u' y_i \quad (6)$$

$$v' x_i = 1 \quad (7)$$

$$u' y_i - v' x_i \leq 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (8)$$

$$u, v \geq 0$$

Diğer yandan, Veri Zarflama Analizi uygulamalarında, Eşitlik (6)'daki doğrusal modelin genellikle aşağıda sunulan ve daha az kısıta sahip olan “Dual” hali kullanılmaktadır.

$$\text{Min } \theta \quad (9)$$

$$-y_i - Y\lambda \geq 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (10)$$

$$\theta x_i - X\lambda \geq 0 \quad (11)$$

$$\lambda \geq 0$$

Eşitlik (9)'daki modelde yer alan “ θ ” gerçek bir sayı olup, “ λ ” $n \times 1$ boyutlu bir vektörü, “ Y ” $n \times s$ düzlemindeki çıktı matrisini, “ X ” ise $n \times m$ düzlemindeki girdi matrisini göstermektedir.

Yukarıda ifade edilen Veri Zarflama Analizi modellerinin temel varsayımı karar verme birimlerinin ölçeğe göre sabit getiri (CRS) düzeninde üretim faaliyetinde bulunmalarıdır. Anılan model varsayımı, bütün birimlerin optimal düzeyde faaliyet göstermeleri halinde uygunluk göstermektedir (Gökgöz, 2009).

Eşitlik (9)'da yer alan modelin her karar verme birimi için bir defa (toplam “ n ” defa) çalıştırılması sonucunda her karar verme birimi için “ θ ” değeri, ilgili birimin Teknik Etkinliği (TE)'yi temsil edecektir. Diğer yandan, anılan değişken $\theta \leq 1$ koşulunu da sağlayacak olup, TE'nin “1” seviyesine eşit olması halinde ilgili karar biriminin etkin sınır üzerinde yer aldığı anlaşılmaktadır.

2.1.2 Ölçeğe göre Değişken Getiri Varsayımına Dayanan Veri Zarflama Analizi Modeli (BCC Modeli)

Banker vd., (1984) tarafından (6) ve (9) nolu Eşitliklerde ifade edilen doğrusal programlama modelleri Ölçeğe göre Değişken Getiriler (VRS) dikkate alınarak modeli BCC modeli olarak tekrar tanımlanmıştır. Bu yaklaşıma göre, eski modele yeni bir konvekslik kısıtı ilave edilmiştir.

Böylece, CCR modelinden farklı olarak, CCR ile hesaplanan teknik etkinlik (TE_{CCR}) değerleri ölçek farklılıklarından arındırılmıştır. BCC modelinin karar verme birimlerine uygulanması sonucunda elde edilen etkinliğe “Saf Teknik Etkinlik” (STE_{BCC}) denilmektedir.

Banker vd., (1984) tarafından ortaya konulan ve değişken getiri varsayımına sahip bulunan BCC modeli Eşitlik (12)'de matris formunda sunulmaktadır.

$$\text{Min}_{\theta, \lambda} \theta \quad (12)$$

$$\theta x_i - X\lambda \geq 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (13)$$

$$Y\lambda \geq y_i \quad (14)$$

$$\sum \lambda = 1 \quad (15)$$

$$\lambda \geq 0$$

Her karar verme birimine yönelik olarak gerek CCR modelinden elde edilen Teknik Etkinlik (TE_{CCR}) ve gerekse BCC modelinden elde edilen Saf Teknik Etkinlik (STE_{BCC}) değerlerinin birbirine oranlanması sonucunda ölçek büyüklüğünden kaynaklanan Etkinlik Farkı (EF) değeri Eşitlik (16)'daki gibi belirlenmektedir.

$$EF = \frac{TE_{CCR}}{STE_{BCC}} \quad (16)$$

Belirli bir karar verme birimi için belirlenen etkinlik farkı değeri azaldıkça STE_{BCC} değeri de ters orantılı olarak yükselmektedir. Diğer taraftan, Ulucan ve Karacabey (2002) tarafından STE_{BCC} değerinin, TE_{CCR} değerlerinden büyük ya da eşit olabileceği belirtilmekte olup, Ölçek Etkinliği'nin "1" değerini alması halinde ilgili karar verme biriminin, optimal ölçekte faaliyet gösterdiği ifade edilmektedir.

3. BULGULAR

3.1 Türk Reel Sektörü için Veri Zarflama Analizi

3.1.1 Amaçlar, Veri ve Yöntem

Bu çalışmanın amacı, TCMB bilançoları bünyesinde bulunan ve 2006 yılı için 13 alt sektör ve kamu, özel ve tüm firmaların yer aldığı sektörlerin karşılaştırmalı etkinlik ölçümlerinin Charnes vd., (1978) tarafından ortaya konulan Veri Zarflama Analizi yardımıyla tespit edilmesidir.

Çalışmada; 2006 döneminde TCMB bilançolarında bulunan söz konusu alt sektörlerle ilişkin likidite ve finansal yapı oranları arasından seçilen oranlardan oluşturulan girdiler ile aynı sektörlerin karlılık seviyelerini gösteren finansal oranlardan oluşturulan çıktılar kullanılmak suretiyle, girdiye yönelik Veri Zarflama Analizi yöntemi uygulanarak sektörlerin karşılaştırmalı olarak etkinlik seviyeleri ölçülmüştür⁶.

Bu kapsamda, analizlerde öncelikle ölçeğe göre sabit getiri (CRS) ve ölçeğe göre değişken getiri (VRS) varsayımları altında her sektörün ayrı ayrı etkinlik seviyeleri Eşitlik (6) ve Eşitlik (12)'de yer alan girdi yönlü CCR ve BCC modellerine uygun olarak belirlenmiştir. Daha sonra, her sektör için elde edilen TE_{CCR} ve STE_{BCC} değerlerinden yola çıkılarak ölçek büyüklüğünün neden olduğu EF değerleri Eşitlik (16) çerçevesinde belirlenerek, sektörlerin karşılaştırmalı etkinlik ölçümleri gerçekleştirilmiştir.

Son aşamada ise, tüm girdi ve çıktıların Veri Zarflama Analizi kapsamında almış olduğu ağırlık oranları çerçevesinde en fazla geliştirmenin yapılması gereken değişkenler analiz edilerek genel değerlendirmeler yapılmıştır. 2006 dönemi TCMB bilançolarında yer alan finansal rasyolar dikkate alınarak Veri Zarflama Analizinin uygulandığı *Karar Verme Birimleri* aşağıda sunulmaktadır.

- Tarım, avcılık ve ormancılık
- Balıkçılık
- Madencilik ve taşocakçılığı

⁶ Veri Zarflama Analizlerinde *DEA-Solver-PRO* paket programından yararlanılmıştır.

- İmalat sanayi
- Elektrik, gaz ve su kaynakları
- İnşaat sektörü
- Toptan ve perakende ticaret
- Otel ve restoranlar
- Ulaştırma, depolama ve haberleşme
- Gayrimenkul, kiralama ve iş faaliyetleri
- Eğitim
- Sağlık ve sosyal hizmetler
- Diğer toplumsal, sosyal ve kişisel hizmetler
- Kamu yönetimi, savunma ve zorunlu sosyal güvenlik
- Özel firmalar
- Tüm firmalar

Diğer taraftan, Veri Zarflama Analizi uygulamasında girdi ve çıktılara ilişkin *karar değişkenleri* olarak kullanılan oranlar aşağıda sunulmaktadır.

Bu kapsamda ilgili faaliyetlerin;

- girdi değişkenleri olarak kullanılan likidite ve finansal yapı oranları sırasıyla Cari Oran (G_1), Finansal Kaldıraç Oranı (G_2), Özkaynak/Toplam Aktif Oranı (G_3), Kısa Vadeli Yabancı Kaynak/Toplam Pasif Oranı (G_4), Maddi Duran Varlık/Toplam Aktif Oranı (G_5),
- çıktı değişkenleri olarak kullanılan karlılık oranları sırasıyla Özkaynak Karlılığı Oranı (\check{C}_1), Ekonomik Rantabilite Oranı (\check{C}_2), Satış Karlılığı Oranı (\check{C}_3)

olarak ifade edilebilir.

TCMB bilançoları bünyesinde yer alan faaliyetlere yönelik Veri Zarflama Analizlerinde kullanılan veri setine ilişkin olarak hazırlanan betimleyici istatistiksel bilgiler Tablo 1'de sunulmaktadır.

Tablo 1. Veri zarflama analizlerindeki veri setine⁷ ilişkin tanımlayıcı istatistiksel bilgiler

İstatistikler	Girdiler					Çıktılar			
	Cari Oran	Finansal Kaldıraç Oranı	Özkaynak/Top.Aktif Oranı	Kısa Vd.Ybc. Kay./Toplam Pasif Oranı	Maddi Duran Varlık/Toplam Aktif Oranı	Özkaynak Karlılığı Oranı	Ekonomik Rantabilite Oranı	Satış Karlılığı Oranı	
Ortalama	148.909	52.319	47.586	40.982	30.803	11.477	8.289	6.514	
Ortanca	139.478	54.559	45.664	40.858	29.008	12.033	8.417	5.626	
Standart Sapma	36.071	9.504	9.222	10.531	13.292	5.297	4.021	4.394	
Varyans	1301.120	90.321	85.042	110.911	176.687	28.058	16.165	19.311	
Değişim Aralığı ⁸	119.972	35.166	33.187	35.447	47.739	21.750	15.051	15.954	
En Büyük Değer	212.679	67.077	66.110	60.236	61.873	21.759	17.479	15.957	
En Küçük Değer	92.707	31.911	32.923	24.788	14.134	0.009	2.428	0.003	

⁷ Veri Zarflama Analizlerinde kullanılan veri seti, TC Merkez Bankası İstatistik Genel Müdürlüğü tarafından yayımlanan 2007 yılı sektör bilançolarında yer alan finansal rasyolar dikkate alınmıştır.

⁸ Değişim Aralığı, en büyük değer ile en küçük değer arasındaki farktır.

Yukarıda sunulan tabloda betimleyici istatistiksel bilgileri sunulan veri seti dahilinde TCMB bünyesindeki 13 alt faaliyet ile özel, kamu ve tüm firmalar faaliyet alanlarının girdi ve çıktı verileri kullanılarak 3.2 ve 3.3 başlıkları altında yer alan etkinlik değerleri hesaplanmıştır.

3.2 Ölçeğe göre Sabit Getiri Varsayımı Altında Etkinlik Ölçümü Sonuçları

Analizin ilk bölümünde ölçeğe göre sabit getiri (CRS) varsayımı kabul edilmiş olup, tüm sektörler için Eşitlik (4)'te yer alan doğrusal programlama modeli uygulanmak suretiyle her sektöre yönelik teknik etkinlik düzeyleri belirlenmiştir.

Diğer yandan, sektörlerle yönelik olarak elde edilen TE_{CCR} seviyeleri Tablo 2'de yer almaktadır.

Tablo 2. Sektörlerin teknik etkinlik skorları

Sektör Adı	Teknik Etkinlik Skoru (TE_{CCR})
Toptan ve Perakende Ticaret	1.000
Sağlık ve Sosyal Hizmetler	1.000
Kamu Yönetimi, Savunma ve Zorunlu Sosyal Güvenlik	1.000
İnşaat	1.000
Gayrimenkul, Kiralama ve İş Faaliyetleri	1.000
Diğer Toplumsal, Sosyal ve Kişisel Hizmetler	0.854
Balıkçılık	0.844
Eğitim	0.805
Tüm Firmalar	0.766
Madencilik ve Taşocakçılığı	0.744
Özel Firmalar	0.692
Ulaştırma, Depolama ve Haberleşme	0.655
İmalat Sanayii	0.626
Tarım, Avcılık ve Ormancılık	0.490
Elektrik, Gaz ve Su Kaynakları	0.306
Otel ve Restoranlar	0.194

Tablo 2'den görüleceği üzere, yapılan analiz sonucunda, Ticaret, Sağlık, Kamu, İnşaat ve Emlak faaliyetlerinin TE_{CCR} seviyeleri "1"e eşit olduğundan dolayı söz konusu faaliyetlerin 2006 yılı verileri bağlamında tam olarak etkin durum sergiledikleri belirlenmiştir.

Bunun haricinde, tam etkinlik sergilemeyen ancak 0.500 değerinin üzerinde etkinliğe sahip 8 tane ω (Diğer Toplumsal Hız., Balıkçılık, Eğitim, Tüm Firmalar, Madencilik, Özel, Ulaştırma-Haberleşme, İmalat Sanayii) bulunmaktadır. Geriye kalan 3 faaliyetin (Tarım, Elektrik-Gaz-Su, Otel-Restoran) etkinlik düzeyi oldukça düşük bulunmuştur.

Diğer yandan, anılan faaliyetlerin ortalama olarak 0.748 düzeyinde bir TE_{CCR} değerine sahip olduğu da ifade edilmelidir.

3.3 Ölçeğe göre Değişken Getiri Varsayımı Altında Etkinlik Ölçümü Sonuçları

Veri Zarflama Analizi'nin ikinci bölümünde ölçeğe göre değişken getiri (*VRS*) varsayımı kabul edilmiş olup, tüm faaliyetler için Eşitlik (5)'te ifade edilen doğrusal programlama modeli kullanılarak tüm sektörlerin STE_{BCC} düzeyleri belirlenmiştir. TCMB bünyesindeki faaliyetlere ilişkin olarak elde edilen STE_{BCC} seviyeleri Tablo 3'te yer almaktadır.

Tablo 3. Faaliyetlerin saf etkinlik skorları

Sektör Adı	Saf Teknik Etkinlik Skoru (STE_{BCC})
Tüm Firmalar	1.000
Özel Firmalar	1.000
Kamu Yönetimi, Savunma ve Zorunlu Sosyal Güvenlik	1.000
Diğer Toplumsal, Sosyal ve Kişisel Hiz.	1.000
Sağlık ve Sosyal Hizmetler	1.000
Elektrik. Gaz ve Su Kaynakları	1.000
İnşaat	1.000
Toptan ve Perakende Ticaret	1.000
Otel ve Restoranlar	1.000
Ulaştırma, Depolama ve Haberleşme	1.000
Gayrimenkul, Kiralama ve İş Faaliyetleri	1.000
Eğitim	1.000
Madencilik ve Taşocakçılığı	0.996
Tarım, Avcılık ve Ormancılık	0.995
İmalat Sanayii	0.994
Balıkçılık	0.994

Tablo 3'ten de anlaşılacağı gibi, ölçeğe göre değişken getiri varsayımı altında yapılan Veri Zarflama Analizleri sonucunda 2006 yılı için 4 faaliyetin (*Madencilik, Tarım, İmalat Sanayii, Balıkçılık*) haricinde kalan 12 faaliyetin tam etkin durum sergilediği tespit edilmiştir. Diğer yandan, BCC modeline göre sektörlerin ortalama STE_{BCC} değeri 0.999 düzeyinde bulunmuştur.

3.4 Etkinlik Farkı Değerleri ve Geliştirilmesi Gereken Değişkenlere Dair Sonuçlar

Gerek ölçeğe göre sabit getiri varsayımı ve gerekse ölçeğe göre değişken getiri varsayımı altında gerçekleştirilen etkinlik ölçümleri sonucunda, her faaliyet için ulaşılan TE_{CCR} ve STE_{BCC} değerlerinin birbirine oranlanması sonucunda, söz konusu iki modelden elde edilen sonuçların ölçek büyüklüğünden kaynaklanan EF'ye tabi olup olmadığı ortaya konulmuştur.

Tablo 4’te, Veri Zarflama Analizi kapsamında CCR ve BCC modellerine yönelik olarak anılan iki modelden elde edilen etkinlikler dikkate alınarak hesaplanan EF değerleri yer almaktadır.

Tablo 4. Sektörlerin etkinlik farkı değerleri

Sektör Adı	Etkinlik Farkı (EF)
Gayrimenkul, Kiralama ve İş Faaliyetleri	1.000
İnşaat	1.000
Kamu Yönetimi, Savunma ve Zorunlu Sosyal Güvenlik	1.000
Sağlık ve Sosyal Hizmetler	1.000
Toptan ve Perakende Ticaret	1.000
Diğer Toplumsal, Sosyal ve Kişisel Hiz.	0.854
Balıkçılık	0.849
Eğitim	0.805
Tüm Firmalar	0.766
Madencilik ve Taşocakçılığı	0.747
Özel Firmalar	0.692
Ulaştırma, Depolama ve Haberleşme	0.655
İmalat Sanayii	0.629
Tarım, Avcılık ve Ormancılık	0.492
Elektrik, Gaz ve Su Kaynakları	0.306
Otel ve Restoranlar	0.194

Ölçek büyüklüğünden kaynaklanan EF değerlerinin yer aldığı Tablo 4 incelendiğinde, Veri Zarflama Analizleri sonucunda CCR ve BCC modelleriyle yapılan etkinlik ölçümlerine dayanarak hesaplanan ve Ölçek Etkinliği “1” değerini alan *Emlak, İnşaat, Kamu, Sağlık ve Ticaret* faaliyetlerinin 2006 yılı için optimal ölçekte faaliyet gösterdiği ifade edilebilir. Başka bir ifadeyle, söz konusu 5 faaliyet haricinde kalan ve EF değeri “1” olmayan 11 faaliyetin TE_{CCR} ve STE_{BCC} etkinlikleri arasındaki değer farklarının ölçek farklılığından kaynaklandığı belirtilebilir.

Diğer taraftan, Veri Zarflama Analizleri sonucunda gerek CCR ve gerekse BCC modelleri için girdi ve çıktılara yönelik değişkenler arasında en fazla geliştirilmesi gereken finansal oranlara yönelik olarak hazırlanan bilgiler özet halinde Tablo 5’te sunulmaktadır.

Tablo 5. Sektörlerde CCR ve BCC modellerine göre değişkenlerin ortalama bazda geliştirme oranları

Değişken Adı	Ortalama Geliştirme Oranları (%)	
	CCR Modeli	BCC Modeli
Cari Oran	-27.86	-0.96
Finansal Kaldıraç Oranı	-32.25	-0.13
Özkaynak/Toplam Aktif Oranı	-29.09	-0.13
Kısa Vadeli Yabancı Kaynak/Toplam Pasif Oranı	-32.11	-1.14
Maddi Duran Varlık / Toplam Aktif Oranı	-32.02	-3.35
Özkaynak Karlılığı Oranı	67.23	10.79
Ekonomik Rantabilite Oranı	4.30	3.70
Satış Karlılığı Oranı	96.16	27.54

Tablo 5, CCR ve BCC modelleri kapsamında gerçekleştirilen Veri Zarflama Analizleri sonucunda, analizlerde girdi ve çıktı olarak kullanılan değişkenlerinin Ek.1 ve Ek.2’de sunulan geliştirme oranları dikkate alınarak hazırlanmıştır.

Bu bağlamda, CCR modeline göre girdilerde %27,86 ile %32,11 arasında değişen oranlarda azaltmanın yapılması gerektiği, çıktılarda ise %4,30 ile %96,16 arasında değişen oranlarda artış sağlanması gerektiği sonucuna varılmaktadır. Diğer yandan, BCC modeline göre ise, girdilerde %0,13 ile %3,35 aralığında değişen oranlarda azaltmanın yapılması, çıktılarda ise %3,70 ile %27,54 arasında değişen oranlarda artış yapılması gerektiği gözlemlenmiştir.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Veri Zarflama Analizi birbirine benzeyen yapıdaki karar verme birimlerinin TE_{CCR} ve STE_{BCC} değerlerinin ölçümünde yararlanılan önemli bir doğrusal programlama tabanlı bir analiz yöntemi özelliği taşımaktadır. Analiz kapsamında, karar verme birimlerinin benzer özellik taşımasına dikkat edilmesinin yanı sıra, kullanılan girdi ve çıktı verilerinin de karar verme birimlerini en doğru şekilde yansıtabilecek tarzda karar değişkenleri olmasına önem verilmelidir.

Bu çalışmada, 2006 yılı TCMB sektör bilançolarından girdi ve çıktı verileri için seçilen finansal rasyolar kullanılarak, TCMB bünyesindeki 13 faaliyet ile özel, kamu ve tüm firma faaliyetlerinin karşılaştırmalı olarak teknik ve saf teknik etkinlik düzeyleri girdi yönlü Veri Zarflama Analizi yardımıyla CCR ve BCC modelleri kapsamında ölçülmüştür.

Veri Zarflama Analizleri kapsamında, ölçüğe göre sabit getiri (CRS) varsayımına dayanan CCR modeliyle yapılan analizlerde Ticaret, Sağlık, Kamu, İnşaat ve Emlak faaliyetlerinin tam etkin oldukları belirlenmiştir. Diğer yandan, ölçüğe göre değişken getiri (VRS) varsayımına dayanan BCC modeline göre ise, Madencilik, Tarım, İmalat Sanayii, Balıkçılık faaliyetleri dışında kalan tüm faaliyetlerin etkin olduğu tespit edilmiştir.

Ancak, 2006 yılı için faaliyetlere ilişkin olarak belirlenen TE_{CCR} ve STE_{BCC} değerleri arasında ölçek büyüklüğünden kaynaklanan etkinlik farkı olup olmadığının belirlenmesi için gerçekleştirilen EF analizleri sonucunda, Emlak, İnşaat, Kamu, Sağlık ve Ticaret faaliyetlerinin optimal ölçekte faaliyet sürdürdüğü ifade edilebilir.

Bu çalışmaya konu olan faaliyetlerin 2006 yılı için genel olarak etkinliklerinin iyi seviyede bulunmasının temelinde, Türkiye ekonomisinde uzun bir süredir uygulanmakta olan sürdürülebilir ekonomik programların Türk reel sektörüne olumlu şekilde yansımalarının bulunduğu değerlendirilmektedir. Ancak, ekonomik krizlerin bulunduğu farklı yıllar için etkinlik seviyelerinin değişebileceği de yadsınamaz bir gerçektir.

Veri Zarflama Analizleri sonucunda karar değişkenlerinin gerçekleşen ve öngörülen ağırlıkları incelendiğinde (Bkz, Ek.1 ve Ek.2'de sunulan tablolar), özellikle CCR modeline göre değişkenlerin daha yüksek oranlarda (girdilerde azalış yönünde ortalama %31, çıktılarda artış yönünde ortalama %56) geliştirilmesi gerektiği, BCC modeline göre ise söz konusu değişkenlerin daha düşük seviyede (girdilerde azalış yönünde ortalama %1, çıktılarda artış yönünde ortalama %14) gelişim göstermesi gerektiği sonucuna varılmıştır.

Sonuç olarak, Veri Zarflama Analizi ile Türkiye ekonomisindeki farklı faaliyet alanlarının karşılaştırmalı olarak etkinlik analizleri yapılmış olup, anılan etkinliklerin iyileştirilmesi için girdi ve çıktı değişkenlerine ilişkin değerlerin düzenlenmesine imkan verecek iyileştirmelerin yapılması gerektiği değerlendirilmektedir.

Diğer bir ifadeyle, Türkiye'deki söz konusu faaliyet alanlarındaki etkinlik seviyelerinin yükseltilebilmesi için girdi ve çıktı değişkenlerine ilişkin finansal rasyolarda belirli bir iyileştirme sağlanması gerekmektedir. Bu bağlamda, sürdürülebilir ekonomik programların uygulanmasının söz konusu değişkenlerdeki iyileştirme çalışmalarına yarar sağlayacağı düşünülmektedir.

5. KAYNAKLAR

Alp, İ., Gölcüklü, A., 2000. Yeni bir tahmin aracı: EA (DEA). İstatistik sempozyumu bildiriler kitabı, Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, 359-370.

Athanassopoulos, A. D., Shale, E., 1997. Assessing the comparative efficiency of higher education institutions in the UK by means of Data Envelopment Analysis. Education Economics, 5,2, 117-134.

Banker, R. D., Charnes, A., Cooper, W. W., 1984. Some models for estimating technical and scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Management Science*, 30, 1078-1092.

Banker, R. D., Conrad, R. F., Strauss, R. P., 1986. A comparative application of DEA and translog methods: An illustrative study of hospital production. *Management Science*, 32, 30-44.

Banker, R. D., Morey, R. C., 1986. The use of categorical variables in Data Envelopment Analysis. *Management Science*, 32, 1613-1627.

Berger, A. N., Humphrey, D. B., 1997. Efficiency of financial institutions: International survey and directions for future research. *European Journal of Operational Research*, 98, 175-212.

Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes, E., 1978. Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, 2, 429-444.

Chilingerian, J., Sherman, H. D., 1989. Evaluating and marketing efficiency physicians toward competitive advantage. *Health Care Strategic Management*, 12, 16-19.

Cingi, S., Tarım, A., 2000. Türk banka sisteminde performans ölçümü: DEA-Malmquist TFP endeksi uygulaması. *TBB Araştırma Tebliği*, 2000-01.

Coelli, T., 1996. A guide to DEAP Version 2.1.: A Data Envelopment Analysis program. Working Paper, University of New England.

Cooper, W. W., Seiford, L. M., Tone, K., 2006. Introduction to Data Envelopment Analysis and its uses. Springer, USA, 1-161.

Farrell, R., 1957. The measurement of productivity efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society*, 120, 253-290.

Ganley, J. A., Cubbin, J. S., 1992. Public sector efficiency measurement: Applications of DEA, London, North Holland, Elsevier Science & Technology, 1-180.

Gökgöz, F., 2009. Veri Zarflama Analizi ve finans alanına uygulanması. Ankara Üniversitesi Siyasal Bilgiler Fakültesi Yayını, No:597, 31-46.

İnan, E. A., 2000. Banka etkinliğinin ölçülmesi ve düşük enflasyon sürecinde bankacılıkta etkinlik. *Bankacılar Dergisi*, 34, 82-96.

Johnes, G., Johnes, J., 1993. Measuring the research performance of UK economics departments: application of Data Envelopment Analysis. *Oxford Economic Papers*, 45, 2, 332-348.

Karacabey, A. A., 2001. Veri Zarflama Analizi. Ankara Üniversitesi Siyasal Bilgiler Fakültesi GETA Tartışma Metinleri, 33, 1-12.

Kula, V., Özdemir, L., 2007. Çimento sektöründe göreceli etkinsizlik alanlarının Veri Zarflama Analizi yöntemi ile tespiti. Afyon Üniversitesi İ.İ.B.F. Dergisi, 9, 1, 55-70.

Oral, M., Kettani, O., Yolalan, R., 1992. An empirical study of analyzing the productivity of bank branches. IIE Transactions, 24, 5, 166-176.

Smith, P., Mayston, D., 1987. Measuring efficiency in the public sector. OMEGA, 15, 3, 181-189.

Tarım, A., 2001. Veri Zarflama Analizi-matematiksel programlama tabanlı göreceli etkinlik ölçüm yaklaşımı. Sayıştay Yayınları No:15, 1-222.

Thanassoulis, E., Dunstan, P., 1994. Guiding schools to improved performance using Data Envelopment Analysis: An illustration with data from a local education authority. Journal of Operational Research Society, 45, 11, 1247-1262.

Türkiye Cumhuriyet Merkez Bankası, 2007. 2006 Yılı Sektör Bilançoları. İstatistik Genel Müdürlüğü, Ankara.

Ulucan, A., Karacabey, A. A., 2002. İMKB hisse senedi piyasasının teknik etkinliğinin AB aday ve üye ülkelerle karşılaştırmalı analizi. Ankara Avrupa Çalışmaları Dergisi, 2, 3, 101-111.

A COMPARATIVE EFFICIENCY MEASUREMENT FOR THE TURKISH REAL SECTOR: AN APPLICATION OF DATA ENVELOPMENT ANALYSIS

ABSTRACT

In this study, the efficiency measurement for the 16 different sector involved in Central Bank of Turkey has been carried out using the financial ratios of year 2006 by means of Data Envelopment Analysis, a linear programming based model. Technical-pure efficiencies and scale efficiencies of all sectors have been determined via CCR model by Charnes et al., (1978) and BCC model by Banker et al., (1984). Trade, Health, Public, Construction, Real Estate sectors have found fully efficient according to the CCR model results. Whereas, most of the sectors have found efficient except Mining, Agriculture, Manufacturing, Fishing sectors. Scale efficiency measurements have shown that Real Estate, Construction, Public, Health and Trade sectors are operating in optimal scales. Consequently, considering the actual and projected weights of decision variables, it has been evaluated that the variables need higher improvements in the CCR model in comparison to BCC model results.

Keywords: Efficiency measurement, Real sector, Data envelopment analysis.

Ek 1. CCR Modeline göre Geliştirme Oranları

Karar Verme Birimi / Karar Değişkenleri	Etkinlik Skoru / Fırlı Değer	Öngörülen Değer	Fark	Geliştirme Oranı	Karar Verme Birimi / Karar Değişkenleri	Etkinlik Skoru / Fırlı Değer	Öngörülen Değer	Fark	Geliştirme Oranı
Tarım, Avcılık ve Ormanlık	0.490				Taşımacılık, Depolama ve Haberleşme	0.655			
Cari Oran	138.605	67.131	-71.474	-0.516	Cari Oran	123.421	80.849	-42.573	-0.345
Finansal Kaldıraç Oranı	56.455	27.653	-28.802	-0.510	Finansal Kaldıraç Oranı	61.066	33.713	-27.353	-0.448
Özkaynak/Toplam Aktif Oranı	43.545	21.329	-22.216	-0.510	Özkaynak/Toplam Aktif Oranı	38.934	25.504	-13.430	-0.345
Oranı	47.044	21.688	-25.356	-0.539	Kısa Vadeli Yabancı Kaynak/Toplam Pasif Oranı	42.765	26.644	-16.121	-0.377
Maddi Duran Varlık / Toplam Aktif Oranı	34.862	13.807	-21.054	-0.604	Maddi Duran Varlık / Toplam Aktif Oranı	39.670	16.319	-23.351	-0.589
Özkaynak Karlılığı Oranı	9.376	9.376	0.000	0.000	Özkaynak Karlılığı Oranı	11.230	11.230	0.000	0.000
Ekonomik Rantabilite Oranı	5.185	5.970	0.786	0.152	Ekonomik Rantabilite Oranı	6.830	7.005	0.174	0.026
Satış Karlılığı Oranı	3.841	5.133	1.292	0.336	Satış Karlılığı Oranı	3.852	6.161	2.309	0.599
Balıkçılık	0.844				Emlak Komisyonculuğu, Kiralama ve İřt.Hiz.	1.000			
Cari Oran	202.806	125.660	-77.146	-0.380	Cari Oran	202.486	202.486	0.000	0.000
Finansal Kaldıraç Oranı	41.927	35.384	-6.543	-0.156	Finansal Kaldıraç Oranı	40.457	40.457	0.000	0.000
Özkaynak/Toplam Aktif Oranı	58.073	38.280	-19.793	-0.341	Özkaynak/Toplam Aktif Oranı	59.543	59.543	0.000	0.000
Oranı	38.420	30.356	-8.064	-0.210	Özkaynak/Toplam Aktif Oranı	28.334	28.334	0.000	0.000
Maddi Duran Varlık / Toplam Aktif Oranı	20.281	17.116	-3.165	-0.156	Maddi Duran Varlık / Toplam Aktif Oranı	15.502	15.502	0.000	0.000
Özkaynak Karlılığı Oranı	7.887	11.679	3.792	0.481	Özkaynak Karlılığı Oranı	13.833	13.833	0.000	0.000
Ekonomik Rantabilite Oranı	9.543	9.543	0.000	0.000	Ekonomik Rantabilite Oranı	8.322	8.322	0.000	0.000
Satış Karlılığı Oranı	4.666	7.686	3.020	0.647	Satış Karlılığı Oranı	14.689	14.689	0.000	0.000
Madenilik ve Taşocakçılığı	0.744				Eğitim	0.805			
Cari Oran	142.704	97.844	-44.861	-0.314	Cari Oran	92.707	74.592	-18.115	-0.195
Finansal Kaldıraç Oranı	57.523	39.158	-18.365	-0.319	Finansal Kaldıraç Oranı	54.098	17.083	-37.015	-0.684
Özkaynak/Toplam Aktif Oranı	42.477	31.600	-10.877	-0.256	Özkaynak/Toplam Aktif Oranı	45.902	25.548	-20.354	-0.443
Oranı	48.379	30.146	-18.233	-0.377	Kısa Vadeli Yabancı Kaynak/Toplam Pasif Oranı	47.542	12.386	-35.157	-0.740
Maddi Duran Varlık / Toplam Aktif Oranı	31.410	20.989	-10.421	-0.332	Maddi Duran Varlık / Toplam Aktif Oranı	51.296	14.457	-36.839	-0.718
Özkaynak Karlılığı Oranı	13.839	13.839	0.000	0.000	Özkaynak Karlılığı Oranı	8.275	8.275	0.000	0.000
Ekonomik Rantabilite Oranı	9.219	9.219	0.000	0.000	Ekonomik Rantabilite Oranı	5.702	7.309	1.607	0.282
Satış Karlılığı Oranı	6.297	7.541	1.244	0.198	Satış Karlılığı Oranı	6.052	6.052	0.000	0.000
İmalat Sanayii	0.626				Sağlık ve Sosyal Hizmetler	1.000			
Cari Oran	157.933	89.976	-67.956	-0.430	Cari Oran	144.762	144.762	0.000	0.000
Finansal Kaldıraç Oranı	55.630	34.808	-20.822	-0.374	Finansal Kaldıraç Oranı	49.444	49.444	0.000	0.000
Özkaynak/Toplam Aktif Oranı	44.370	27.763	-16.607	-0.374	Özkaynak/Toplam Aktif Oranı	50.556	50.556	0.000	0.000
Oranı	46.318	27.413	-18.905	-0.408	Kısa Vadeli Yabancı Kaynak/Toplam Pasif Oranı	33.747	33.747	0.000	0.000
Maddi Duran Varlık / Toplam Aktif Oranı	27.566	17.248	-10.318	-0.374	Maddi Duran Varlık / Toplam Aktif Oranı	37.464	37.464	0.000	0.000
Özkaynak Karlılığı Oranı	11.516	11.516	0.000	0.000	Özkaynak Karlılığı Oranı	21.759	21.759	0.000	0.000
Ekonomik Rantabilite Oranı	8.511	8.511	0.000	0.000	Ekonomik Rantabilite Oranı	17.479	17.479	0.000	0.000
Satış Karlılığı Oranı	5.199	5.378	0.179	0.034	Satış Karlılığı Oranı	11.597	11.597	0.000	0.000
Elektrik, Gaz ve Su Kaynakları	0.306				Diğer Toplumsal, Sosyal ve Kişisel Hiz.	0.854			
Cari Oran	212.679	46.229	-166.450	-0.783	Cari Oran	127.505	108.874	-18.631	-0.146
Finansal Kaldıraç Oranı	47.751	12.888	-34.863	-0.730	Finansal Kaldıraç Oranı	59.241	46.812	-12.429	-0.210
Özkaynak/Toplam Aktif Oranı	52.249	15.971	-36.278	-0.694	Özkaynak/Toplam Aktif Oranı	40.759	32.866	-7.893	-0.194
Oranı	29.599	9.048	-20.551	-0.694	Kısa Vadeli Yabancı Kaynak/Toplam Pasif Oranı	44.871	38.314	-6.557	-0.146
Maddi Duran Varlık / Toplam Aktif Oranı	40.557	10.289	-30.269	-0.746	Maddi Duran Varlık / Toplam Aktif Oranı	22.071	18.846	-3.225	-0.146
Özkaynak Karlılığı Oranı	0.009	5.933	5.925	9.999	Özkaynak Karlılığı Oranı	14.171	14.171	0.000	0.000
Ekonomik Rantabilite Oranı	4.995	4.995	0.000	0.000	Ekonomik Rantabilite Oranı	6.323	7.769	1.446	0.229
Satış Karlılığı Oranı	0.986	3.730	2.744	2.783	Satış Karlılığı Oranı	4.965	8.117	3.153	0.635
İnşaat	1.000				Kamu Kuruluşları	1.000			
Cari Oran	125.371	125.371	0.000	0.000	Cari Oran	195.259	195.259	0.000	0.000
Finansal Kaldıraç Oranı	67.077	67.077	0.000	0.000	Finansal Kaldıraç Oranı	31.911	31.911	0.000	0.000
Özkaynak/Toplam Aktif Oranı	32.923	32.923	0.000	0.000	Özkaynak/Toplam Aktif Oranı	66.110	66.110	0.000	0.000
Oranı	60.236	60.236	0.000	0.000	Kısa Vadeli Yabancı Kaynak/Toplam Pasif Oranı	24.788	24.788	0.000	0.000
Maddi Duran Varlık / Toplam Aktif Oranı	14.134	14.134	0.000	0.000	Maddi Duran Varlık / Toplam Aktif Oranı	30.450	30.450	0.000	0.000
Özkaynak Karlılığı Oranı	15.177	15.177	0.000	0.000	Özkaynak Karlılığı Oranı	17.179	17.179	0.000	0.000
Ekonomik Rantabilite Oranı	4.173	4.173	0.000	0.000	Ekonomik Rantabilite Oranı	16.541	16.541	0.000	0.000
Satış Karlılığı Oranı	8.788	8.788	0.000	0.000	Satış Karlılığı Oranı	15.957	15.957	0.000	0.000
Toplam ve Perakende Ticaret	1.000				Özel Firmalar	0.692			
Cari Oran	138.555	138.555	0.000	0.000	Cari Oran	133.823	92.573	-41.250	-0.308
Finansal Kaldıraç Oranı	65.361	65.361	0.000	0.000	Finansal Kaldıraç Oranı	55.020	24.020	-31.000	-0.563
Özkaynak/Toplam Aktif Oranı	34.639	34.639	0.000	0.000	Özkaynak/Toplam Aktif Oranı	45.426	31.004	-14.422	-0.318
Oranı	59.030	59.030	0.000	0.000	Kısa Vadeli Yabancı Kaynak/Toplam Pasif Oranı	38.952	17.989	-20.962	-0.538
Maddi Duran Varlık / Toplam Aktif Oranı	14.472	14.472	0.000	0.000	Maddi Duran Varlık / Toplam Aktif Oranı	25.592	17.703	-7.888	-0.308
Özkaynak Karlılığı Oranı	13.984	13.984	0.000	0.000	Özkaynak Karlılığı Oranı	10.483	10.483	0.000	0.000
Ekonomik Rantabilite Oranı	8.567	8.567	0.000	0.000	Ekonomik Rantabilite Oranı	8.947	8.947	0.000	0.000
Satış Karlılığı Oranı	3.889	3.889	0.000	0.000	Satış Karlılığı Oranı	6.130	7.071	0.941	0.154
Otel ve Restoranlar	0.194				Tüm Firmalar	0.766			
Cari Oran	103.580	20.106	-83.474	-0.806	Cari Oran	140.351	107.520	-32.830	-0.234
Finansal Kaldıraç Oranı	43.365	6.867	-36.498	-0.842	Finansal Kaldıraç Oranı	50.770	34.331	-16.439	-0.324
Özkaynak/Toplam Aktif Oranı	56.635	7.022	-49.613	-0.876	Özkaynak/Toplam Aktif Oranı	49.230	34.321	-14.908	-0.303
Oranı	28.445	4.687	-23.758	-0.835	Kısa Vadeli Yabancı Kaynak/Toplam Pasif Oranı	37.246	27.065	-10.181	-0.273
Maddi Duran Varlık / Toplam Aktif Oranı	61.873	5.203	-56.670	-0.916	Maddi Duran Varlık / Toplam Aktif Oranı	25.645	19.646	-5.999	-0.234
Özkaynak Karlılığı Oranı	2.367	3.022	0.655	0.277	Özkaynak Karlılığı Oranı	12.549	12.549	0.000	0.000
Ekonomik Rantabilite Oranı	2.428	2.428	0.000	0.000	Ekonomik Rantabilite Oranı	9.854	9.854	0.000	0.000
Satış Karlılığı Oranı	0.003	1.611	1.607	9.999	Satış Karlılığı Oranı	7.317	7.317	0.000	0.000

Ek 2. BCC Modeline göre Geliştirme Oranları

Karar Verme Birimi / Karar Değişkenleri	Etkinlik Skoru / Fiili Değer	Öngörülen Değer	Fark	Geliştirme Oranı	Karar Verme Birimi / Karar Değişkenleri	Etkinlik Skoru / Fiili Değer	Öngörülen Değer	Fark	Geliştirme Oranı
Tarım, Avcılık ve Ormançılık	0.995				Taşınacılık, Depolama ve Haberleşme	1.000			
Cari Oran	138.605	137.961	-0.644	-0.005	Cari Oran	123.421	123.421	0.000	0.000
Finansal Kaldıraç Oranı	56.455	56.192	-0.262	-0.005	Finansal Kaldıraç Oranı	61.066	61.066	0.000	0.000
Özkaynak/Toplam Aktif Oranı	43.545	43.343	-0.202	-0.005	Özkaynak/Toplam Aktif Oranı	38.934	38.934	0.000	0.000
Kısa Vadeli Yabancı Kaynak/Toplam Pasif Oranı	47.044	46.826	-0.219	-0.005	Kısa Vadeli Yabancı Kaynak/Toplam Pasif Oranı	42.765	42.765	0.000	0.000
Maddi Duran Varlık / Toplam Aktif Oranı	34.862	27.332	-7.530	-0.216	Maddi Duran Varlık / Toplam Aktif Oranı	39.670	39.670	0.000	0.000
Özkaynak Karlılığı Oranı	9.376	14.078	4.702	0.502	Özkaynak Karlılığı Oranı	11.230	11.230	0.000	0.000
Ekonomik Rantabilite Oranı	5.185	7.806	2.621	0.506	Ekonomik Rantabilite Oranı	6.830	6.830	0.000	0.000
Satış Karlılığı Oranı	3.841	9.114	5.273	1.373	Satış Karlılığı Oranı	3.852	3.852	0.000	0.000
Balkçılık	0.994				Emlak Komisyonculuğu, Kiralama ve İşlt.Hiz.	1.000			
Cari Oran	202.806	188.621	-14.185	-0.070	Cari Oran	202.486	202.486	0.000	0.000
Finansal Kaldıraç Oranı	41.927	41.658	-0.270	-0.006	Finansal Kaldıraç Oranı	40.457	40.457	0.000	0.000
Özkaynak/Toplam Aktif Oranı	58.073	57.699	-0.374	-0.006	Özkaynak/Toplam Aktif Oranı	59.543	59.543	0.000	0.000
Kısa Vadeli Yabancı Kaynak/Toplam Pasif Oranı	38.420	31.947	-6.473	-0.169	Kısa Vadeli Yabancı Kaynak/Toplam Pasif Oranı	28.334	28.334	0.000	0.000
Maddi Duran Varlık / Toplam Aktif Oranı	20.281	20.151	-0.130	-0.006	Maddi Duran Varlık / Toplam Aktif Oranı	15.502	15.502	0.000	0.000
Özkaynak Karlılığı Oranı	7.887	15.120	7.233	0.917	Özkaynak Karlılığı Oranı	13.833	13.833	0.000	0.000
Ekonomik Rantabilite Oranı	9.543	10.371	0.828	0.087	Ekonomik Rantabilite Oranı	8.322	8.322	0.000	0.000
Satış Karlılığı Oranı	4.666	14.219	9.553	2.048	Satış Karlılığı Oranı	14.689	14.689	0.000	0.000
Madencilik ve Taşocakçılığı	0.996				Eğitim	1.000			
Cari Oran	142.704	142.158	-0.546	-0.004	Cari Oran	92.707	92.707	0.000	0.000
Finansal Kaldıraç Oranı	57.523	57.303	-0.220	-0.004	Finansal Kaldıraç Oranı	54.098	54.098	0.000	0.000
Özkaynak/Toplam Aktif Oranı	42.477	42.314	-0.163	-0.004	Özkaynak/Toplam Aktif Oranı	45.902	45.902	0.000	0.000
Kısa Vadeli Yabancı Kaynak/Toplam Pasif Oranı	48.379	48.194	-0.185	-0.004	Kısa Vadeli Yabancı Kaynak/Toplam Pasif Oranı	47.542	47.542	0.000	0.000
Maddi Duran Varlık / Toplam Aktif Oranı	31.410	25.355	-6.055	-0.193	Maddi Duran Varlık / Toplam Aktif Oranı	51.296	51.296	0.000	0.000
Özkaynak Karlılığı Oranı	13.839	13.839	0.000	0.000	Özkaynak Karlılığı Oranı	8.275	8.275	0.000	0.000
Ekonomik Rantabilite Oranı	9.219	9.219	0.000	0.000	Ekonomik Rantabilite Oranı	5.702	5.702	0.000	0.000
Satış Karlılığı Oranı	6.297	6.886	0.589	0.094	Satış Karlılığı Oranı	6.052	6.052	0.000	0.000
İmalat Sanayii	0.994				Sağlık ve Sosyal Hizmetler	1.000			
Cari Oran	157.933	146.155	-11.778	-0.075	Cari Oran	144.762	144.762	0.000	0.000
Finansal Kaldıraç Oranı	55.630	55.300	-0.329	-0.006	Finansal Kaldıraç Oranı	49.444	49.444	0.000	0.000
Özkaynak/Toplam Aktif Oranı	44.370	44.107	-0.263	-0.006	Özkaynak/Toplam Aktif Oranı	50.556	50.556	0.000	0.000
Kısa Vadeli Yabancı Kaynak/Toplam Pasif Oranı	46.318	46.044	-0.274	-0.006	Kısa Vadeli Yabancı Kaynak/Toplam Pasif Oranı	33.747	33.747	0.000	0.000
Maddi Duran Varlık / Toplam Aktif Oranı	27.566	24.237	-3.329	-0.121	Maddi Duran Varlık / Toplam Aktif Oranı	37.464	37.464	0.000	0.000
Özkaynak Karlılığı Oranı	11.516	14.941	3.426	0.298	Özkaynak Karlılığı Oranı	21.759	21.759	0.000	0.000
Ekonomik Rantabilite Oranı	8.511	8.511	0.000	0.000	Ekonomik Rantabilite Oranı	17.479	17.479	0.000	0.000
Satış Karlılığı Oranı	5.199	9.811	4.612	0.887	Satış Karlılığı Oranı	11.597	11.597	0.000	0.000
Elektrik, Gaz ve Su Kaynakları	1.000				Diğer Toplumsal, Sosyal ve Kişisel Hiz.	1.000			
Cari Oran	212.679	212.679	0.000	0.000	Cari Oran	127.505	127.505	0.000	0.000
Finansal Kaldıraç Oranı	47.751	47.751	0.000	0.000	Finansal Kaldıraç Oranı	59.241	59.241	0.000	0.000
Özkaynak/Toplam Aktif Oranı	52.249	52.249	0.000	0.000	Özkaynak/Toplam Aktif Oranı	40.759	40.759	0.000	0.000
Kısa Vadeli Yabancı Kaynak/Toplam Pasif Oranı	29.599	29.599	0.000	0.000	Kısa Vadeli Yabancı Kaynak/Toplam Pasif Oranı	44.871	44.871	0.000	0.000
Maddi Duran Varlık / Toplam Aktif Oranı	40.557	40.557	0.000	0.000	Maddi Duran Varlık / Toplam Aktif Oranı	22.071	22.071	0.000	0.000
Özkaynak Karlılığı Oranı	0.009	0.009	0.000	0.010	Özkaynak Karlılığı Oranı	14.171	14.171	0.000	0.000
Ekonomik Rantabilite Oranı	4.995	4.995	0.000	0.000	Ekonomik Rantabilite Oranı	6.323	6.323	0.000	0.000
Satış Karlılığı Oranı	0.986	0.986	0.000	0.000	Satış Karlılığı Oranı	4.965	4.965	0.000	0.000
İnşaat	1.000				Kamu Kuruluşları	1.000			
Cari Oran	125.371	125.371	0.000	0.000	Cari Oran	195.259	195.259	0.000	0.000
Finansal Kaldıraç Oranı	67.077	67.077	0.000	0.000	Finansal Kaldıraç Oranı	31.911	31.911	0.000	0.000
Özkaynak/Toplam Aktif Oranı	32.923	32.923	0.000	0.000	Özkaynak/Toplam Aktif Oranı	66.110	66.110	0.000	0.000
Kısa Vadeli Yabancı Kaynak/Toplam Pasif Oranı	60.236	60.236	0.000	0.000	Kısa Vadeli Yabancı Kaynak/Toplam Pasif Oranı	24.788	24.788	0.000	0.000
Maddi Duran Varlık / Toplam Aktif Oranı	14.134	14.134	0.000	0.000	Maddi Duran Varlık / Toplam Aktif Oranı	30.450	30.450	0.000	0.000
Özkaynak Karlılığı Oranı	15.177	15.177	0.000	0.000	Özkaynak Karlılığı Oranı	17.179	17.179	0.000	0.000
Ekonomik Rantabilite Oranı	4.173	4.173	0.000	0.000	Ekonomik Rantabilite Oranı	16.541	16.541	0.000	0.000
Satış Karlılığı Oranı	8.788	8.788	0.000	0.000	Satış Karlılığı Oranı	15.957	15.957	0.000	0.000
Toptan ve Perakende Ticaret	1.000				Özel Firmalar	1.000			
Cari Oran	138.555	138.555	0.000	0.000	Cari Oran	133.823	133.823	0.000	0.000
Finansal Kaldıraç Oranı	65.361	65.361	0.000	0.000	Finansal Kaldıraç Oranı	55.020	55.020	0.000	0.000
Özkaynak/Toplam Aktif Oranı	34.639	34.639	0.000	0.000	Özkaynak/Toplam Aktif Oranı	45.426	45.426	0.000	0.000
Kısa Vadeli Yabancı Kaynak/Toplam Pasif Oranı	59.030	59.030	0.000	0.000	Kısa Vadeli Yabancı Kaynak/Toplam Pasif Oranı	38.952	38.952	0.000	0.000
Maddi Duran Varlık / Toplam Aktif Oranı	14.472	14.472	0.000	0.000	Maddi Duran Varlık / Toplam Aktif Oranı	25.592	25.592	0.000	0.000
Özkaynak Karlılığı Oranı	13.984	13.984	0.000	0.000	Özkaynak Karlılığı Oranı	10.483	10.483	0.000	0.000
Ekonomik Rantabilite Oranı	8.567	8.567	0.000	0.000	Ekonomik Rantabilite Oranı	8.947	8.947	0.000	0.000
Satış Karlılığı Oranı	3.889	3.889	0.000	0.000	Satış Karlılığı Oranı	6.130	6.130	0.000	0.000
Otel ve Restoranlar	1.000				Tüm Firmalar	1.000			
Cari Oran	103.580	103.580	0.000	0.000	Cari Oran	140.351	140.351	0.000	0.000
Finansal Kaldıraç Oranı	43.365	43.365	0.000	0.000	Finansal Kaldıraç Oranı	50.770	50.770	0.000	0.000
Özkaynak/Toplam Aktif Oranı	56.635	56.635	0.000	0.000	Özkaynak/Toplam Aktif Oranı	49.230	49.230	0.000	0.000
Kısa Vadeli Yabancı Kaynak/Toplam Pasif Oranı	28.445	28.445	0.000	0.000	Kısa Vadeli Yabancı Kaynak/Toplam Pasif Oranı	37.246	37.246	0.000	0.000
Maddi Duran Varlık / Toplam Aktif Oranı	61.873	61.873	0.000	0.000	Maddi Duran Varlık / Toplam Aktif Oranı	25.645	25.645	0.000	0.000
Özkaynak Karlılığı Oranı	2.367	2.367	0.000	0.000	Özkaynak Karlılığı Oranı	12.549	12.549	0.000	0.000
Ekonomik Rantabilite Oranı	2.428	2.428	0.000	0.000	Ekonomik Rantabilite Oranı	9.854	9.854	0.000	0.000
Satış Karlılığı Oranı	0.003	0.003	0.000	0.006	Satış Karlılığı Oranı	7.317	7.317	0.000	0.000

DETERMINATION OF FIRE CREWS LOCATIONS USING OPERATIONS RESEARCH AND GEOGRAPHICAL INFORMATION SYSTEMS: İZMİR CASE

Nurcan TEMİZ*

Vahap TECİM**

ABSTRACT

Spatial information systems and technologies such as Geographical Information Systems (GIS), Global Positioning Systems (GPS), and Remote Sensing (RS), provide resource managers with tools to use in analyzing and understanding a forest. As the forest planning process becomes increasingly complicated, there is a need for assisting forest planners with operative tools. The combined use of GIS and Operations Research (OR) gives forest managers the chance to visualize solutions proposed by OR. Fire fighting planning is an important component of forest management and optimizing the numbers of fire crews is very essential in fire fighting planning. In this study current locations of fire crews are examined for İzmir Forest Administration Chief Office and these fire crews are represented on a digital map. Then new locations for fire crews are proposed by using Location Set Covering Problem (LSCP) and GIS.

Keywords: Forest management, Geographical information systems, Location set covering problem, Spatial information systems.

1. INTRODUCTION

Geographical Information Systems (GIS) are computer-based systems and assist forest managers to store, update, manipulate and analyze spatial and nonspatial forestry data effectively.

Consideration of alternative uses of forests and their products always raises the question of ‘What is the best way to make the most effective use of them?’. However, because of the large number of alternatives, the complexity of product interactions, and the conflicting desires of the public, it is almost impossible to find an optimal answer to that question. In these cases, Operations Research (OR) helps forest managers. The combined use of GIS and OR techniques gives forest managers the chance to visualize solutions proposed by OR and to gain a better understanding of the real problem they confront.

* Assistant Professor, Mersin University, Faculty of Economics and Administrative Sciences, Department of Labour Economics and Industrial Relations, e-mail: nurcantemiz@mersin.edu.tr

** Professor Dr., Dokuz Eylül University, Faculty of Economics and Administrative Sciences, Department of Econometrics, e-mail: yahap.tecim@deu.edu.tr

Location is an important factor for forestry to conduct certain activities. Hogg (1968), used a set-covering technique, which minimizes the total number of fire appliance journey times to fires for any given number of fire stations. Toregas et al. (1971) and Toregas and ReVelle (1973) introduced Location Set Covering Problem (LSCP) to deal with minimizing number of facilities and sites. Plane and Hendrick (1977), used the maximum covering distance concept in developing a hierarchical objective function for the set covering formulation of the fire station location problem. ReVelle (1989) reviewed emergency service siting models.

Location problems have also been studied extensively in GIS. Estochen et al. (1988) used GIS to determine the location/allocation of emergency response vehicles in the state of Iowa. Because GIS is very important in location planning problems (Miller, 1996), GIS and LSCP integration was discussed in this study. As stated by Martell et al., (1998) that spatial relationships have always been important in forest management planning. Church (2002) provided a functional review of GIS in relation to location modeling and discussed one of the analytical functions of GIS, buffering. As suggested by O'Sullivan and Unwin (2003), GIS has changed how spatial analysis in general is approached. Dimopoulou and Giannikos (2004) developed an integrated system that consists of GIS module, mathematical programming module and simulation module for forest fire control.

This study aims to integrate neighborhood relation analysis of OR, which is known as LSCP, with neighborhood relation (proximity) analysis of GIS, which is known as buffering so as to propose new fire crew locations for the south region of the study area, İzmir Forest Administration Chief Office (İFACO).

Fire crews were not represented on a digital map and coordinates of these fire crews were only in the form of attribute information for İFACO. For this reason, current locations of fire crews were examined and the representation of these fire crews was done on a digital map for the study area. Given that there was no fire crew in the south region of the İFACO, the optimum numbers of fire crews that must be assigned to this region and their locations were proposed by using LSCP and GIS.

1.1 Spatial Information Systems

Information systems are classified as spatial information systems and nonspatial information systems, depending on the nature of the data they process. Spatial information systems are computer-based tools for working with data about phenomena that is on, above or below the earth's surface (Laurini and Thompson, 1992). Nonspatial information systems are designed for processing data that are not referenced to any position in geographic space, such as student information system and library information system (Lo and Yeung, 2002).

GIS is a special type of information systems in which the data source is the database of spatially distributed features, and by these information systems, procedures such as storing, retrieving, analyzing and displaying are used for geographic data. GIS technology offers combined power of both geography and the information systems and

provides ideal solutions for effective natural resource management (Shamsi, 2005). GIS can be used to answer questions about locations, patterns, trends and conditions, such as, where features are found, where changes occur over time, what geographic patterns exist. GIS presents a simplified model of the real world problems (Gilfoyle and Thorpe, 2004).

Buffer zone generation, which is one of the analytical functions of GIS, is a type of proximity analysis. A buffer is an area that is created around a spatial feature. It is a zone with a specified width surrounding a spatial feature. Such feature can be a point, a line or a polygon. Buffering is the process of creating areas of calculated distance from a point, line or polygon, and it is used to identify a zone around an entity, or a set of entities. The resulting buffer is a new polygon, which can be used in queries to determine which entities occur either within or outside the defined buffer zone (Birkin et al., 1996; DeMers, 1997; Heywood et al., 2002; Lo and Yeung, 2002).

1.2 Forest Management

Forestry involves the management of a wide range of natural resources. In addition to timber, forests provide various resources like land for livestock to graze, recreation areas and water supply resources. In this context, forest management includes management of harvesting and recreational areas and protection of endangered species and archeological sites. Management of forest resources is a complex task due to multi-functional nature of these resources. Therefore, the problems of forest management and planning shifted from wood production objective to multiple objectives such as water conservation, prevention of soil erosion, landscape conservation and recreation (Aronoff, 1995; Kazana et al., 2003; Mohren, 2003).

The amount of data, information and knowledge involved in the forest management process is often overwhelming. Integrated decision support systems help managers to make consistently good decisions about forest ecosystem management (Potter et al., 2000). Compared to previous forest management approaches, new forest management strategies require integration of spatial information technologies, such as GIS, remote sensing, and decision support systems (Franklin, 2001).

The designing of the forest database is crucial in a comprehensive forest management plan. Data should be accurate, properly organized, detailed and it should be obtained easily and economically. The gathering of spatial and nonspatial data and analyzing them determine the quality of forest management plans.

Forest management consists of several subsystems and fire management system is one of these systems. Fire fighting planning is an important component of fire management system. This paper discusses fire fighting planning in terms of determination of numbers and locations of new fire crews.

1.3 Location Set Covering Problem

Questions of how many and which vehicles are going to be moved towards fire area and especially the assignment of fire crews to proper locations are very essential in fire fighting planning. In question such as “how many facilities (fire crew, reservoir or pool) are required to meet fire zone (fire sensitive area) demand?” the concept of covering is important. LSCP seeks to assign facilities in such a way that all of the spatially distributed demand points are covered within a specified distance and the number of facilities is minimized. In other words, this problem finds the smallest number of needed facilities and their locations in a way that each demand point is covered at least once (Revelle et al., 1996; Church and Gerrard, 2003). Mathematical model of the problem is given in equations 1, 2 and 3. (Church and Gerrard, 2003):

$$\text{Minimize } Z = \sum_{j=1}^n x_j \tag{1}$$

subject to

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq 1 \quad \text{for each demand point } i= 1, 2, \dots, m \tag{2}$$

$$x_j = 0,1 \quad \text{for each site } j= 1, 2, \dots, n \tag{3}$$

where

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if site } j \text{ can cover demand } i \\ 0, & \text{if not} \end{cases}$$

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{if site } j \text{ is selected for a facility} \\ 0, & \text{if not} \end{cases}$$

The objective is to find the minimum number of needed facilities and their locations in equation 1, 2 and 3. The first constraint requires that each demand i is covered at least at once. The second constraints are for integrality (Church and Gerrard, 2003).

2. MATERIALS AND METHODS

Forest management was discussed from fire management perspective in this paper. This study represents only small portion of the doctorate thesis and aims to determine optimum numbers and locations of new fire crews by using LSCP and GIS for İFACO. İFACO is subordinate to İzmir Directorate of Forest Administration. İzmir Directorate of Forest Administration has 11 forest administration chiefs, and our study area, İFACO, is one of them. The general area is 39270 ha and 50.88 per cent of this area is forested land. The total forest area is 19983.5 ha, of which 11494.5 ha is productive and 8489 ha is unproductive.

Most of the forest administration chief offices of İzmir Directorate of Forest Administration, also our study area, have paper maps and do not regularly maintain and update a forestry database. In contemporary forest management a forest database must be designed regularly, and all maps must be in digital form. It is important to handle forestry problems by using spatial information systems. GIS provides not only organization and management of data but also integrates different optimization models into the problem solving environment. GIS is a valuable tool in transition from conventional forest management to contemporary forest management.

This study is performed to initiate contemporary forest management planning in study area. Several interviews were made with the directorates of the Forest Protection and Fire Combating Department of the İFACO in every phase of the study and all data were obtained from them. The first phase of the study was data collection and transformation of all maps, obtained from study area, to MapInfo compatible format. Then database was designed. GIS was used for positioning current fire crews and water resources on a digital map.

Figure 1 shows compartment map of İFACO.

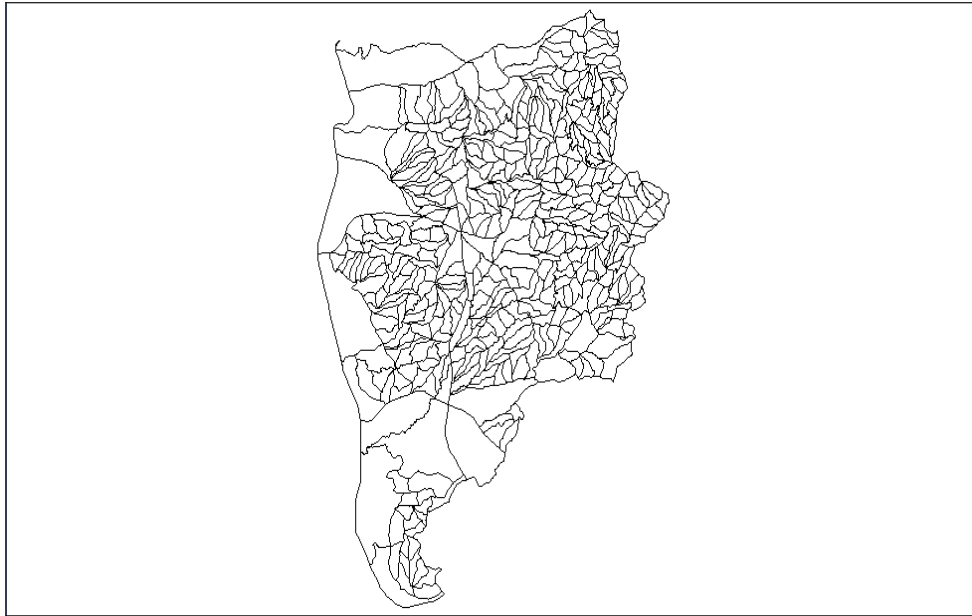


Figure 1. Compartment Map of İFACO

3. RESULTS

Figure 2 shows database that is constituted for our study area, İFACO, to manage forest and fire effectively.

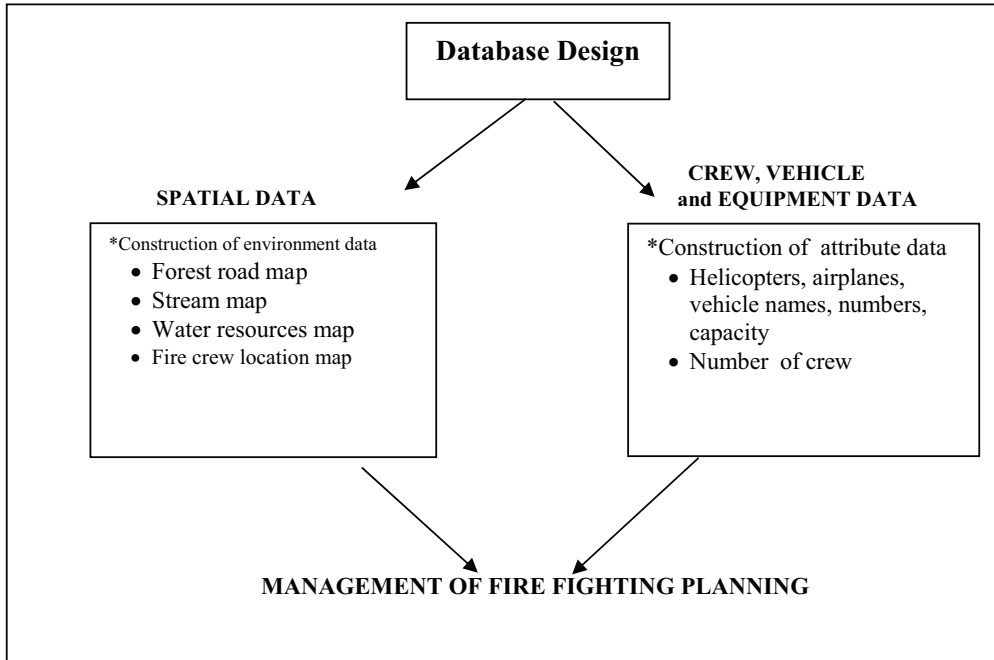


Figure 2. Development of a Database to Manage Fire Fighting Planning

Water resources and fire crew locations were only available as attribute data with coordinate information. In order to display these points on a digital map, firstly, coordinates of all water resources and fire crews were converted to decimal degrees and then to meters. East longitude and north latitude coordinates of water resources are, 27° 19' 06" and 38° 22' 15" for Kaynaklar, 27° 14' 29" and 38° 20' 54" for Buca Gölet, 27° 10' 48" and 38° 16' 53" for Sarnıç Gölet, 27° 12' 52" and 38° 20' 02" for BP-Olduruk. Longitude and latitude coordinates of fire crews are, 27° 06' 47" and 38° 27' 13" for Karşıyaka, 27° 18' 05" and 38° 27' 02" for Belkahve, 27° 11' 40" and 38° 22' 30" for Buca. Then database of water resources and fire crews were designed.

Locations of water resources and fire crews and related attribute data were shown in Figure 3. As interviewed with directorates of the Forest Protection and Fire Combating Department, the south region of the study area was deprived of the fire crews. Then by taking into account the requests of directorates, new locations and optimum numbers of fire crews were proposed by using LSCP and GIS for the south region of the study area. MapInfo software package was used for GIS side of the problem and WINQSB software package was used for OR side of the problem.

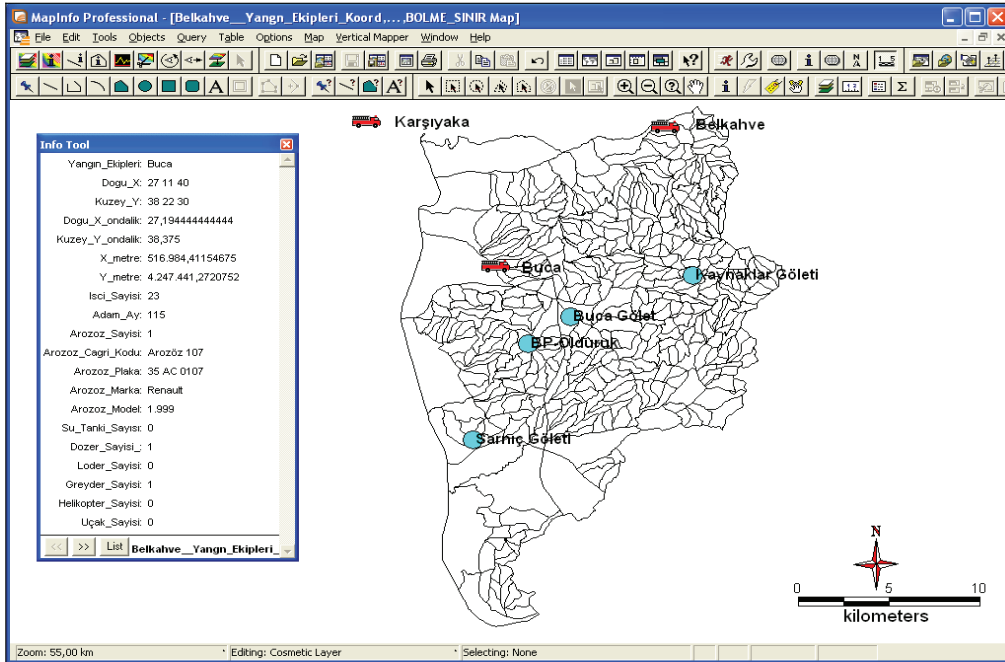


Figure 3. Locations of Fire Crews and Water Resources of İFACO

In order to determine optimum numbers of new fire crews by LSCP, compartment map of the study area was used. In this study fire crews were named with the compartment number they were assigned. For instance fire crew 368 means that this fire crew is assigned to the compartment 368 according to results of LSCP. In Figure 4 south region of the study area and the locations of current fire crews were displayed together.

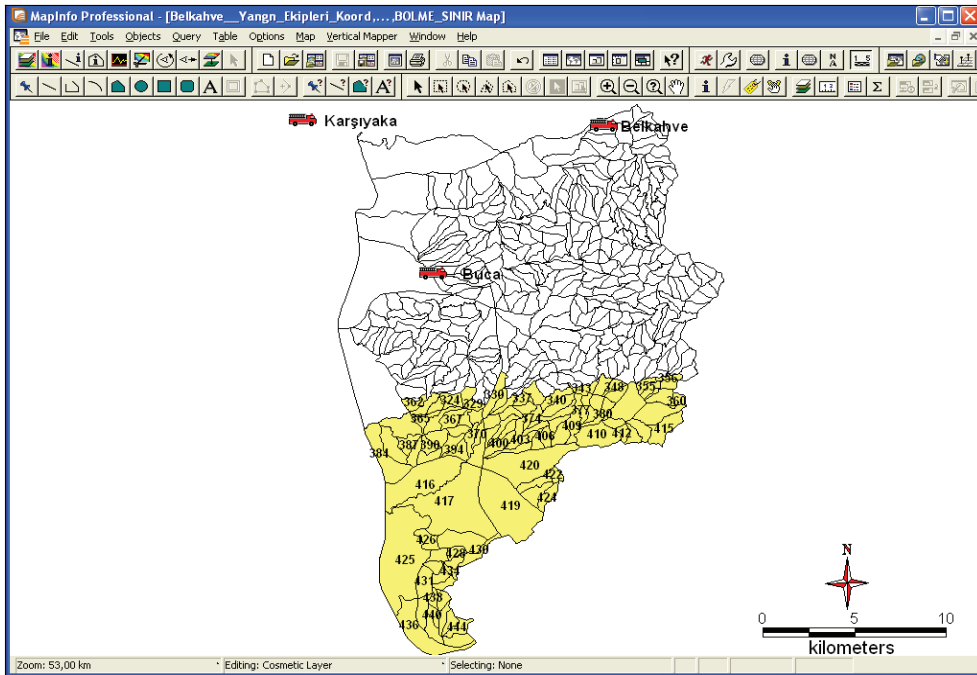


Figure 4. South Region of the Study Area and Locations of Current Fire Crews

The south region of the study area consists of 102 compartments. LSCP formulation consists of 132 decision variables and 102 constraints. Constraints are constituted according to the compartment neighborhood relations. An objective function of LSCP is shown in equation 4. Because of the size of the problem, constitutions of only some of the constraints are exemplified in Table 1. This table shows neighborhood relations between compartments, as ‘1’ shows there is neighborhood and ‘0’ shows there is no neighborhood between compartments. The rest of the constraints were constituted in the same logic.

$$\text{Minimize } Z = \sum_{j=277}^{280} x_j + \sum_{j=308}^{312} x_j + \sum_{j=319}^{322} x_j + \sum_{j=323}^{344} x_j + \sum_{j=346}^{349} x_j + \sum_{j=351}^{445} x_j \quad (4)$$

Table 1. Neighborhood relations between compartments for only three constraints of the problem
Compartments

Constraints	277	323	324	325	326	327	328	329	330	363	364	365	366	367	368	369
324	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0
325	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0
329	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1

According to LSCP solution obtained from WINQSB software package, the minimum numbers of fire crews was found as 17 for the south region of the study area. This number also indicated the minimum numbers of compartments that the fire crews must be assigned. Optimum solution was found as, $x_{324} = x_{338} = x_{356} = x_{368} = x_{371} = x_{376} = x_{379} = x_{383} = x_{386} = x_{389} = x_{400} = x_{412} = x_{419} = x_{420} = x_{427} = x_{435} = x_{441} = 1$ and the rest equals to 0.

Figure 5 displays locations of current fire crews and proposed fire crews.

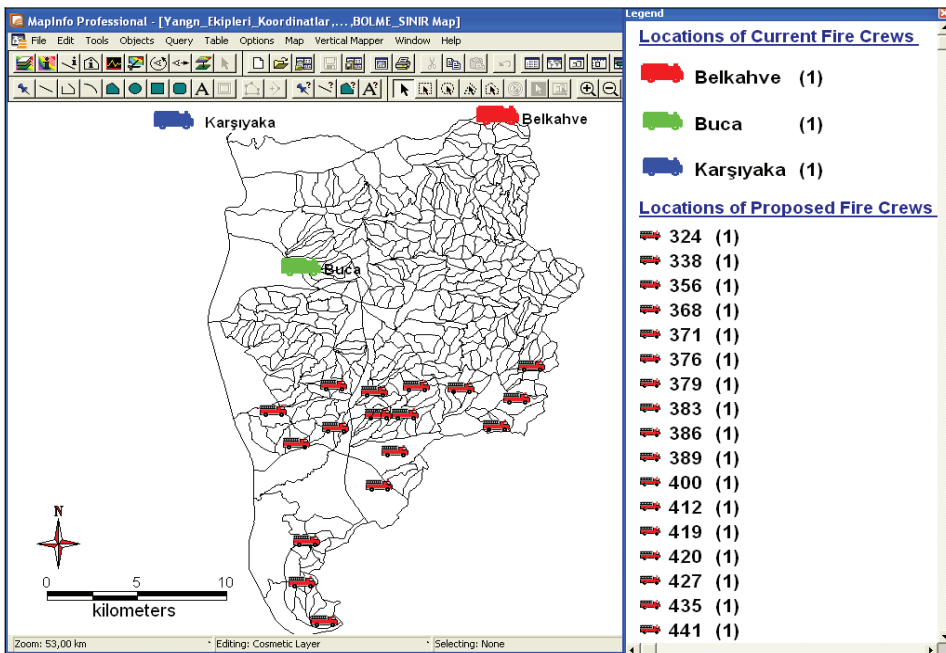


Figure 5. Locations of Current and Proposed Fire Crews

As interviewed with directorates, although 17 is the minimum number of fire crews found by LSCP it is difficult to assign 17 fire crews to the south region of the study area because of the budget constraints. So directorates demanded to locate three fire crews to the south region of the study area. Instead of trying all possible trio fire crew alternatives on 102 compartments, it is considered to optimize the problem firstly on the basis of neighborhood relation of compartments by using LSCP and then optimizing the LSCP results further by using buffering analysis. And finally it was aimed to reduce the number of fire crews to the three as demanded by directorates of the study area. Because the problem in this study is not Maximal Covering Location Problem (MCLP), coverage distance is not specified in LSCP. The only criterion is set in buffering analysis. This criterion is to assure coverage of all demand nodes (compartments) in buffering of three fire crews. That is, it is important to include all compartments in the south region of the study area to the buffering analysis.

Buffering process involved the creation of a circular polygon about each fire crew of radius equal to buffer distance. In this study fixed buffer distance (7 km) was used for all fire crews. This distance was determined by interviewing with the directorates of forest protection and fire combating department about accessibility criteria in the case of emergency (etc, forest fire in this study). Firstly buffering was done on a compartment map to see coverage of all compartments is ensured by selecting any of three fire crews. The aim was to find compartments that fall inside service area of each fire crew and to determine coverage areas of fire crews. Then same buffering was done on the road map to determine the intervention area of each fire crew and total length of roads that was usable by each fire crew in the buffered areas. Same distance, 7 km, was used for each fire crew in buffering. The term 'usable road' means that the roads that can be used by fire crews. For example, if there is a planned road or unstandardized road in the buffered area, these roads indicate unusable part of the total road.

Inside of each buffer indicated total length of usable roads and the intervention area of fire crew. Different alternatives were possible as to locations of these three fire crews. These trio sets were determined by trying buffering analysis on the results of LSCP. Among 17 fire crews all possible combination of trio fire crew sets were tried on the basis of fixed buffer distance (7 km) on a digital map, and coverage of all compartments in the south region was ensured.

One of these alternatives was assignment of fire crews to the compartments with the numbers of 356, 368, and 435. According to this assignment, if one fire crew is assigned to the compartment 368, the other two must be assigned to the compartment 356 and 435 (The same interpretation can be done as, if one fire crew is assigned to the compartment 356, the other two must be assigned to the compartment 368 and 435 or if one fire crew is assigned to the compartment 435, the other two must be assigned to the compartment 356 and 368). It is important to note that assignment must be done with this trio set. Total length of usable roads in buffered areas was found as 526 km with this assignment. In figure 6 intervention areas and total length of usable roads in buffered areas were shown for the fire crew 356, 368 and 435. Different trio sets were proposed as shown in figure 7, figure 8 and figure 9. The best assignment in terms of total length of usable roads was shown in figure 10.

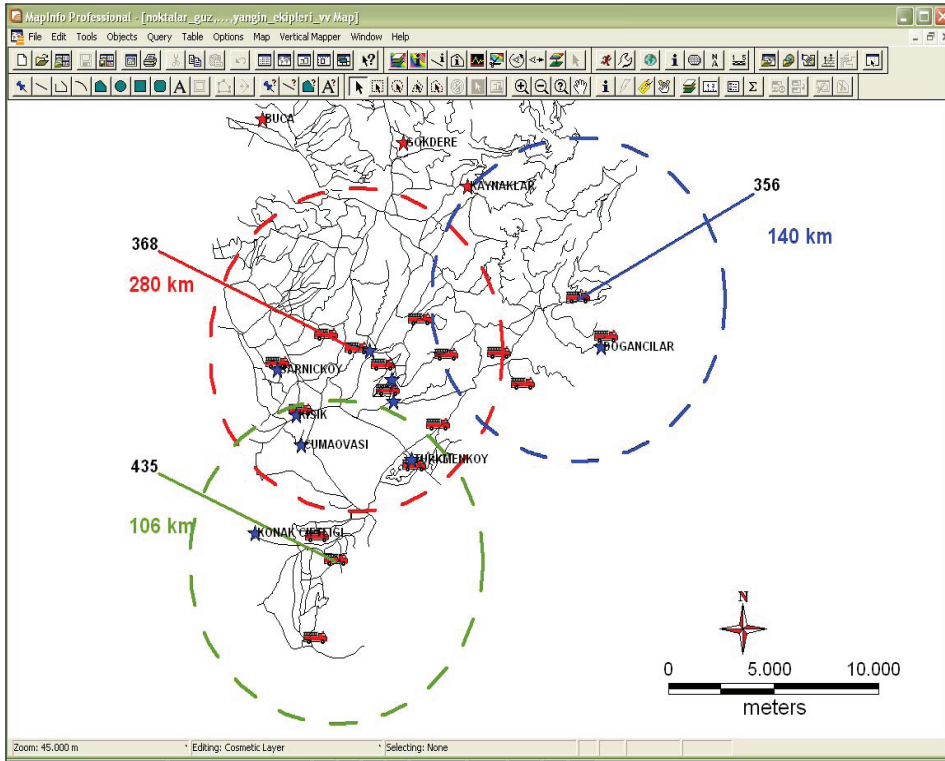


Figure 6. 7 km Buffers from Fire Crew 356, 368 and 435

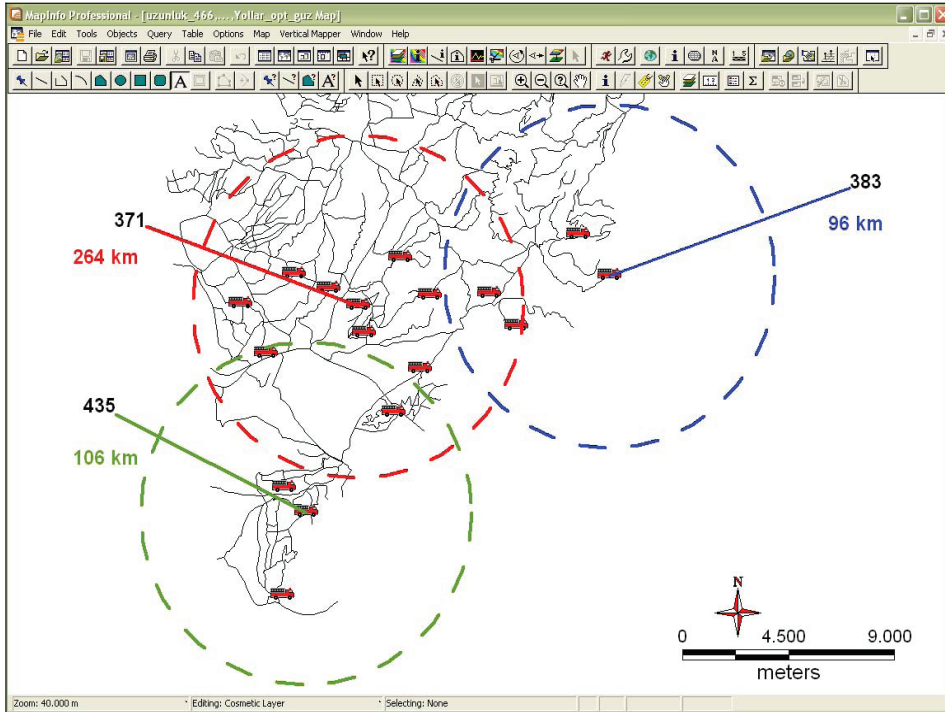


Figure 7. 7 km Buffers from Fire Crew 371, 383 and 435

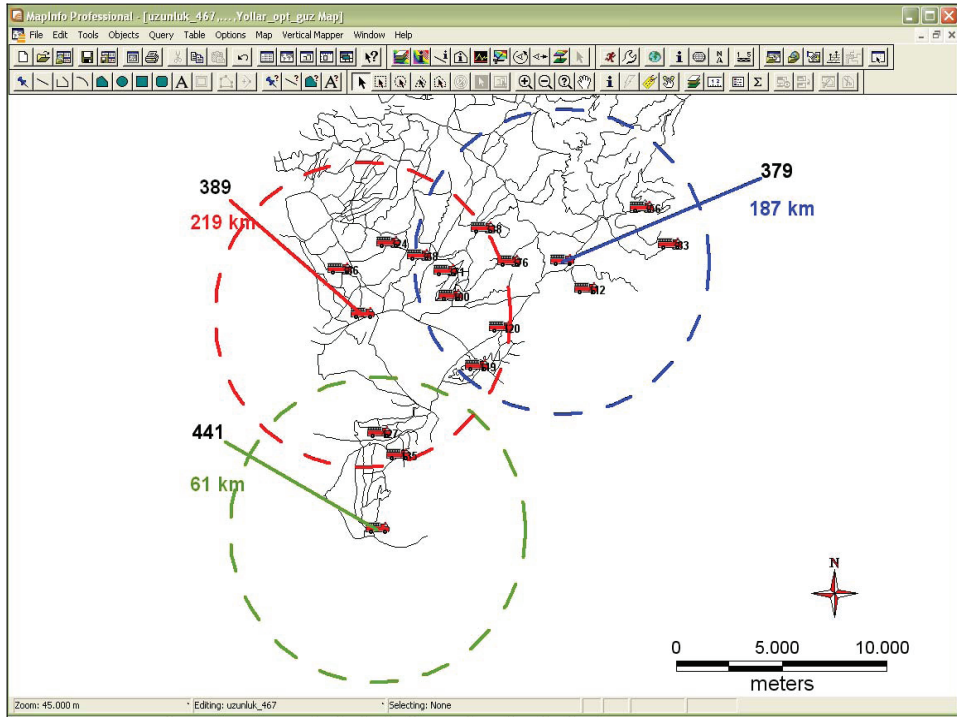


Figure 8. 7 km Buffers from Fire Crew 379, 389 and 441

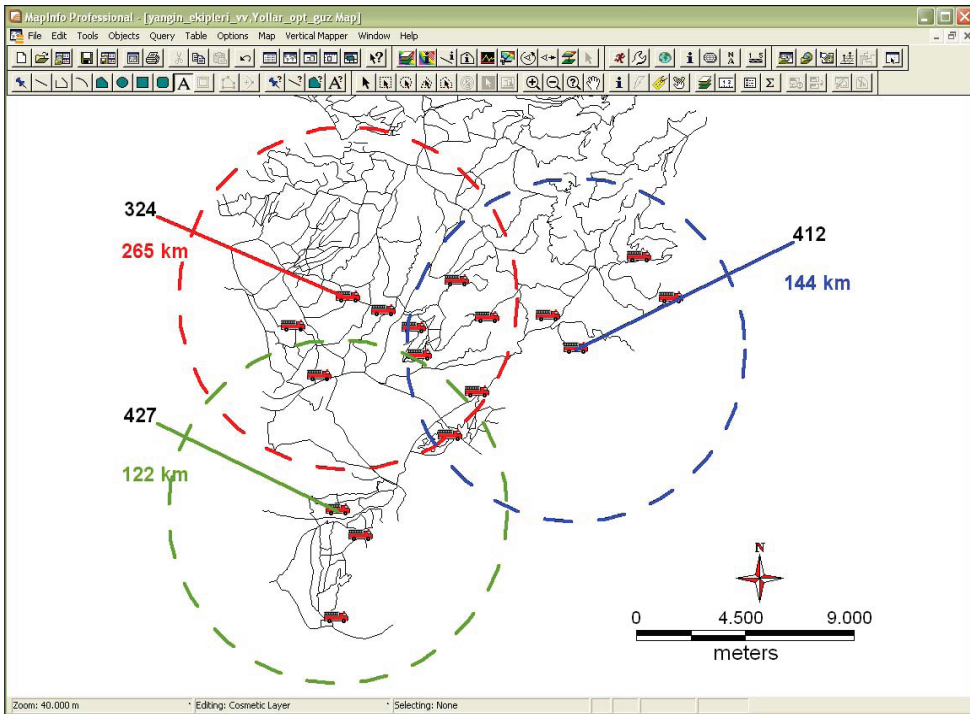


Figure 9. 7 km Buffers from Fire Crew 324, 412 and 427

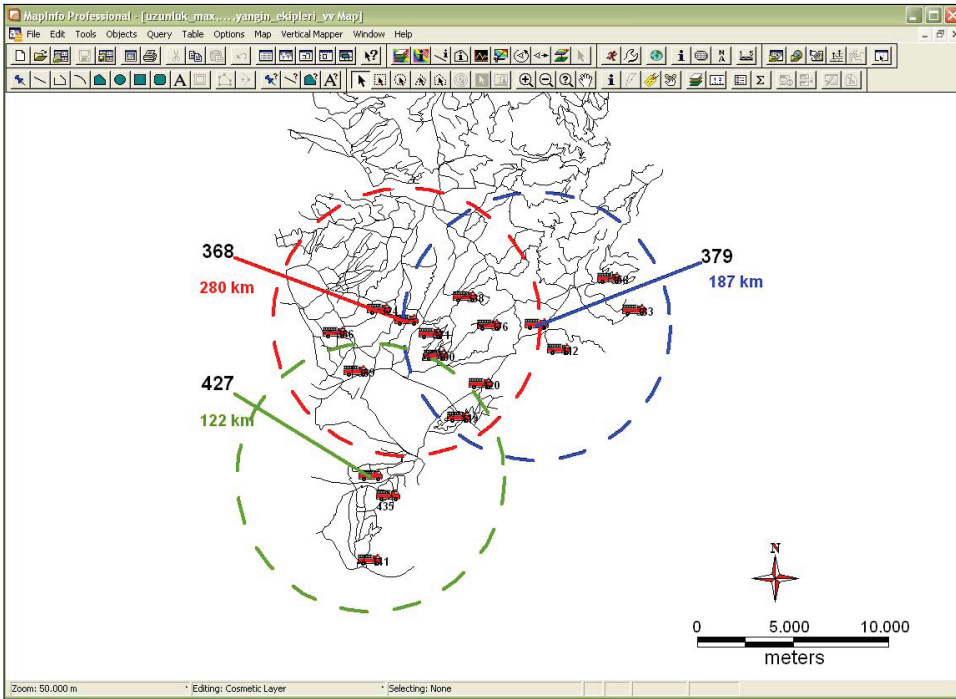


Figure 10. 7 km Buffers from Fire Crew 368, 379 and 427

Figures 11, 12 and 13 show types of the roads for buffering of fire crew 368, 379 and 427, respectively. The planned roads and unstandardized roads show unusable part of the total road.

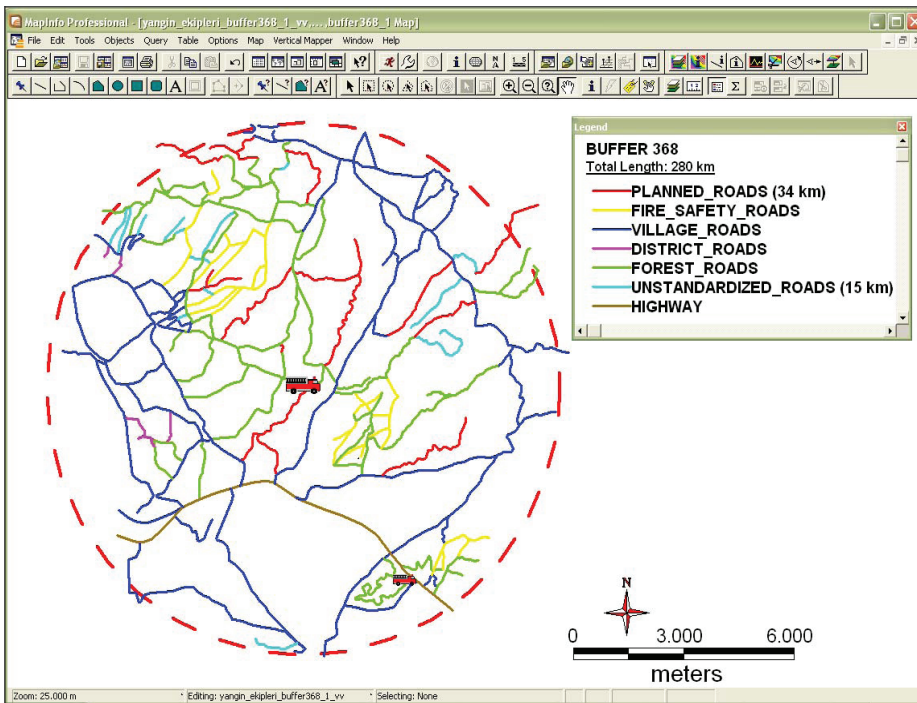


Figure 11. Road Types and Their Total Length for Buffering of Fire Crew 368

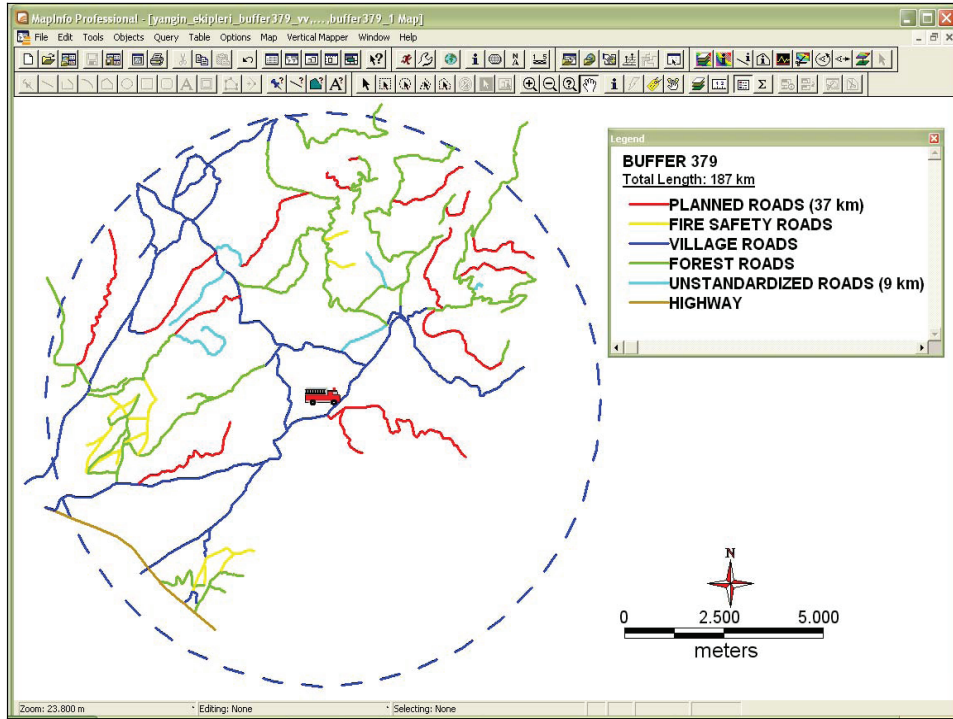


Figure 12. Road Types and Their Total Length for Buffering of Fire Crew 379

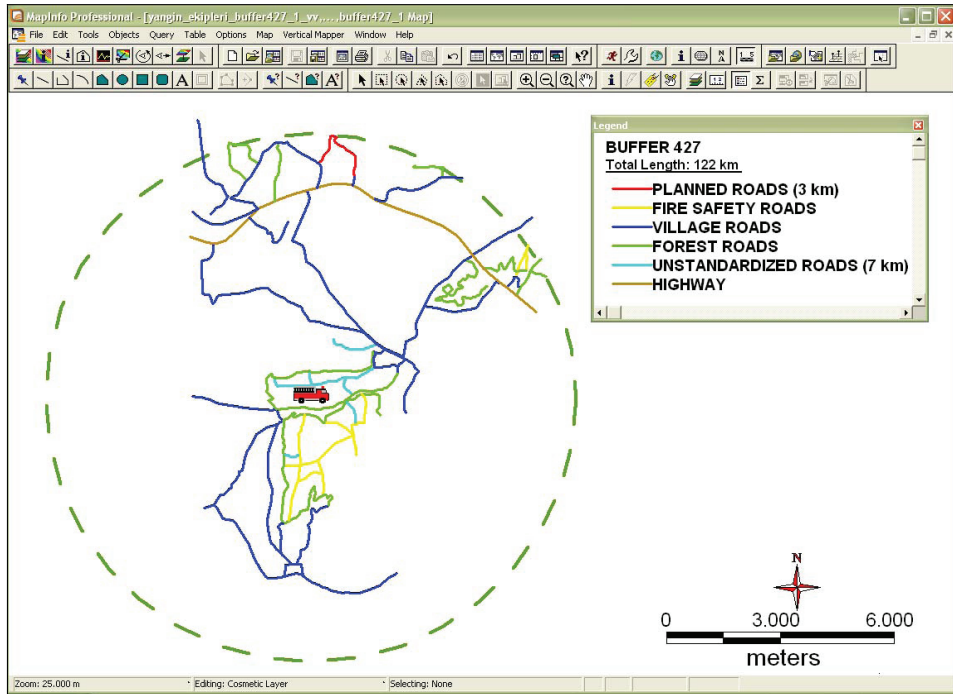


Figure 13. Road Types and Their Total Length for Buffering of Fire Crew 427

4. DISCUSSIONS AND CONCLUSIONS

In this study only small part of a very extensive application was presented. In order to optimize numbers and locations of fire crews LSCP and GIS integration was performed for the study area, İFACO. Firstly all water resources and fire crews of study area were displayed on a digital map by using coordinate information. Secondly database was designed in MapInfo. Attribute data consisted of water resources capacity, crew number per month, number, code, license plate and brand of sprinkler, water tank, grader, helicopter and airplane number. These attribute data were obtained from İFACO. Then current locations of fire crews were examined and assignment of new fire crews to the south region of the study area was investigated as demanded by directorates of forest protection and fire combating department. Optimum locations and numbers of fire crews were determined by LSCP and the results were visualized by GIS. Then because of the budget constraint of the proposed number of fire crew found by LSCP was minimized further by using GIS analytical function, buffering. In this study assignments were proposed in terms of total length of roads that was usable by fire crews. The assignment that gave the maximum road length was thought the best one because of the alternative roads it offered.

It was proposed that new fire crews must be assigned to the compartment 368, 379 and 427 as shown in figure 10. Because this assignment gave the highest result in terms of total length of usable road (589 km). The second alternative was proposed as the assignment of fire crews to the compartment 324, 412 and 427, as shown in figure 9. In this case total length of usable road was found as 531 km.

By using findings of this study, questions like, “what is the optimum number of fire crew?”, “where must fire crew be assigned?”, “which areas can be covered with this assignment?” can be answered easily.

Contributions of this study can be summarized as development of database related to digital map, that is establishing GIS, representation of current water resources and fire crews locations on a digital map by using coordinate information, optimizing numbers and locations of fire crews for İFACO.

5. REFERENCES

- Aronoff, S., 1995. Geographic information systems: A management perspective. WDL Publications, Ottawa.
- Birkin, M., Clarke, G., Clarke, M., Wilson A., 1996. Intelligent GIS. John Wiley and Sons, Newyork.
- Church, R. L., 2002. Geographical information systems and location science. Computers and Operations Research, 29, 541–562.
- Church, R. L., Gerrard R. A., 2003. The Multi-level location set covering model. Geographical Analysis, 35, 278-289.

- DeMers, M., 1997. Fundamentals of geographic information systems. John Wiley and Sons, New York.
- Dimopoulou, M., Giannikos, I., 2004. Towards an integrated framework for forest fire control. *European Journal of Operational Research*, 152, 476-486.
- Estochen, B. M., Strauss, T. R., Souleyrette, R. R., 1988. An assessment of emergency vehicle response predeployment using GIS identification of high-accident density locations. *Proceedings of the Crossroads—2000*, Ames, La., 221–226.
- Franklin, S. E., 2001. Remote sensing for sustainable forest management. CRC Press LLC., USA.
- Gilfoyle, I., Thorpe, P., 2004. Geographic information management in local government. CRC Press LLC., Boca Raton.
- Heywood, I., Cornelius, S., Carver, S., 2002. An introduction to geographical information systems (2nd Edition). Prentice Hall, Inc., United Kingdom.
- Hogg, J., 1968. The siting of fire stations. *Operations Research Quarterly*, 19, 275–287.
- Kazana, V., Fawcett, R. H., Mutch, W. E. S., 2003. A decision support modeling framework for multiple use forest management: The Queen Elizabeth forest case study in Scotland. *European Journal of Operational Research*, 148 (1), 102-115.
- Laurini, R., Thompson, D., 1992. Fundamentals of spatial information systems. Academic Pres, San Diego.
- Lo, C. P., Yeung, A. K. W., 2002. Concepts and techniques of geographic information systems. Prentice Hall, Inc., New Jersey.
- Martell, D. L., Gunn, E. A., Weintraub, A., 1998. Forest management challenges for operational researchers. *European Journal of Operational Research*, 104, 1-17.
- Miller, H. J., 1996. GIS and geometric representation in facility location problems. *International Journal of Geographical Information Systems*, 10, 791–816.
- Mohren, G. M .J., 2003. Large-scale scenario analysis in forest ecology and forest management. *Forest Policy and Economics*, 5 (2), 101-206.
- O’Sullivan, D., Unwin, D. J., 2003. Geographic information analysis. Wiley and Sons, New York.
- Plane, D. R., Hendrick, T. E., 1977. Mathematical programming and the location of fire companies for the Denver fire department. *Operations Research*, 25, 563–578.
- Potter, W. D., Liu, S., Deng, X., Rauscher, H. M., 2000. Using DCOM to support interoperability in forest ecosystem management decision support systems. *Computers and Electronics in Agriculture*, 27, 335-354.

ReVelle, C., 1989. Review, extension and prediction in emergency service siting models. *European Journal of Operational Research*, 40, 58-65.

ReVelle, C., Schweitzer, J., Snyder, S., 1996. The maximal conditional covering problem. *INFOR*, 34, 77-91.

Shamsi, U. M., 2005. GIS applications for water, wastewater, and stormwater systems. CRC Press, Boca Raton.

Toregas, C., Swain, R., ReVelle, C., Bergman, L., 1971. The location of emergency service facilities. *Operations Research*, 19, 1363-1373.

Toregas, C., ReVelle, C., 1973. Binary logic solutions to a class of location problems. *Geographical Analysis*, 5, 145-155.

YANGIN EKİPLERİNİN KONUMLARININ YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI VE COĞRAFI BİLGİ SİSTEMLERİ KULLANILARAK BELİRLENMESİ: İZMİR ÖRNEĞİ

ÖZET

Coğrafi Bilgi Sistemleri (CBS), Küresel Konumlandırma Sistemleri (KKS) ve Uzaktan Algılama (UA) gibi konumsal bilgi sistemleri ve teknolojileri, kaynak yöneticilerine ormanı anlamaları ve analiz etmeleri için araçlar sağlamaktadır. Orman planlama süreci giderek karmaşık bir hal aldığından, orman planlamacılarına yardımcı olacak operasyonel araçlara ihtiyaç vardır. CBS ve Yöneylem Araştırmasının (YA) bir arada kullanılması, orman yöneticilerine YA tarafından önerilen çözümleri görselleştirme şansı tanımaktadır. Yangınla mücadelenin planlanması orman yönetiminin önemli bir bileşenidir ve yangın ekiplerinin sayılarının optimize edilmesi de yangınla mücadelenin planlanmasında çok önemlidir. Bu çalışmada İzmir Orman İşletme Şefliği için yangın ekiplerinin mevcut konumları incelenmekte ve yangın ekipleri sayısal harita üzerinde gösterilmektedir. Daha sonra Konumsal Küme Kapsama Problemi (KKKP) ve CBS kullanılarak yangın ekipleri için yeni konumlar önerilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Orman yönetimi, Coğrafi bilgi sistemleri, Konumsal küme kapsama problemi, Konumsal bilgi sistemleri.

TÜRKİYE’DE ENFLASYON KATILIĞININ ARAŞTIRILMASI: PARAMETRİK OLMAYAN BİR YAKLAŞIM

Saygın ŞAHİNÖZ*

Bedriye SARAÇOĞLU**

ÖZET

Bu çalışmada 1995-2007 tarihleri arasındaki üretici fiyatları endeksi kullanılarak Türkiye’de enflasyon katılığının derecesi Marques’in (2004) önerdiği parametrik olmayan yaklaşım ile analiz edilmiştir. Sonuçlar zamana göre değişen ortalamalar ile tahmin edilen enflasyon katılığı tahminlerinin sabit ortalama ile bulunan enflasyon katılığı tahminlerine göre oldukça küçük olduğunu göstermektedir. Ayrıca, sonuçlar enerji sektörü dışında, alt kalemlerdeki seriler için hesaplanan enflasyon katılığı tahminlerinin, toplam serilerle hesaplanan enflasyon katılığı tahminlerinden düşük olduğunu, bir başka ifade ile Türkiye’de fiyat endekslerinde toplulaştırmanın daha yüksek derecede fiyat katılığı ölçülmesine neden olduğunu göstermektedir.

Anahtar Kelimeler: Enflasyon katılığı, Parametrik olmayan yöntemler.

1. GİRİŞ

Uzun dönemde enflasyonun parasal bir olgu olduğu ve para politikası tarafından belirlendiği genel kabul gören bir görüştür. Ancak, kısa dönemde ekonomik faaliyetteki veya üretim maliyetlerindeki değişimleri de içeren çeşitli makroekonomik şoklar enflasyonu geçici olarak Merkez Bankası’nın enflasyon hedefinden uzaklaştırmaktadır. Bu yüzden, enflasyon yaratan süreçlerin tamamen anlaşılması ve özellikle şoklar karşısında enflasyonun ayarlanma hızının bilinmesi, temel politikası fiyat istikrarı olan merkez bankaları için oldukça önemlidir.

Enflasyonun şoklar karşısında uzun dönem değerine yavaş yakınsama eğilimi enflasyon katılığı olarak tanımlanabilir. Enflasyonun yüksek katılık gösterdiği durumlarda, Merkez Bankası’nın enflasyonu hedefe yaklaştırmak için, katılıkların az olduğu duruma göre daha etkin tepki göstermesi gerekmektedir. Enflasyondaki katılığın derecesinin ve kaynağının bilinmesi, enflasyonu tahmin etme yeteneğinin geliştirilmesi ve çeşitli yapısal modeller arasında ayırım yapılabilmesi açısından oldukça önemlidir.

* Ekonomist, Türkiye Cumhuriyet Merkez Bankası, Araştırma ve Para Politikası Genel Müdürlüğü, e-posta: saygin.sahinoz@tcmb.gov.tr

** Prof. Dr., Gazi Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, Ekonometri Bölümü, e-posta: bedriye@gazi.edu.tr

Enflasyon katılığı hakkındaki literatürün önemli bir bölümünde enflasyon katılığının genellikle iki farklı yaklaşımla ölçüldüğü görülmektedir. İlk yaklaşım tek değişkenli zaman serisi modellerine dayanırken (tek-değişkenli yaklaşım), ikinci yaklaşımda enflasyondaki davranışın açıklanmasına yönelik yapısal ekonometrik modeller kurulmaktadır (çok-değişkenli yaklaşım). Tek-değişkenli yaklaşımda enflasyonun basit bir otoregresif modeli kurulmakta ve şoklar otoregresif sürecin beyazgürültü bileşeninde ölçülmektedir. Otoregresif (AR) katsayıların toplamı, en büyük otoregresif kök ve şokların yarı-yaşam süresi (half life) literatürde kullanılan ölçütlerden bazılarıdır. Bu ölçütler, bir şoku takiben enflasyonun uzun dönem ortalamasına ne hızda döndüğü hakkında fikir vermektedir. Çok-değişkenli yaklaşımda ise enflasyon ve enflasyon belirleyicileri arasında ekonomik nedensellik ilişkisi olduğu varsayılmakta ve enflasyon katılığı enflasyonun belirleyicilerine gelen şokların enflasyon üzerindeki etki süresi ile ölçülmektedir. Tek-değişkenli yaklaşımda şoklar, incelenen dönemde enflasyonu etkileyen tüm şokların özet bir ölçütü olarak görüldüğünden dolayı şoklara ekonomik anlam verilememektedir. Çok değişkenli yaklaşımda ise enflasyonu etkileyen farklı şoklar belirlenebilmekte ve şoklara özel katılık analizi yapılabilmektedir. Bazı çalışmalarda (Batini ve Nelson, 2001 ve Batini, 2002) VAR gibi çok değişkenli yöntemler kullanılarak çeşitli yapısal olmayan şokların enflasyona etki süresi hesaplanmıştır. Bunlara ek olarak, enflasyon katılığını ölçmek için sıfır frekansta spektral dağılım (spectral density at frequency zero) gibi frekans-sahası (frequency-domain) yöntemler de kullanılmıştır (Benati, 2002).

Bu çalışmada Marques'in (2004) önerdiği parametrik olmayan yaklaşım ile Türkiye'de enflasyon katılığı ölçülmeye çalışılmıştır. Ayrıca, toplam enflasyon serileri için bulunan enflasyon katılığı, toplulaştırma hatasından (Granger, 1980 ve Zaffaroni, 2004) veya önemli sayıda enflasyon serisi toplulaştırılırken, duruma özel şokların yok olmasından (Altissimo vd., 2006) kaynaklanabilmektedir. Bu yüzden, çalışmada enflasyon katılığı; hem değişik sektörlerdeki enflasyon katılığını araştırmak, hem de toplam enflasyondaki katılığın belirleyicilerini bulabilmek amacıyla alt endeksler bazında da araştırılmıştır.

Bu çalışmada; Bölüm 2'de kullanılan veri seti ve incelenen dönemdeki Türkiye ekonomisi kısaca özetlenmiştir. Bölüm 3'te çalışmada kullanılan enflasyon katılığı ölçütü anlatılmış ve test sonuçları sunulmuştur. Bölüm 4'te çalışmanın sonuçları tartışılmıştır.

2. YÖNTEM

2.1 Veri Seti

Merkez bankaları tarafından enflasyonun izlenmesi için tüketici fiyatları daha uygun bulunsa da, tüketici fiyatları için bir öncü göstere olarak kabul edilen üretici fiyatlarının davranışı da para politikasının oluşturulmasında oldukça önem taşımaktadır. Bu çalışmada enflasyon katılığının ölçülmesinde, Üretici Fiyatları Endeksi (ÜFE) kullanılmıştır. Türkiye'de 2003 temel yıllık ÜFE, Türkiye İstatistik Kurumu (TÜİK) tarafından Avrupa Topluluğunda Ekonomik Faaliyetlerin İstatistik Sınıflaması (National Classification of Economic Activities, NACE) Revize 1.1'e göre hesaplanmaktadır. 2003 yılından önce TÜİK, Tüm Ekonomik Faaliyetlerin Uluslararası Standart Sanayi Sınıflaması (International Standard Industrial Classification of all Economic Activities, ISIC) Revize 3'e göre 1994 temel yıllık Toptan Eşya Fiyat Endeksi (TEFE)'yi

hesaplamaktaydı. Bu çalışmada ilk olarak, 1994-2003 yılları için, NACE Revize 1.1 ve ISIC Revize 3 sınıflamaları arasındaki geçiş anahtarı kullanılarak TEFE’den NACE sınıflamasına göre fiyat endeksleri hesaplanmıştır. Daha sonra, 2003-2005 yılları için ÜFE’den, Avrupa Birliği Komisyon Uygulaması⁹ takip edilerek, Ana Sanayi Grupları (MIGS) sınıflamasına göre fiyat endeksleri hesaplanmıştır. Daha sonra MIGS sınıflamasına göre hesaplanan bu endeksler birleştirilerek çalışmada kullanılan veri tabanı oluşturulmuştur. NACE Revize 1.1 ve MIGS sınıflamaları arasındaki geçiş anahtarı, Ek’te sunulmuştur.

MIGS sınıflaması sanayileri üretilen malların kullanım amacına göre ayırmaktadır. MIGS sınıflamasında ara malları, sermaye malları, tüketim malları (dayanıklı ve dayanıksız) ve enerji üreten sanayiler olmak üzere beş ana sanayi grubu bulunmaktadır. Enflasyon katılığını farklı toplulaştırma seviyelerinde incelemek için, bu çalışmada enflasyon katılığı hem ana sanayi grupları (5 seri), hem de alt gruplar (54 seri) için araştırılmıştır.

Çalışmada kullanılan veri seti Ocak 1994- Eylül 2007 arasındaki dönemi kapsamaktadır. Ancak 1994 yılı, Türkiye’de gerçekleşen mali kriz sebebiyle analizden çıkarılmıştır. Analizlerde mevsimsellikten arındırılmış üç aylık enflasyon oranları kullanılmıştır. Serilerin mevsimsellikten arındırılmasında TRAMO/SEATS (Gómez ve Maravall, 1998) yöntemi kullanılmıştır. TRAMO/SEATS, ARIMA modeline dayanan yöntemi takip ederek zaman serilerindeki gözlenmeyen bileşenleri ayırtmakta ve her zaman serisine özel bir arındırma sağladığından diğer amaca özel (ad-hoc) filtrelerden daha az risk taşımaktadır. Ayrıca uçdeğerleri, çalışma ve iş günlerini, ulusal bayramları, Ramazan ve Kurban bayramları gibi hareketli tatil etkilerini ayırıştırıp bu etkilerden arındırabildiğinden, TRAMO/SEATS’in diğer mevsimsellikten arındırma programlarından daha avantajlı olduğu düşünülmektedir.

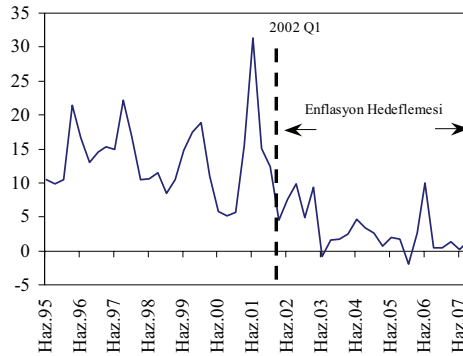
2.2 İncelenen Dönemdeki Türkiye Ekonomisi

90’lı yıllarda, yüksek faiz oranları, sürekli artan iç borçlanmanın mali kesime yaptığı baskı nedeniyle reel faiz oranlarının sürdürülemez seviyelere çıkması, artan risk primi sonucunda borç stoku üzerinde oluşan yüksek reel faiz maliyeti ve bankacılık sisteminin giderek kırılganlaşması ekonomik yapının çerçevesini oluşturmuştur. Bütün bu unsurların oluşturduğu yapı, ekonomiyi oldukça hassaslaştırmış ve 1993 yılı sonunda bütçe açığının planlananın oldukça üzerinde gerçekleşmesini takiben, 1994 yılı başında hükümet büyük oranlı bir devalüasyon yapmış ve nominal faizleri çok yüksek düzeylere çıkartmıştır.

1998 yılı başında, parasal büyüklüklerin nominal çapa olarak kullanıldığı yeni bir ekonomik program uygulamaya konulmuştur. Ancak, program sırasında Rusya krizi nedeniyle büyük oranda sermaye çıkışı yaşanmış, faiz oranları tekrar yükselmiş ve kamu borç stoku büyük oranda artmıştır. Kamu maliyesi giderek kötüleşirken, ekonomi de daralma sürecine girmiştir. 1999 yılında yaşanan deprem felaketi bu süreci daha da

⁹ Ana Sanayi Gruplaması tanımına ilişkin kısa dönemli istatistikler ile ilgili 1165/98 nolu Konsey Uygulamasına ilişkin 26 Mart 2001 tarihli ve 586/2001 nolu Komisyon Uygulaması.

hızlandırmıştır. Bunları takiben, 2000 yılı başında, yeni ve çok kapsamlı bir ekonomik program uygulanmaya konmuştur. Programda, bozulan borç dinamiklerinin enflasyon ve diğer ekonomik büyüklükler üzerindeki etkisini azaltmaya yönelik olarak gelirleri arttırıcı ve harcamaları azaltıcı tedbirlerle kamu maliyesinin düzeltilmesi ve borcun sürdürülebilir bir seviyeye çekilmesi ve çok geniş bir yapısal reform programı hedeflenmiştir. Önceden açıklanan döviz kurlarıyla, döviz kuru-enflasyon ilişkisinin zayıflaması ve buna dayalı olarak enflasyonun düşürülmesi amaçlanmıştır. Programın uygulanmaya başlamasıyla beraber, güven büyük ölçüde artmış, beklentilerin olumluya dönmesi ile birlikte, dış kaynak girişi de hızlanmıştır. Böylece, faiz hadlerinde hızlı ve büyük oranlı düşüşler olmuştur. Faizlerdeki gerileme tüketimi canlandırmış ve kredi hacminde genişleme yaratmıştır. Aynı zamanda, enflasyon oranlarının döviz kuru artışının üzerinde kalması nedeniyle, reel kurlarda hızlı bir değerlenme gözlenmiştir. İç talep artışı, aynı zamanda reel kurlardaki değerlenme ile birlikte, ithalat talebini arttırmış ve sonucunda cari işlemler açığı giderek genişlemiştir. Ancak, 2001 yılında yaşanan finansal krizin arkasından, makroekonomik politikada önemli değişimler yapılmış ve dalgalı döviz kuru rejimi benimsenmiştir. 2002 yılı başında finansal piyasalarda görece durgunluk elde edilmesini takiben, Türkiye Cumhuriyet Merkez Bankası (TCMB) örtük enflasyon hedeflemesi rejimine geçmiştir. Mali disiplin ve ekonomik reformlar birleşince örtük enflasyon hedeflemesi, tüketici fiyatlarından hesaplanan enflasyonun %70 seviyelerinden, 2005 yılı sonunda %8 seviyelerine inmesini sağlamıştır. Mali koşullardaki ve bankacılık sistemindeki iyileşme ve elde edilen ekonomik başarının ardından, 2006 yılı başında TCMB açık enflasyon hedeflemesi rejimini uygulamaya koymuştur.



Şekil 1. Toplam Sanayi için Mevsimsellikten Arındırılmış Üç Aylık Enflasyon Oranı

Şekil 1, 1995-2007 döneminde toplam sanayi için mevsimsellikten arındırılmış üç aylık enflasyon oranını göstermektedir. Şekilden, 2002 yılında enflasyon hedeflemesi rejimine geçilmesinin, enflasyon serilerinde düşüş yarattığı görülmektedir. Bir başka ifade ile grafiklerde sunulan üç aylık enflasyon verileri, sabit ortalama varsayımının gerçekçi olmayacağına, zamana göre değişen ortalama kullanılarak enflasyon katılığının hesaplanmasının daha doğru olacağına işaret etmektedir.

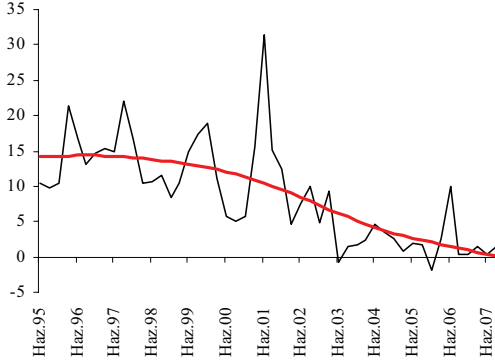
Enflasyon serilerinin zamana göre değişen ortalamalarını hesaplamak için Hodrick-Prescott (HP) filtresi ($\lambda=1600$) kullanılmıştır. Hodrick-Prescott (HP) filtresi serilerdeki uzun dönem trend bileşenini tahmin etmek için ekonomistler tarafından sıklıkla kullanılan bir düzleme (smoothing) yöntemidir. Bu yöntem ilk defa Hodrick ve Prescott (1997) tarafından ABD’deki iş çevrimlerinin analizinde kullanılmıştır. HP filtresinde serideki trend tahmin edilirken, serinin trend etrafındaki varyansı minimize edilmekte ve şokların etkilerini ortadan kaldırmaya yönelik bir parametre (λ) kısıt olarak kullanılmaktadır. HP filtresinde s aşağıdaki gösterilen denklem minimize edilecek şekilde seçilmektedir.

$$\sum_{t=1}^T (y_t - s_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} [(s_{t+1} - s_t) - (s_t - s_{t-1})]^2 \quad (1)$$

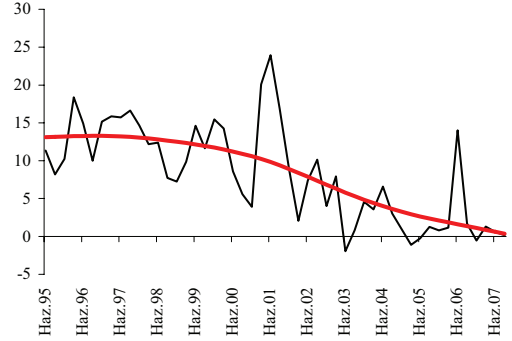
Trendin ne kadar düz olacağı, kullanılan parametrenin (λ) büyüklüğüne bağlıdır. Bu parametrenin değeri büyüdükçe filtre sonrasında elde edilen serinin düzlüğü (smoothness) artmaktadır. Bu yüzden yöntem, düzlük parametresinin değerlerine göre değişebilen sonuçlar vermekte, bu da söz konusu yöntem için bir dezavantaj oluşturmaktadır. HP filtresinde “ λ ” değerinin ne olacağı ile ilgili kesin bir kural bulunmazken, Hodrick ve Prescott (1997) en uygun “ λ ” değerleri olarak yıllık $\lambda = 100$, üç aylık $\lambda = 1600$ ve aylık $\lambda = 14400$ ’ü önermişlerdir. Bu çalışmada üç aylık enflasyon verileri kullanıldığından, HP filtresi ile enflasyonlara ilişkin trendler bulunurken $\lambda = 1600$ değeri seçilmiştir.

Toplam sanayi ve ana sanayi gruplarına göre, Şekil 2’de üç aylık enflasyon serileri ve HP filtresi ile hesaplanan zamana göre değişen ortalamalar, Şekil 3’te ise ortalamalardan sapmalar verilmiştir.

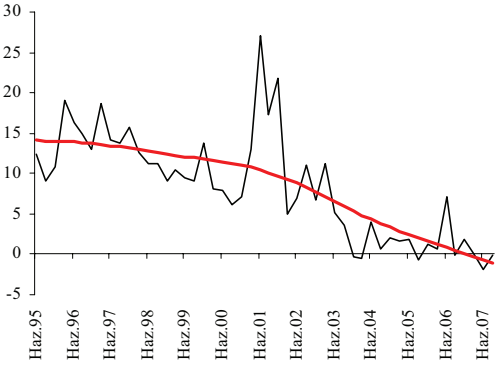
Toplam Sanayi



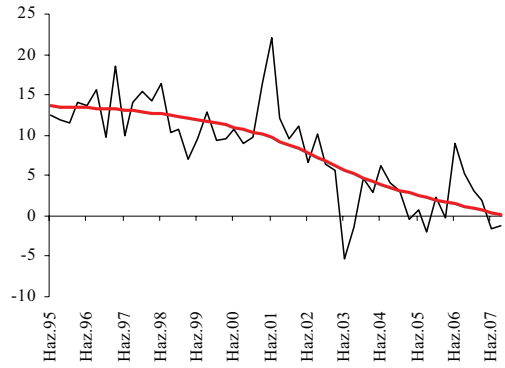
Ara Malları



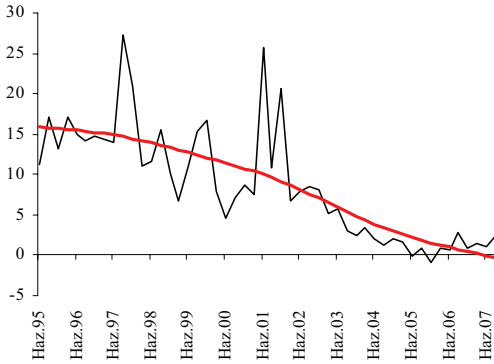
Sermaye Malları



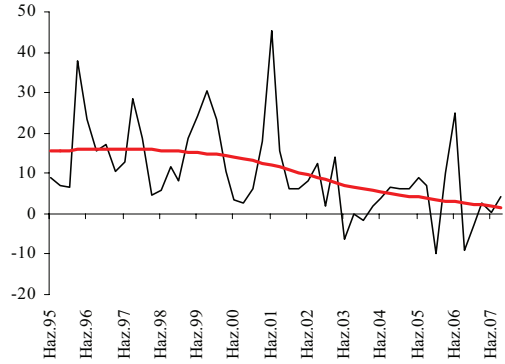
Dayanıklı Tüketim Malları



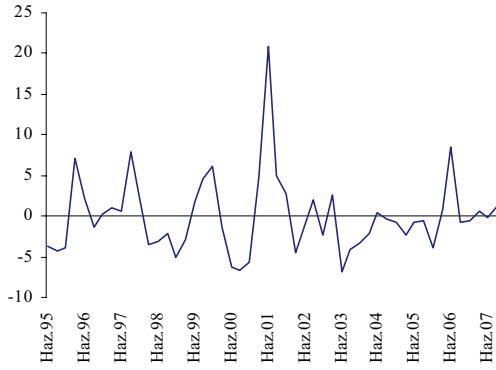
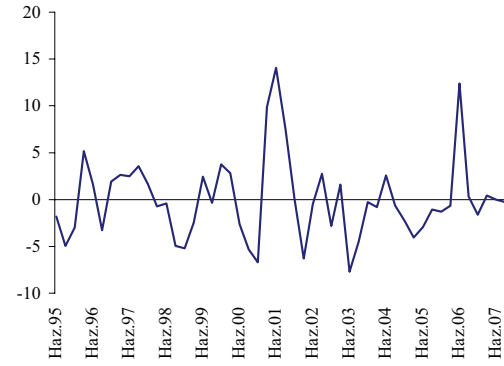
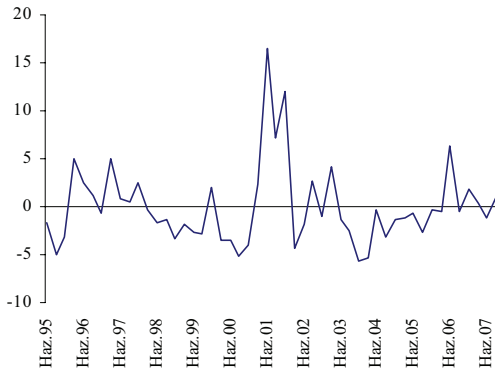
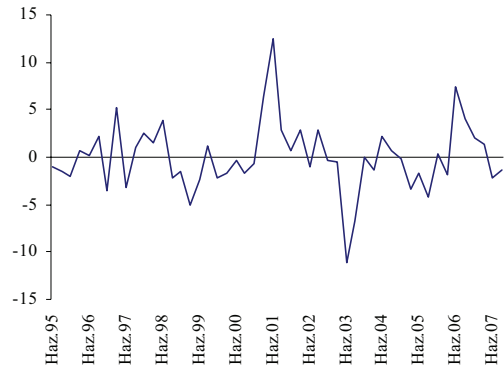
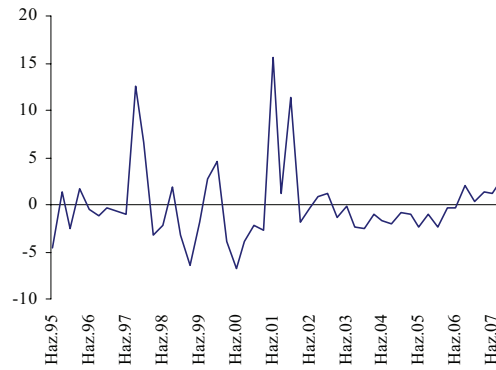
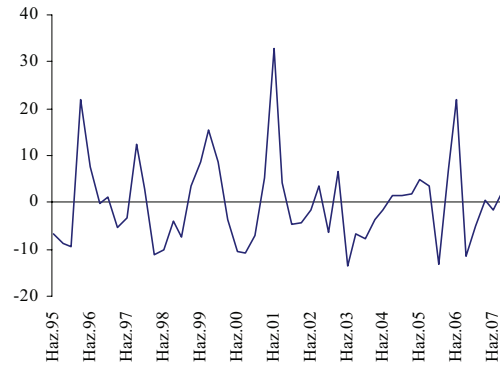
Dayanıksız Tüketim Malları



Enerji



Şekil 2. Üç Aylık Enflasyon Oranları ve HP Filtresi ile Bulunan Ortalamalar

Toplam Sanayi**Ara Malları****Sermaye Malları****Dayanaksız Tüketim Malları****Dayanaksız Tüketim Malları****Enerji****Şekil 3. Ortalamalardan Sapmalar**

3. BULGULAR

Bu çalışmada enflasyon katılığını ölçmek için Marques (2004) tarafından geliştirilmiş parametrik olmayan bir enflasyon katılığı ölçütü kullanılmıştır. Buna göre, enflasyon katılığı ölçütü şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$\gamma = 1 - \frac{n}{T} \quad (2)$$

Burada n , $T+1$ gözlemin olduğu zaman aralığında serinin ortalamasını kaç kere kestiğini göstermektedir. γ , 0 ve 1 arasında değer almaktadır. Ayrıca, simetrik sıfır ortalamalı beyaz gürültü (white noise) sürecinde $E(\gamma)=0$ olmaktadır. Dolayısıyla, γ değerlerinin 0.5'e yakın olması katılığın olmadığına işaret ederken, 0.5'in üzerindeki değerler katılık olduğuna işaret etmektedir. Diğer taraftan, 0.5'in altındaki γ değerleri negatif uzun dönem otokorelasyonu göstermektedir. γ istatistiği enflasyon süreci için model belirlenmesini ve tahmin edilmesini gerektirmediğinden, modellerdeki yanlış belirleme hatalarına karşı sağlam bir istatistik olması beklenmektedir.

ε_t 'nin eşit olasılıkla pozitif ve negatif değerler alabilen sıfır ortalamalı bir beyaz gürültü sürecini ifade ettiği ve x_t 'nin aşağıdaki gibi tanımlanan bir rastgele değişken olduğu varsayalım.

$$\begin{aligned} x_t &= 1 \text{ eğer } \varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1} < 0 \text{ (seri ortalamasını kesiyorsa),} \\ x_t &= 0 \text{ eğer } \varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1} > 0 \end{aligned}$$

Bu durumda katılık ölçütü Eşitlik 3'te verilen biçimde yazılabilir:

$$\gamma = 1 - \sum_{t=1}^T x_t / T \quad (3)$$

Burada x_t başarı ve başarısızlığın eşit olasılığa sahip olduğu ($p=1-p=0.5$) Bernoulli dağılımına sahiptir. Dolayısıyla $E[x_t]=0.5$ ve $\text{Var}[x_t]=p(1-p)=0.25$ olduğundan, $E[\gamma]=0.5$ ve $\text{Var}[\gamma]=p(1-p)/T = 0.25/T$ olmaktadır. Enflasyonun beyaz gürültü süreci varsayımı altında, merkezi limit teoremi γ 'nın normal dağılıma sahip olduğunu göstermektedir.

$$\gamma \approx N(0.5, 0.25/T) \quad (4)$$

$$\frac{\gamma - 0.5}{0.5/\sqrt{T}} \approx N(0, 1) \quad (5)$$

Bu sonuç, tahmin edilen enflasyon parametresinin istatistiksel anlamlılığının ($\gamma = 0.5$) test edilmesine olanak sağlamaktadır. Ancak, bu sonucun sadece beyaz gürültü süreci varsayımı altında geçerli olduğu ve eğer $\gamma=0.5$ 'i test eden yokluk hipotezi reddedilirse, γ 'nın veri yaratma sürecinin özelliklerine bağlı olabilecek çok daha karışık bir dağılıma sahip olacağı belirtilmelidir.

Sabit ortalama ve HP filtresi ile bulunan zamana göre değişen ortalamalar kullanılarak hesaplanan enflasyon katılığı (γ) tahminleri toplam ve sanayi grupları için Tablo 1'de sunulurken, alt endeksler için hesaplanan enflasyon katılığı tahminleri Tablo 2'de özetlenmiştir.

Tablo 1. Toplam ve ana sanayi gruplarındaki enflasyon serileri için katılık tahminleri

	Sabit Ortalama ile		Zamana göre Değişen Ortalama ile	
	γ	p-değeri	γ	p-değeri
Toplam Sanayi	0.78	0.00	0.68	0.01
Ara Malları	0.78	0.00	0.60	0.08
Sermaye Malları	0.81	0.00	0.66	0.01
Dayanıklı Tüketim Malları	0.81	0.00	0.64	0.02
Dayanısız Tüketim Malları	0.82	0.00	0.70	0.00
Enerji	0.76	0.00	0.58	0.13

Tablo 2. Alt kalemlerdeki enflasyon serileri için katılık tahminleri

	Toplam Seri	Sabit Ortalama ile		Zamana göre Değişen Ortalama ile	
		Medyan (γ)	p-değeri	Medyan (γ)	p-değeri
Toplam Sanayi	54	0.76	0.00	0.58	0.13
Ara Malları	20	0.78	0.00	0.58	0.13
Sermaye Malları	10	0.74	0.00	0.59	0.10
Dayanıklı Tüketim Malları	5	0.72	0.00	0.50	0.50
Dayanısız Tüketim Malları	15	0.76	0.00	0.58	0.13
Enerji	4	0.71	0.00	0.63	0.03

Sonuçlar, incelenen tüm serilerde sabit ortalama kullanılarak hesaplanan enflasyon katılığı tahminlerinin 0.5'in üzerinde ve istatistiksel olarak anlamlı olduğunu göstermektedir. Diğer taraftan, zamana göre değişen ortalama kullanılarak hesaplanan toplam seriler için enflasyon katılığı tahminleri, enerji sektörü dışındaki sektörlerin enflasyonunun yüzde 10 anlamlılık düzeyinde katı olduğunu gösterirken; alt kalemlerdeki seriler için hesaplanan enflasyon katılığı tahminleri enerji sektörü dışındaki sektörlerin enflasyonunun yüzde 10 anlamlılık düzeyinde katı olmadığını göstermektedir. Dolayısıyla, sonuçlar enflasyon katılığı tahminlerinin sabit ortalama ve zamana göre değişen ortalama kullanılmasına bağlı olarak oldukça değiştiğine işaret etmektedir.

Toplam ve ana sanayi grupları için hesaplanan enflasyon katılığı tahminleri karşılaştırıldığında, enflasyon katılığının en düşük enerjide, en yüksek ise dayanısız tüketim mallarında olduğu görülmektedir. Enflasyon katılığındaki farklılıklar firmaların işlem yaptığı farklı pazar özelliklerine bağlı farklı fiyatlama davranışlarından

kaynaklanmaktadır. Enerji sektöründe ürün fiyatları temel olarak uluslararası enerji piyasası koşullarına bağlı olduğundan, bu sektörde şoklara hızlı tepki verilmesi mantıklı bir sonuçtur.

Ayrıca, zamana göre değişen ortalama kullanılmasıyla bulunan enflasyon katılığı tahminlerinin sabit ortalama kullanılarak bulunan katılık tahminlerine göre düşük olduğu görülmektedir. Diğer taraftan, Altissimo vd.'de (2006) tartışıldığı gibi, alt endekslerin toplulaştırılması zaman serisi özelliklerini iki şekilde etkilemektedir. İlk olarak alt endekslerdeki duruma özel şoklar çok sayıdaki endeksin toplulaştırılması aşamasında kaybolacak ve toplam endeks için bulunan otoregresif modelde ortak şoklar etkin olacaktır. İkinci olarak, eğer katılığın daha yüksek olduğu alt endeksler görece olarak daha fazla ağırlığa sahipse, toplulaştırma sonrasında daha yüksek katılık parametreleri elde edilecektir. Sonuçlar enerji sektörü dışında, alt kalemlerdeki seriler için hesaplanan enflasyon katılığı tahminlerinin, toplam serilerle hesaplanan enflasyon katılığı tahminlerinden düşük olması toplulaştırmanın daha yüksek derecede fiyat katılığı ölçülmesine neden olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla, Clark (2003) ve Lünemann ve Mathä (2004)'nin bulgularına benzer olarak, Türkiye'de fiyat endekslerinde toplulaştırma daha yüksek derecede fiyat katılığı ölçülmesine neden olmaktadır.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada 1995-2007 tarihleri arasındaki ÜFE kullanılarak Türkiye'de enflasyon katılığının derecesi Marques'in (2004) önerdiği parametrik olmayan yaklaşım ile analiz edilmiştir. Sonuçlar zamana göre değişen ortalamalar ile tahmin edilen enflasyon katılığı tahminlerinin sabit ortalama ile bulunan enflasyon katılığı tahminlerine göre oldukça küçük olduğunu göstermektedir. Enflasyon katılığı tahminlerinin küçük olması, bir şok sonrası enflasyonun uzun dönem değerine çok hızlı geri döndüğünü göstermektedir. Bu sonuç TC Merkez Bankası'nın bakış açısından olumludur çünkü bu durumda enflasyon hedeften saptığında, enflasyonu hedeflenen düzeye geri getirmek kısa zaman alacaktır. Bunun yanı sıra, sonuçlar enerji sektörü dışında, alt kalemlerdeki seriler için hesaplanan enflasyon katılığı tahminlerinin, toplam serilerle hesaplanan enflasyon katılığı tahminlerinden düşük olduğunu, Türkiye'de fiyat endekslerinde toplulaştırmanın daha yüksek derecede fiyat katılığı ölçülmesine neden olduğunu göstermektedir.

5. KAYNAKLAR

Altissimo, F., Mojon, B., Zaffaroni P., 2006. Fast micro and slow macro: Can aggregation explain the persistence of inflation? Macaristan Merkez Bankası tarafından düzenlenen 5. Makro Çalıştayında sunulan bildiri, 27 Ekim 2006.

Batini, N., 2002. Euro-area inflation persistence. European Central Bank Working Paper, sayı 201.

- Batini, N., Nelson, E., 2001. Optimal horizons for inflation targeting. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 25, 891-910.
- Benati, L., 2002. Investigating inflation persistence across monetary regimes. Bank of England, mimograf.
- Clark, T. E., 2003. Disaggregate evidence on the persistence of consumer price inflation. FRB of Kansas City Working Paper, sayı 03-11.
- Granger, C., 1980. Long memory models and aggregation of dynamic models. *Journal of Econometrics*, 14, 227-238.
- Gómez, V. ve Maravall, A., 1998. Seasonal adjustment and signal extraction in economic time series. Bank of Spain Working Paper, No. 9809.
- Hodrick, R.J., Prescott, E.C., 1997. Postwar U.S. business cycles: An empirical investigation. *Journal of Money, Credit and Banking*, 29, 1-16.
- Lünnemann, P. ve Mathä, T. Y., 2004. How persistent is disaggregate inflation? An analysis across EU 15 countries and HICP sub-indices. ECB Working Paper, sayı 415.
- Marques, C., 2004. Inflation persistence: Facts or artefacts? European Central Bank Working Paper, sayı 371.
- Zaffaroni, P., 2004. Contemporaneous aggregation of linear dynamic models in large economies. *Journal of Econometrics*, 120, 75-102.

INVESTIGATING INFLATION PERSISTENCE IN TURKEY: A NON-PARAMETRIC APPROACH

ABSTRACT

In this study, we investigate inflation persistence in Turkey using producer price indices at the disaggregate level. We employ a non-parametric measure of inflation persistence based on mean reversion proposed by Marques (2004). Empirical results suggest that, estimates of inflation persistence calculated using time-varying means are significantly lower than the estimates calculated by constant-means. Empirical evidence also suggests that the persistence estimates found by using aggregate inflation series are larger than the average persistence of disaggregate inflation series except energy goods. Thus, aggregation leads to a higher degree of measured persistence in Turkey.

Keywords: Inflation persistence, Non-parametric approaches.

Ek. NACE ve MIGS Sınıflamaları Arasındaki Geçiş Anahtarı

Ara Malları	
NACE	NACE adı
13	Metal cevherler madenciliği
14	Diğer madencilik ve taşocakçılığı
156	Öğütülmüş tahıl ürünleri, nişasta ve nişastalı ürünlerin imalatı
157	Hazır hayvan yemleri imalatı
171	Tekstil elyafının hazırlanması ve eğrilmesi
172	Dokuma
173	Dokumanın aprenmesi
176	Trikotaj (örme) ve tığ-ışi kumaş imalatı
20	Ağaç ve ağaç mantarı ürünleri imalatı (mobilya hariç)
21	Kağıt hamuru, kağıt ve kağıt ürünleri imalatı
241	Ana kimyasal maddelerin imalatı
242	Pestisid (hasarat ilacı) ve diğer zirai-kimyasal ürünlerin imalatı
243	Boya, vernik benzeri kaplayıcı maddeler ile matbaa mürekkebi ve macun
246	Diğer kimyasal ürünlerin imalatı
247	Suni elyaf imalatı
25	Plastik ve kauçuk ürünleri imalatı
26	Metalik olmayan diğer mineral ürünlerin imalatı
27	Ana metal sanayii
284	Metallerin dövülmesi, preslenmesi, baskılanması ve yuvarlanması; toz
285	Metallerin kaplanması ve işlenmesi; genel makine mühendisliği
286	Çatal-bıçak takımı, el aletleri ve genel hırdavat malzemeleri imalatı
287	Diğer fabrikasyon metal eşyaların imalatı
312	Elektrik dağıtım ve kontrol cihazları imalatı
313	İzole edilmiş tel ve kablo imalatı
314	Akümülatör, primer pil ve batarya imalatı
315	Elektrik ampülü ve lambaları ile aydınlatma teçhizatı imalatı
316	Başka yerde sınıflandırılmamış elektrikli teçhizat imalatı
321	Elektronik valf ve tüpler ile diğer elektronik parçaların imalatı
Sermave Malları	
281	Metal yapı malzemeleri imalatı
282	Tank, sarnıç, metal muhafaza ile kalorifer kazanı ve radyatör imalatı
283	Buhar kazanı imalatı, merkezi kalorifer kazanları hariç
291	Uçak, motorlu taşıt ve motosiklet motorları hariç, mekanik güç üretimi ve
292	Genel amaçlı diğer makinelerin imalatı
293	Tarım ve ormancılık makineleri imalatı
294	Takım tezgahları imalatı
295	Diğer özel amaçlı makinelerin imalatı
296	Silah ve mühimmat imalatı
30	Büro makineleri ve bilgisayar imalatı
311	Elektrik motoru, jenaröter ve transformatörlerin imalatı
322	Radyo ve televizyon vericileri ile telefon ve telgraf hattı teçhizatı imalatı
331	Tıbbi ve cerrahi teçhizat ile ortopedik araçların imalatı
332	Ölçme, kontrol, test, seyrüsefer ve benzer amaçlı alet ve cihazların imalatı
333	Sanayide kullanılan işlem kontrol teçhizatı imalatı
34	Motorlu kara taşıtı, römork ve yarı römork imalatı
351	Deniz taşıtlarının yapımı ve onarımı
352	Demiryolu ve tramvay lokomotifleri ile vagonlarının imalatı
353	Hava ve uzay taşıtları imalatı

Ek. NACE ve MIGS Sınıflamaları Arasındaki Geçiş Anahtarı (Devamı)

NACE	NACE Adı
297	Başka yerde sınıflandırılmamış ev aletleri imalatı
323	Televizyon ve radyo imalatı; ses ve görüntü kaydeden veya çoğaltan teçhizat
334	Optik aletler ve fotoğrafçılık teçhizatı imalatı
335	Saat imalatı
354	Motosiklet ve bisiklet imalatı
355	Başka yerde sınıflandırılmamış, diğer ulaşım araçlarının imalatı
361	Mobilya imalatı
362	Mücevherat ve ilgili eşyaların imalatı
363	Müzik aletleri imalatı
Davanıksız Tüketim Malları	
151	Et ve et ürünleri imalatı, işlenmesi ve saklanması
152	Balık ve balık ürünlerinin işlenmesi ve saklanması
153	Sebze ve meyvelerin işlenmesi ve saklanması
154	Bitkisel ve hayvansal sıvı ve katı yağların imalatı
155	Süt ürünleri imalatı
158	Diğer gıda maddeleri imalatı
159	İçecek imalatı
16	Tütün ürünleri imalatı
174	Giyim eşyası dışındaki hazır tekstil ürünleri imalatı
175	Diğer tekstil ürünleri imalatı
177	Trikotaj (örme) ve tığ-ışi ürünlerin imalatı
18	Giyim eşyası imalatı; kürkün işlenmesi ve boyanması
19	Derinin tabaklanması ve işlenmesi; bavul, el çantası, saraçlık, koşum takımı
22	Basım ve yayım; plak, kaset ve benzeri kayıtlı medyanın çoğaltılması
244	Eczacılık ürünlerinin, tıbbi kimyasalların ve botanik ürünlerinin imalatı
245	Sabun ve deterjan, temizlik ve cilalama maddeleri; parfüm; kozmetik ve
364	Spor malzemeleri imalatı
365	Oyun ve oyuncak imalatı
366	Başka yerde sınıflandırılmamış çeşitli imalatlar
Enerji	
10	Kömür madenciliği
11	Bitkisel ürün yetiştiriciliği; bostan, meyve ve sebze yetiştiriciliği
12	Hayvancılık
23	Kok kömürü, rafine edilmiş petrol ürünleri ve nükleer yakıt imalatı
40	Elektrik, gaz, buhar ve sıcak su üretimi ve dağıtımı
41	Suyun toplanması, arıtılması ve dağıtımı

TEKRAR SATILABİLİR ÜRÜNLER İÇİN GAZETECİ ÇOCUK PROBLEMİNİN ÇELİŞEN AMAÇLAR ALTINDA İNCELENMESİ

Umay UZUNOĞLU KOÇER * Mutlu KARA **

ÖZET

Gelişen pazarlama stratejileri doğrultusunda firmaların rekabet politikaları, müşteri beklentilerini en yüksek düzeyde karşılamak üzerine odaklanmıştır. Müşterilerin satın aldıkları ürünü herhangi bir sebeple belli bir süre içinde iade etmeleri durumu, firmaların pazarlama stratejileri içinde günümüzde giderek yaygınlaşmaktadır. Bu gereksinim doğrultusunda iade edilen ürünler için gazeteci çocuk problemi ile envanter politikası belirlenmesine ilişkin çalışmalara literatürde sıkça rastlanmaktadır. Gazeteci çocuk problemi, tek periyot için beklenen kar ya da maliyet fonksiyonunu en iyileyen sipariş miktarının bulunduğu envanter modeli olarak bilinmekle birlikte, bu problemin farklı amaçlar altında incelendiği çalışmalarla literatürde sıkça karşılaşılmaktadır. En sık rastlanan alternatif amaçlar, hedef karı aşma olasılığını ve beklenen karı aşma olasılığını maksimize eden sipariş miktarının araştırıldığı modellerdir. Bu çalışmada, tekrar satılabilir iade ürünler için gazeteci çocuk problemi, beklenen karı en büyükmek ve beklenen karı aşma olasılığını en büyükmek amaçları doğrultusunda ayrı ayrı incelenmiş, iki ayrı amaç için sipariş politikaları belirlenmiştir. Yanı sıra, çelişen bu iki amaç fonksiyonunu birlikte optimize eden dengeleyici bir sipariş miktarı araştırılmıştır. Türetilmiş talep verilerinden hareketle, bir senaryo üzerinde sözü edilen üç amaç fonksiyonu ile sipariş politikaları belirlenmiş, son olarak da modelin parametrelerine ilişkin duyarlılık analizleri ve ekonomik yorumlara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Alternatif amaç fonksiyonları, Beklenen karı aşma olasılığı, Envanter, Gazeteci çocuk problemi, İade ürünler.

1. GİRİŞ

Bazı ürünlere olan talep sezonluk olduğundan, bu tip ürünlerin envanter planlaması tek periyot için yapılır. Stokastik envanter teorisinde temel modellerden biri olan gazeteci çocuk probleminde sezon başında bir kez sipariş verilir. Sezon boyunca oluşan talebe bağlı olarak sezon sonunda elde kalan ürünler için maliyeti, karşılanamayan talepler için ise stoksuzluk maliyeti oluşacaktır. Klasik yaklaşım olarak gazeteci çocuk probleminde karar değişkeni sipariş miktarıdır ve tek periyot için beklenen kar ya da beklenen maliyet fonksiyonunu en iyileyen sipariş miktarı araştırılır (Winston, 2004; Lieberman, 1995).

Son yıllarda gazeteci çocuk problemi, uygulamada karşılaşılan problemlerin çözümlerine yönelik olarak, yeni yaklaşımlar altında yeniden incelenmektedir. Tek

* Yrd. Doç. Dr., Dokuz Eylül Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, İzmir, e-posta: umay.uzunoglu@deu.edu.tr

** Dokuz Eylül Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, İzmir, e-posta: kara.mutlu@gmail.com

periyot probleminin birden fazla periyotta ve birden fazla ürün için incelenmesi, farklı fiyatlandırma politikaları, talep bilgisi ile ilgili açılımlar, farklı amaç fonksiyonları altında problemin incelenmesi ve iade edilen ürünler için gazeteci çocuk problemi, bu yaklaşımlar arasında yer almaktadır. Gazeteci çocuk problemine yeni yaklaşımlarla ilgili olarak Khouja (1999) incelenebilir.

Yeni yaklaşımlar arasında, farklı amaç fonksiyonları altında problemin incelenmesi üzerine literatürde çok sayıda çalışma bulunmaktadır. Bilindiği gibi klasik gazeteci çocuk probleminde amaç, beklenen karı maksimize ederek optimal sipariş miktarını belirlemektir. Ancak araştırmacılar beklenen kar fonksiyonunu maksimize etmenin gerçek yaşam koşullarında yetersiz kaldığını gözlemlemişlerdir. Lanzillotti (1958) yaptığı araştırmada, dönemin önde gelen yirmi şirketi ile gerçekleştirdiği görüşmeler ve aldığı yanıtlar sonucunda “beklenen kar”dan çok, “hedeflenen kar”ın işletmeler için önemli olduğu sonucuna varmıştır. Beklenen karı en büyükmektense, belli bir kar düzeyine ulaşmayı hedeflemek, işletmeler için daha gerçekçi bir amaç olarak ortaya çıkmıştır. Böylece, hedeflenen kara ulaşma olasılığını en büyükmek yeni bir amaç olarak ortaya çıkmıştır. Wells (1968), Schiff ve Lewin (1970), Coplan (1968), Williamson (1970)’ın yapmış olduğu çalışmalar, bu konuda yapılmış çalışmalara örnektir. Kabak ve Schiff (1978)’in çalışması da hedeflenen kara ulaşma olasılığını en büyükleme sipariş miktarını hesaplayan ilk çalışmadır. Lau (1980), farklı dağılımlar altında hedeflenen kara ulaşma olasılığını en büyükmek amacını incelemiş, yanı sıra problemi beklenen faydayı en büyükmek amacı altında düşünmüştür. Lau ve Lau (1988) ve Li vd. (1991), hedeflenen kara ulaşma olasılığını en büyükleme amaç fonksiyonunu, ürün sayısı birden fazla olduğu durum için incelemiştir. Parlar ve Weng (2003) yaptıkları çalışmada, bir işletme için hedef karı spesifik olarak belirlemenin her zaman mümkün olamayabileceği ifade edilmiş ve hedef kar belirlemek yerine “beklenen” karı aşma olasılığının en büyükleme amacının daha gerçekçi bir amaç olacağı belirtilmiştir. Beklenen karı en büyükleme amaç ile beklenen karı aşma olasılığını en büyükleme amacının çelişen iki amaç olduğunu vurgulayan Parlar ve Weng (2003), geliştirdikleri yöntem ile bu iki amacı dengeleyen ve iki amacı da en iyileyen yeni bir optimal çözüm elde etmişlerdir.

İşletmelerin temel odak noktası karını veya beklenen kara ulaşma olasılığını en büyükmek olmakla birlikte, satış politikaları ile ilgili olarak pratikte karşılaştıkları bazı özel durumlar da söz konusudur. İşletmelerin satış şekilleri incelendiğinde farklı durumlarla karşılaşılabilir. Bazı işletmelerin sattıkları ürünleri belirli koşullarda geri aldıkları durumlar da vardır. Yasal olarak da müşterilerin belirli bir süre içerisinde satın aldıkları ürünleri iade etme hakları vardır. Bu gibi durumlarda işletmeler iade edilen ürünün durumuna bağlı olarak satış fiyatının bir kısmını ya da tamamını müşteriye geri öderler. İşletmelerin bu yöndeki satış politikaları göz önüne alındığında, iade edilebilir ürünler için gazeteci çocuk problemi ortaya çıkmaktadır. Problem, iade edilebilir ürünler için uyarlandığında talep tahmininde ve maliyet hesaplamalarında klasik probleme göre farklılıklar doğar.

Literatürde, gazeteci çocuk modelinin iade edilebilir ürünler için uygulandığı çalışmalar incelendiğinde çok sayıda örnekle karşılaşıldığı söylenemez. Kodama (1995), iade durumunun kısmen ele alındığı tek periyot için envanter problemini ele almıştır. Lee (2001), tedarik zinciri bağlamında perakendecinin satılmayan ürünleri sezon sonunda tedarikçiye ya da üreticiye iade ettiği durumu incelemiştir. Gazeteci çocuk modelinin iade edilebilir ürünler için uygulandığı ilk çalışma Vlachos ve Dekker (2002) tarafından

yapılmıştır. Vlachos ve Dekker (2002) çalışmalarında iki kısıtlayıcı varsayım kullanmıştır. Bu varsayımların ilki satılan ürünlerin sabit bir yüzdesinin iade edilebileceği üzerinedir. Varsayımların ikincisi ise, ürünlerin yalnızca bir kez tekrar satılabileceğidir. Benzer şekilde iade edilebilir ürünler için gazeteci çocuk modelini uygulayan Mostard ve Teunter (2006), her satılan ürünün belli bir iade edilme olasılığı olduğunu ve iade edilen ürünlerin sınırsız olarak yeniden satılabilir olduğunu düşünmüşler ve bu varsayımlar altında envanter politikası geliştirmişlerdir. İade ürünlerle ilgili olarak gazeteci çocuk probleminin uygulandığı çalışmaların tamamında, beklenen karı en büyükmek üzere envanter politikası belirlenmiştir.

Bu çalışmada, günümüzde giderek yaygın olması beklenen ürünlerin iade edilen ürünlerin yeniden satılması durumu için gazeteci çocuk problemi, beklenen karı aşma olasılığını en büyükmek amacı altında ele alınmıştır. Ayrıca, beklenen karı en büyükleme amacı altında da problem iade ürünler için incelenmiş ve sözü edilen çelişen iki amaçtan ne birini, ne diğerini en büyükleme; her ikisini de en iyileyen bir optimal envanter politikası belirlenmiştir. Çalışmada talep verileri için normal dağılımdan türetilen veriler kullanılmış, beklenen karı ve beklenen kara ulaşma olasılığını en büyükleme amaçları altında ayrı ayrı envanter politikaları belirlenmiştir. Ayrıca çelişen bu iki amacı en iyileyen envanter politikası belirlenerek diğerleriyle karşılaştırma yapılmıştır. Son olarak model parametrelerinin çözüme olan duyarlılık analizine ve ekonomik yorumlara yer verilmiştir.

İzleyen bölümde problemin tanımı ve farklı amaç fonksiyonları altında iade ürünler durumunda optimum çözümün nasıl elde edileceği konusunda bilgi verilecek, üçüncü bölümde türetilmiş veriler için yapılan uygulamada elde edilen envanter politikaları ve optimum değerler sunulacaktır. Son bölümde, elde edilen sonuçların karşılaştırmalı olarak yorumlanması, model parametrelerine ilişkin duyarlılık analizleri ve ekonomik yorumlar yer almaktadır.

2. YÖNTEM

Çalışma kapsamında gerçek veri yerine türetilmiş veri kullanılmasının en önemli nedeni; ülkemiz koşullarında tekrar satılabilir iade edilmiş ürün sisteminin yeterince yaygın olmaması ve bu sisteme sahip firmaların veritabanı sistemlerinin uygun olmamasıdır.

Çalışmada, iade edilebilir tek bir ürünün tek periyot için envanter politikası belirlenmiştir. Problemin doğası gereği sipariş sezon başında bir kez verilir ve siparişler sezon başında perakendeciye ulaşır. Sezon başladıktan sonra gerçekleşen müşteri talebi, toplam talep olarak adlandırılır. Müşteriler satın aldıkları ürünü belli bir süre içinde iade edebilirler. Satılan bir ürünün iade edilme olasılığı r ile gösterilmektedir. İade edilen ürünün tekrar satılabilir olup olmadığına bakıldıktan sonra eğer ürün zarar görmemişse, yeniden satılmak üzere raflarda yerini almaktadır. Ürünün yeniden satılabilir olması olasılığı k ile gösterilmektedir. Burada toplam müşteri talebi, iade edilmesi olası ürün miktarını da içermektedir. İade edilmemiş ya da iade edilse de yeniden satılabilir olmayan talep miktarı net talep olarak tanımlanabilir. Net talep dağılımı ile toplam talep dağılımı özdeş dağılımlardır. Toplam talep ve net talep tanımlamaları Mostard ve Teunter (2006)'da verildiği gibi kabul edilmiştir. Amaç, sezon başında verilecek olan

optimal sipariş miktarını belirlemektir. Kullanılan değişkenler ve tanımları aşağıda verilmiştir.

G : toplam talep

f_G : toplam talebin olasılık yoğunluk fonksiyonu

F_G : toplam talebin dağılım fonksiyonu

μ_G : toplam talebe ait ortalama

σ_G : toplam talebe ait standart sapma

K : tekrar satılabilir durumdaki iade edilen ürün sayısı

N : net talep, $N = G - K$

f_N : net talebin olasılık yoğunluk fonksiyonu

F_N : net talebin dağılım fonksiyonu

μ_N : net talebe ait ortalama

σ_N : net toplam talebe ait standart sapma

m : satılan ürünün iade edilme olasılığı

k : iade edilen ürünün yeniden satılma olasılığı

p : birim satış fiyatı

v : hurda değeri

c : satın alma maliyeti

b : toplam stoksuzluk maliyeti

b_N : net stoksuzluk maliyeti

d : iade edilen ürünleri toplama maliyeti

p_G : beklenen toplam gelir

p_N : beklenen net gelir

q : sipariş miktarı

q_p^* : beklenen karı en büyükleyen optimal sipariş miktarı

q_s^* : beklenen karı aşma olasılığını en büyükleyen optimal sipariş miktarı

q^* : çelişen iki amacı en iyileyen optimal sipariş miktarı

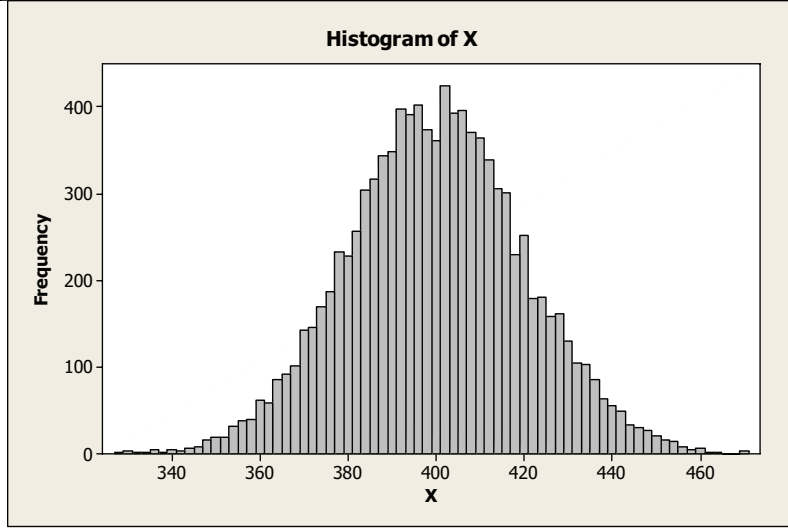
Çalışmada, farklı amaç fonksiyonları altında envanter politikasının nasıl değişeceği sorusu, kurgulanan bir senaryo üzerinde araştırılmıştır. Bu senaryoya göre, müşteri talebinin normal dağılıma uyduğu varsayılmıştır. Talep dağılımının Gamma, logistik ya da başka bir sürekli dağılım olarak varsayılması durumunda, optimum sipariş miktarının ve beklenen karın hesaplanmasında herhangi bir zorluk yaşanmayacağı Parlar ve Weng (2003)'de belirtilmiştir. Ancak, çalışma kapsamında müşteri talebinin envanter kontrol teorisinin literatüründe pek çok kez refere edilmiş olan ve hızlı devreden ürünlerin dağılımı olarak sıkça kullanılan normal dağılıma sahip olduğu varsayılmıştır. Bu amaçla, net talep için ilk olarak 400 ortalama ve 20 standart sapma değerleri ile normal dağılıma uyan 10000 adet veri türetilmiştir. Bu veriler üzerinden k , m , v , c , ve b_N parametreleri için duyarlılık analizleri ve ekonomik yorumlar yapılmıştır. Yanı sıra, dağılım parametreleri değiştirildiğinde, farklı amaçlar altında sipariş miktarlarında nasıl değişim olduğu da incelenmiştir.

Talep verilerine ilişkin tanımlayıcı istatistikler Tablo 1'de verilmiştir. Tablo 1'e göre talep değişkenine ilişkin veriler 399,95 ortalama ve 19,99 standart sapma ile 327,10

minimum ve 470,73 maksimum değerleri arasında değişim göstermektedir. Talep verilerine ait histogram grafiği Şekil 1'de verilmiştir.

Tablo 1. Talep verileri için betimleyici istatistikler

Değişken	N	Mean	SE Mean	StDev	Minimum	Q1	Median	Q3	Maximum
X	10000	399,95	0,200	19,99	327,10	386,49	399,92	413,11	470,73



Şekil 1. Talep Değişkenine İlişkin Histogram Grafiği

Modelin maliyet parametreleri $v < c < r$ varsayımına uygun olarak; $r=30$, $c=25$, $b=60$, $v=19$ ve $d=5$ TL olarak kullanılmıştır. Ayrıca iade edilme olasılığı, $m=0,50$ ve iadelerin tekrar satılabilir olması olasılığı, $k=0,95$ olarak varsayılmıştır.

2.1 Klasik Yaklaşım

Bu bölümde beklenen karı en büyükleyen sipariş miktarının (q) nasıl elde edildiği açıklanmıştır. Klasik gazeteci çocuk probleminde tek dönem kar fonksiyonu, sipariş miktarı q 'nun bir fonksiyonu olacağından, $\Pi(q, x)$ ile gösterilen gerçekleşen kar eşitlik 1'de verildiği gibi ifade edilebilir.

$$\Pi(q, x) = \begin{cases} px + v(q - x) - cq, & \Rightarrow x \leq q \\ pq - b(x - q) - cq, & \Rightarrow x > q \end{cases} \quad (1)$$

Gerçekleşen karın beklenen değeri alındığında ve gerekli sadeleştirmeler yapıldığında, $\mu = E(X)$ sezon boyunca talebin beklenen değeri olmak üzere, yaygın olarak bilinen tek periyot için beklenen kar fonksiyonu $EP(q)$ eşitlik (2)'deki gibi elde edilir.

$$EP(q) \equiv E[\Pi(q)] = (p - v)\mu + (v - c)q - (p + b - v) \int_q^{\infty} (x - q) f(x) dx \quad (2)$$

$EP(q)$ 'nin q 'ya göre birinci türevinin sıfıra eşitlenmesiyle optimal q değeri, talebin dağılım fonksiyonu yardımıyla, aşağıdaki eşitliklerden hareketle bulunabilir.

$$1 - F(q) = \frac{c - v}{p + b - v} \quad (3)$$

$$q_p^* = F^{-1}\left(1 - \frac{c - v}{p + b - v}\right) \quad (4)$$

Ürünlerin iade edilebilir olduğu durumda beklenen kar fonksiyonunun hesaplanmasında kullanılmak üzere, ürünün iade edilmesi olasılığının ve iade edilen ürünün tekrar satılabilir olması olasılığını da göz önünde bulundurarak, beklenen toplam gelir ve beklenen net gelir Mostard ve Teunter (2006)'daki gibi hesaplanarak sırasıyla eşitlik 5 ve 6'da verilmiştir.

$$p_G = (1 - m)p - md + m(1 - k)v \quad (5)$$

$$p_N = (1 + mk + (mk)^2 + \dots)p_G = p_G / (1 - mk) \quad (6)$$

Bu bilgiler ışığında talebin sürekli olduğu varsayımı altında, beklenen kar fonksiyonu

$$EP(q) = p_N [\mu_N - ES_N(q)] - cq - b_N ES_N(q) + v \{q - [\mu_N - ES_N(q)]\}$$

$$EP(q) = (p_N - v)\mu_N - (c - v)q - (p_N - v + b_N)ES_N(q) \quad (7)$$

şeklinde elde edilir. Burada $ES_N(q)$ karşılanmayan net taleplerin beklenen sayısını gösterir. Birim net stoksuzluk maliyeti Mostard ve Teunter (2006)'da tanımlandığı gibi

$$b_N = b / (1 - mk) \quad (8)$$

biçiminde alınarak beklenen stoksuzluk maliyeti eşitlik 9'da verildiği gibi elde edilir.

$$ES_N(q) = E[N - q]^+ = \int_q^{\infty} x f_N(x) dx - q[1 - F_N(q)] \quad (9)$$

Beklenen kar fonksiyonunu en büyükleyen sipariş miktarını elde etmek için fonksiyonun q 'ya göre kısmi türevi alınıp sıfıra eşitlenmelidir. Bundan önce $ES_N(q)$ fonksiyonunun da q 'ya göre kısmi türevi alınarak bu değer beklenen kar fonksiyonunda yerine konulduğunda ve fonksiyon sıfıra eşitlendiğinde eşitlik 11 elde edilir.

$$\frac{dEP(q)}{dq} = -(c - v) - (p_N - v + b_N)[F_N(q) - 1] = 0 \quad (10)$$

$$F_N(q) = 1 - \frac{c - v}{p_N - v + b_N} \quad (11)$$

Buradan optimal sipariş miktarı talebin dağılım fonksiyonundan yararlanarak,

$$q_p^* = F_N^{-1}\left(1 - \frac{c - v}{p_N - v + b_N}\right) \quad (12)$$

biçiminde elde edilir.

2.2 Beklenen Karı Aşma Olasılığını En İyileme Yaklaşımı

Bu bölümde beklenen karı aşma olasılığını en büyükleyen sipariş miktarının nasıl elde edildiği açıklanmıştır. Beklenen karı aşma olasılığı, bir başka deyişle gerçekleşen karın beklenen kardan büyük olması olasılığı $S(q)$, eşitlik 13'teki gibi ifade edilebilir.

$$S(q) = \Pr[\Pi(q) \geq EP(q)] \quad (13)$$

Gerçekleşen karın talep ile olan ilişkisine bakıldığında, eğer sezon başında talep (X) kadar sipariş verildiyse gerçekleşen kar en yüksek düzeyde olacak ve

$$\Pi(q) = (p - c)q \quad (14)$$

ilişkisiyle hesaplanabilecektir.

Talep miktarı (X), verilen sipariş miktarından (q) düşük olduğunda ve talep sipariş miktarının bir fonksiyonu olarak ifade edildiğinde beklenen kar, eşitlik 15'te verildiği gibi olacaktır.

$$EP(q) = px_1(q) + v[q - x_1(q)] - cq \quad (15)$$

Talebin sıfır olması durumunda ise beklenen kar sıfır olacağından, $x_1(q)$ fonksiyonu,

$$x_1(q) = \max\left(0, \frac{EP(q) + (c - v)q}{p - v}\right) \quad (16)$$

biçiminde ifade edilebilir.

Talep miktarı (X), verilen sipariş miktarından (q) fazla olduğunda bu kez karşılanmayan talep için stoksuzluk maliyetine katlanılacak ve beklenen kar ve buradan elde edilecek $x_2(q)$ fonksiyonu, sırasıyla eşitlik 17 ve 18'deki gibi olacaktır. Detaylı açıklamalar ve ispatlarla ilgili olarak Parlar ve Weng (2003) incelenebilir.

$$EP(q) = px_2(q) + b[x_2(q) - q] - cq \quad (17)$$

$$x_2(q) = \frac{(p + b - c)q - EP(q)}{b} \quad (18)$$

Çalışmanın konusu olan, ürünlerin iade edilebilir olduğu durumda ise söz konusu sınırlar iade olasılığını ve ürünlerin tekrar satılma olasılığını göz önünde bulundurarak, ürünün birim satış fiyatı yerine net beklenen getiri alındığında,

$$x_1(q) = \max(0, \frac{EP(q) + (c - v)q}{p_N - v}) \quad (19)$$

$$x_2(q) = \frac{(p_N + b_N - c)q - EP(q)}{b_N} \quad (20)$$

biçiminde hesaplanmaktadır.

Buradan, beklenen karı aşma olasılığı $S(q)$, $x_1(q)$ ve $x_2(q)$ fonksiyonları kullanılarak eşitlik 21'deki gibi ifade edilir ve talebin olasılık yoğunluk fonksiyonu bilindiğinde eşitlik 22'de verildiği gibi hesaplanabilir. Buradan $S(q)$ 'yu en büyükleyen sipariş miktarı elde edilebilir.

$$S(q) = \Pr[\Pi(q) \geq EP(q)] = \Pr[x_1(q) \leq X \leq x_2(q)] \quad (21)$$

$$S(q) = \int_{x_1(q)}^{x_2(q)} f(x) dx \quad (22)$$

2.3 İki Yaklaşımı Dengeleyen Çözüm

Bu bölümde, önceki bölümlerde anlatılan iki amacın birlikte en iyilenmesi durumu açıklanmıştır. Beklenen karı en büyüklerken, beklenen karın artan değerleri için, bu değeri aşma olasılığı giderek azalır. Diğer bir deyişle, bu iki amaç birbiriyle çelişen amaçlardır. Her iki amacın ayrı ayrı en iyilenmesi durumunda birbirinden çok farklı q değerleri elde edilir. İki amacı birlikte en iyilemek için, $S(q)$ ve $EP(q)$ fonksiyonlarının birlikte ifade edildiği iki boyutlu uzayda, optimum q değerleri kullanılarak elde edilen en büyük $S(q)$ ve en büyük $EP(q)$ değerleri ikilisi $(EP^*(q); S^*(q))$ 'nin, S-EP uzayındaki eğriye olan uzaklığına bakılır. Eğri üzerindeki noktalardan, her iki fonksiyonun optimum değerlerini ifade eden noktaya olan uzaklığın en küçük olduğu durum aranır. Bu amaçla eşitlik 23'te verilen uzaklık fonksiyonu kullanılır.

$$\min_{q \geq 0} L_p(EP(q), S(q)) = \{w[\frac{EP^* - EP(q)}{EP^*}]^p + (1 - w)[\frac{S^* - S(q)}{S^*}]^p\}^{1/p} \quad (23)$$

Burada $0 \leq w \leq 1$ olmak üzere w , görel olarak belirlenen ağırlık parametresidir. Ağırlık parametresi w , 0,5 alındığında her iki amaç fonksiyonuna eşit ağırlık verilmiş olacaktır.

Bu parametre sıfıra doğru yaklaştıkça beklenen karı aşma olasılığını en büyükleme amacına daha fazla ağırlık verilirken, parametre 1'e yaklaştıkça beklenen karın en büyüklenmesi amacına daha yakın bir sonuç elde edilmesi beklenir. Ayrıca $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere p hesaplanacak uzaklık türünü gösteren parametredir. Çalışmada Euclidean uzaklık hesaplandığından $p=2$ alınmıştır. Detaylı bilgi için Zeleny (1982), Chankong ve Haimes (1983) incelenebilir.

3. BULGULAR

Bu bölümde, talebin normal dağılıma uyduğu varsayımı altında, iade edilen tekrar satılabilir ürünler için elde edilen envanter politikalar ve modelin parametreleri için duyarlılık analizlerine yer verilmiştir. Gerek beklenen karın en büyüklenmesinde, gerekse olasılık optimizasyonunda gerekeceğinden, p_N ve b_N değerleri hesaplanmalıdır. Beklenen net gelir, 5 ve 6 eşitlikleri kullanılarak 43,76 TL, net stoksuzluk değeri ise eşitlik 8 kullanılarak 114,28 olarak bulunur.

3.1 Klasik Yaklaşım ile Envanter Politikası

İkinci bölümde verilen model parametreleri ve bölüm 2.1'de iade ürünler için anlatılan yaklaşım kullanılarak beklenen karı en büyükleyen optimal sipariş miktarı ve beklenen en büyük kar, sırasıyla eşitlik 24 ve 25'te verildiği gibi bulunur.

$$F_N(q) = 1 - \frac{25 - 19}{43,76 - 19 + 114,2857} = 0,96$$

$$q_p^* = F_N^{-1}(0,96) \cong 434 \quad (24)$$

İkinci bölümde verilen 9 eşitliği kullanılarak

$$ES_N(434) = 0,365756$$

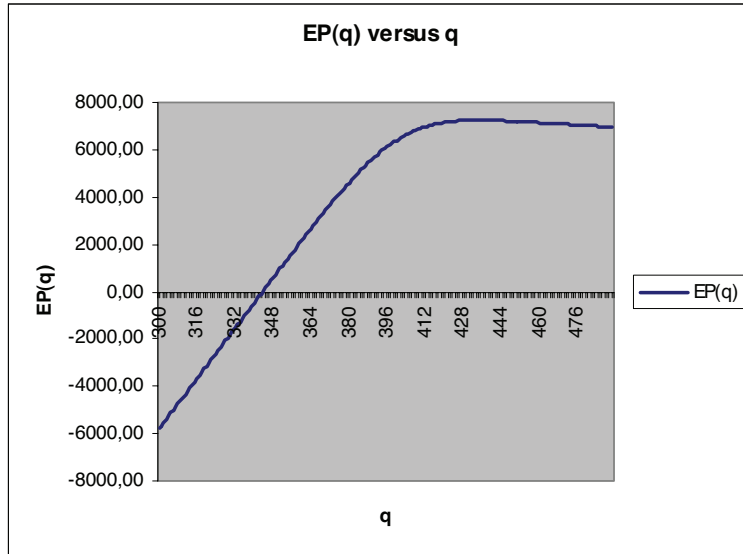
olarak, belirlenen sipariş miktarı için elde edilecek beklenen kar ise, eşitlik 7'den,

$$EP(434) = 7249,90 \text{ TL} \quad (25)$$

olarak elde edilir.

Bu durumda klasik gazeteci çocuk modeli için, karar verici sezon öncesi 434 birim ürün sipariş verdiği takdirde, sezon sonunda 7249,90 lira kar edecektir.

Kar fonksiyonu ile sipariş miktarları arasındaki ilişki ise Şekil 2'de görüldüğü gibidir.



Şekil 2. Sipariş Miktarı ile Beklenen Kar Arasındaki İlişki

3.2 Beklenen Karı Aşma Olasılığını En İyileyen Envanter Politikası

Beklenen karı aşma olasılığı $S(q)$ 'yu en büyükleyen optimal sipariş miktarının bulunmasında öncelikle $x_1(q)$ ve $x_2(q)$ değerleri hesaplanmalıdır. 19 ve 20 eşitliklerinde verilen $x_1(q)$ ve $x_2(q)$ fonksiyonlarına göre bu değerler,

$$x_1(q) = \max\left(0, \frac{EP(q) + (25 - 19)q}{43,76 - 19}\right) \quad (26)$$

$$x_2(q) = \frac{(43,76 + 114,28 - 25)q - EP(q)}{114,28} \quad (27)$$

şeklinde elde edilir. $x_1(q)$, $x_2(q)$ ve sipariş miktarı arasındaki ilişki Şekil 3'te görüldüğü gibidir.

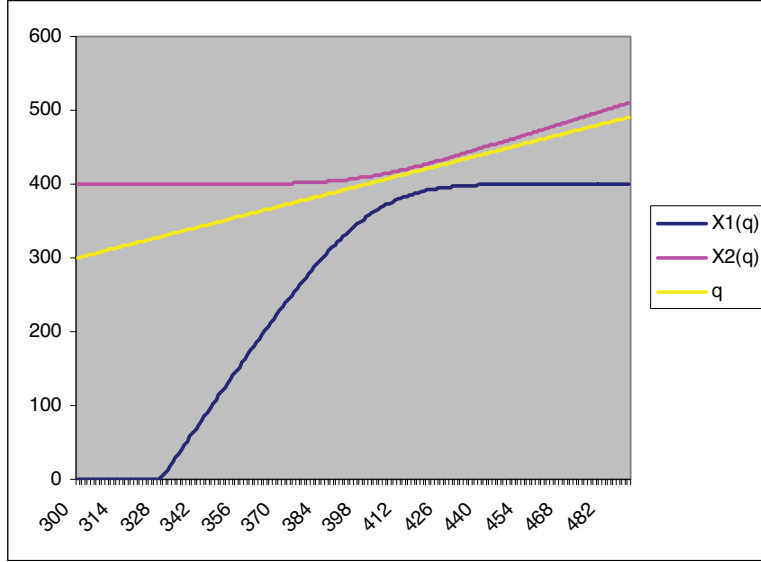
$S(q)$ fonksiyonunun maksimum olduğu sipariş noktası, beklenen karı aşma olasılığının en yüksek olduğu sipariş noktası olur. $S(q)$ 'yu en büyükleyen değer 0,68905 olarak bulunmuştur. En büyük $S(q)$ değerinin elde edildiği sipariş miktarı, optimum sipariş miktarıdır ve 405 değerine karşılık gelmektedir. Buna göre, beklenen karı aşma olasılığını maksimize edebilmek için 405 birim sipariş verilmelidir. $S(q)$ ve sipariş miktarı arasındaki ilişki Şekil 4'teki gibidir.

$$q_s^* = 405 \quad (28)$$

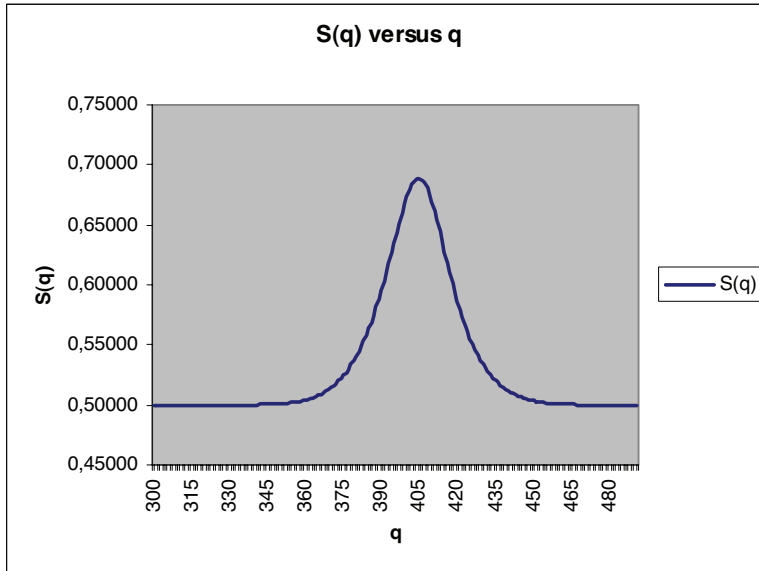
Önceki bölümde klasik yaklaşım için bulunan $q_p^* = 434$ değeri için beklenen karı aşma olasılığı hesaplandığında,

$$S(434) = 0,52261 \quad (29)$$

olduğu görülür. Buradan, klasik gazeteci çocuk modeli için bulunan sipariş miktarı değerinin, beklenen karı aşma olasılığını maksimize etmede yetersiz kaldığı görülmektedir.



Şekil 3. $x_1(q)$, $x_2(q)$ ve q Arasındaki İlişki



Şekil 4. $S(q)$ ve q Arasındaki İlişki

3.3 Her İki Amacı Birlikte En İyileyen Envanter Politikası

Beklenen kar fonksiyonunu ve beklenen karı aşma olasılığını birlikte optimize eden sipariş miktarını belirlemek için eşitlik 22’de verilen uzaklık fonksiyonu kullanılmıştır. Ağırlık parametresi $w=0,40$; Euclid uzaklığı hesaplandığından ve $p=2$ olarak alınmıştır. Elde edilen uzaklık fonksiyonunu minimize eden değer,

$$\min_{q \geq 0} L_2(EP(q), S(q)) = 0,03768 \quad (30)$$

olarak bulunur ve karşı gelen sipariş miktarı değeri,

$$q^* = 409 \quad (31)$$

olarak elde edilir. Bu durumda, karar verici sezon başında 409 adet sipariş verdiğinde, beklenen karı 6856,56 TL olacak, beklenen karı aşma olasılığı ise 0,6752 olacaktır.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, tekrar satılabilir iade edilmiş ürünler için gazeteci çocuk modeli ile sipariş politikası belirlenmiştir. Çalışma kapsamında üç farklı amaç fonksiyonu üzerinde durulmuştur. Bu amaçların ilk ikisi, beklenen karı maksimize etmek ve beklenen karı aşma olasılığını maksimize etmek olarak sıralanabilir. Bu iki amaç fonksiyonu altında tekrar satılabilir iade edilen ürünler için envanter politikaları belirlenmiştir. Son olarak da, çelişen bu iki amaç fonksiyonunu birlikte en iyileyen sipariş miktarı araştırılmıştır.

Sözü edilen üç farklı amaç için bulunan değerler Tablo 2’de özetlenmiştir. Beklenen kar değeri arttıkça bu değeri aşmak zorlaşacağından, beklenen kar fonksiyonunu en büyükleme sipariş miktarında, bu karı aşma olasılığı en küçük değerini almıştır.

Tablo 2. Optimal sipariş miktarlarının karşılaştırılması

q	$EP(q)$	$S(q)$
405	6678,45	0,68905
409	6856,56	0,67520
434	7249,90	0,52261

Her iki amacı en iyileyen sipariş miktarı ise iki değer arasında, ancak $S(q)$ ’nin optimizasyonuna daha yakın olarak elde edilmiştir. Bunun nedeni uzaklığı minimize ederken kullanılan ağırlık değerinin $w = 0,4$ alınması gibi görünse de, farklı w değerleri için de aynı durum gözlenmektedir. Bu değerler Tablo 3’te verilmiştir. Ağırlık değeri w ’nın düşük ve yükselen değerleri için iki amacı dengeleyen çözüm, olasılığı en büyükleme amaca daha yakın sonuçlar vermektedir.

Tablo 3. Farklı ağırlık (w) değerleri için sipariş miktarları

w	q_p^*	q_s^*	q^*	$L_2(q^*)$
0.0	434	405	405	0.00000
0.2	434	405	408	0.02891
0.4	434	405	409	0.03768
0.6	434	405	410	0.04230
0.8	434	405	412	0.04222
1.0	434	405	434	0.00000

Tekrar satılabilir iade ürünler için önem taşıyan parametreler iadelerin tekrar satılabilir olması olasılığı k ve iade edilme olasılığı m olduğu için, farklı k ve m değerlerine ilişkin elde edilmiş optimal sipariş miktarı değerleri Tablo 4 ve Tablo 5'te verildiği gibidir.

Tablo 4. İadelerin tekrar satılabilir olması olasılığı için duyarlılık analizi

k	q_p^*	q_s^*	q^*
0,25	429	405	409
0,50	431	405	409
0,75	433	405	409
0,95	434	405	409

Tablo 5. Ürünlerin iade edilmesi olasılığı için duyarlılık analizi

m	q_p^*	q_s^*	q^*
0,25	432	399	405
0,50	434	405	409
0,75	439	416	420

Tablo 4'te farklı k değerleri için q_p^* , q_s^* ve q^* değerleri görülmektedir. Buna göre; iade ürünlerin tekrar satılabilir olması olasılığı k arttıkça beklenen net gelir artacağından, q_p^* 'nin artma eğiliminde olduğu, q_s^* ve q^* 'in ise etkilenmediği görülür. İadelerin tekrar satılabilir olması olasılığının değişimi, elde edilecek karı doğrudan etkilediğinden, q_p^* diğerlerine göre bu değişime daha duyarlı davranmaktadır. Ancak, k olasılığında 0,70 azalma olmasına karşın beklenen karda 10,39 TL azalma olmuştur. Ancak bu azalma, bu karı aşma olasılığını değiştirecek kadar değildir.

Tablo 5'te ise iade edilme olasılığı m arttıkça, her üç sipariş miktarının da arttığı görülür. Bunun sebebi, iade olasılığı arttığında birim başına gelirin düşerek, firmanın karlılığı arttırabilmek için daha çok sipariş verme eğilimine girecek olmasıdır. Ayrıca iade edilen her ürün yeniden satılamayacağından ve stoksuzluk maliyeti çok yüksek olduğundan iade edilme olasılığı arttıkça sipariş miktarının da arttığı gözlemlenir. Sistemin bu değişime daha duyarlı olduğu söylenebilir.

Yanı sıra c , v ve b_N değerleri için duyarlılık analizi yapılmış ve aşağıdaki tablolardaki sonuçlar elde edilmiştir. Farklı b_N değerlerinin elde edilmesinde eşitlik 8'den yararlanılmış ve b parametresi için sırasıyla 20, 40, 60, 80 değerleri kullanılmıştır.

Tablo 6. Birim maliyet c için duyarlılık analizi

c	q_p^*	q_s^*	$1 - \frac{S(q_p^*)}{S(q_s^*)} (\%)$	$1 - \frac{EP(q_s^*)}{EP(q_p^*)} (\%)$	q^*	L_2
21	444	405	26,378	7,827	409	0,03911
23	438	405	25,301	7,801	409	0,03817
25	434	405	24,155	7,882	409	0,03768
27	432	405	23,405	8,077	409	0,03761
29	429	405	21,996	8,42	409	0,03803

Tablo 6'da artan birim satın alma maliyet değerleri için, karlılık düzeyi azalacağından q_p^* 'ın azaldığı, q_s^* 'ın ise etkilenmediği görülür. S ve EP fonksiyonları için verilen yüzdeler ise kaybı ifade etmektedir. Yüzde olarak ifade edilen "kayıp" değerlerinden birincisi, beklenen kara ulaşma olasılığını en büyükleyen amaç fonksiyonunda, q_p^* miktarının seçilmesiyle oluşan kaybı ifade etmektedir. Yüzde olarak ifade edilen ikinci kayıp değerleri ise, beklenen karı en büyükleyen amaç fonksiyonunda q_s^* miktarının seçilip yorumlanmasıyla oluşan kayıptır. Başlangıçta tanımlanan parametreler kullanıldığında, beklenen kara ulaşma olasılığını en büyükleme amacı altında q_s^* miktarda değil de q_p^* miktarda sipariş vermek, beklenen karı aşma olasılığını %24,1 azaltacaktır. Firma, q_s^* miktar sipariş yerine q_p^* miktar sipariş verirse artan c değerleri için azalan yüzdelerle karşılaşır. Benzer şekilde EP fonksiyonu için q_p^* yerine q_s^* miktar sipariş verirse, artan c değerleri için yine azalan yüzdelerle karşılaşır. Ancak buradaki azalma beklenen karda yüzde olarak azalmayı ifade eder ve diğerine göre daha küçük değişimler gözlenmektedir.

Tablo 7. Hurda değeri v için duyarlılık analizi

v	q_p^*	q_s^*	$1 - \frac{S(q_p^*)}{S(q_s^*)} (\%)$	$1 - \frac{EP(q_s^*)}{EP(q_p^*)} (\%)$	q^*	L_2
15	430	403	21,416	8,298	408	0,03607
17	432	404	22,802	8,056	409	0,03707
19	434	405	24,155	7,882	409	0,03768
21	438	405	26,057	8,465	410	0,03874
23	444	406	28,063	8,454	411	0,04037

Tablo 8. Net stoksuzluk maliyeti b_N için duyarlılık analizi

b_N	q_p^*	q_s^*	$1 - \frac{S(q_p^*)}{S(q_s^*)} (\%)$	$1 - \frac{EP(q_s^*)}{EP(q_p^*)} (\%)$	q^*	L_2
38,095	426	395	10,458	5,911	402	0,02452
76,19	431	401	19,336	7,202	406	0,03389
114,286	434	405	24,155	7,882	409	0,03768
152,381	437	407	27,549	9,043	412	0,04031

Tablo 7’de hurda değeri v arttıkça, sezon sonunda elde kalan ürünün karar vericiye olan maliyeti azaldığından, her üç sipariş miktarının da arttığı görülür. Beklenen karı aşma olasılığındaki kayıp yüzdesi giderek artmaktadır. Beklenen karda meydana gelen kayıp yüzdesi de giderek artmakta ancak bu artış diğerine göre daha az olmaktadır.

Tablo 8’de farklı net stoksuzluk maliyeti değerleri için sipariş miktarları, yüzdelik kayıp değerleri verilmiştir. Artan b_N değerlerine karşılık her üç sipariş miktarı da artma eğilimindedir. S ve EP fonksiyonları için zıt sipariş miktarlarının optimal olarak kullanılması durumunda yaşanacak yüzdelik kayıplar da b_N arttıkça artar.

Buraya kadar yorumlar, normal dağılımdan 400 ortalama ve 20 standart sapma ile türetilen verilere ilişkin yapılmıştır. Dağılım parametrelerindeki değişimlerin, farklı amaçlar altında sipariş miktarını nasıl etkilediği de incelenmiş ve izleyen tablolarda verilmiştir. Talebin değişkenliği azaltıldığında, her iki amacı da en iyileyen sipariş miktarındaki değişim de azalmaktadır. Elde edilen sonuç, Tablo 3’te verilen sonuç ile benzerlik göstermekte; ağırlık (w) değeri sıfır iken olasılık değerini en büyükleyen sipariş miktarı en iyi olarak bulunurken, ağırlık (w) değeri 1 iken karı en büyükleyen sipariş miktarı Tablo 9’da görüldüğü gibi en iyi olarak bulunmuştur.

Tablo 9. Normal (400, 10^2) için farklı ağırlık (w) değerlerine göre sipariş miktarları

w	q_p^*	q_s^*	q^*	$L_2(q^*)$
0.0	414	403	403	0.00000
0.2	414	403	404	0.01863
0.4	414	403	405	0.02387
0.6	414	403	405	0.02684
0.8	414	403	406	0.02715
1.0	414	403	414	0.00000

Talep verilerindeki değişkenlik artırıldığında elde edilen sonuçlar Tablo 10’da verilmiştir. Aynı ortalama ile varyansı daha büyük veriler türetilmiş ve sipariş miktarları bu veriler için hesaplandığında, ağırlık (w) değeri 1 olduğunda her iki amacı en iyileyen sipariş miktarının, daha önceki sonuçlardan farklı olarak, karı en büyükleyen sipariş miktarından (455) daha düşük düzeyde (441) elde edildiği görülmektedir.

Tablo 10. Normal (400, 40²) için farklı ağırlık (w) değerlerine göre sipariş miktarları

w	q_p^*	q_s^*	q^*	$L_2(q^*)$
0.0	455	413	413	0.00000
0.2	455	413	424	0.05515
0.4	455	413	427	0.06362
0.6	455	413	430	0.06300
0.8	455	413	433	0.05319
1.0	455	413	441	0.00000

Ortalaması 1000, standart sapması 20 olan talep verileri kullanılarak elde edilen sipariş miktarları Tablo 11’de verilmiştir. Bu tablodan da anlaşılacağı gibi, talebin ortalamasında yapılan değişim, sipariş miktarlarını değiştirmekte ancak sonuçlar genel hatlarıyla Tablo 3 ve Tablo 9’da verilen sonuçlarla paralellik göstermektedir.

Özetle bu çalışmada, gazeteci çocuk probleminin, farklı amaçlar altında ve iade edilmiş tekrar satılabilir ürünler için de uygulanabilir olduğu kanıtlanmıştır. Sezonluk ürün satışında rekabet eden firmalar karlılıklarının yanı sıra müşteri memnuniyetini de üst düzeye çıkarmak amacıyla bu modelden yararlanarak, rekabette bir adım öne geçebilirler.

Tablo 11. Normal (1000, 20²) için farklı ağırlık (w) değerlerine göre sipariş miktarları

w	q_p^*	q_s^*	q^*	$L_2(q^*)$
0.0	1028	1006	1006	0.00000
0.2	1028	1006	1008	0.01486
0.4	1028	1006	1009	0.01944
0.6	1028	1006	1010	0.02215
0.8	1028	1006	1010	0.02297
1.0	1028	1006	1028	0.00000

5. KAYNAKLAR

Coplan, E.H., 1968. Behavioral assumptions of management accounting. The Accounting Review, 43 (4), 342-362.

Chankong, V., Haimes, Y.Y., 1983. Multiple objective decision making. North Holland, New York.

- Kabak, I., Schiff, A., 1978. Inventory models and management objectives. *Sloan Management Review*, 19 (2), 53-59.
- Khouja, M., 1999. The single-period (news-vendor) problem: Literature review and suggestions for future research. *Omega*, 27, 537-553.
- Kodama, M., 1995. Probabilistic single period inventory model with partial returns and additional orders. *Computers and Industrial Engineering*, 29, 455-459.
- Lanzillotti, R.F., 1958. Pricing objectives in large companies. *American Economic Review*, 48, 921-940.
- Lau, H.S., 1980. The newsboy problem under alternative optimization objectives. *Journal of the Operational Research Society*, 31, 525-53.
- Lau, A.H.L., Lau, H.S., 1988. Maximizing the probability of achieving a target profit in a two-product newsboy problem. *Decision Sciences*, 19, 392-408.
- Li, J., Lau, H., Lau, A.H., 1991. A two-product newsboy problem with satisfying objective and independent exponential demands. *IIE Trans*, 23, 29-39.
- Hillier, F.S., Lieberman, G.J., 1995. *Introduction to operations research* (6th ed.). McGraw- Hill, NY.
- Lee C. H., 2001. Coordinated stocking, clearance sales, and return policies for a supply chain. *European Journal of Operational Research*, 131, 491-513.
- Mostard, J., Teunter, R., 2006. The newsboy problem with resalable returns: A single period model and case study. *European Journal of Operational Research*, 169, 81-96
- Parlar, M., Weng, Z.K., 2003. Balancing desirable but conflicting objectives in the newsvendor problem. *IIE Transactions*, 35, 131-142.
- Schiff, M., Lewin, A.Y., 1970. The impact of people on budgets. *Accounting Review*, 45, 259-268.
- Vlachos, D., Dekker, R., 2002. Return handling options and order quantities for single period products. *European Journal of Operational Research*, 151, (1), 38-52.
- Wells, M.C., 1968. Professor Machlup and theories of the firm. *Economic Record*, 22, 357-368.
- Williamson, O.E., 1970. *Corporate control and business behavior*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Winston, W.L., 2004. *Operations research*. Duxbury, NY.
- Zeleny, M., 1982. *Multiple criteria decision making*. McGraw-Hill. New York, NY.

THE NEWSVENDOR PROBLEM FOR RESALABLE PRODUCTS WITH CONFLICTING OBJECTIVES

ABSTRACT

Towards developing marketing strategies, the policies of competitive companies have focus on customer satisfaction. The occurrence of a return of a product that is sold to a customer has been increasingly common concept within marketing strategies. Towards this requirement, determining the inventory policy with newsboy problem for return products have been recognized frequently in the literature, recently. Besides the newsvendor problem is known as an inventory model that optimizes the single period profit or cost function, there are many studies that examines the newsvendor problem under alternative objectives. The models that examine the order quantity that maximizes the probability of exceeding a prespecified profit level and the probability of an expected profit level are the most popular ones. In this study, the newsvendor problem for return products is examined under the two following objective functions and optimal order quantities are proposed for each objective function separately. The first objective is maximizing the expected profit level and the second one is maximizing the probability of exceeding the expected profit level. Furthermore, an optimum policy which optimizes both conflicting objective is inspected. Simulated demand data used in a context of a scenario to determine the optimal order policy under all three objective functions. Finally, sensitivity analysis of model parameters and economic interpretations are proposed.

Keywords: Alternative objective functions, Probability of exceeding expected profit, Inventory, Newsvendor problem, Return products.

MALMQUIST ENDEKSİ İLE 25 ÜLKENİN ORTAÖĞRETİM PERFORMANSININ DEĞERLENDİRİLMESİ

İbrahim DEMİR*

Özer DEPREN**

ÖZET

Türkiye'nin Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı (PISA 2003)'deki düşük performansı, ülkemiz için çok büyük bir hayal kırıklığına sebep olmuştur. 2003 ve 2006 yıllarında yapılan PISA verilerinden yararlanılarak, matematik, okuma ve fen bilimlerindeki bu düşük performansın sebebini araştırmak ve ülkelerin performanslarındaki değişimi incelemek amacıyla bu çalışmada, Malmquist Endeks yaklaşımını kullanılmıştır. Örneklem PISA'ya katılan ülkelerden oluşmaktadır. Bu verileri kullanarak eğitimde etkin olan ve olmayan ülkeler belirlenmiştir. Bu analiz sonucunda toplam etkinliğin: Çalışmaya dâhil edilen 25 ülkeden 18'inde arttığı, 3'ünde değişmediği ve 4'ünde azaldığı gösterilmiştir. Türkiye'nin ise toplam etkinliğinde yaklaşık %2'lik bir azalma olduğu, bunun sebebini de eğitim reformlarına uyum zorluğu olduğu tespit edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Malmquist endeksi, PISA, Veri zarflama analizi.

1. GİRİŞ

Küreselleşen dünyada toplumların sağlam adımlarla ilerleyebilmesi büyük oranla eğitim seviyesinin yükseltilmesine bağlı olduğu için gerek ulusal, gerekse uluslararası düzeyde ülkemizin konumunu belirlemek gerekmektedir. Bunu yapabilmek için eğitim göstergelerine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu nedenle belirli referans noktalarına göre ülkemizin eğitim alanında hangi düzeyde olduğunun, giderilmesi gereken eksikliklerin ve alınması gereken tedbirlerin belirlenmesi ve bu sayede de eğitim düzeyinin yükseltilmesi amacıyla Ekonomik İşbirliği ve Kalkınma Örgütü (OECD) üye ülkesi olarak Türkiye, PISA projesine ilk olarak 2003 yılında katılmıştır. PISA projesinden elde edilen sonuçlar, eğitim-öğretim programlarının geliştirilmesinde, karşılaşılan eksikliklerin giderilmesinde ve eğitim alanında yapılan araştırmalarda kaynak olarak kullanılabilir. Böylece eğitim sistemimize kazandırılan yeniliklerin ilk sonuçlarının uluslararası nitelikteki bir perspektiften geçirilmesi imkânı doğacaktır (MEB, 2003). İşte bu sebeple orta öğretim sadece Türkiye için değil tüm ülkeler için oldukça önemlidir. Son yıllardaki eğitim bilimlerindeki literatür tarandığında eğitimin kalitesi, eğitimde verimlilik ve eğitimde toplam kalite uygulamalarının oldukça fazla olduğu fakat bu uygulamaların yıllar bazında incelenmediği gözlemlenmiştir. Bir ülkede eğitim reformları veya eğitim için uygulanan iyileştirmeler kısa dönemde etkisini göstermediği için yıllar boyunca bu değişikliği izlemek ve analiz etmek gerekmektedir.

Türkiye 2004 yılında, Avrupa Birliği'nin eğitim hedeflerini yerine getirmek amacıyla müfredat programında çeşitli reformlar uygulamaya koymuştur. Türk eğitim sistemindeki 2004 yılında yapılan reformlar aşağıda verildiği biçimdedir:

* Yrd. Doç. Dr., Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, Davutpaşa Kampüsü, 34210, İstanbul, e-posta: idemir@yildiz.edu.tr

** İstatistikçi, GENAR Araştırma Şirketi, Mecidiyeköy, İstanbul, e-posta: ozerdepren@gmail.com

1. 73 okul türünün 5'ine indirilmesi,
2. Zorunlu eğitimin 12 yıla çıkarılarak liselerin zorunlu eğitime dâhil edilmesi,
3. Anadolu liseleri sınavının zorunlu olması,
4. Meslek liselerine yönlendirilen öğrencilerin Avrupa Birliği ülkelerindeki gibi bilgi ve becerilerine göre çeşitli programları seçmeleri.

Ayrıca 2005-2006 öğretim yılında yapılan değişiklikler de:

1. Anadolu liselerinin hazırlık sınıfı kaldırılmıştır,
2. Liseler dört yıla çıkarılmıştır,
3. Anadolu liseleri ve yabancı dil ağırlıklı liseler birleştirilmiştir.

Yapılan bu çalışma sonucunda uygulanan reformların ne derece başarılı olduğu veya başarılı olmasına 3 yılın yeterli olup olmadığı sorularına yanıt aranmaktadır.

Çalışmada PISA 2003 ve 2006 yılı verilerinden faydalanılmıştır. OECD'nin bir eğitim projesi olan PISA, OECD Eğitim Direktörlüğü'ne bağlı PISA Yönetim Kurulu tarafından yürütülmektedir. Projede kullanılan testlerin ve anketlerin geliştirilmesi, analizlerinin yapılması ve uluslararası raporun hazırlanması işlemleri, PISA Yönetim Kurulu gözetiminde belirlenen bir konsorsiyum tarafından yürütülmektedir. PISA çalışması önde gelen endüstrileşmiş ülkelerdeki 15 yaş grubundaki öğrencilerin kazandıkları bilgi ve beceriler üzerinde 3'er yıllık aralıklarla yapılan bir çalışmadır. 2003 yılında uygulanan çalışmanın ana amacı matematik başarısını ölçmek ve 2006 yılında uygulanan çalışmanın ana amacı da fen bilimleri başarısını ölçmek olmasına rağmen, bu çalışmaların her ikisi de genel başarı düzeyini ölçmekte de kullanılmaktadır.

PISA çalışmaları genel olarak şu sorulara cevap aramaktadır:

1. 15 yaş grubundaki öğrenciler, karşılaştıkları güncel sorunların üstesinden gelebiliyorlar mı?
2. Günlük yaşamda karşılaştıkları okuma materyallerini ne ölçüde anlayabiliyorlar?
3. Okulda öğrendikleri matematik ve fen bilimleri bilgilerini gerçek yaşama ne ölçüde uygulayabiliyorlar?
4. Öğrenme şekli, motivasyon, öğretmen ilişkileri vs. gibi faktörler başarıda ne derece etkilidir?

PISA çalışmaları hem OECD'ye üye, hem de OECD'ye üye olmayan ülkelere uygulanmaktadır. Örneğin 2003 yılındaki çalışmada 41 ülke çalışmaya dâhil edilmişken 2006 yılında çalışmaya dâhil edilen ülke sayısı 57'ye yükseltilmiştir.

Çalışmada veri zarflama analizi Malmquist endeksi konularında bilgi verilmiş ve ülkelerin orta öğretimdeki başarılarının 2003 yılından 2006 yılına geldiğinde nasıl ve hangi sebeple değiştiği incelenmiştir.

2. YÖNTEM

Uluslararası literatür incelendiğinde, okul etkinliği ölçülmesinde Malmquist Endeks kullanılarak yapılmış çok az sayıda çalışma olduğu görülmüştür. Bu çalışmalar genellikle bir ülkede bir ildeki veya kasabadaki okulların birbirlerine göre etkinliğinin araştırılmasını içermektedir.

Grifell-Tatje ve Lovell çalışmalarında, genelleştirilmiş Malmquist toplam verimlilik endeksinin Malmquist verimlilik endeksi ve Malmquist ölçek endeksi olarak ifade edilebildiğini göstermişlerdir. Ayrıca genelleştirilmiş Malmquist endeksinin, Malmquist çıktı miktar endeksinin Malmquist girdi miktar endeksine bölünmesiyle de ifade edilebileceğini ortaya koymuşlardır. Bunların yanı sıra girdi ve çıktı sayısından bağımsız olarak, genelleştirilmiş Malmquist verimlilik endeksinin Törnqvist verimlilik endeksine eşit olduğunu da kanıtlamışlardır (Grifell-Tatje ve Lovell, 1999).

Mansor ve Radam çalışmalarında, Malezya'daki hayat sigortası yapan şirketlerin 1975-1997 yılları arasındaki etkinliğini ve verimliliğini incelemişlerdir. Sonuç olarak bu endüstrinin 1997 yılında 1975 yılına göre %48 gibi büyük bir oranda gelişme kaydettiğini göstermişlerdir. Ayrıca bu sektördeki büyümenin Gayri Safi Yurtiçi Hâsıla ile doğrudan ve pozitif ilişkili olduğunu belirtmişlerdir (Mansor ve Radam, 2000).

1979 ve 2001 yılları arasında illerin gelişmişlik düzeylerini inceleyen Zheng ve Hu çalışmalarında 1995 yılından sonra toplam verimliliğin oldukça yavaşladığını ve bunun sebebinin de Çin'deki ekonomik reformların etkisi olduğunu göstermişlerdir (Zheng ve Hu, 2004).

2007 yılında yapılan ve 1998-2005 yılları arasında Afrika'daki 12 adet elektrik dağıtım şebekesinin verimliliğini inceleyen Estache vd. bu sektörün az da olsa ilerleme kaydettiğini fakat hala gidilecek çok yol olduğunu göstermişlerdir (Estache vd., 2007).

Malmquist endeks kullanılarak eğitim alanında da çalışmalara rastlanmaktadır. Bu çalışmalarda üniversitelerin, liselerin ve ilköğretim okullarının yıllara göre değişimleri incelenmiştir.

Grosskopf ve Moutray çalışmalarında, 1989-1994 yılları arasında Chicago'daki liselerin performans değişimini Malmquist endeksini kullanarak incelemişlerdir. Ortalama olarak 1989 ve 1994 yılları arasında çok az bir ilerleme kaydedildiğini ve bir öğrencinin giderlerinin yıllar bazında sürekli artış göstermesinin, gelişmeye negatif olarak en fazla etki eden değişken olduğunu göstermişlerdir (Grosskopf ve Moutray, 2001).

Flegg vd. çalışmalarında, 1980-1993 yılları arasında İngiltere'deki 45 üniversitenin teknik etkinliğini veri zarflama analizi kullanarak ölçmüşlerdir. 1987 yılından 1988'e geçişte ve 1990 yılından 1991'e geçişte gözle görülebilir büyük artışların yaşandığını göstermişlerdir. Ayrıca bu gelişmelerin ölçek etkinliğinden çok az etkilendiğini de göstermişlerdir (Flegg vd., 2003).

Maragos ve Despotis çalışmalarında, 2001-2002 ve 2002-2003 yılları arasında Yunanistan'daki 60 lisenin etkinliğindeki değişimi incelemişlerdir. Her iki dönemde de sadece 2 okulun etkinliğini arttırdığını göstermişlerdir (Maragos ve Despotis, 2004).

Hua çalışmasında, 1993 ve 2001 yılları arasında Çin'deki ilköğretim, ortaöğretim ve üniversite öğretiminin toplam verimliliğindeki değişimi incelemiştir. Ayrıca ilköğretim ve orta öğretimin toplam verimliliği negatif yönde etkilediğini ve üniversite eğitiminin ise pozitif yönde etkilediğini göstermişlerdir (Hua, 2005).

Worthington ve Lee çalışmalarında, 1998 ve 2003 yılları arasında Avustralya'daki üniversitelerin etkinliğindeki, teknolojisindeki ve verimliliğindeki değişimleri

incelemişlerdir. Bu çalışmada Avustralya'daki 35 farklı üniversite için verimlilik Malmquist endeksi kullanılarak teknik etkinlik ve teknolojik değişim olarak iki yapıya ayırtmışlardır. Sonuç olarak tüm üniversiteler göz önüne alındığında verimliliğin en fazla %1.8 azaldığını, en fazla %13 arttığını ve ortalama olarak da %3.3 arttığını göstermişlerdir (Worthington ve Lee, 2005).

Johnes çalışmasında, 1996 ve 2003 yılları arasında İngiltere'deki 113 lisenin etkinliğini Malmquist endeksini kullanarak incelemiştir. Malmquist endeksindeki ortalama etkinlik artışının %1.5 olduğunu gösteren Johnes ayrıca yıllık ortalama teknolojik etkinlikteki artışın %2.3 ve teknik etkinlikteki azalışın da %0.8 olduğunu göstermiştir (Johnes, 2006).

2.1 Veri Zarflama Analizi (Data Envelopment Analysis)

Zaman zaman "Sınır Analizi" olarak adlandırılan (Data Envelopment Analysis, DEA) ilk kez 1978 yılında Charnes, Cooper ve Rhodes tarafından ortaya konulmuştur. Organizasyonlarda karar birimlerinin görece etkinliğini değerlendirmede kullanılacak bir performans ölçüm tekniğidir (Üte, 2002). Bu matematiksel programlama tekniği Charnes, Cooper ve Rhodes tarafından geliştirilmiş olmasına rağmen karşılaştırmalı verimliliğin temel kavramlarını ilk tanıtan Farrel'dir (Oral vd., 1992, 166).

Ölçeğe göre sabit getiri varsayımına dayanan Çıktıya Yönelik (Charnes, Cooper ve Rhodes, CCR) model formu eşitlik (1)'deki gibidir (Cooper vd., 2004, 10-11):

$$E_k = \text{Min} \left(\sum_{i=1}^m v_i X_{ik} \right)$$

$$\left(\sum_{r=1}^p u_r Y_{rj} \right) - \left(\sum_{i=1}^m v_i X_{ij} \right) \leq 0 \quad (1)$$

$$u_r \geq \varepsilon \quad v_i \geq \varepsilon$$

$$i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n \quad r = 1, \dots, p$$

Çıktıya yönelik CCR modelinin dual modeli ise eşitlik (2)'deki gibidir.

$$E_k = \text{Max} \beta + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^m s_i^- \right) + \varepsilon \left(\sum_{r=1}^p s_r^+ \right)$$

$$\left(\sum_{j=1}^n X_{ij} \lambda_j + s_i^- - X_{ik} \right) = 0$$

$$\left(\sum_{j=1}^n Y_{rj} \lambda_j - s_r^+ - \beta Y_{rk} \right) = 0 \quad (2)$$

$$\lambda_j \geq 0$$

$$i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n \quad r = 1, \dots, p$$

Burada,

- u_r : k karar birimi tarafından r. çıktıya verilen ağırlık,
- v_i : k karar birimi tarafından i. girdiye verilen ağırlık,
- Y_{rk} : k karar birimi tarafından üretilen r. çıktı,
- X_{ik} : k karar birimi tarafından kullanılan i. girdi,
- Y_{rj} : j. karar birimi tarafından üretilen r. çıktı,
- X_{ij} : j. karar birimi tarafından kullanılan i. girdi,

ε : Yeterince küçük pozitif bir sayı (örneğin 0,00001) olarak tanımlanmaktadır.

Ölçeğe göre değişken getiri yaklaşımı ise (Banker, Charnes and Cooper, BCC) modeli olarak bilinir. BCC modelinin CCR modelinden farkı $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ 'in kısıtlara eklenmesidir (Cooper vd., 2007, 90-91). Her birim için matematiksel programlama modeli ve duali çözüldükten sonra o karar verme biriminin etkin olup olmadığı ve etkin değilse etkin olabilmesi için hangi birimleri referans alacağı, girdi ve çıktı düzeylerinin ne olması gerektiği hesaplanabilmektedir. Veri Zarflama Analizinin en büyük avantajı da budur.

Bir karar verme biriminin CCR etkinliği için aşağıdaki şartlara bakılmalıdır.

- 1 CCR probleminin optimal sonucu eğer 1 ise, karar birimi CCR-verimli olarak tanımlanmaktadır. Aksi takdirde karar birimi verimsizdir.
- 2 Dual problemde optimal çözümde aşağıdaki koşullar sağlanırsa, karar birimi verimlidir aksi takdirde verimsizdir.
 - $\alpha = 1$ ise
 - b- Slack değişkenlerinin (s_i^- ve s_i^+) hepsi 0'a eşitse bir başka ifade ile,

Etkin olmayan karar biriminin referans kümesinde bulunan karar birimlerinin oluşturduğu kuramsal birim eşitlik (3)'teki gibi hesaplanmaktadır (Thanassoulis, 2001, 78).

$$X^{KB} = \left(\sum_{j=1}^n X_{ij} \lambda_j \right) \quad Y^{KB} = \left(\sum_{j=1}^n Y_{ij} \lambda_j \right) \quad (3)$$

2.2 Malmquist Endeksi

Malmquist verimlilik endeksi ilk olarak 1953'te Sten Malmquist tarafından ortaya çıkarılmış ve daha sonra birçok kişi tarafından üzerinde çalışılmış ve geliştirilmiştir. Bu endeks bir karar verme biriminin toplam faktör verimliliğindeki büyümeyi iki zaman periyodu boyunca izlemek için kullanılmaktadır. Bu büyümenin iki elemanı vardır ve bunlar "Catch-Up" ve "Frontier-Shift" olarak adlandırılmaktadır. Frontier Shift terimi iki zaman periyodu arasındaki karar verme biriminin etrafındaki etkinlik sınırındaki değişimi ifade ederken, Catch-Up terimi ise bir karar verme biriminin teknik etkinliğindeki değişmeyi ifade eder.

j. karar verme biriminin $x_j^t = (x_{1j}^t, \dots, x_{mj}^t)$ girdi vektörünü kullanarak $y_j^t = (y_{1j}^t, \dots, y_{sj}^t)$ çıktı vektörünü ürettiğini düşünelim. Bu durumda t anından $t+1$ anına geçildiğinde herhangi bir karar verme biriminin etkinliği değişebilir veya etkinlik sınırı kayabilir. İşte bu iki değişim eşitlik (4)'teki gibi ölçülmektedir:

$$C = [\delta^{t+1}((x_0, y_0)^{t+1}) / \delta^t((x_0, y_0)^t)]$$

$$F = [[\delta^t((x_0, y_0)^t) / \delta^{t+1}((x_0, y_0)^t)] \times [\delta^t((x_0, y_0)^{t+1}) / \delta^{t+1}((x_0, y_0)^{t+1})]]^{1/2} \quad (4)$$

$$MI = C \times F$$

Burada,

$\delta^t((x_0, y_0)^t)$: Seçilen karar verme birimi için t anındaki girdileri ve çıktıları kullanarak t anındaki etkinlik sınırına,

$\delta^{t+1}((x_0, y_0)^{t+1})$: Seçilen karar verme birimi için $t+1$ anındaki girdileri ve çıktıları kullanarak $t+1$ anındaki etkinlik sınırına,

$\delta^t((x_0, y_0)^{t+1})$: Seçilen karar verme birimi için t anındaki girdiler ve $t+1$ anındaki çıktılar kullanılarak t anındaki etkinlik sınırına,

$\delta^{t+1}((x_0, y_0)^t)$: Seçilen karar verme birimi için $t+1$ anındaki girdiler ve t anındaki çıktılar kullanılarak $t+1$ anındaki etkinlik sınırına olan uzaklıkların etkinlik değerlerini ifade etmektedir (Zhu, 2003, 278-279).

Ayrıca girdi ve çıktı yönelimli Malmquist endeks formülleri birbirine eşittir (Thanassoulis, 2001, 182). Yalnızca girdi veya çıktı yönelimli modele göre hesaplanacak matematiksel programlama formülü değişmektedir.

Formüldeki C iki zaman arasındaki etkinlik değerindeki değişmeyi, F ise etkinlik sınırındaki kaymayı ya da teknolojik değişikliği göstermektedir. MI toplam faktör verimliliğindeki değişmeyi göstermektedir. C , F ve MI 3 farklı bilgi içermektedir. Eğer $C < 1$ ise birinci dönemden ikinci döneme geçildiğinde etkinlikte bir azalış, $C > 1$ ise etkinlikte bir artış söz konusu iken, $C = 1$ olduğu durumda ise etkinliğin değişmediği söylenir. Eğer $F > 1$ ise birinci dönemden ikinci döneme geçildiğinde teknolojik değişim düzeyinde bir artış, $F < 1$ ise teknolojik değişim düzeyinde bir azalıştan söz edilirken, $F = 1$ olduğu durumda da teknolojik değişimde herhangi bir değişim yaşanmadığı söylenir. MI toplam verimlilik endeksi için ise benzer şekilde yorumlar yapılabilir (Thanassoulis, 2001, 179-181).

3. BULGULAR

Uygulamanın amacı uluslararası öğrenci değerlendirme programına katılan ülkelerin 2003 ve 2006 yılları arasında etkinliklerinin değişimini ve Türkiye'nin diğer ülkelere göre durumunu detaylı olarak incelemektir. Bu çalışmadaki veriler PISA 2003 ve PISA 2006 çalışmalarından alınarak düzenlenmiş ve analize uygun hale getirilmiştir (MEB PISA veriseti). Bu veri seti düzenlenirken PISA 2003 ve PISA 2006 çalışmalarına katılan ülkeler kullanılmıştır. Ortak ülkeler belirlendikten sonra okul başarısını en iyi şekilde ifade edebilecek değişkenler gerek literatür taraması, gerekse diğer eğitim ile ilgili etkinlik ölçümü çalışmaları yardımıyla seçilmiştir. Seçilen değişkenler ve seçilme nedenleri aşağıda belirtilmiştir;

1. Okul Büyüklüğü: Okul büyüklüğü bir okuldaki kız ve erkek öğrencilerin toplamını göstermektedir. Bu değişken hem sınıfların kalabalık olması, hem de öğretmen başına düşen öğrenci sayısı ile ilgili olduğu için bir okulun başarısında önemli bir faktör olmaktadır.

2. Öğretmen Başına Ortalama Öğrenci Sayısı: Öğrenci/Öğretmen oranı, öğretmen başına düşen öğrenci sayısını vermektedir ve mantıklı olarak bu oran bir okulun etkin olabilmesi için analiz edilmesi gereken kriterlerden biri olup, bu sayının düşük olması beklenmektedir.

3. Satın Alma Gücü Paritesine göre Kişi Başına Düşen Gayri Safi Yurtiçi Hasıla: Bir ülkedeki kişi başına düşen gayri safi yurtiçi hasıla o ülkenin gelişmişlik düzeyini göstermektedir. Bir ülkenin gelişmişlik düzeyi ile eğitim seviyesi çok yakından ilişkilidir.

4. HISEI (Highest parental occupational status): Kontrol edilemez bir girdi değişkeni olarak analize dahil edilen HISEI, her bir öğrenci için en yüksek ebeveyn mesleki durumunu göstermektedir. Bu endeks hesaplanırken temel 3 değişken kullanılmıştır: Anne ve babanın mesleği, meslekteki pozisyonu ve meslek kategorisi (PISA, 2003).

1. Matematik Başarı Puanı: Bir öğrencinin matematik performansı matematiğin 4 alanında ölçülmüştür ve bu 4 alan Uzay ve Şekil (Geometri), Değişme ve İlişkiler (Cebir), Sayı (Aritmetik) ve Belirsizlik (Olasılık)'tir.

2. Okuma Başarı Puanı: Bu aşamada öğrenciler hem düz yazılar ve listelerden, hemde grafikler ve şemalardan yararlanarak her bir metin ile ilgili belirlenen bilgiyi elde etme, yorumlama ve değerlendirme yapmaktadırlar ve puanları belirlenmektedir.

3. Fen Bilimleri Başarı Puanı: Bu aşamada asıl vurgulanan nokta bilimsel bilgi ve becerilerin gerçek yaşam durumlarında kullanılabilmesidir. Bu amaçla öğrencilerden bilimsel olay ve olguları tanımlama, bilimsel araştıma ve incelemeleri anlama gibi bazı bilgi ve becerilerini kullanmaları istenmiştir.

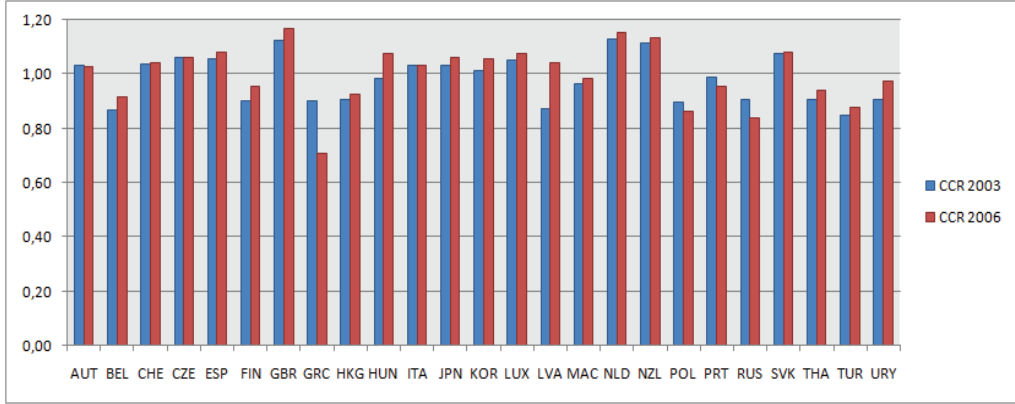
Avustralya, Arjantin, Brezilya, Kanada, Şili, Danimarka, Fransa, Meksika, Katar ve Amerika ülkeleri için seçilen değişkenlerdeki kayıp veri oranının fazla olması sonucu, diğer çalışmalarda da görüldüğü üzere bu çalışmadan da çıkarılmıştır. Sonuçta çalışmada kullanılan 25 ülke: Avusturya, Belçika, İsviçre, Çek Cumhuriyeti, İspanya, Finlandiya, İngiltere, Yunanistan, Hong Kong, İtalya, Macaristan, Japonya, Kore, Lüksemburg, Lituanya, Macao, Hollanda, Yeni Zelanda, Polonya, Portekiz, Rusya, Slovakya, Tayland, Türkiye ve Uruguay'dır.

Efficiency Measurement System (EMS) programı kullanılarak veriler analiz edilmiş ve yorumlar yapılmıştır (EMS, 2008).

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

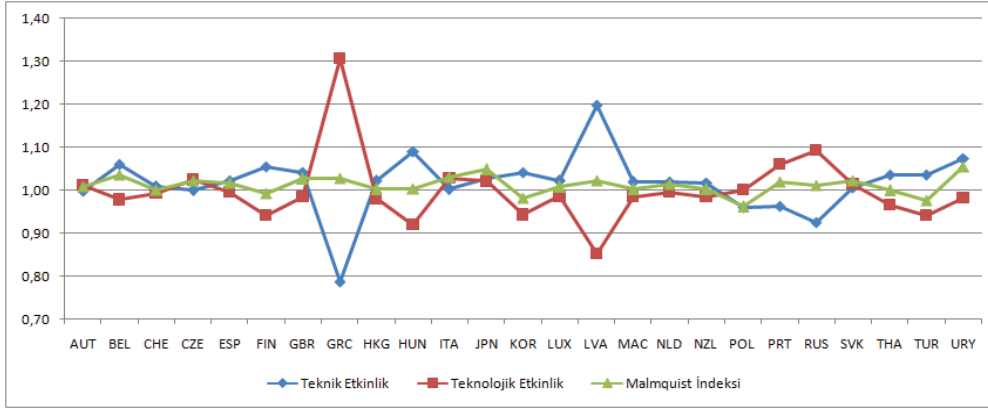
2006 yılında 2003 yılına göre teknik etkinlik değerindeki değişim incelendiğinde bu değer, çalışmaya dâhil edilen 25 ülkeden 18'inde arttığı, 3'ünde değişmediği ve 4'ünde ise azaldığı sonucuna ulaşılmıştır. Teknik etkinlik bakımından %20'lik artış miktarı ile en fazla gelişme gösteren ülkenin Lituanya, %21'lik azalış ile en fazla gerileme kaydeden ülkenin ise Yunanistan olduğu görülmüştür. Türkiye ise teknik etkinlik bazında %4'lük bir artış ile çok büyük olmayan bir gelişme kaydetmiştir. Teknolojik etkinlik değerlerindeki değişim incelendiğinde ise bu değer in ülkelerin çoğunda azaldığı gözlemlenmiştir. Teknolojik etkinlik bakımından %31'lik artış ile en fazla gelişme kaydetmiş ülkenin Yunanistan, %15'lik azalış ile en fazla gerileme kaydeden ülkenin ise Lituanya olduğu sonucuna ulaşılmıştır. 2006 yılında Türkiye'nin teknolojik etkinliğinde ise 2003 yılına göre %6'lık bir gerileme yaşanmıştır. Toplam faktör verimliliği incelendiğinde bu değer in çoğunlukla arttığı başka ifade ile ülkelerin genelinde okulların başarısının arttığı görülmektedir. Sadece Finlandiya, Kore, Polonya ve Türkiye'de toplam verimliliğin azaldığı görülmektedir. Fakat bu azalmaların ya da

artmaların çok aşırı olmadığı, artışların en fazla %5, azalışların ise en fazla %4 olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Örneğin 2006 yılında 2003 yılına oranla eğitim sektöründeki verimliliğini en fazla arttıran ülkeler Japonya ve Uruguay'dır. En fazla gerileme kaydeden ülke ise %4'lük bir gerileme ile Polonya'dır. Türkiye toplam verimlilikte gelişme kaydeden ülkeler arasında yer almamaktadır çünkü Türkiye'de 2006 yılında 2003 yılına oranla %2'lik bir gerileme yaşanmıştır.



Şekil 1. 2003 ve 2006 Yılları Çıktıya Yönelik CCR Etkinlik Değerleri

Şekil 1'den hareketle, çalışmada göze çarpan önemli noktalardan birisi de toplam faktör verimliliğinde en fazla artışın yaşandığı ülke olan Japonya'nın hem 2003, hem de 2006 yıllarında etkinlik sınırında olmamasıdır. Toplam verimliliğinde en fazla ilerlemeyi kaydetmesine rağmen her iki yılda da etkin ve referans alınabilecek bir birim olamamıştır. Toplam verimlilikte en fazla artışı sağlayan bir diğer ülke Uruguay ise, her iki yılda da etkin birimler arasında yer alarak referans olarak gösterilebilir. Belçika, Yunanistan, Portekiz ve Rusya hem 2003, hem de 2006 yıllarında etkin birimler olmuş ve toplam verimliliklerini arttırmayı başarmışlardır. Toplam verimliliğin artmasının, Belçika için teknik etkinliklerinin artmasından, Yunanistan, Portekiz ve Rusya için ise teknolojik etkinliğinin artmasından kaynaklanmakta olduğu saptanmıştır. Finlandiya ve Türkiye'nin toplam verimliliğindeki azalmanın kaynağı ise teknolojik etkinlikteki gerilemedir. Macaristan ve Lituanya'nın 2003 yılında etkin birimler arasında olmasına ve 2006 yıllarında da etkin birimler arasında olmamasına rağmen toplam faktör verimliliği azalmamıştır. Bunun en büyük sebebi her iki ülkenin de teknik etkinliğini arttırmasıdır.



Şekil 2. Teknik Etkinlik, Teknolojik Etkinlik ve Malmquist Endeksi

Şekil 2’de görüldüğü üzere teknik etkinlik ve teknolojik etkinlik değerleri arasındaki farklar sadece Yunanistan ve Lituanya’da çok fazladır. Ayrıca bu fark ne kadar fazla olursa olsun toplam faktör verimliliğini “1” etrafında dengelemektedir. Bu zaten beklenen bir sonuçtur çünkü bir ülkedeki eğitim sektörü diğer sektörler gibi krize girme veya batma tehlikesi yaşamadığından dolayı, teknik etkinlik ve teknolojik etkinlik değerleri toplam verimliliği dengelemektedir. Burada bir ülkenin asıl amacı hem teknik etkinliği, hem de teknolojik etkinliği mümkün olduğunca artırmak olmalıdır.

Çalışmada Türkiye’nin yeri ayrıca incelendiğinde, Türkiye’nin teknik etkinliğini arttırmasına rağmen teknolojik etkinliğini arttırılamaması sonucu toplam verimliliği 2006 yılında 2003 yılına oranla %2 azalmıştır. Ayrıca Türkiye’nin hem 2003, hem de 2006 yıllarında etkin birimler arasında olduğu, referans gösterilecek bir ortaöğretim eğitim sistemine sahip olduğu ve 2006 yılında diğer ülkelere göre görece etkinliğini azalttığı gözlemlenmiştir. Bu sebeple toplam verimlilikte bir azalma söz konusudur. Türkiye’nin asıl sorunu teknolojik etkinliğin düşmesidir. Bunun en büyük sebeplerinden birisi Türkiye’deki eğitim reformlarının oldukça yavaş ilerlemesidir. Türkiye Avrupa Birliği üyeliğine Aralık 2004’te kabul edilmeden önce, Avrupa Birliği’nin eğitim hedeflerini yerine getirmek amacıyla müfredat programında çeşitli reformlar uygulamaya koymuştur. Yapısal reformda ise Türkiye’deki eğitim sistemini bağımsızlaştırmayı hedeflemektedir. Bu çalışma ilk kez 2004 yılında yapılmaya çalışılmış, fakat başarılı olunamamıştır (Akşit, 2007, 129-137). Bu başarısızlık Türkiye’nin toplam faktör verimliliğindeki %2’lik azalmayı doğrular niteliktedir. Ayrıca 2005 yılında Anadolu liselerinde hazırlık sınıflarının kaldırılması, liselerin 4 yıla çıkarılması ve Anadolu liseleri ile yabancı dil ağırlıklı liselerin birleştirilmesi gibi uygulamaya konulan reformlara ayak uydurmadaki zorluklar toplam verimliliğin azalmasında bir diğer etkidir. Kısacası 2004 ve 2005 yıllarında eğitim sistemindeki reformlara uyum sürecinin uzun olması sonucunda Türkiye’nin toplam verimliliği %2 azalmıştır.

2003 ve 2006 yıllarının her ikisinde de etkinliğini koruyan, başka bir ifade ile referans alınabilecek ülkeler sınıfına giren ve toplam verimliliğinde artış yaratabilmiş ülkeler Belçika, Yunanistan, Lituanya, Portekiz, Rusya ve Uruguay’dır. Özetle bu ülkelerdeki eğitim reformları, mevcut eğitim sistemi, ülkenin eğitime harcadığı pay, okul büyüklükleri ve Öğretmen başına düşen öğrenci oranı gibi eğitimin temelini oluşturan özellikler referans alınarak etkin bir eğitime sahip olunabilir. Sonuç olarak Türkiye’de yapılacak reformların gerekliliği, uygulamaya konma zamanı, süresi ve etkinliği göz

önüne alındığında yapılan hataların tekrarlanmayacağı ve ilerleyen yıllarda eğitim sisteminin etkinliğinin arttırılacağı düşünülmektedir.

5. KAYNAKLAR

Akşit, N., 2007. Educational reform in Turkey. *International Journal of Educational Development*, 27, 129-137.

Cooper, W. W., Seiford, L. M. ve Zhu, J., 2004. *Handbook on data envelopment analysis*. Kluwer Academic Publishers, Boston, pp.10-11.

Efficiency Measurement System (EMS). Available at: <http://www.wiso.uni-dortmund.de/lsg/or/scheel/ems/>. (Erişim Tarihi: 5 January 2008).

Estache, A., Tovar, B., Trujillo, L., 2007. Are African electricity distribution companies efficient? Evidence from the southern african countries. *Department of Economics Discussion Paper Series*, No: 07/13.

Flegg, A.T., Allen, D. O., Field, K., Thurlow, T.W., 2003. Measuring the efficiency and productivity of British universities: an application of DEA and the Malmquist approach. *University of the West England Economics Discussion Paper Series*, No:03/04.

Grifell-Tatje, E., Lovell, C. A. K., 1999. A generalized Malmquist productivity index. *Sociedad de Estadística e Investigación Operativa*, vol 7, No. 1, 81-101.

Grosskopf, S., Moutray, C., 2001. Evaluating performance in Chicago public high schools in the wake of decentralization. *Economics of Education Review*, 20, 1–14.

Hua, P., 2005. How does education at all levels influence productivity growth? Evidence from the Chinese provinces. *CERDI, Etudes et Documents*, Ec 2005.15.

Johnes, J., 2006. Efficiency and productivity change in the English higher education sector from 1996/97 to 2002/03. *Lancaster University Management School Working Paper*, 017.

Mansor, S.A., Radam A., 2000. Productivity and efficiency performance of the Malaysian life insurance industry. *Jurnal Ekonomi Malaysia*, 34, 93-105.

Maragos, E. K., Despotis, D. K., 2004. Evaluating school performance over time in the frame of regional socio-economic specificities. *Wseas Transactions On Mathematics Issue 3, Volume 3, ISSN 1109-2769*, 664-671.

Milli Eğitim Bakanlığı, 2003. Available at: <http://earged.meb.gov.tr/pisa/dil/tr/pisanedir.html>. (Erişim Tarihi: 5 January 2008).

Organisation for Economic Co-operation and Development, 2005. *PISA 2003 Technical Report*. Paris: OECD.

Oral, M., Kettani O., Yolalan R., 1992. An empirical study on analyzing the productivity of bank branches. IIE Transactions, Vol. 24, No: 5, p.166-176.

Thanassoulis, E., 2001. Introduction to the theory and application of data envelopment analysis: A foundation text with integrated software. Kluwer Academic Publishers, Second Printing, Massachusetts, pp. 179-182.

Üte, E., 2002. Veri zarflama analizi tekniği ile sağlık sektörünün operasyonel etkinliğinin araştırılması. Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü İşletme Anabilim Dalı, Adana (yayımlanmamış).

Worthington, A., Lee, B.I., 2005. Efficiency, technology and productivity change in Australian universities, 1998-2003. University of Wollongong School of Accounting & Finance Working Papers Series, 05/01.

Zheng, J., Hu, A., 2004. An empirical analysis of provincial productivity in China (1979-2001). Working Paper in Economics (SwoPEc) , No. 127, ISSN 1403-2465

Zhu, J., 2003. Quantitative models for performance evaluation and benchmarking. Kluwer Academic Publishers, Worcester Polytechnic Institute, Massachusetts, pp.278-279.

ASSESSING SECONDARY SCHOOL PERFORMANCES OF 25 COUNTRIES USING MALMQUIST INDEX

ABSTRACT

The low performance of Turkey in the Programme for International Student Assessment (PISA 2003) was a great disappointment for that country. To investigate the likely causes for low performances in mathematics, reading and science and to measure the discrepancy of countries performances using PISA dataset in 2003 and 2006, this study measured performance difference using Malmquist Index approach. The sample was prepared from countries which participated in Programme for International Student Assessment (PISA). Efficient and inefficient countries were determined by analyzing the sample data. As a result of the study, we found that 18 of the 25 countries' performances increased, 3 of 25 countries' performance decreased and 4 of 25 countries' performance did not changed. Also we found that the relevant Turkey's total performance for the years of 2003 and 2006 has been decreased about 2 percent. The reason for that was the difficulty in being compliant to educational reforms.

Keywords: Malmquist index, PISA, Data envelopment analysis.

TÜRKİYE'DEKİ MATEMATİK BAŞARISININ İKİ AŞAMALI BERNOULLİ MODELİ KULLANILARAK İNCELENMESİ

İbrahim DEMİR*

Serpil KILIÇ**

ÖZET

Bu çalışmanın amacı, çok aşamalı modellerin özel bir durumu olan iki aşamalı Bernoulli modelini kullanarak cinsiyet, sosyo-ekonomik kültürel statü, okulun bulunduğu konum, okuldaki matematik aktiviteleri sayısı ve öğrenci öğretmen ilişkisi değişkenlerinin matematik başarıları üzerine etkilerini incelemektir. Örneklem, Türkiye'deki Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı (PISA)'nın 2003 yılında katılan Türk öğrencilerden oluşmaktadır. Mevcut veri seti, 156 okulda 15 yaşındaki 4799 Türk öğrenciden oluşmaktadır. PISA çalışmasının örneklem yapısı, okulları ve okullar içindeki öğrencileri içerdiğinden iki aşamalı hiyerarşik model yapısına uygundur. Çok aşamalı regresyon analizi kullanılarak katsayılar tahmin edilmiş ve okullar karşısında farklılıklar modellenmiştir. Elde edilen bulgulara göre, matematik başarıları için okulun bulunduğu konum ve matematik aktiviteleri değişkenlerinin pozitif ve öğrenci-öğretmen ilişkisi değişkeninin de güçlü pozitif etkiye sahip olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca ailenin sosyo-ekonomik ve kültürel statüsünün yüksek olmasının da matematik başarılarını arttırdığı gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İki aşamalı Bernoulli modeli, Matematik başarıları, PISA.

1. GİRİŞ

Türk eğitim sistemi demokratik, modern, laik ve karma eğitim özelliklerine sahiptir. Bu sistemin amacı milli birlik ve bütünlüğe uygun olarak Türk toplumunun refah düzeyini arttırmak, ekonomik, sosyal ve kültürel gelişimini hızlandırıp desteklemektir. Bununla birlikte Türkiye'de eğitim reformları oldukça yavaş ilerlemektedir. Yapılan reformlar ise yapısal ve müfredat programındaki değişiklikleri içermektedir. Buna göre Türkiye Avrupa Birliği üyeliğine Aralık 2004'te görüşmeler başladıktan sonra, Avrupa Birliği'nin eğitim hedeflerini yerine getirmek amacıyla müfredat programında çeşitli reformlar uygulamaya koymuştur. Yapısal reformda ise Türkiye'deki eğitim sistemini bağımsızlaştırmayı hedeflemektedir. Bu çalışma ilk kez 2004 yılında yapılmaya çalışılmış, fakat başarılı olunamamıştır (Akşit, 2007).

Eğitim alanında yapılan ulusal değerlendirme çalışmalarının yanı sıra, uluslararası düzeyde konumumuzu belirlemek amacıyla eğitim göstergelerine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu nedenle belirli referans noktalarına göre ülkemizin eğitim alanında hangi düzeyde olduğu, giderilmesi gereken eksikliklerin ve alınması gereken tedbirlerin belirlenmesi ve bu sayede de eğitim düzeyinin yükseltilmesi amaçlanmaktadır. Bunun için ülkemiz Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı (PISA), Üçüncü

* Yrd. Doç. Dr., Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, Davutpaşa Kampüsü, 34210, İstanbul, e-posta: idemir@yildiz.edu.tr

** Arş. Gör., Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, Davutpaşa Kampüsü, 34210, İstanbul, e-posta: serkilic@yildiz.edu.tr

Uluslararası Matematik ve Fen Araştırması (TIMSS), Uluslararası Okuma Becerilerinde Gelişim Projesi (PIRLS) gibi birçok projede yer almaktadır.

PISA, TIMSS ve PIRLS verisine hiyerarşik lineer modeller uygulanarak eğitim alanında uluslararası birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalarda; öğrencilerin okul başarılarını etkileyen bireyin duygusal gelişimi, öğrenme stilleri, öğrenme stratejileri, akademik benlik algısı, motivasyonu, zaman yönetimi, derslere odaklanması, zihinsel gelişimi, anne-baba tutumları, ailenin ekonomik yapısı, arkadaşları, cinsiyeti, bireyin sahip olduğu kaygı düzeyi ve kişilik özellikleri gibi değişkenleri kullanarak öğrencilerin matematik, fen bilimleri ve okuma başarılarını incelemiştir. Örneğin Chow vd. (2007), PISA 2003'e katılan 34 ülke verilerin kullanarak çok aşamalı regresyon yöntemi ile öğrencilerinin başarıda ezber dayalı öğrenme stratejilerinin etkili olmadığını göstermiştir; Chiu ve Xihua (2008), aynı verilen 41 ülkenin matematik başarısını incelerken gelişmiş ülkelerde aile etkisi ve motivasyon etkisinin oldukça güçlü olduğunu bulmuştur. PISA 2000'in verisini kullanan Wilkins (2004) matematik ve fen bilimleri başarısında öğrencilerin görüşünün etkisinin pozitif, ülke etkisinin ise negatif ilişkili olduğunu bulmuştur.

TIMSS verileri kullanılarak yapılan araştırmalarda; Hammouri (2004), matematik başarısında öğrencinin tutum ve motivasyon değişkenlerinin oldukça güçlü pozitif etkiye sahip olduğunu göstermiştir. Çin ve Amerikan öğrencilerin matematik başarısındaki farklılıklarını, annenin beklentisi, anne ve babanın eğitim düzeyi, aile bireylerinin birlikte yaşayıp yaşamadığı, öğrencinin ders dışı zamanlarda hangi aktivitelerde bulunduğu gibi değişkenlerle inceleyen Wang (2004), bu değişkenlerin matematik başarısında etkili olduğunu, Ramirez (2006) ise sınıflar ve okullar arasındaki farklılıkları tespit etmiştir.

Bu çalışmada kullanılacak olan iki aşamalı lineer modelle ilgili çalışmalar PISA ve TIMSS verilerine uygulanmamıştır. Bununla birlikte literatürde iki aşamalı lineer modelle ilgili çalışmalar mevcuttur. Dunn, vd., (2004) çalışmalarında, hiyerarşik lojistik regresyon analizini kullanarak, zihinsel engelli ve öğrenim güçlüğü çeken öğrencilerin liseyi bırakma sebeplerini incelemiştir. Analizlerin sonucunda, öğretmenlerin, öğrencilerin ulaşmak istedikleri amaçlarına daha fazla önem vermeleri gerektiğini ve öğretmenlerin okul müfredatı ile öğrencilerin gelecekteki hedefleri arasındaki bağlantıyı açık şekilde göstermeleri gerektiğini belirtmişlerdir.

PISA, TIMSS ve PIRLS araştırmaları ülkeleri kendi aralarında karşılaştırmaya imkan veren çalışmalardır. Ayrıca bu araştırmaların verileri ülkeleri temsil etme gücüne de sahiptir. Bu çalışmada PISA verileri kullanılarak öğrencilerin başarılarına etki eden değişkenler, iki aşamalı lineer model kullanılarak incelenmiştir. Bununla birlikte Türkiye'de PISA verisi ile çalışılarak okul ve öğrenci etkinlikleri üzerine bir çalışma yapılmamıştır. Bu çalışmanın bir amacı da bu eksikliği gidermektir.

2. YÖNTEM

2.1 Veri

PISA çalışması önde gelen endüstrileşmiş ülkelerdeki 15 yaş dolayındaki çocukların kazandıkları bilgi ve beceriler üzerinde 3’er yıllık aralarla yapılan bir çalışmadır. 2003 yılında uygulanan çalışmanın ana amacı matematik başarısını ölçmek olmasına rağmen genel başarı düzeyini ölçmekte de kullanılmaktadır.

PISA 2003 uygulamasına 30 OECD üyesi olan ve 11 OECD üyesi olmayan ülke katılmıştır. Yaklaşık 250000’in üzerindeki öğrencilere; matematik, fen bilimleri, okuma ve problem çözme becerilerini ortaya koyacak 2 saatlik bir test uygulanmıştır. OECD ülkesi olarak ülkemiz PISA projesine ilk olarak 2003 yılında katılmıştır. PISA 2003 projesinin test ve anketleri, ülkemizde 2003 yılının Mayıs ayında 7 coğrafi bölgeden tesadüfi yöntemle seçilen 12 ilköğretim okulu ve 147 lisede okumakta olan 1987 doğumlu toplam 4855 öğrenciye yapılmıştır. Bu çalışmanın veri seti Türkiye’de PISA 2003 çalışmasına katılan öğrencilerden oluşmaktadır. Kayıp veriler silindikten sonra 156 okuldaki 4799 öğrenci analize dahil edilmiştir.

Bu çalışmanın amacı, matematikte öğrencilerin ekonomik, sosyal ve kültürel statüsü, cinsiyeti, okulun bulunduğu konum, okulun sağladığı matematik aktiviteleri ve öğretmen öğrenci ilişkisi değişkenlerinin matematik başarısı üzerindeki etkisini incelemektir. Bu amaç doğrultusunda çalışmada genelleştirilmiş lineer modellerden iki aşamalı Bernoulli modeli kullanılmıştır. Veri seti matematik ile ilgili değişkenler seçildikten sonra SPSS ve HLM 6.04 paket programları kullanılarak analiz edilmiştir.

2.2 Değişkenler

PISA ve TIMSS verileri kullanılarak yapılan çalışmalarda araştırmacılar, matematik başarısına etki eden birçok değişken kullanmışlardır. Bu değişkenlerden birçoğu başarıya etki etmektedir. İncelenen çalışmaların hepsinde matematik başarısına etki eden değişkenler (cinsiyet ve ekonomik sosyal statü) çalışmaya dâhil edilmiştir. Bununla birlikte okulların yerleşim yeri, okullardaki matematik aktiviteleri ve öğretmen ve öğrenci ilişkileri de analize dahil edilmiştir.

2.2.1 Öğrenci Aşaması Değişkenleri

Matematik Başarısı (Y_{ij}), Bir öğrencinin matematik performansı matematiğin 4 alanında ölçülmüştür ve bu alanlar sırasıyla Uzay ve Şekil (Geometri), Değişme ve İlişkiler (Cebir), Sayı (Aritmetik) ve Belirsizlik (Olasılık)’tir. Testlerde öğrencilere gerçek yaşamlarında karşıabilecekleri tarzda 85 farklı problem sorulmuştur. Genellikle bir yazı veya şema ile ifade edilen bir matematiksel durum ile ilgili olarak birkaç sorunun cevaplanması istenmiştir. İki aşamalı Bernoulli modelinde bağımlı değişken olan matematik başarısı eğer Türkiye ortalaması altında ise 0, üstünde ise 1 olarak

kodlanmıştır. Böylece belirli özelliklerdeki bir öğrencinin başarılı olup olmadığı tespit edilmek istenmektedir.

Cinsiyet (C), öğrenci cinsiyeti 0-Kız, 1-Erkek öğrenci olarak kodlanmıştır. Toplam örneklemin %43,1'ini kız öğrenciler, %56,9'unu ise erkek öğrenciler oluşturmaktadır.

Ekonomik, Sosyal ve Kültürel Statü (ES), PISA 2003 çalışmasında ekonomik, sosyal ve kültürel statü endeksi geliştirilmiştir. Bu endeksin ortalaması 0 olup -3 ile +3 arasında değişmektedir. Bu endeks; baba veya annenin istihdam durumu ile ilgili uluslararası en yüksek sosyo-ekonomik endeks (HISEI), okulda eğitim alma yıllarına göre velilerin en yüksek eğitim düzeyi endeksi (PARED) ve evde sahip olunan eşyalar (HOMEPOS) gibi değişkenlerden oluşturulmuştur. Bu üç değişken oluşturulurken kullanılan sorulara temel bileşenler analizi uygulanmıştır. ES, değişkenler standartlaştırıldıktan sonra birinci temel bileşenin öz değeri ile ağırlıklandırılmış halidir (OECD, 2005).

2.2.2 Okul Aşaması Değişkenleri

Okul Lokasyonu (OL), 5 farklı düzeyde incelenmiştir ve bu düzeyler 1-Köy (Nüfusu 3 000'den az), 2-Küçük Kasaba (Nüfusu 3 001 ile 15 000 arası), 3-Kasaba (Nüfusu 15 001 ile 100 000 arası), 4-Şehir (Nüfusu 100 001 ile 1 000 000 arası) ve 5-Büyük Şehir (Nüfusu 1 000 001'dan fazla) şeklinde tanımlanmıştır. Köylerdeki veride mevcut olan cevaplamama sorunu nedeniyle yeteri kadar gözlem birimi olmadığından, okul lokasyonu için köyler hariç dört düzey kullanılmıştır.

Matematik Aktiviteleri (MA), 5 farklı matematik aktivitesinin okul tarafından sağlanıp sağlanmadığını Evet şıkkı sayısına göre belirleyen bir değişkendir (OECD, 2005).

Öğretmen Öğrenci İlişkisi (ÖÖİ), PISA tarafından hesaplanan bu endeks öğrenci anketindeki öğretmen öğrenci ilişkilerini ölçmeyi amaçlayan 4'lü Likert ölçeğine sahip 5 farklı soruya ("Öğretmen öğrenci ile iyi geçinir", "Öğretmen öğrencilerle ilgilidir", "Öğretmen beni dinler", "Öğretmen fazladan yardım etmeye çalışır" ve "Öğretmen bana adil davranır") verilen cevaplardan hareketle hesaplanmıştır. Hesaplama yapılırken "Kesinlikle Katılmıyorum" cevabı 1, diğer cevaplar 0 olarak kodlanmış ve okul bazında ortalaması alınarak Zayıf Öğretmen Öğrenci İlişkisi Endeksi oluşturulmuştur. Daha sonra bu değişkenin negatif değerleri hesaplanarak Öğretmen Öğrenci İlişkisi Endeksi elde edilmiştir (OECD, 2005).

2.3 Analiz

2.3.1 Hiyerarşik Lineer Modeller

Çok aşamalı problemler hiyerarşik yapıdaki ana kitle etrafında oluşur. Hiyerarşik yapıdaki kitleden elde edilen örnekler, çok aşamalı (kademeli) örnekler olarak adlandırılır ve ilk olarak yüksek seviyeli birimlerden (gruplardan), daha sonra ise alt birimlerden (gruplar içindeki birimlerden) örnek çekildiği varsayılır (Heck ve Thomas, 2000). Bu tip örneklerde grupların içindeki birimler, kitlenin tamamından basit tesadüfi örnekleme yolu ile çekilmiş birimlere göre daha fazla benzer olma eğilimindedirler

(Hox, 1998). Gruplardaki birimlerin benzer karakteristiklere sahip olmaları (çevre, deneyim, demografik özellikler gibi) bu birimlerden elde edilen gözlemlerin birbirine bağımlı olmasına neden olur. Sonuç olarak, hiyerarşik yapıya sahip verilerde, istatistiksel testler için gerekli olan gözlemlerin birbirinden bağımsızlığı varsayımı bozulduğundan çok aşamalı modellere ihtiyaç duyulur (Osborne, 2000).

İki aşamalı model isminden anlaşıldığı gibi iki alt modelden oluşur. 1. aşama modeli öğrenci ile ilgili değişkenler arasındaki ilişkiyi, 2. aşama modeli ise okul ile ilgili değişkenler arasındaki ilişkiyi inceler (Raudenbush ve Bryk, 2002).

2.3.2 İki Aşamalı Bernoulli Modeli

İki ve üç aşamalı hiyerarşik lineer modeller için;

- Her aşamadaki bağımlı değişkenin, regresyon katsayılarının doğrusal bir fonksiyonu olarak gösterilmesi,
- Her aşamadaki tesadüfi etkilerin normal dağıldığı,

varsayılr. Fakat doğrusallık ve normallik varsayımlarının sağlanamadığı durumlar da söz konusu olabilir. Örneğin; Y öğrencinin liseden belirlenen öğretim yılında mezun olup olmadığını gösteren iki değerli bir sonuç değişkeni ise (öğrenci belirlenen öğretim yılında mezun olursa $Y=1$, mezun olmazsa $Y=0$), bilinen 1. aşama modelinin kullanımı aşağıdaki sebeplerden dolayı uygun değildir:

- Hiyerarşik lineer modellerde 1. aşama sonuç değişkeninin tahmin edilen değerlerinde bir kısıtlama söz konusu değildir. Fakat verilen örnekte iki değerli sonuç değişkeni olan Y 'nin tahmin edilen değeri (0,1) aralığındadır. Hiyerarşik lineer modellerin uygulanabilmesi için, sonuç değişkenine doğrusal olmayan dönüşüm (logit veya probit dönüşümü gibi) yapılır.
- Sonuç değişkenine tahmin edilen değerler verildiğinde, 1. aşama tesadüfi etkisi iki değerden sadece birini alabilir ve bu durumda normal dağılıma sahip olmayabilir.
1. aşama tesadüfi etkisi, homojen varyansa sahip olmayabilir, bu durumda 1. aşama tesadüfi etkisinin varyansı tahmin edilen değere bağlıdır.

Genelleştirilmiş hiyerarşik lineer modellerdeki 1. aşama modeli üç kısımdan oluşur. Bunlar; örnekleme modeli (sampling model), bağ fonksiyonu (link function) ve yapısal model (structural model)dir. Hiyerarşik lineer modeller, normal örnekleme modeli ve benzer bağ fonksiyonu kullanırken, Bernoulli modelinde Binom örnekleme modeli ve logit bağı kullanılır.

1. Aşama Örnekleme Modeli: j grup sayısı ve i birim sayısı olmak üzere Y_{ij} sonuç değişkeni, m_{ij} denemedeki başarı sayısı, φ_{ij} ise her denemedeki başarının olasılığı olsun.

$$Y_{ij} | \varphi_{ij} \sim B(m_{ij}, \varphi_{ij}) \quad (1)$$

şeklinde gösterilir. Binom dağılımına göre, Y_{ij} 'nin beklenen değeri ve varyansı Eşitlik (3)'teki gibidir:

$$E(Y_{ij} | \varphi_{ij}) = m_{ij} \varphi_{ij}, \quad Var(Y_{ij} | \varphi_{ij}) = m_{ij} \varphi_{ij} (1 - \varphi_{ij}) \quad (2)$$

$m_{ij} = 1$ olduğunda, Y_{ij} sıfır ya da bir değerini alan iki değerli bir değişkendir. Bu Bernoulli dağılımı olarak bilinen Binom dağılımının özel bir durumudur. 1. aşama varyansı varsayılandan daha geniş (aşırı yayılım) ya da varsayılandan daha küçük (az yayılım) olabilir. Eğer 1. aşama modelinin açıklama oranı düşükse, aşırı yayılım meydana gelebilir. Bu durumda skaler varyans bileşeni σ^2 tahmin edilebilir. Böylece 1. aşama varyansı $\sigma^2 = m_{ij}\varphi_{ij}(1-\varphi_{ij})$ şeklinde olur.

1. Aşama Bağ Fonksiyonu: 1. aşama örnekleme modeli binom olduğunda, birkaç bağ fonksiyonu kullanılabilir (Hedeker ve Gibbons, 1994). Fakat en kullanışlı ve yaygın olanı logit bağ modelidir ve gösterimi:

$$\eta_{ij} = \log(\varphi_{ij} / 1 - \varphi_{ij}) \quad (3)$$

biçimindedir. Burada η_{ij} , başarı oddsunun (olasılıklar oranı) logaritmasıdır. Bir olayın ODDS'u, olayın meydana gelme olasılığının gelmeme olasılığına oranıdır.

1. Aşama Yapısal Modeli: Tahmin edilen log-ODDS'lar, $\exp(\eta_{ij})$ tarafından oranlara dönüştürülebilir.

$$\varphi_{ij} = (1 / 1 + \exp(-\eta_{ij})) \quad (4)$$

η_{ij} 'nin her değeri için φ_{ij} değeri 0 ile 1 arasında olur.

Bu durumda 1. Aşama modeli aşağıdaki gibidir.

$$\eta_i = \beta_0 + \sum_{i=1}^q \beta_i X_i + \varepsilon_i \quad (5)$$

2. Aşama modeli: 2. aşama modeli hiyerarşik lineer modellerdeki 2. aşama modeli ile aynıdır.

$$\beta_{qj} = \gamma_{q0} + \sum_{s=1}^{S_q} \gamma_{qs} W_{sj} + u_{qj} \quad (6)$$

β_{qj} 1. aşama katsayıları, γ_{qs} ($q=0,1,\dots,S_q$) 2. aşama katsayıları, W_{sj} 2. aşama açıklayıcı değişkenleri, u_{qj} 2. aşama tesadüfi etkileridir. Buradaki tesadüfi etkiler, sıfır ortalamalı çok değişkenli normal dağılıma sahiptir (Raudenbush vd., 2004).

3. BULGULAR

Betimleyici istatistikler Tablo 1'de gösterilmiştir.

Tablo 1. Matematik başarısında sürekli değişkenlere ilişkin belirleyici istatistikler

	N	Ortalama	Standart Sapma	Minimum	Maksimum
Sosyo-ekonomik statü	4799	-0.95	1.08	-4.57	2.22
Matematik Aktiviteleri	156	0.43	0.73	0.00	3.00
Öğrenci-Öğretmen ilişkisi	156	-0.07	0.04	-0.44	0.00

Uygulamada 1. aşama modeli;

$$\eta_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(ES) + \beta_{2j}(C) \quad (7)$$

2. aşama modeli;

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}(OL_1) + \gamma_{02}(OL_2) + \gamma_{03}(OL_3) + \gamma_{04}(MA) + \gamma_{05}(\ddot{O}\ddot{O}i) + u_{0j}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10}$$

$$\beta_{2j} = \gamma_{20}$$

şeklindedir.

(8)

Tablo 2’de İki aşamalı Bernoulli modelinin çıktısı verilmiştir.

Tablo 2 İki aşamalı Bernoulli modeli çıktısı

Sabit Etkiler (Fixed Effects)	Katsayılar (Coefficients)	ODDS Oranı	
Sabit, γ_{00}	0.2932 (0.2737)	1.3408 (0.781;2.301)	
Öğrenci Özellikleri			
Sosyo-ekonomik statü, γ_{10}	0.2325*** (0.0330)	1.2617 (1.183;1.346)	
Cinsiyet, γ_{20}	0.4130*** (0.0768)	1.5114 (1.300;1.757)	
Okul Özellikleri			
Küçük kasaba, γ_{01}	-1.7670** (0.5055)	0.1708 (0.063;0.463)	
Kasaba, γ_{02}	-0.5124* (0.2881)	0.5990 (0.339;1.058)	
Şehir, γ_{03}	0.0787 (0.2758)	1.0819 (0.628;1.864)	
Büyük şehir	0 ^a	-	
Matematik Aktiviteleri, γ_{04}	0.5166** (0.1378)	1.6763 (1.277;2.200)	
Öğrenci-Öğretmen ilişkisi, γ_{05}	7.0872** (2.2918)	1196.5836 (13.021;109965.641)	
Tesadüfi Etkiler (Random Effects)	Varyans Bileşenleri (Variance Components)	Serbestlik Derecesi (df)	Chi-square (χ^2)
Okul Aşaması, u_{0j}	2.2976***	150	1253.05278

*p<.05, **p<.01, ***p<.001, 0^a: Referans grubu

Tabloda katsayılar sütunundaki parantez içindeki değerler standart hataları, ODDS oranı sütunundaki parantez içindeki değerler ise güven aralıklarını göstermektedir. Tablo 2’ye göre, matematik başarısında etkili olduğu düşünülen tüm faktörlerin istatistiksel olarak anlamlı olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bu faktörlerin tamamının matematik başarısı üzerinde pozitif etkiye sahip olduğu gözlemlenmiştir. Öğrencinin sosyo-ekonomik durumunun yükseltilmesi, okuldaki matematik aktivitelerinin sayısının artırılması ve öğrencinin öğretmen ile olan ilişkisinin daha iyi hale getirilmesinin, öğrencinin matematik başarısını arttırdığı söylenebilir. Bunun yanı sıra, erkek öğrencilerin kız öğrencilere göre matematikte daha başarılı olduğu ve öğrencinin ikamet ettiği yerin

gelişmişliğinin ve büyüklüğünün artmasının da matematik başarısını arttırdığı görülmüştür. Buna göre, kasaba veya küçük kasaba olarak tanımlanan yerlerde ikamet eden öğrencilerin matematik başarısı büyük şehirlerde ikamet eden öğrencilere göre daha düşüktür.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Matematik başarısı ile öğrencilerin ekonomik, sosyal ve kültürel statüsü, cinsiyeti, okulun bulunduğu konum, okulun sağladığı matematik aktiviteleri ve öğretmen öğrenci ilişkisi değişkenleri arasındaki ilişkileri araştırmak amacı ile bu çalışmada çok aşamalı modeller kullanılmıştır. Belirleyici istatistikler Tablo 1’de, iki aşamalı Bernoulli model çıktısı ise Tablo 2’de gösterilmiştir. Örneklemin %43’ünü kız öğrenciler, %57’sini ise erkek öğrenciler oluşturmaktadır. Bununla birlikte, mevcut veri setinin %9.6’sını küçük kasabalar, %32.1’ini kasabalar, %31.4’ünü şehirler ve %26.9’unu da büyük şehirler oluşturmaktadır.

PISA’daki matematik başarısı diğer birçok çalışmada (Chiu ve Xihua, 2008, Chow vd., 2007) incelenmesine rağmen, bu çalışmada çok aşamalı hiyerarşik modellerin özel bir durumu olan iki aşamalı Bernoulli modeli kullanılarak matematik başarısına etki eden diğer faktörler de incelenmiştir. Analiz, SPSS ve HLM 6.04 paket programları kullanılarak yapılmıştır.

Bu çalışmada Milli Eğitim Bakanlığı’ndan elde edilen PISA 2003 verisi kullanılmıştır. Kayıp veriler silindikten sonra, analize 156 okuldaki 4799 öğrenci dahil edilmiştir. Çalışmada genelleştirilmiş lineer modellerden, iki aşamalı Bernoulli modeli kullanılmıştır.

Ülkemizde Ekonomik, Sosyal ve Kültürel Statüsü düşük olan ailelerdeki çocukların küçük yaşlarda çalışmaya mecbur kalmaları, okuldaki başarılarını etkilemektedir. Bu durum ülkemizin doğusunda çocukların okula hem kayıt olmasına, hem de devam etmesine engel olabilmektedir (Dünya Bankası Raporu, 2005). Bu çalışmada da sosyo-ekonomik kültürel düzeyi yüksek olan öğrencilerin matematikte daha başarılı olduğu görülmektedir.

Uygulamada, matematik başarısında seçilen tüm değişkenlerin istatistiksel olarak anlamlı olduğu ve başarıya pozitif etki sağladığı görülmüştür. Okullardaki matematik aktivitelerinin sayısı, öğrencilerin öğretmenlerle olumlu ilişkileri ve öğrencilerin sosyo-ekonomik ve kültürel statüsü matematik başarısında etkili olduğu göz önüne alındığında, öğretmen ve öğrencilerin birlikte katılabileceği çeşitli aktiviteler düzenlenmesi, matematik yarışmalarının yapılması ve öğretmenler ile öğrencilerin birlikte vakit geçirebileceği ortamların sağlanması (tiyatro, sinema, piknik vb. aktiviteler) önerilebilir. Ayrıca öğrencilerin matematik dersine daha sıcak bakması adına matematiğin günlük hayatta nerelerde ve nasıl kullanıldığını anlatan seminerler düzenlenebilir.

Çalışmada, Halpern’in (2000) çalışmasında da olduğu gibi erkeklerin kızlara göre matematik alanında daha başarılı olduğu görülmüştür. Örneğin; erkeklerin matematikte başarılı olma şansı, kızların şansından %51 daha fazladır. Ülkemizde özellikle Doğu ve Güneydoğu Bölgelerinde kızların okula devam etmelerindeki güçlük ve hatta okula gidememeleri göz önüne alındığında, bu konunun üzerinde önemle durulması gereken bir konu olduğu görülmektedir (Dünya Bankası Raporu, 2005). Bu sebeple, öncelikle ülkemizin doğusuna daha fazla yatırım yapılması, kaynakların eşit dağıtılabilmesi ve mevcut eşitsizliğin önüne geçebilmek adına “Temel Eğitime Destek”, “Eğitime %100 Destek”, “Çocuk Dostu Okullar” ve “Haydi Kızlar Okula” gibi projelerin yürütülmesi bu bölgelerdeki sorunun çözümüne katkı sağlayacaktır. Bu ise ciddi anlamda maddi gereksinimlere ihtiyaç duyulduğunu göstermektedir.

Okulun bulunduğu yerin de matematik başarısında etkili olduğu Tablo 2’den görülmektedir. Dünya Bankası’nın raporunda da görüldüğü gibi, küçük ve gelişmemiş bölgelerde okuyan öğrencilerin diğer yerleşim yerlerinde okuyanlara göre başarısı daha düşüktür. Bu sebeple, küçük yerleşim yerlerindeki okulların maddi ve manevi olarak desteklenmesi, öğretmen yetersizliğinin ve ulaşım zorluğunun giderilmesi gerektiği görülmektedir. Literatürde kasaba, köy gibi gelişmemiş bölgelere eğitim için ayrılan payın artırılması bu sorunu çözmede en büyük etkenlerden biri olarak görülmektedir. Sonuç olarak, öğretmen seçimlerinde daha dikkatli davranılması, öğrenci öğretmen ilişkilerinin daha iyi seviyeye getirilmesi ve öğretmen maaşlarında yapılacak olan iyileştirmeler çok daha başarılı ve aydın bir nesil yetişmesinde çok büyük rol oynayacaktır.

5. KAYNAKLAR

Aksit, N., 2007. Educational reform in Turkey. *International Journal of Educational Development*, 27, 129-137.

Chiu, M. M., Xihua, Z., 2008. Family and motivation effects on mathematics achievement: Analyses of students in 41 countries. *Learning and Instruction*, 18, 321-336.

Chow, B. W., Chiu M. M., Mebride-Chang, C., 2007. Universals and specifics in learning strategies: Explaining adolescent mathematics, science and reading achievement across 34 countries. *Learning and Individual Differences*, 17, 344-365.

Dunn, C., Chambers, D., Rabren, K., 2004. Variables affecting students' decisions to drop out of school. *Remedial and Special Education*, 25, 314.

Dünya Bankası, 2005. Okul öncesi eğitimden orta öğretime etkili, adil ve verimli bir eğitim sisteminin sürdürülebilir yolları. Rapor No: 32450-TU.

Halpern, D. F., 2000. Sex differences in cognitive abilities. Third Edition, London: Erlbaum.

Hammouri, H. A. M., 2004. Attitudinal and motivational variables related to mathematics achievement in Jordan: findings from the Third International Mathematics and Science Study (TIMSS). *Educational Research*, 46(3), 241-257.

Heck, R. H., Thomas, S. L., 2000. *An introduction to multilevel modeling techniques*. Lawrence Erlbaum Associates, London.

Hedeker, D., Gibbons, R., 1994. A random-effects ordinal regression model for multilevel analysis. *Biometrics*, 50(4), 933-944.

Hox, J., 1998. Multilevel modeling: When and Why?. In: Balderjahn, I., Mathar, R., ve Schader, M. (Eds.) *Classification. Data Analysis, And Data Highways*, Springer, New York, 147-154.

Organisation for Economic Co-operation and Development, 2005. *PISA 2003 Technical Report*. Paris: OECD.

Osborne, J. W., 2000. Advantages of hierarchical linear modeling. *Practical Assessment, Research and Evaluation*, 7(1), Available at: <http://PAREonline.net/getvn.asp?v=7&n=1> (accessed June 1, 2005).

Ramirez, M. J., 2006. Understanding the low mathematics achievement of Chilean students: A cross_national analysis using TIMSS data. *International Journal of Educational Research*, 45, 102-116.

Raudenbush, S. W., Bryk, A. S., 2002. *Hierarchical linear models: Applications and data analysis methods*. Second Edition, Thousand Oaks, Sage Publications.

Raudenbush, S. W., Bryk, A. Cheong, Y. F., Congdon, R., Toit, M., 2004. *HLM 6: Hierarchical linear and nonlinear modeling*. Lincolnwood. IL: Scientific Software International (Second printing with revisions).

Wang, D. B., 2004. Family background factors and mathematics success: A comparison of Chinese and US students. *International Journal of Educational Research*, 41, 40-54.

Wilkins, J. L. M., 2004. Mathematics and Science Self-Concept: An International Investigation. *The Journal of Experimental Education*, 72(4), 331-346.

EXAMINING OF MATHEMATICS ACHIEVEMENT IN TURKEY USING TWO LEVEL BERNOULLI MODEL

ABSTRACT

The purpose of this study was to examine the effects of gender, socio-economical and cultural status, school location, number of mathematical activities in school and teacher-student relationship variables on mathematics achievement using two-level Bernoulli model as a special case of hierarchical generalized linear models. The sample was chosen from students who participated in Programme for International Student Assessment (PISA) in Turkey in 2003. This data consist of 4799 15-year-old Turkish students in 156 schools. This clustered data set with a two-level hierarchical structure examined students who were nested within different schools. Two levels Bernoulli model was used to estimate coefficients and to model differences across schools. Results from this study indicate that mathematics activities and school location variables have positive effects while student-teacher relation variable has strong positive effect on mathematics achievement. Also, it is shown that higher socio-economic and cultural status of students' family is increased mathematics performance too.

Keywords: Two level Bernoulli model, Mathematics achievement, PISA.

TEK DEĞİŞKENLİ ZAMAN SERİLERİNDE MODEL SEÇİM ÖLÇÜTLERİ ÜZERİNE BİR İNCELEME

Hilal GÜNEY*

Reşat KASAP**

ÖZET

Bu çalışmada, Akaike Bilgi (AIC), Son Kestirim Hatası (FPE), Hannan-Quinn Bilgi (HQ), Düzeltilmiş Akaike Bilgi (AICC) ve Schwarz Bilgi (SIC) Ölçütleri dikkate alınarak, tek değişkenli zaman dizileri modellerinde uygun model derecesinin seçilmesi incelenmiştir. Ölçütlerin birbirleri ile karşılaştırılması, Monte Carlo simülasyon yöntemi kullanılarak hangi ölçütün hangi gecikme sayısını kaç kez seçtiği çalışmaları yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Model seçim ölçütleri, Simülasyon, Zaman serileri.

1. GİRİŞ

Zaman serileri analizinde modelleme sürecinin en önemli aşamalarından biri uygun model seçimidir. Tek değişkenli zaman serilerinde uygun model seçimi uygun model derecesinin belirlenmesiyle aynı anlama gelir. Uygun modeli seçmek için en çok olabilirlik (Maximum likelihood) yöntemi gibi varsayımları ve ulaştıkları noktalar birbirinden farklı olan birçok yöntem kullanılabilir. En çok olabilirlik yöntemi, daima en yüksek olasılıklı seçimi verir. Bununla birlikte en çok olabilirlik yöntemi, doğru boyutu seçmek için uygun bir biçim değildir (Schwarz, 1978). Otoregresif (AR) modeller ile Hareketli Ortalamalar (MA) modellerinde uygun model derecesinin belirlenmesi için kullanılan bazı ölçütler vardır. Farklı parametre sayısına sahip farklı modeller arasından en uygun dereceli modeli seçmek için Akaike tarafından en çok olabilirlik prensibinin genişletilmiş biçimi 1974'te geliştirilmiştir. Akaike'nin önerisi, her bir j modeli için ayrı ayrı olabilirlik fonksiyonunu maksimize etmek olarak ifade edilebilir (Akaike, 1974; Schwarz, 1978).

Zaman serileri analizinde modelleme süreci için Box-Jenkins yaklaşımı çok sık kullanılır. Bu metoda göre model tespiti yapılırken öncelikle serilerin durağan olup olmadığına bakılır. Bunun için Otokorelasyon (ACF) ve Kısmi Otokorelasyon (PACF) katsayıları incelenir. Bu katsayılar istatistiksel olarak anlamsız ise seriyi durağan hale getirmek için uygun fark alma işlemleri uygulanır. İkinci olarak ACF ve PACF'nin grafiksel davranışları incelenir. ACF, otoregresif modeller için üstel veya sinüzoidal olarak azalırken, hareketli ortalamalar modelleri için q gecikmeden sonra aniden kesilir. PACF ise otoregresif modeller için p gecikmeden sonra aniden kesilirken, hareketli ortalamalar modelleri için üstel veya sinüzoidal olarak azalır. ACF ve PACF'nin ikisinde de salınımlı bir düşüş varsa bu durum Otoregresif Hareketli Ortalamalar (ARMA) sürecini belirtir. Son olarak sıfırdan farklı ACF ve PACF yapısıyla p ve q model dereceleri belirlenir. Tek değişkenli zaman serilerinde modelin derecesi kabaca

* Gazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, Ankara, e-posta: hguncy@gazi.edu.tr

** Gazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, Ankara, e-posta: rkasap@gazi.edu.tr

belirlendikten sonra parametreler tahmin edilir. Parametre tahmini genel olarak momentler yöntemi, en çok olabilirlik yöntemi ve bilinen küçük kareler yöntemiyle yapılır. Geçici modelin parametre tahminleri yapıldıktan sonra modelin uygunluğu incelenir. Modelin uygunluğunun incelenmesi, artıklara dayalı bir incelemedir. A_t sürecinin beyaz gürültü olma varsayımı, normal dağılıma sahip olması ve artıklara ilişkin otokorelasyonların sıfır olması durumları araştırılır. Uygun modelin *ACF* ve *PACF* grafiklerinin beyaz gürültü sürecinin *ACF* ve *PACF*'lerin yapısına benzemesi istenir.

Zaman serileri analizinde, bir seri için birden fazla uygun model elde edilebilir. Bunlardan en iyi modeli seçmek için ise model seçim ölçütleri kullanılır (Wei, 1990; Box ve Jenkins, 1994).

Model seçim ölçütleriyle ilgili literatürde birçok çalışma vardır. Bunlardan ilki olan Akaike, Son Kestirim Hatası (Final Prediction Error) *FPE* ölçütünü otoregresif modeller için denemiştir. Kestirim hata karesi ortalaması olarak tanımlanan *FPE* ölçütünün, tahminin yanlılığı ve varyansı arasında karşılıklı iyi bir denge oluşturduğunu göstererek bu yöntemin iyi sonuçlar verdiğini belirtmiştir (Akaike, 1969). Akaike, bu ölçütün durağan ve bağımsız beyaz gürültü sürecinden üretilen otoregresif modeller için tanımlamış ve en küçük *FPE* değerine sahip modeli en iyi model olarak önermiştir. Bu çalışmada Akaike, *FPE* ölçütünün tutarlı olduğunu da göstermiştir (Akaike, 1970). Akaike, *ARMA* modeller için en çok olabilirlik yöntemini denemiş ve bu yöntemi geliştirerek uygunluğunu göstermiştir (Akaike, 1973). Ayrıca klasik en çok olabilirlik yöntemini yeniden gözden geçirmiş ve Akaike Bilgi Ölçütü (Akaike Information Criterion) *AIC*'yi tanımlamıştır (Akaike, 1974). Akaike bundan başka, *AIC*, *FPE* ve Bayes yöntemini otoregresif modellerde deneyerek, *AIC* model seçim ölçütünün kullanılabilirliğini örneklerle göstermiştir (Akaike, 1979). Hannan ve Quinn, güçlü tutarlı bir tahmin etme yönteminin tekrarlı logaritma yöntemi kullanılarak geliştirilebileceğini göstermiştir. Ayrıca bu çalışmada önerilen Hannan-Quinn (*HQ*) Ölçütünün, diğer ölçütlere oranla daha az eksik tahmin ettiği gösterilmiştir. Sonuç olarak kesin bir yargıya ulaşamamış olsa da bu ölçütün, örnek hacminin büyük olduğu otoregresyon modellerinde daha iyi bir yaklaşımda bulunduğunu ortaya koymuştur (Hannan ve Quinn, 1979). Quinn, Hannan ve Quinn'in 1979'da yaptıkları çalışmada geliştirdikleri ölçütü, çok değişkenli *AR* süreçlerinde denemiştir. Tekrarlı logaritma kullanılan bu ölçüt, çok değişkenli *AR* süreçleri için tavsiye edilmiştir (Quinn, 1980). Hurvich ve Tsai, *AIC*'ye yanlılık için düzeltme uygulanarak oluşturulan düzeltilmiş *AIC*'yi regresyon modelleri ve otoregresif zaman serileri için denemişlerdir. Bu düzeltmenin yalnızca küçük örnek hacmine sahip model için geçerli olduğu belirtilmiştir. Ayrıca gerçek model sınırlı boyutlu olduğunda, düzeltilmiş *AIC*'nin diğer ölçütlerden daha iyi tahmin sonuçları verdiği gösterilmiştir (Hurvich ve Tsai, 1989). Bedrick ve Tsai, küçük örnek hacimli, çok değişkenli regresyon modelleri için düzeltilmiş *AIC* ölçütünü geliştirmişlerdir. Ayrıca bu çalışma, düzeltilmiş *AIC*'nin Kullback-Leibler bilgisinin yansız tahmin edicisi olduğunu açıklamaktadır. Küçük örnek hacimli tarımsal gözlemler üzerinde yapılan karşılaştırmada, düzeltilmiş *AIC* diğer ölçütlerden daha iyi sonuç vermiştir (Bedrick ve Tsai, 1994). Schwarz, farklı boyutlu modellerden birini seçme problemi için Bayes çözümünü önermiştir (Schwarz, 1978). Stone, çalışmasında *AIC* ve *SIC* ölçütünü karşılaştırmıştır. Bu çalışmada parametre sayısı sonsuz kabul edilmiştir. Gerçek modellerde parametre sayısı sonsuz olamayacağından bu karşılaştırmanın bir gerçekliği bulunmadığını belirtmiştir (Stone, 1979).

Bu çalışmanın konusu, ele alınan beş farklı model seçim ölçütünün tek değişkenli durağan otoregresif ve hareketli ortalamalar serileri açısından karşılaştırılmasıdır. Bu karşılaştırma simülasyon programları vasıtası ile yapılmıştır.

2.YÖNTEM

2.1 Otoregresif (AR) Modeller ve Hareketli Ortalamalar (MA) Modelleri

Gecikmeleri cinsinden ifade edilebilen zaman dizisi, *AR* model olarak adlandırılır (Box ve Jenkins, 1994). Eğer geçmiş dönemden sadece bir tane gözleme bağlı bir *AR* modeli söz konusu ise “birinci dereceden *AR* modeli”, *p* tane geçmiş gözlem değerine bağlı *AR* modeli söz konusu ise “*p*. dereceden *AR* modeli” olarak adlandırılır ve *AR(p)* şeklinde gösterilir. *p*. dereceden otoregresif süreç genel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + A_t \quad (1)$$

Burada $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ modelin bilinmeyen fakat tahmin edilecek parametreleridir. *p*, modelin derecesi ve A_t ise sıfır ortalamalı, σ^2 sabit varyanslı beyaz gürültü sürecidir (Enders, 2004).

Aynı dönemin hata terimi ile belirli sayıda geçmiş dönemin hata terimlerinin doğrusal bir bileşimi olarak ifade edilebilen bir zaman dizisi söz konusu ise bu modeller, *MA* modelleri olarak adlandırılır. *MA* modelleri de *AR* modellerine benzer şekilde içerdikleri geçmiş hata terimi sayısına göre belirlenir. Eğer geçmiş dönemden sadece bir tane hata terimine bağlı bir *MA* modeli söz konusu ise “birinci dereceden *MA* modeli”, *q* tane geçmiş hata terimine bağlı bir *MA* modeli söz konusu ise “*q*. dereceden *MA* modeli” olarak adlandırılır.

MA(q) modeli genel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$Z_t = A_t - \theta_1 A_{t-1} - \theta_2 A_{t-2} - \dots - \theta_q A_{t-q} \quad (2)$$

Burada, $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ modelin tahmin edilecek parametrelerini, *q* ise *MA* modelinin derecesini göstermektedir (Enders, 2004).

2.2 Model Seçim Ölçütleri

Zaman serilerinde model seçim ölçütleri üzerine yapılan pek çok çalışmada genellikle belli başlı seçim ölçütleri dikkate alınmıştır. Bu seçim ölçütlerinin çok sayıda türevi üzerinde yeni bakış açıları verilmiştir. Bu makalede bilinen beş model seçim ölçütü üzerinde durulacağından, bunlara ilişkin kuramsal yapı aşağıda özetlenmiştir.

2.2.1 Akaike Bilgi Ölçütü

Akaike, Kullback-Leibler bilgisini log-olabilirlik fonksiyonunun maksimum noktasına dayandıran bir çözüm yolu bulmuştur (Burnham ve Anderson, 2004). Çünkü en çok olabilirlik tahminleri, uygun koşullar altında asimptotik olarak etkindir ve gerçek değer çevresinde parametrelerin küçük değişimlerine karşı duyarlıdır. Ayrıca en çok olabilirlik fonksiyonu nicelik olarak da ifade edilmeye uygundur (Akaike, 1974).

AIC 'nin uygulamadaki yaygın kullanım şekli,

$$AIC = n \ln \hat{\sigma}^2 + 2k \quad (3)$$

biçimindedir. Bu eşitlikte, modeldeki toplam parametre sayısı k ile örnek hacmi ise n ile gösterilmiştir. $\hat{\sigma}^2$, beyaz gürültü teriminin varyansı olan σ^2 'nin en çok olabilirlik tahmin edicisidir. Bu varyansın tahmini,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{RSS}{n} = \frac{\sum (\hat{e}_i^2)}{n} \quad (4)$$

eşitliği ile elde edilir. Burada RSS , modelden elde edilen artıkların kareleri toplamını, n , örnek hacmini ifade etmektedir.

Farklı modeller için hesaplanan AIC değerlerinden en küçük olanına sahip model en iyi model olarak seçilir (Box ve Jenkins, 1994).

2.2.2 Düzeltilmiş Akaike Bilgi Ölçütü

Akaike'nin yaklaşımı, temel bir teoriye dayanan model seçimine ve başka teorik çalışmalara da izin vermiştir. AIC ölçütü, parametre sayısı örnek hacmine göre fazla olduğunda, başka bir ifadeyle küçük örnek hacmiyle çalışıldığında iyi sonuçlar vermemektedir. Genelde yaklaşık olarak

$$\frac{n}{k} < 40 \quad (5)$$

olduğunda AIC ölçütü sapma için ek bir düzeltmeye ihtiyaç duyar (Burnham ve Anderson, 2004).

$$AIC_c(k) = \log \hat{\sigma}_k^2 + \frac{n+k}{n-k-2} \quad (6)$$

n örnek hacmi ve p uydurulan modelin gecikme sayısıdır. En küçük AIC_c değerine sahip model en iyi model olarak alınır (Luna, 1995).

n , k 'ya göre büyüdüğünde diğer bir ifadeyle $\frac{n}{k}$ oranı yaklaşık olarak 40'tan büyük olduğunda, AIC_c , AIC 'ye yaklaşır ve AIC iyi sonuçlar vermeye başlar (Burnham ve Anderson, 2004). AIC_c kullanılması gereken durumlarda AIC kullanmak literatürde çok yapılan bir hatadır (Burnham ve Anderson, 2004).

2.2.3 Son Kestirim Hatası

Modelin optimum gecikme sayısı p 'yi tahmin etmenin bir yolu da p 'nin değerini seçmektir. Bu seçim, tahmin edilmiş ortalama hata karelerini minimize eden bazı üst sınırların altındaki değerlerden birini seçerek yapılır. Akaike bu sonucu kullanarak, FPE ölçütünü önermiştir (Luna, 1995). FPE ölçütü, AR modellerin derecesinin sınanması amacıyla önerilmiştir (Akaike, 1969; Baran ve Bacanlı, 2006).

AR modellerinin gecikme sayısını belirlemek için ilk tanımlama Akaike tarafından 1969'da yapılmıştır. Bu yöntem, gelecek gözlemlerin kestirimini yapmak için geçmiş gözlemlerin doğrusal kombinasyonunu kullanır. t zamanı için $Z_t, Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots$ gözlemleri verilmiş ve gelecek Z_{t+1} gözlemi kestirilmek isteniyorsa, en iyi bir adım öte kestirim ya da son kestirim $\hat{Z}_t(1)$, geçmiş gözlemlerin lineer kombinasyonları olarak

$$Z_t(1) = -\phi_1 Z_{t-1} - \dots - \phi_p Z_{t-p} \quad (7)$$

şeklinde verilir. Bu eşitlik son kestirim hatası $\varepsilon_t(1)$ 'in kare ortalamasını minimize ettiği için en iyi lineer kombinasyondur. Ortalama hata karesi ise aşağıdaki gibi verilebilir,

$$E[\varepsilon_t(1)]^2 = E[Z_{t-1} - \hat{Z}_t(1)]^2 = \sigma_\varepsilon^2 \quad (8)$$

Bu yüzden son kestirim ortalama hata karesi, artık varyansı olarak da değerlendirilir. Bir adım ileri kestirim hatası sadece katsayılar kesin olarak bilindiğinde kullanılabilir. Katsayıların yerine en küçük kareler tahminleri koyulduğunda, tahmin edilmiş tek adım kestirimin ortalama hata karesi σ_ε^2 olarak ifade edilir (Parkhurst, 1992). Akaike, bu hata karesi kestirimini, artıkların en çok olabilirlik tahminini kullanarak aşağıdaki gibi göstermiştir,

$$FPE(j) = \frac{n+k}{n-k} \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \quad (9)$$

(Akaike, 1969). Burada n , uydurulan model için gözlem sayısıdır. Artıkların varyansının en çok olabilirlik tahmin edicisi

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \hat{\rho}_0 + \hat{\phi}_1 \hat{\rho}_1 + \dots + \hat{\phi}_p \hat{\rho}_p \quad (10)$$

şeklinde. Eğer $FPE(p) - p$ grafiği çizilirse, grafiğin minimum noktasındaki p değeri, AR modeli için uygun dereceyi gösterir (Parkhurst, 1992). Diğer bir deyişle en küçük FPE değerine sahip model en uygun model olarak seçilir.

2.2.4 Schwarz Bilgi Ölçütü

Schwarz, değişik boyutlara sahip modellerden bir tanesini seçme problemini, Bayes çözümüyle denemiştir. Model derecesini belirlemek için Bayes çözümü altında bir seçim ölçütü sunmuştur. AIC gibi Schwarz Bilgi Ölçütü (SIC) de cimrilik prensibinin (principle of parsimony) nitel olarak matematiksel formülasyonunu verir.

Schwarz bilgi ölçütü aşağıdaki gibi verilir,

$$SIC = \ln(\text{ençokolabilirlik}) - \frac{1}{2} \ln(n)k \quad (11)$$

Burada, k tahmin edilen parametre sayısını, n ise gözlem sayısını ifade eder (Schwarz, 1978).

SIC , Bayes bilgi ölçütüne asimptotik bir yaklaşımdır. Bu yaklaşım, örnek hacmi arttıkça en yüksek sonsal (posterior) olasılığın etkilerini gösterir. İki varsayım göz önüne alınır. Bunlardan ilki, aynı gecikme sayısına sahip fakat farklı parametrelili modellerin oluşturduğu sınıfın, sıfır olmayan önsel (priori) olasılıklı olması, ikincisi ise ceza terimi sabit tutularak uygun olmayan modelin saptanmasıdır. Schwarz bu varsayımlara dayanarak SIC ölçütünü önermiştir (Neftçi, 1982).

Diğer model seçim ölçütlerinde olduğu gibi, SIC her model için hesaplanır ve en küçük SIC değerine sahip model en iyi model olarak seçilir (Koehler ve Murphree, 1988; Burnham ve Anderson, 2004).

AIC ve SIC modelin uygunluğu için iki objektif ölçüttür. Fakat bu iki ölçüt model derecesini belirlemek için eklenen ceza (penalty) terimi açısından farklıdır. Bu ceza terimi SIC ölçütünde $\frac{1}{2} \log(n)$ 'dir ve AIC 'deki $2k$ ceza teriminden farklı olarak daha düşük boyutlu modeller için daha uygun bir belirleme ölçütüdür. Bu düşük boyutlu model, en az 8 ya da daha fazla gözlem içermelidir (Schwarz, 1978).

2.2.5 Hannan-Quinn Bilgi Ölçütü

Hannan ve Quinn tek değişkenli otoregresif modeller için kullanılacak tutarlı tahmin edicinin tekrarlı logaritma yöntemine dayandırıldığını göstermişlerdir. Diğer tutarlı model seçim yöntemleriyle kıyaslayarak Hannan-Quinn (HQ) Bilgi Ölçütünün derece seçiminde eksik tahmine daha az meyilli olduğunu açıklamışlardır (Hannan ve Quinn, 1979). Quinn bu yöntemi çok değişkenli otoregresif modeller için tavsiye etmiştir (Quinn, 1980). Hannan $ARMA$ modelleri için bu ölçütün güçlü tutarlılığını göstermiştir (Hannan, 1980).

HQ model seçim ölçütü aşağıda verilmiştir,

$$HQ = n \log \hat{\sigma}_e^2 + 2k \log \log(n) \quad (12)$$

Burada, n örnek hacmini k ise modeldeki parametre sayısını göstermektedir (Hannan ve Quinn, 1979).

3. BULGULAR

Bu bölümde, AR ve MA modellerinde uygun gecikme sayısının belirlenebilmesi amacıyla kullanılan bazı bilgi ölçütlerinin karşılaştırması için Monte Carlo yöntemiyle bir simülasyon programına yer verilmiştir. Bu simülasyon çalışmasında AIC , FPE , HQ , $AICC$, SIC ölçütleri ele alınmıştır.

Çalışmanın her üç durumunda da dört ayrı örnek hacmi ($n=60$, $n=120$, $n=240$ ve $n=600$) ele alınmıştır. Bu örnek hacimleri, gerçek bir uygulamaya benzetebilmek açısından 12'nin katları olarak tercih edilmiştir. Bu 4 ayrı örnek hacmi ve yukarıda ayrıntılı olarak verilen modeller için 1000 tekarlı simülasyon 12 gecikmeye kadar gerçekleştirilmiş ve her model için ele alınan model seçim ölçütlerinin hangi gecikme sayısını kaç kez seçtiği hesaplanmıştır. Bu deneysel çalışmada Matlab 2006 bilgisayar programı kullanılmıştır.

Simülasyon çalışması aşağıda verilen modeller üzerinde yapılmıştır. Önce ele alınan AR modelinden $n=60$ hacminde seri elde edilmiş ve bu seri için incelenen tüm model seçim ölçütlerinin hangi gecikme sayısını seçtiği belirlenmiştir. Bu işlem 1000 kez tekrarlanarak hangi ölçütün hangi model derecesini $n=60$ örnek hacmi için kaç kez seçtiği hesaplanmıştır. Ardından aynı döngü $n=120$, $n=240$ ve $n=600$ hacmindeki örnekler için tekrarlanmıştır. Her bir AR modeli için yapılan bu simülasyon MA modeller için de uygulanmıştır. AR ve MA modeller için ortalama 0, varyans ise 1 olarak alınmıştır. Hata terimleri ise 0 ortalamalı ve σ^2 sabit varyanslı normal dağılımdan üretilmiştir. Simülasyon sonuçları Tablo 1, Tablo 2 ve Tablo 3'te verilmiştir.

$$AR(3) : Z_t = 0.3Z_{t-1} - 0.7Z_{t-2} + 0.2Z_{t-3} + A_t \quad (13)$$

$$AR(4) : Z_t = 0.2Z_{t-1} + 0.2Z_{t-2} - 0.1Z_{t-3} - 0.1Z_{t-4} + A_t \quad (14)$$

$$AR(5) : Z_t = 0.2Z_{t-1} + 0.1Z_{t-2} - 0.1Z_{t-3} - 0.3Z_{t-4} + 0.6Z_{t-5} + A_t \quad (15)$$

$$MA(3) : Z_t = A_t - 0.3A_{t-1} + 0.7A_{t-2} - 0.2A_{t-3} \quad (16)$$

$$MA(4) : Z_t = A_t - 0.2A_{t-1} - 0.2A_{t-2} - 0.1A_{t-3} + 0.1A_{t-4} \quad (17)$$

$$MA(5) : Z_t = A_t - 0.2A_{t-1} - 0.1A_{t-2} + 0.1A_{t-3} + 0.3A_{t-4} - 0.6A_{t-5} \quad (18)$$

Tablo 1. Seçilmiş model dereceleri

AR(3) modeli							AR(4) modeli						
n	p	AIC	FPE	HQ	AICC	SIC	n	p	AIC	FPE	HQ	AICC	SIC
60	1	1	1	3	2	1	60	1	483	450	639	544	446
	2	459	418	593	518	417		2	59	59	42	53	59
	3	361	370	304	349	361		3	40	39	39	42	38
	4	91	87	60	79	85		4	281	284	213	272	276
	5	38	48	19	27	48		5	53	65	30	44	62
	6	15	23	11	13	22		6	32	36	15	21	37
	7	10	14	5	7	15		7	17	18	8	9	16
	8	8	12	3	3	13		8	9	14	6	6	18
	9	5	6	1	1	9		9	12	15	5	6	17
	10	5	8	1	1	10		10	5	4	1	1	5
	11	5	7	0	0	10		11	4	7	1	1	7
	12	2	6	0	0	9		12	5	9	1	1	19
120	1	0	0	0	0	0	120	1	131	121	265	148	215
	2	228	219	362	244	321		2	27	25	29	30	30
	3	572	564	541	576	546		3	26	23	28	26	22
	4	95	94	60	93	73		4	650	642	604	648	616
	5	48	52	21	45	35		5	86	87	53	83	68
	6	23	26	10	19	13		6	42	44	18	41	32
	7	12	13	3	11	5		7	15	21	2	11	9
	8	4	5	1	1	1		8	8	14	1	5	3
	9	6	6	1	3	2		9	9	11	0	5	3
	10	5	11	1	4	1		10	2	3	0	0	0
	11	5	7	0	3	2		11	3	3	0	3	2
	12	2	3	0	1	1		12	1	6	0	0	0
240	1	0	0	0	0	0	240	1	2	2	13	2	15
	2	60	58	118	64	119		2	1	1	5	1	5
	3	720	715	792	730	791		3	1	1	5	1	5
	4	114	114	68	111	68		4	780	768	894	801	892
	5	44	47	15	43	15		5	101	106	49	93	49
	6	27	27	3	24	3		6	49	49	25	49	25
	7	14	15	2	13	2		7	31	32	7	26	7
	8	12	12	1	9	1		8	17	18	2	15	2
	9	2	3	0	0	0		9	6	7	0	3	0
	10	4	5	1	3	1		10	2	3	0	2	0
	11	0	1	0	0	0		11	3	5	0	2	0
	12	3	3	0	3	0		12	7	8	0	5	0
600	1	0	0	0	0	0	600	1	0	0	0	0	0
	2	0	0	2	0	4		2	0	0	0	0	0
	3	773	770	908	782	936		3	0	0	0	0	0
	4	115	116	61	113	44		4	802	797	936	806	953
	5	58	58	20	54	14		5	108	110	48	108	39
	6	26	26	5	25	1		6	39	40	11	36	7
	7	12	13	3	11	1		7	21	21	3	21	1
	8	3	3	0	3	0		8	14	14	1	13	0
	9	6	6	1	5	0		9	5	6	1	5	0
	10	3	4	0	3	0		10	6	6	0	6	0
	11	3	3	0	3	0		11	2	2	0	2	0
	12	1	1	0	1	0		12	3	4	0	3	0

Tablo 2. Seçilmiş model dereceleri

AR(5) modeli

MA(3) modeli

AR(5) modeli							MA(3) modeli						
n	p	AIC	FPE	HQ	AICC	SIC	n	q	AIC	FPE	HQ	AICC	SIC
60	1	62	53	118	86	51	60	1	1	0	2	1	0
	2	20	15	26	25	15		2	399	350	526	469	324
	3	1	0	2	1	0		3	252	230	270	273	214
	4	4	4	6	4	4		4	87	90	67	88	83
	5	718	686	725	745	659		5	56	57	46	57	54
	6	83	85	61	73	83		6	46	45	28	38	37
	7	41	45	28	32	48		7	35	42	20	26	39
	8	28	35	16	16	39		8	31	39	15	19	45
	9	14	18	7	7	25		9	28	40	10	13	45
	10	15	26	6	6	30		10	30	41	5	5	51
	11	8	17	3	4	22		11	18	34	9	9	54
	12	6	16	2	1	24		12	17	32	2	2	54
120	1	0	0	4	2	3	120	1	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0		2	293	282	423	314	370
	3	0	0	0	0	0		3	473	459	478	476	480
	4	0	0	0	0	0		4	70	73	46	66	50
	5	783	754	873	810	835		5	49	50	20	46	30
	6	117	117	86	112	98		6	29	30	14	29	22
	7	51	63	28	46	40		7	16	18	8	14	11
	8	21	25	3	12	10		8	19	20	3	13	7
	9	14	17	4	11	7		9	11	14	2	8	5
	10	7	13	2	3	3		10	13	16	4	9	8
	11	3	4	0	3	3		11	12	17	1	13	6
	12	4	7	0	1	1		12	15	21	1	12	11
240	1	0	0	0	0	0	240	1	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0		2	105	104	183	111	184
	3	0	0	0	0	0		3	700	695	738	712	737
	4	0	0	0	0	0		4	96	97	57	94	57
	5	804	788	919	819	919		5	38	38	15	36	15
	6	105	109	61	103	61		6	23	25	3	18	3
	7	38	42	12	31	12		7	15	16	2	13	2
	8	17	19	5	14	5		8	9	9	1	7	1
	9	15	16	2	16	2		9	2	4	1	2	1
	10	15	16	0	12	0		10	3	3	0	2	0
	11	2	5	0	2	0		11	7	7	0	5	0
	12	4	5	1	3	1		12	2	2	0	0	0
600	1	0	0	0	0	0	600	1	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0		2	1	1	5	1	6
	3	0	0	0	0	0		3	805	801	921	812	941
	4	0	0	0	0	0		4	104	105	59	103	44
	5	788	784	926	795	954		5	45	45	9	43	5
	6	121	123	61	120	39		6	25	27	4	23	3
	7	33	33	7	31	4		7	7	7	1	6	1
	8	25	25	4	24	3		8	5	5	0	5	0
	9	15	14	1	16	0		9	4	4	0	4	0
	10	9	9	0	8	0		10	2	3	1	2	0
	11	7	8	0	4	0		11	1	1	0	1	0
	12	2	4	1	2	0		12	1	1	0	0	0

Tablo 3. Seçilmiş model dereceleri

MA(4) modeli							MA(5) modeli						
n	q	AIC	FPE	HQ	AICC	SIC	n	q	AIC	FPE	HQ	AICC	SIC
60	1	286	242	434	356	229	60	1	357	300	531	424	282
	2	97	86	110	112	76		2	47	39	46	55	38
	3	57	53	55	61	50		3	46	40	51	52	34
	4	216	187	209	235	172		4	206	196	189	223	183
	5	88	83	68	81	71		5	80	75	55	76	69
	6	60	64	39	51	59		6	51	57	31	50	57
	7	48	51	30	39	46		7	61	62	35	47	60
	8	47	62	22	29	62		8	44	50	20	30	48
	9	29	46	15	17	48		9	34	47	13	14	53
	10	30	42	8	10	54		10	30	47	15	16	60
	11	26	44	8	7	60		11	23	46	8	8	53
	12	16	40	2	2	73		12	21	41	6	5	63
120	1	112	111	223	127	175	120	1	165	151	343	182	266
	2	54	47	91	60	78		2	18	17	23	18	21
	3	42	38	46	45	43		3	32	31	35	31	30
	4	558	535	527	571	535		4	548	540	502	560	519
	5	94	96	55	83	67		5	83	86	44	84	67
	6	30	35	17	26	22		6	39	39	23	37	29
	7	29	33	15	25	23		7	27	28	12	24	19
	8	13	18	9	16	15		8	21	24	8	16	12
	9	17	19	7	14	12		9	18	21	2	13	9
	10	13	14	2	8	7		10	17	21	6	15	11
	11	19	25	5	15	14		11	19	25	1	10	7
	12	19	29	3	10	9		12	13	17	1	10	10
240	1	3	3	10	3	10	240	1	10	10	51	11	52
	2	3	3	9	4	10		2	1	1	2	1	2
	3	7	7	8	7	8		3	1	1	4	2	4
	4	785	770	883	804	882		4	786	769	853	796	851
	5	103	104	61	96	61		5	105	111	66	102	67
	6	47	50	21	43	21		6	41	46	15	38	15
	7	20	22	3	14	3		7	21	19	3	20	3
	8	10	13	1	10	1		8	19	21	6	17	6
	9	9	8	2	8	2		9	4	5	0	3	0
	10	5	9	1	5	1		10	6	9	0	6	0
	11	5	5	0	3	0		11	3	5	0	2	0
	12	3	6	1	3	1		12	3	3	0	2	0
600	1	0	0	0	0	0	600	1	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0		2	0	0	0	0	0
	3	0	0	0	0	0		3	0	0	0	0	0
	4	815	812	939	818	955		4	794	789	927	802	954
	5	98	99	42	98	35		5	113	113	54	112	37
	6	42	41	13	41	7		6	45	46	13	44	8
	7	26	28	4	26	2		7	18	21	3	16	0
	8	3	3	1	3	1		8	12	12	1	11	1
	9	7	8	1	7	0		9	8	9	1	5	0
	10	6	6	0	5	0		10	6	6	1	6	0
	11	2	2	0	1	0		11	3	3	0	3	0
	12	1	1	0	1	0		12	1	1	0	1	0

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, tek değişkenli zaman otoregresif ve hareketli ortalamalar modellerinde uygun model derecesinin seçilmesinde kullanılan bazı model seçim ölçütleri incelenmiştir. Bu amaçla; *AIC*, *FPE*, *HQ*, *AICC* ve *SIC* ölçütleri dikkate alınmıştır. Seçilen farklı model yapıları ve örnek hacimleri kullanılarak ölçütlerin doğru gecikme sayısını seçme başarılarının karşılaştırılması hedeflenmiş ve bu karşılaştırma sümülasyon programları vasıtasıyla yapılmıştır.

Tüm sonuçlara genel olarak bakıldığında örnek hacmi n arttıkça, model seçim ölçütlerinin çok az değişkenlik gösterdiği ve doğru gecikme sayısını seçme oranının arttığı görülmektedir. *SIC*'de değişkenlik çok daha azdır. Bu durum bu ölçütün sınırlı otoregresyon için tutarlı bir model seçim ölçütü olmasının direk bir sonucudur (Luna, 1995). $n/k < 40$ olan durumlar için *AICC* en iyi sonuçları verir ve en az değişkenlik gösterir. Bu sonuç, Hurvich ve Tsai (1989)'in sonuçları ile uyusmaktadır. Bununla birlikte örnek hacmi arttıkça *AICC*, *AIC*'ye yaklaşmaktadır ve bu iki ölçüt hemen hemen aynı sonuçları vermektedir. *FPE*'nin aşırı tanımlama eğilimi dikkat çekmektedir ve bu durum Hurvich ve Tsai (1989) ile uyusmaktadır. Yeterince büyük örnek hacmi için ise *HQ* diğer ölçütlere nazaran daha iyi sonuçlar vermektedir ve bu sonuç da Hannan ve Quinn (1979) ile uyusmaktadır. *HQ* yine *MA* modelleri için tüm örnek hacimlerinde diğer ölçütlere göre daha iyi sonuç vermektedir. Tüm bunlara ilave olarak örnek hacmi arttıkça Akaike tarafından önerilen *FPE*, *AIC* ve *AICC* ölçütlerinin sayısal değerlerinin birbirine yaklaştığı ve aşırı tanımlama eğilimlerinin fazla olduğu gözle çarpmaktadır.

5. KAYNAKLAR

Akaike, H., 1969. Fitting autoregressive model for prediction. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 21: 243-247.

Akaike, H., 1974. A new look at the statistical model identification. *I.E.E.E Transactions on Automatic Control*, AC-19: 716-722.

Baran, T., Bacanlı, Ü. G., 2006. Uygun stokastik model seçim ölçütlerinin değerlendirilmesi. *IMO Teknik Dergi*, 264: 3987-4002.

Bedrick, E. J. and Tsai, C. L. , 1994. Model selection for multivariate regression in small samples", *Biometrics*, 50: 226-231.

Burnham, K. P., Anderson, D. R., 2004. Multimodel inference understanding AIC and BIC in model selection. *Sociological Methods & Research*, 33: 261-304.

Box, G. E. P., Jenkins, G. M., Reinsel, G. C., 1994. *Time series analysis: Forecasting and a control*, Prentice Hall, New Jersey, 10-100, 200-202 .

Enders, W., 2004. *Applied econometric time series*. Wiley, United States of America, 96-97.

- Hannan E. J., Quinn B. G. , 1979. The determination of the order of an autoregression. *Journal of the Royal Statistical Society*, 41: 190-195.
- Hannan E. J., 1980. The estimation of the order of an ARMA process. *The Annals of Statistics*, 8: 1071-1081.
- Hurvich, C. M., Tsai C. T., 1989. Regression and time series model selection in small samples. *Biometrika*, 76: 297-307.
- Luna, X., 1995. An improvement of Akaike's FPE criterion to produce its variability. *Journal of Time Series Analysis*, 19: 457-471.
- Koehler, A. B., Murphree, E. S., 1998. A comparison of the Akaike and Schwarz criteria for selecting model order. *Applied Statistics*, 37: 187-195.
- Neftçi, S. N., 1982. Specification of economic time series models using Akaike's criterion. *Journal of the American Statistical Association*, 77: 537-540.
- Parkhurst, A. M., 1992. Evaluation of order determination procedures in ARMA models. Doktora Tezi, Presented to the Faculty of The Graduate Collage at The University of Nebraska, 91-93(İngilizce).
- Quinn, B. G., 1980. Order determination for a multivariate autoregression. *Journal of Time Series Analysis*, 42, 182-185.
- Schwarz, G. D., 1978. Estimating the dimension of a model. *The Annals of Statistics*, 6: 461-464.
- Stone, M., 1979. Model selection criteria of Akaike and Schwarz. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 41: 276-278.
- Wei, W. W. S., 1990. *Time series analysis: Univariate and multivariate analysis*. Addison-Wesley Publishing company, Inc. , England, 32-57, 67-84.

EXAMINING MODEL SELECTION CRITERIA FOR SINGLE VARIABLE TIME SERIES

ABSTRACT

In this study, by using Akaike Information Criteria (AIC), Final Prediction Error (FPE), Hannan-Quinn Information Criteria (HQ), Adjusted Akaike Information Criteria (AICC) and Schwarz Information Criteria (SIC), in selecting appropriate model degree in single variable time series are examined. In order to compare these criteria, Monte Carlo simulation method is employed to compute the lag lengths selected by each criteria.

Keywords: Model selection criteria, Simulation, Time series.