

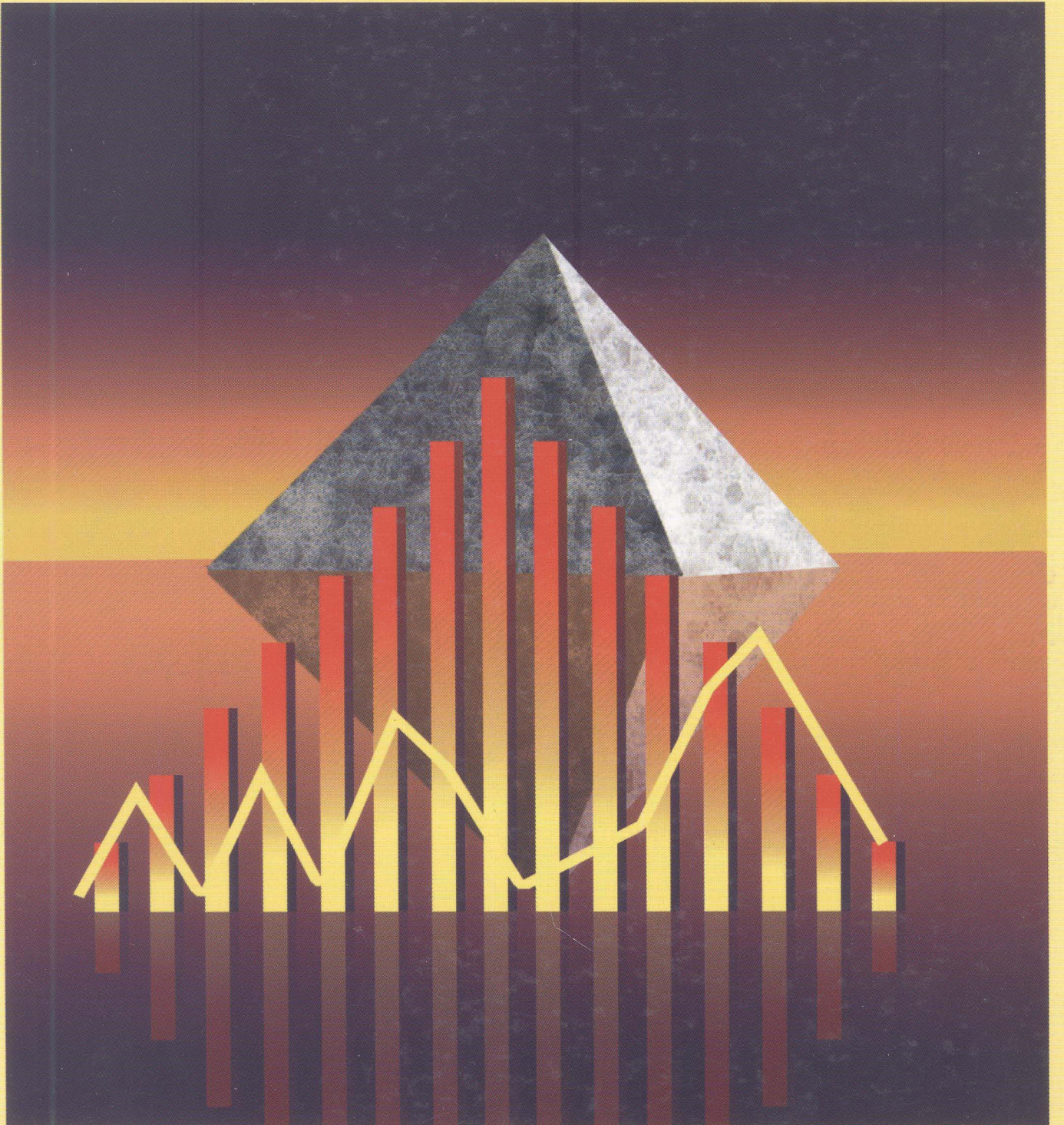


İstatistik Araştırma *Journal of Statistical Research **Dergisi***

Cilt 04 Volume

No 02 Number

Ağustos 2005 August



İSTATİSTİK ARAŞTIRMA DERGİSİ

Sahibi

Türkiye İstatistik Kurumu Adına
Ömer DEMİR
Türkiye İstatistik Kurumu Başkanı

Genel Editör
Fetih YILDIRIM

Editörler Kurulu

Alaattin ERKANLI, Duke Univ., USA
Ali YAZICI, Atılım Üniv., Ankara
Alptekin ESİN, Gazi Üniv., Ankara
Aydın ÖZTÜRK, Ege Üniv., İzmir
Aykut TOROS, Hacettepe Üniv., Ankara
Bedriye SARACOĞLU, Gazi Üniv., Ankara
Ceyhan İNAL, Hacettepe Üniv., Ankara
Ergün KARAAGAĞLU, Hacettepe Üniv., Ankara
Erkan TÜRE, Marmara Üniv., İstanbul

Fatin SEZGIN, Bilkent Üniv., Ankara
Fikri AKDENİZ, Çukurova Üniv., Adana
İmdat KARA, Başkent Üniv., Ankara
Mithad GÖNEN, Mem. Sloan Kett. Cancer Center,
USA
Olca ARSLAN, Çukurova Üniv., Adana
Refik SOYER, George Washington University, USA
Soner GÖNEN, Gazi Üniv., Ankara
Zehra MULLUK, Başkent Üniv., Ankara

Amaç ve Kapsam

İstatistik Araştırma Dergisi, İstatistiksel araştırmaların kalitesinin artırılmasını, istatistik metodolojisi ve uygulamasının geliştirilmesini, literatürde yer alan çalışmaların tartışılmasını, istatistik uygulamalarıyla ilgili araştırmaların ele alınmasını, teorik ve uygulamalı alanlardaki araştırmacılar arasındaki iletişimin ortak çalışmalar ve yayınlarla güçlendirilmesini amaçlayan bir yayındır.

İstatistik alanında aşağıdaki özellikleri taşıyan çalışmalar Dergi kapsamında değerlendirilir:

1. İstatistik Teorisi, Olasılık Teorisi ve Stokastik Süreçler, Örneklem ve Alan Araştırmaları, Uygulamalı İstatistik, İstatistiksel Kalite Kontrol, Biyoistatistik, Risk Aktuarya Analizi ve Sigortacılık, Ekonometri Yöneylem Araştırması Uygulamaları, Demografi, Bilgisayar Uygulamaları ve Bilgi Sistemleri, gibi istatistiğin her dalında yeni bilgi üretimine yönelik olan tüm araştırmalar.
2. Sosyal Bilimler, Fen Bilimleri, Sağlık Bilimleri ve benzeri alanlara ilişkin veri derleme, veri çözümlemesi ve veri sunumu ile ilgili metodolojilerin geliştirilmesine yönelik araştırmalar.
3. Türkiye’de ve Dünya’da Resmi İstatistiklerin geliştirilmesine yönelik araştırmalar.
4. Yayınlanan İstatistiksel verileri yeni bilimsel gelişmelerle analiz edip yorumlayan araştırmalar.

Yayın İlkeleri

1. Bu dergiye alınacak araştırmaların, özgün, yaratıcı, bilimsel kuram ve metodolojiye uygun olmaları; mevcut uygulama ve kurama katkıda bulunmaları esastır. Yayın dili Türkçe’dir.
2. Dergi, istatistiğin alanına giren tüm konuları kapsayan araştırmalara açıktır.
3. Dergide, 3(üç) hakem tarafından incelenip “Yayımlanabilir” olurlarını almış araştırmalar yayımlanır. Yayımlanmayan yazılar sahibine geri verilmez.
4. Makaleler basılı dört kopya ve manyetik ortamda (3.5’lik diskette) dergi sekreteryasına gönderilir. Yayımlanmak üzere kabul edilmiş araştırma son düzeltmesi için yazar(lar)a gönderilir. Bu aşamada metnin değiştirilmesi değil, metne son şeklinin verilmesi beklenir.
5. Bu yayının 5846 Sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu’na göre her hakkı Başbakanlık Devlet İstatistik Enstitüsü Başkanlığı’na aittir, Gerçek veya tüzel kişiler tarafından izinsiz çoğaltılamaz ve dağıtılamaz.
6. Metin hazırlama kalıbına, telif haklarına uymayan herhangi bir yerde yayınlanmış ve yayımlanmak üzere kabul edilmiş çalışmalar genel editör tarafından yazarına iade edilir.
7. Tüm yazışmalar dergi sekreteryası ile yapılır. Abonelik, eski nüshalar, makale ayrı basımları, reklamlar ve ödemelerle ilgili talepler isteme ve abon e adresine yapılır.

ISSN: 1303 – 6319

Dergi Sekreteryası

Gönül ERDEM - Atalay BİÇYAP

İstatistik Araştırma Dergisi Sekreterya Adresi Türkiye İstatistik Kurumu Strateji Geliştirme Daire Başkanlığı	Tel: +90 312 410 07 02 – 410 07 32 Faks: +90 312 425 35 85 E-mail: dergi@die.gov.tr URL: http://www.die.gov.tr
İsteme ve Abone Adresi Döner Sermaye İşletmesi Necatibey Cd. No: 114 06100 Yücecepe / ANKARA	Tel: +90 312 410 03 23 – 410 03 19 Faks: +90 312 417 58 86

JOURNAL OF STATISTICAL RESEARCH

Owner

On Behalf of Turkish Statistical Institute
Ömer DEMİR

President, Turkish Statistical Institute

Editor in Chief

Fetih YILDIRIM

Editorial Board

Alaattin ERKANLI, Duke Univ., USA

Ali YAZICI, Atılım Üniv., Ankara

Alptekin ESİN, Gazi Üniv., Ankara

Aydın ÖZTÜRK, Ege Üniv., İzmir

Aykut TOROS, Hacettepe Üniv., Ankara

Bedriye SARACOĞLU, Gazi Üniv., Ankara

Ceyhan INAL, Hacettepe Üniv., Ankara

Ergün KARAAGAOĞLU, Hacettepe Üniv., Ankara

Erkan TÜRE, Marmara Üniv., İstanbul

Fatin SEZGIN, Bilkent Üniv., Ankara

Fikri AKDENİZ, Çukurova Üniv., Adana

Imdat KARA, Başkent Üniv., Ankara

Mithad GÖNEN, Mem. Sloan Kett. Cancer Center,
USA

Olcay ARSLAN, Çukurova Üniv., Adana

Refik SOYER, George Washington University, USA

Soner GÖNEN, Gazi Üniv., Ankara

Zehra MULUK, Başkent Üniv., Ankara

Objective and Scope

Journal of Statistical Research is a publication that aims to improve the quality of statistical researches, to develop the statistical methodology and application, to discuss the researches which take place in the literature, to assess the researches on statistical applications, to strengthen the communication between the researchers in theoretical and applied fields by associated studies and publications.

Researches having the following qualities in the field of statistics, are taken into consideration in the scope of the Journal:

1. Researches dealing with the production of new information on statistical matters such as Statistics Theory, Probability Theory and Stochastic Processes, Sampling and Survey, Applied Statistics, Statistical Quality Control, Biostatistics, Risk Actuary Analysis and Insurance, Econometrics, Operational Research, Demography, Computer Applications and Information Systems.
2. Researches dealing with the development of methodologies on data collection, evaluation and presentation in the fields of Social Sciences, Applied Sciences, Medical Sciences, etc.,
3. Researches dealing with the development of Official Statistics of Turkey the world.
4. Researches, dealing with the interpretation and analyses of the statistical data published with new scientific developments.

Principles of Publication

1. Researches are to be original, creative, fit in methodology and science and contribute to the existing application and theory. Publication language is Turkish.
2. The Journal is open to researches covering all the subjects in the field of statistics.
3. Researches approved by a three referee's mission are published. Unpublished articles are not given back to the author.
4. Articles are sent to the Secretariat of Journal in the forms of print out (4 copies) and magnetic (3,5'' diskette). Researches that are accepted to be published are re-sent to the author(s) for correction. It is expected that at this stage the article is to be given the final form and not to be changed any more.
5. According to the Law No. 5846, SIS holds the copyrights of this publication. The Journal is not duplicated or distributed without authorisation.
6. Researches, which are not in conformity with the form of text preparation, copyrights and previously published or accepted to be published are given back to the author by General Editor.
7. All of the correspondence is to be done with the Secretariat. Requests regarding to the subscription, preceding issues, offprint, advertisements and payments are submitted to the address of Request and Subscription.

ISSN: 1303 - 6319

Journal Secretary

Gönül ERDEM - Atalay BİÇYAP

Journal of Statistics Research Secretary Address
Turkish Statistical Institute
Strategy Development Department

Tel: +90 312 410 07 02 – 410 07 32

Faks:+90 312 425 35 85

e-mail: dergi@die.gov.tr

URL: <http://www.die.gov.tr>

Request and Subscription Address
Revolving Fund Management

Tel: +90 312 410 03 23 – 410 03 19

Fax: +90 312 417 58 86

Necatibey Street No: 114
06100 Yücepete / ANKARA

SIRALI KÜME ÖRNEKLEMESİNDE YARDIMCI DEĞİŞKEN KULLANILARAK YIĞIN ORTALAMASININ TAHMİNİ

Yaprak Arzu ÖZDEMİR*

ÖZET

Sıralı Küme Örneklemesi birimlerin ilgilenilen değişken bakımından ölçümünün maliyet, zaman ve emek anlamında pahalı olduğu, ancak birimleri pahalı ölçüm gerektirmeyen bazı tekniklerle aynı değişken bakımından sıralamanın mümkün olduğu durumlarda sıkça kullanılan bir örneklem yöntemi. Bu gibi durumların ortaya çıktığı çevre, tarım ve tıp gibi alanlarda, sıralı küme örneklemesi yığın ortalamasını tahmin etmede basit tesadüfi örnekleme göre daha etkindir. Bu çalışmada, sıralı küme örneklemede birimlerin yardımcı değişken kullanılarak sıralandığı durum ele alınarak, yığın ortalamasının tahmini incelenmiştir. Ayrıca ladin ağaçlarının yükseklik ve gövde çapı verisi kullanılarak, simülasyon çalışması ile sıralı küme örnekleme ve basit tesadüfi örnekleme farklı örnek çapları için göreceli etkinlikleri bakımından karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: *Sıralı Küme Örneklemesi, Basit Tesadüfi Örneklemesi, Yardımcı Değişken, Göreceli Etkinlik, Doğrusal Regresyon Modeli*

1. GİRİŞ

Günümüzde özellikle çevre, ekoloji, tarım ve tıp gibi alanlara yönelik çalışmalarda, ilgilenilen değişkenin ölçümünün maliyet bakımından oldukça pahalı ya da zaman ve emek bakımından oldukça zor olduğu durumlarla sıkça karşılaşmaktadır. Dolayısıyla bu tür alanlarda, en az örnek çapı ile yığını en iyi şekilde temsil edecek bir örneklem yönteminin kullanılmasına ihtiyaç duyulmaktadır. Bu amaca yönelik bir örneklem yöntemi ilk olarak 1952 yılında McIntyre tarafından sıralı küme örnekleme (SKÖ) adıyla önerilmiştir (McIntyre, 1952). McIntyre SKÖ ile elde edilen örnekten meralardaki ortalama ürün miktarını tahmin ederek SKÖ yönteminin yığın ortalamasını tahmin etmede basit tesadüfi örnekleme (BTÖ) göre oldukça etkin bir örneklem yöntemi olduğunu göstermiştir.

SKÖ'de örnek seçimi iki adımda yapılmaktadır. Örnek seçim işleminde öncelikle; herhangi bir $F(y)$ dağılım fonksiyonuna sahip bir yığından, m çaplı m tane tesadüfi örnek BTÖ ile seçilir ve bu örneklerin her biri "küme" olarak isimlendirilir. Bu işlem yığından seçilecek m^2 çaplı basit tesadüfi örneğin her biri m çaplı m kümeye tamamen tesadüfi olarak paylaşılmasıyla da yapılabilir. Örnek seçim işleminin birinci

* Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü 06500 Beşevler/ ANKARA

adımında, her bir küme ilgilenilen Y değişkeni bakımından hassas olmayan bir ölçümle küçükten büyüğe doğru sıralanır. Bu ölçüm, yüksek maliyet gerektirmeyen düşük düzeyli bir ölçüm olup, birimlerin sıralanması; daha önceki deneyimler, görsel bir ölçüm veya yardımcı bir değişken kullanılarak yapılabilir. İkinci adımda, birinci kümeden ilk sıradaki birim, ikinci kümeden ikinci sıradaki birim ve bu şekilde devam edilerek m 'nci kümeden m 'nci sıradaki birim alınarak, istenilen hassaslığı sağlayan yüksek düzeyli bir ölçümle Y değişkeni bakımından ölçülür. Buradan elde edilecek $Y_{(1)}, Y_{(2)}, \dots, Y_{(m)}$ örneği, m çaplı sıralı küme örneğini oluşturur. Ayrıca $Y_{(i)}$, $i=1,2,\dots,m$ olmak üzere, i 'nci kümeden hassas ölçüm yapılarak alınan i 'nci sıradaki örnek birimini ifade eder. Birimlerin hassas olmayan ölçümle sıralanmasında hata yapılmadığı varsayımı altında, $Y_{(i)}$ aynı zamanda, m çaplı sıralı küme örneğinde i 'nci kümedeki i 'nci sıra istatistiğini göstermektedir. Ayrıca $Y_{(i)}$ sıra istatistiği, herhangi bir $F(y)$ dağılım fonksiyonuna sahip m çaplı tesadüfi bir örnekteki i 'nci sıra istatistiği $Y_{i:m}$ ile aynı dağılıma sahiptir. Ancak, her bir m çaplı tesadüfi küme, birbirinden bağımsız olduğundan, $Y_{(i)}$ sıra istatistikleri de birbirinden bağımsız olacaktır. SKÖ ile örnek seçim işlemi, istenilen n örnek çapını elde etmek amacıyla, r kez tekrarlanabilir. Böylece r tekrar sonunda $n=mr$ çaplı sıralı küme örneği elde edilir ve n çaplı sıralı küme örneğinden elde edilecek yığın ortalamasına ilişkin tahmin edici,

$$\bar{Y}_{SKÖ} = \frac{1}{mr} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r Y_{(i)j} \quad (1)$$

şeklinde tanımlanır (McIntyre, 1952). Ayrıca yukarıda açıklanan örnek seçim işleminde her bir kümeden farklı sıradaki birimler ölçülerek, çeşitli sıralı küme örneklemeleri geliştirilmiştir. Bu konu ile ilgili bir tanım Çingı ve Ünyazıcı (2002) tarafından yapılmıştır.

Küme içindeki birimlerin, yüksek maliyet gerektirmeyen düşük düzeyli ölçüm teknikleriyle sıralanmasında, herhangi bir sıralama hatası yapılmadığı varsayımı altında, $\bar{Y}_{SKÖ}$ 'ne ilişkin varyans,

$$Var(\bar{Y}_{SKÖ}) = \frac{1}{mr} \sum_{i=1}^m \frac{\sigma_{im}^2}{m} = Var(\bar{Y}_{BTÖ}) - \frac{1}{m^2 r} \sum_{i=1}^m (\mu_{i:m} - \mu_y)^2 \quad (2)$$

şeklinde oluşur. Burada μ_y , Y değişkenine ilişkin yığın ortalamasını, $\mu_{i:m}$ ve σ_{im}^2 ise sırasıyla $Y_{(i)}$ sıra istatistiğine ilişkin yığın ortalamasını ve varyansını ifade eder. Ayrıca aynı n örnek çaplı BTÖ'den elde edilen ortalamaya ilişkin varyans

$$Var(\bar{Y}_{BTÖ}) = \frac{1}{n} \sigma_y^2$$

olmak üzere, σ_y^2 , Y değişkenine ilişkin yığın varyansdır. Buradan ortalamaya ilişkin varyanslar karşılaştırıldığında, etkinlik bakımından (2)'nin daha üstün olduğu görülmektedir. Dolayısıyla SKÖ'nün BTÖ'ye Göreli etkinliği (GE) (Relative Efficiency)

$$GE_{SKÖ} = \frac{Var(\bar{Y}_{BTÖ})}{Var(\bar{Y}_{SKÖ})} = \frac{1}{1 - \left\{ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\mu_{i:m} - \mu_y)^2 / \sigma_y^2 \right\}} \quad (3)$$

şeklinde tanımlanır (Patil vd, 1994). $GE_{SKÖ}$ 'nin büyüklüğü yığının dağılımına, sıralamanın doğruluğuna ve küme çapı m'ye bağlıdır.

SKÖ yönteminin başarısı, özellikle, örnek seçim işleminde birimlerin ilgilenilen Y değişkeni bakımından doğru sıralanıp sıralanmadığına bağlıdır. Sıralama işlemi, ilgilenilen Y değişkenine göre hassas ölçüm gerçekleştirilmeden görsel bir sıralama veya yardımcı değişken kullanılarak sıralama gibi daha ucuz ve kolay bir teknikle yapıldığından, Y değişkeni bakımından sıralama hatası yapılması olasıdır. Bu konuyla ilgili olarak, Dell ve Clutter (1972), David ve Levine (1972), Stokes (1977), Ridout ve Cobby (1987), sıralama hatası durumunda, SKÖ altında yığın ortalamasına ilişkin tahmin edicinin özelliklerini incelemişlerdir. Yapılan bu çalışmalar, yığından birimlerin SKÖ ile farklı teknikler ile sıralanarak seçilmesi durumunda, yığın ortalamasına ilişkin tahmin edicinin sapmasızlık özelliğini koruduğunu ve örnek birimlerinin sıralanmasında tesadüfi bir sıralama oluşturacak kadar hata yapılmadığı sürece, SKÖ'nün BTÖ'ye göre daha etkin bir tahmin yöntemi olduğunu göstermektedir.

SKÖ'de örnek seçim işlemi gerçekleştirilirken, Y değişkenine göre sıralama işlemi, aynı birime ait farklı bir değişken olan X değişkeni kullanılarak yapılabilir. Bu durumda sıralama için kullanılan X değişkenine yardımcı değişken (concomitant variable) adı verilir. Yardımcı değişken ile ilgilenilen değişken arasındaki ilişki ilk olarak Stokes tarafından modellenerek, regresyon modeli yardımıyla yığın ortalaması tahmin edilmeye çalışılmıştır (Stokes, 1977). Ayrıca Yu ve Lam (1997) yardımcı değişkene ilişkin yığın ortalaması biliniyorken, ilgilenilen yığın ortalamasına ilişkin regresyon tahmin edicisini ele almışlardır. Demir ve Çıngı (2000) ise Yu ve Lam (1997)'in çalışmasını gerçek bir veri üzerinde incelemişlerdir.

Bu çalışmada, SKÖ'de örnek seçim işleminin yardımcı değişken kullanılarak yapılması durumunda yığın ortalamasının tahmini tanıtılmıştır. Bu amaçla ikinci bölümde, ilgilenilen değişken Y ile yardımcı değişken X arasındaki ilişki doğrusal regresyon modeli yardımıyla incelenerek, (Y,X)'in iki değişkenli normal dağılıma sahip olduğu varsayımı altında farklı m küme çapları ve ρ_{xy} korelasyon katsayıları için GE değerleri elde edilmiştir. Ayrıca üçüncü bölümde Forest Biometrics (Prodan, 1968)'de yer alan 295 ladin ağacının yükseklik ve gövde çapı verisi kullanılarak simülasyon çalışması ile n=4 ve 8 örnek çapını sağlayan mümkün (m,r) ikilileri için yığın ortalamasına ilişkin varyanslar hesaplanarak SKÖ ve BTÖ, GE bakımından karşılaştırılmıştır.

2. YARDIMCI DEĞİŞKENE GÖRE SIRALAMANIN MODELLENMESİ

SKÖ'nün uygulanmasında, ilgilenilen Y değişkeni bakımından birimleri sıralamak amacıyla kullanılacak önemli yöntemlerden biri de yardımcı değişkene göre sıralamadır. Yardımcı değişken, aynı birime ait farklı bir değişken olmak üzere; bu değişkenin Y değişkeni ile sıkı ilişkili, hassas ölçümünün kolay ve ihmal edilebilecek kadar maliyetli olması tercih edilir. Dolayısıyla, SKÖ'ye göre örnek seçme işleminin ilk adımında, birimler Y değişkeni yerine, yardımcı değişken X 'e göre hassas ölçüm yapılarak sıralanır. İkinci adımda ise, X değişkeni bakımından sıralanan birimlerden, i 'nci kümedeki i 'nci sıradaki birim ($i=1,2,\dots,m$) Y değişkeni bakımından hassas ölçümle ölçülür. Bu işlem istenilen örnek çapını elde etmek üzere r kez tekrarlanabilir. Tekrarlar birbirinden bağımsız olup $r=1$ iken örnek seçiminin adımları Tablo 1'de gösterilmiştir. Böylece Y değişkenine göre ölçülecek birimler öncelikle X değişkenine göre sıralandığından, Y değişkeni için sıralama X değişkenine göre olacaktır. Bu durumda, X değişkenine ilişkin i 'nci kümedeki i 'nci sıra istatistiği $X_{(i)}$ 'ye karşılık gelen Y değişkeni, $Y_{[i]}$ ile ifade edilir ve $Y_{[i]}$, i 'nci kümedeki i 'nci indirgenmiş sıra istatistiği (induced order statistics) olarak isimlendirilir. X ve Y değişkenleri arasındaki korelasyon katsayısı $\rho_{xy} = 1$ iken $Y_{[i]} = Y_{(i)}$ olacaktır.

Tablo 1. Yardımcı Değişkene Göre Sıralama Yapılması Durumunda m çaplı sıralı küme örneğinin oluşumu

Yığından seçilen örnek birimleri	Küme				
	1	(Y_{11}, X_{11})	(Y_{12}, X_{12})	...	(Y_{1m}, X_{1m})
	2	(Y_{21}, X_{21})	(Y_{22}, X_{22})	...	(Y_{2m}, X_{2m})
	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
m	(Y_{m1}, X_{m1})	(Y_{m2}, X_{m2})	...	(Y_{mm}, X_{mm})	
<i>Birinci Adım</i> ↓					
Sıralanan örnek birimleri	Küme				
	1	$(Y_{[1]}^1, X_{(1)}^1)$	$(Y_{[2]}^1, X_{(2)}^1)$...	$(Y_{[m]}^1, X_{(m)}^1)$
	2	$(Y_{[1]}^2, X_{(1)}^2)$	$(Y_{[2]}^2, X_{(2)}^2)$...	$(Y_{[m]}^2, X_{(m)}^2)$
	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
m	$(Y_{[1]}^m, X_{(1)}^m)$	$(Y_{[2]}^m, X_{(2)}^m)$...	$(Y_{[m]}^m, X_{(m)}^m)$	
<i>İkinci Adım</i> ↓					
Örneğe alınan örnek birimleri (Sıralı Küme Örneği)	Küme				
	1	$(Y_{[1]}, X_{(1)})$	*	...	*
	2	*	$(Y_{[2]}, X_{(2)})$...	*
	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	*
m	*	*	...	$(Y_{[m]}, X_{(m)})$	

Tablo 1'de $i = 1, 2, \dots, m$ olmak üzere, $\{(Y_{i1}, X_{i1}), (Y_{i2}, X_{i2}), \dots, (Y_{im}, X_{im})\}$, i 'nci küme için yığından tesadüfi olarak seçilen örnek birimlerini, $\{(Y_{[i]}^i, X_{(1)}^i), (Y_{[2]}^i, X_{(2)}^i), \dots, (Y_{[m]}^i, X_{(m)}^i)\}$ i 'nci küme için X değişkenine göre hassas ölçümle küçükten büyüğe doğru sıralanmış örnek birimlerini ve $\{(Y_{[i]}, X_{(i)})\}$, m çaplı sıralı küme örneğinde, i 'nci kümedeki i 'nci örnek birimini ifade eder.

X ve Y değişkenleri arasındaki ilişkinin doğrusal olduğu varsayımı altında, $X_{(i)}$ koşulu altında $Y_{[i]}$ 'nin beklenen değeri aşağıdaki doğrusal regresyon modeli yardımıyla modellenir (Stokes, 1977).

$$E(Y_{i1} / X_{(i)}) = \mu_y + \rho_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (X_{(i)} - \mu_x) \quad i=1,2,\dots,m \quad (4)$$

Bu modelin beklenen değerinin alınması ile i 'nci kümedeki i 'nci indirgenmiş sıra istatistiğinin beklenen değeri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E(E(Y_{i1} / X_{(i)})) = E(Y_{i1}) = \mu_y + \rho_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (E(X_{(i)}) - \mu_x) \quad (5)$$

Yardımcı değişken X 'e göre sıralama yapılması durumunda, $\rho_{xy} = 1$ olmadıkça, Y değişkeninin sıralamasında sıralama hatası ortaya çıkacaktır. Bu durum SKÖ'de hatalı sıralama (SKÖH) ile ifade edilmek üzere, yığın ortalamasına ilişkin tahmin edici $r > 1$ iken,

$$\bar{Y}_{SKÖH} = \frac{1}{mr} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r Y_{i1j} \quad (6)$$

şeklinde ifade edilir. Bu tahmin edicinin beklenen değeri,

$$E(\bar{Y}_{SKÖH}) = \frac{1}{mr} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r E(Y_{i1j}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left(\mu_y + \rho_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (E(X_{(i)}) - \mu_x) \right) = \mu_y \quad (7)$$

olmak üzere, $\bar{Y}_{SKÖH}$ yığın ortalaması için sapmasız bir tahmin edicidir. Ayrıca bu tahmin edicinin varyansı, r tekrar birbirinden bağımsız olduğundan,

$$Var(\bar{Y}_{SKÖH}) = \frac{1}{m^2 r^2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r Var(Y_{i1j}) = \frac{1}{m^2 r} \sum_{i=1}^m Var(Y_{i1}) \quad (8)$$

olacaktır. Burada $Var(Y_{i1})$ ifadesi, Eşitlik (4)'den faydalanılarak,

$$\begin{aligned} Var(Y_{i1}) &= E[Var(Y_{i1} / X_{(i)})] + Var[E(Y_{i1} / X_{(i)})] \\ &= \sigma_y^2 (1 - \rho_{xy}^2) + \rho_{xy}^2 \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} Var(X_{(i)}) \end{aligned} \quad (9)$$

şeklinde tanımlanır (Stokes, 1977). Böylece, $Var(\bar{Y}_{SKÖH})$ değişkenler arasındaki korelasyon katsayısı ρ_{xy} cinsinden Eşitlik (10)'daki gibi yazılabilir:

$$Var(\bar{Y}_{SKÖH}) = \frac{1}{m^2 r} \sum_{i=1}^m \left(\sigma_y^2 (1 - \rho_{xy}^2) + \rho_{xy}^2 \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} V(X_{(i)}) \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{m^2 r} \left[m\sigma_y^2 (1 - \rho_{xy}^2) + \rho_{xy}^2 \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} \left(m\sigma_x^2 - \sum_{i=1}^m (E(X_{(i)}) - \mu_x)^2 \right) \right] \\
 &= \frac{\sigma_y^2}{mr} - \frac{\rho_{xy}^2 \sigma_y^2}{m^2 r \sigma_x^2} \sum_{i=1}^m (\mu_{i:m(x)} - \mu_x)^2
 \end{aligned} \tag{10}$$

Dolayısıyla sıralama hatası durumunda SKÖH'nin BTÖ'ye GE'liği,

$$GE_{SKÖH} = \frac{Var(\bar{Y}_{BTÖ})}{Var(\bar{Y}_{SKÖH})} = \frac{1}{1 - \left\{ \frac{\rho_{xy}^2}{m\sigma_x^2} \sum_{i=1}^m (\mu_{i:m(x)} - \mu_x)^2 \right\}} \tag{11}$$

şeklinde tanımlanır. Burada μ_x ve σ_x^2 , X değişkenine ilişkin sırasıyla yığın ortalamasını ve varyansını, $\mu_{i:m(x)}$ ise $X_{(i)}$ sıra istatistiğine ilişkin yığın ortalamasını ifade eder.

(Y, X)'in iki değişkenli normal dağılıma sahip oldukları varsayımı altında, farklı m örnek çapları ve ρ_{xy} korelasyon katsayıları için Eşitlik (11)'den yararlanarak hesaplanan GE değerleri Tablo 2'de verilmektedir. GE değerleri hesaplanırken, X değişkeni için standart normal dağılıma ilişkin sıra istatistiklerinin beklenen değerlerinden yararlanılması gerekir. Bu amaçla, standart normal değişken $Z = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x}$

şeklinde tanımlanmak üzere; Z değişkenine ilişkin i'nci sıra istatistiği

$$Z_{(i)} = \frac{X_{(i)} - \mu_x}{\sigma_x} \tag{12}$$

şeklinde ifade edilir. X değişkeni, ortalaması μ_x ve varyansı σ_x^2 olan normal dağılıma sahip olmak üzere, $Z_{(i)}$ sıra istatistiği, ortalaması 0 varyansı 1 olan standart normal dağılımdan çekilen n çaplı örnek için i'nci sıra istatistiğini gösterir. Böylece $Z_{(i)}$ sıra istatistiğinin beklenen değeri

$$E(Z_{(i)}) = \frac{E(X_{(i)}) - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{\mu_{i:m(x)} - \mu_x}{\sigma_x} \tag{13}$$

olur. Eşitlik (13) kullanılarak, Eşitlik (11) yeniden düzenlenirse, $GE_{SKÖH}$ aşağıdaki gibi elde edilecektir:

$$GE_{SKÖH} = \frac{Var(\bar{Y}_{BTÖ})}{Var(\bar{Y}_{SKÖH})} = \frac{1}{1 - \left\{ \frac{\rho_{xy}^2}{m} \sum_{i=1}^m E(Z_{(i)})^2 \right\}} \tag{14}$$

Standart normal dağılım için i 'nci sıra istatistiğinin beklenen değeri $E(Z_{(i)})$, $m=2(1)10$ olmak üzere, Arnold vd. (1993) tarafından tablo halinde verilmiştir. Tablo 2'deki $GE_{SKÖH}$ değerleri bu tablo değerlerinden yararlanarak hesaplanmıştır.

Tablo 2. (Y,X) iki değişkenli normal dağılıma sahip olmak üzere, farklı m ve $|\rho_{xy}|$ değerleri için $GE_{SKÖH}$ değerleri

		$GE_{SKÖH}$							
$ \rho_{xy} $	m								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
0.20	1.01	1.02	1.02	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03
0.30	1.03	1.04	1.05	1.06	1.07	1.07	1.07	1.07	1.08
0.40	1.05	1.08	1.10	1.11	1.12	1.13	1.14	1.14	1.15
0.50	1.09	1.14	1.17	1.19	1.21	1.22	1.23	1.24	1.25
0.60	1.13	1.21	1.26	1.30	1.33	1.35	1.37	1.39	1.40
0.70	1.18	1.31	1.39	1.46	1.51	1.55	1.58	1.61	1.63
0.80	1.26	1.44	1.58	1.69	1.78	1.86	1.92	1.98	2.03
0.90	1.35	1.63	1.87	2.07	2.25	2.41	2.55	2.67	2.79
1.00	1.47	1.91	2.35	2.77	3.19	3.60	4.00	4.40	4.79

Tablo 2'den görüldüğü gibi;

- m örnek çapı ve $|\rho_{xy}|$ korelasyon katsayısı arttıkça, $GE_{SKÖH}$ değerleri de artmaktadır.
- $|\rho_{xy}|=0$ iken, SKÖ ile elde edilen örneğin basit tesadüfi bir örnekten farkı yoktur. Yani $Var(\bar{Y}_{BTÖ}) = Var(\bar{Y}_{SKÖ})$ olup tüm m değerleri için $GE_{SKÖH}=1$ olmaktadır.
- $|\rho_{xy}|=1$ iken $Var(\bar{Y}_{SKÖH}) = Var(\bar{Y}_{SKÖ})$ özelliğinden dolayı, $GE_{SKÖH}$ değerleri tüm m değerleri için en yüksek değerini almaktadır.
- $|\rho_{xy}| < 0.50$ iken incelenen tüm m değerleri için GE, 1'e yakın değerler alırken, özellikle $|\rho_{xy}| > 0.70$ iken, m arttıkça $GE_{SKÖH}$ değerlerinin diğer korelasyon durumlarına oranla daha fazla arttığı görülmektedir.

3. UYGULAMA

Uygulamada SKÖ'de yardımcı değişken kullanılarak yığın ortalamasının tahminini incelemek amacıyla Tablo 3'de verilen Almanya'nın Kattenbühl bölgesindeki 295 ladin ağacının yükseklik ve gövde çapı verisi kullanılmıştır (Prodan,1968). Özdemir (2005) aynı veriden yararlanarak $n=6$ ($m=3$, $r=2$) için ortalama ağaç yüksekliğini tahmin etmiştir. Ancak bu çalışmada, örnek çapları $n=4$ ve 8'e genişletilerek örnek çapını sağlayan farklı m ve r değerleri ele alınmıştır. Burada problemin, bölgede bulunan ladin ağaçlarına ilişkin ortalama ağaç yüksekliğini, örnek çapları $n=4$ ve 8 için tahmin etmek olduğunu varsayalım. 295 ladin ağacının ortalama yüksekliğini tahmin etmek için kullanılacak bir örnekleme yöntemi ile örneğe çıkan ağaçların her biri üzerinde, yükseklik ölçümü yapılması gereklidir. Ancak bu ölçümün yapılabilmesi, ağacın kesilmesi veya maliyetli ölçme tekniklerinin kullanılması ile mümkündür. Ağaçları keserek ölçüm yapmak ya da yüksek maliyetli ölçme teknikleri kullanmak yerine, yükseklik değişkeni ile sıkı ilişkili, ancak daha düşük maliyetle ve daha kolay ölçülebilecek bir değişken yardımıyla, ağaçların yükseklikleri sıralanabilir. Orman araştırmalarında ağaç gövde çapı, yükseklik ve hacim değişkenleri arasında fonksiyonel bir ilişki olduğu bilinmektedir(Prodan, 1968). Özellikle gövde çapı ve yükseklik değişkenleri arasında pozitif yönde sıkı bir korelasyon vardır. Bu nedenle, ağaçların yükseklikleri, ağaç gövde çapı ölçümlerine göre sıralanabilir. Böylece SKÖ yöntemi ile, örneğe çıkan ağaçların tümü, gövde çapı değişkeni (X) bakımından ölçülerek sıralanır ve sıralanan bu ağaçlardan seçilecek ağaçlar üzerinde yükseklik değişkeni (Y) bakımından maliyetli hassas ölçüm gerçekleştirilir. Bu durumda, yükseklik değerlerinin sıralanmasında, gövde çapı değişkeni yardımcı değişken olacak ve örneğe çıkan ağaçların yalnızca bir kısmı üzerinde yükseklik değişkeni ölçülecektir.

Tablo 3. 295 ladin ağacının gövde çapı ve yüksekliklerine göre dağılımı

Yükseklik (m)	Gövde Çapı (cm)													Toplam		
	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		21	22
26												3	1	1		5
25							1	4	9	12	11	3	2	1		43
24					1	1	14	23	23	19	7					88
23				1	10	24	25	20	5	3	2					90
22			1	7	13	12	7	5		1						46
21		1	2	6	3	1	1									14
20			2	2	3											7
19		1														1
18																-
17	1															1
Toplam	1	1	3	5	17	27	38	48	52	37	35	23	4	3	1	295

Tablo 3'deki 295 birimli yığının Y değişkeni bakımından ortalaması $\mu_y = 23.28$ ve X ve Y değişkenleri arasındaki korelasyon değeri $\rho_{xy} = 0,8130$ 'dur. Yığının dağılımının iki değişkenli normal dağılıma uyup uymadığını araştırmak üzere yapılan Kolmogorov Simirnov uyum iyiliği testi ile yığının iki değişkenli normal dağılıma uymadığı ortaya çıkmıştır. Buna göre SKÖ, SKÖH ve BTÖ'ye göre yığın ortalamasına ilişkin tahmin edicileri karşılaştırmada kullanılacak en uygun yol simülasyon çalışması ile tahmin edicilerin varyanslarını elde ederek, GE değerleri

bakımından karşılaştırmaktır. Bu amaçla, simülasyon çalışması ile $n=4$ ve 8 olmak üzere, bu örnek çaplarını sağlayan mümkün (m,r) ikilileri ($n=4$ iken $(m,r)=(2,2)$, $n=8$ iken $(m,r)=(2,4)$, $(4,2)$) için toplam 3 durumda, SKÖ, SKÖH ve BTÖ'ye göre yığın ortalamasına ilişkin tahmin edicilerin beklenen değerleri ve varyansları hesaplanmıştır. Simülasyon çalışmasında Matlab 6.5 paket programı kullanılarak aşağıdaki adımlar 3 durum için ayrı ayrı uygulanmıştır:

- Adım 1:* SKÖ'ye göre belirlenen n örnek çapını sağlayan (m,r) ikilisi için, 295 çaplı yığından r kez m^2 çaplı tesadüfi bir örnek yerine koyarak örnekleme yöntemi ile seçilerek, yine tesadüfi olarak, her bir tekrar için m çaplı m küme oluşturulmuştur.
- Adım 2:* Sıralama hatası olmadığı duruma karşılık gelmek üzere, ağaçların yüksekliklerine ilişkin Y değişken değerlerine göre sıralama yapılarak, her bir tekrardan m çaplı örnek elde edilmek üzere $n=mr$ çaplı sıralı küme örneği elde edilmiştir.
- Adım 3:* Sıralama hatasının olduğu duruma karşılık gelmek üzere, ağaçların gövde çapına ilişkin X değişken değerlerine göre sıralama yapılarak, her bir tekrardan m çaplı örnek elde edilmek üzere $n=mr$ çaplı sıralı küme örneği elde edilmiştir.
- Adım 4:* BTÖ'ye göre $n=mr$ çaplı tesadüfi bir örnek yerine koyarak örnekleme yöntemi ile seçilmiştir.
- Adım 5:* 2'nci, 3'üncü ve 4'üncü adımda elde edilen örneklerden, sırasıyla yığın ortalamasına ilişkin tahmin değerleri hesaplanmıştır.
- Adım 6:* 1-5 arası adımlar 100000 kez tekrarlanarak, 100000 tekrar sonunda elde edilen tahmin değerlerinin ortalaması (tahmin edicinin beklenen değeri) ve varyansı bulunmuştur. Varyans değerlerinden yararlanılarak SKÖ'nün BTÖ'ye ve SKÖH'nin BTÖ'ye GE'liği hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Tablo 4'de verilmiştir.

Tablo 4. Simülasyon çalışmasından elde edilen beklenen değer, varyans ve GE değerleri

	n=4	n=8	
	m=2 r=2	m=2 r=4	m=4 r=2
$E(\bar{Y}_{BTÖ})$	23,29	23,29	23,28
$E(\bar{Y}_{SKÖ})$	23,28	23,28	23,29
$E(\bar{Y}_{SKÖH})$	23,28	23,28	23,29
$Var(\bar{Y}_{BTÖ})$	0,42	0,21	0,21
$Var(\bar{Y}_{SKÖ})$	0,30	0,15	0,10

$Var(\bar{Y}_{SKÖH})$	0,34	0,17	0,14
$GE_{SKÖ}$	1,41	1,41	2,09
$GE_{SKÖH}$	1,25	1,25	1,57

Tablo 4'den görüldüğü gibi; BTÖ, SKÖ ve SKÖH' ye göre yığın ortalamasına ilişkin elde edilen tahmin edicilerin beklenen değerleri yığın ortalaması $\mu_y = 23.28$ 'e yakın değerler verdiği için tahmin ediciler sapmasızdır. Varyans değerlerine bakıldığında ise, aynı (m,r) değeri için SKÖH'a göre bulunan varyans değeri, SKÖ'ye göre bulunan varyans değerinden daha büyüktür. Ancak hem SKÖ hem de SKÖH'a göre bulunan varyans değerleri aynı (m,r) değeri için BTÖ'den daha küçük değer almaktadırlar. Bunun yanında, aynı (m,r) değeri için sıralama hatasının yapıldığı durumdaki $GE_{SKÖH}$ değerleri, sıralama hatasının yapılmadığı durumdaki $GE_{SKÖ}$ değerlerinden daha küçüktür. Ancak $\rho_{xy} = 0,8130$ olduğundan, $GE_{SKÖH}$ değerleri de 1'den büyük çıkmaktadır. Örnek çapları bakımından GE değerlerine bakıldığında ise, aynı m küme çapına sahip (m,r) çiftleri için ((m,r)=(2,2), (2,4)) $GE_{SKÖ}$ ve $GE_{SKÖH}$ aynı değerleri almaktadır. Dolayısıyla r tekrar sayısının $GE_{SKÖ}$ ve $GE_{SKÖH}$ üzerinde etkili olmadığını gösteren Eşitlik (11) ve (14)'deki sonuçlar, bu uygulama ile de desteklenmektedir. Ayrıca en yüksek $GE_{SKÖ}$ ve $GE_{SKÖH}$ değerleri, n=4 için m=4 ve r=2 iken gerçekleşmektedir.

4. SONUÇ

SKÖ'de ilgilenilen değişkeni sıralamak için kullanılacak yardımcı değişken X ile ilgilenilen değişken Y arasındaki korelasyon katsayısı ρ_{xy} mutlak değerce ne denli yüksek ise, SKÖ altında yığın ortalamasının tahminine ilişkin varyans da o denli küçük çıkacaktır. Bu durum Eşitlik (11)'den de görülmektedir. Sonuç olarak, uygulamada, ilgilenilen değişkenle yüksek derecede korelasyonlu, aynı birime ait bir başka değişkenle sıralama yapılması veya hatasız sıralama yapmayı sağlayacak teknikler kullanılması durumunda, $GE_{SKÖH}$ yüksek değerler alacaktır. Bunun yanında, teorik değerlerin yer aldığı Tablo 2'den ve uygulama sonuçlarının yer aldığı Tablo 4'den görüldüğü gibi, n örnek çapı ne olursa olsun, m küme çapı aynı olan n örnek çapları için $GE_{SKÖ}$ ve $GE_{SKÖH}$ değerleri birbirine eşit olacaktır. Dolayısıyla, yığın ortalamasını tahmin etmede SKÖ'nün ve SKÖH'nin BTÖ'ye göre etkinliği m küme çapı arttıkça artmakta, r tekrar sayısının ise $GE_{SKÖ}$ ve $GE_{SKÖH}$ üzerinde herhangi bir etkisi olmamaktadır. Bu anlamda, uygulamada belirlenen n örnek çapı için, en büyük m küme çapının seçilmesi durumunda, $GE_{SKÖ}$ ve $GE_{SKÖH}$ en yüksek değerini alacaktır.

KAYNAKLAR

ARNOLD, B., BALAKRISHNAN, N., AND NAGARAJA, H.N.(1993), *A First Course in Order Statistics*, John Wiley, New York, 1-107.

DAVID, H.A., LEVINE, D.N.(1972), *Ranked set sampling in the presence of judgment error*, *Biometrics*, 28, 553-555.

- DELL, D.R., CLUTTER, J.L.(1972), *Ranked set sampling theory with order statistics background*, Biometrics, 28, 545-555.
- DEMİR, S., ÇINGİ, H., (2000), *An application of the regression estimator in ranked set sampling*, Hacettepe Bulletin of Natural Sciences and Engineering, Series (B) , 29, 93-101.
- MCINTYRE, G.A. (1952), *A method of unbiased selective sampling using ranked sets*, Australian Journal of Agricultural Research, 3, 385-390.
- ÖZDEMİR, Y. A. (2005), *Sıralı Küme Örneklemesiyle Doğrusal Regresyon Modelinde Parametre Tahminlerinin İncelenmesi*, Doktora Tezi, Ankara.
- PATIL,G.P., SINHA, A.K. AND TAILLIE,C.(1994), *Ranked set sampling*, A Handbook of Statistics, Elsevier Science B.V., vol.12, pp 167-200.
- PRODAN, M.(1968), *Forest Biometrics*, Pergamon Pres Ltd. Oxford, pp.45.
- RIDOUT, M. S. COBY, J.M.(1987), *Ranked set sampling with non-random selection of sets and errors in ranking*, Applied Statistics, 36, 145-152.
- STOKES, L.S.(1977), *Ranked set sampling with concomitant variables*, Commun. Statist. Theor. Meth., A6(12), 1207-1211.
- YU, P.L.H., LAM, K. (1997), *Regression estimator in ranked set sampling*, Biometrics, 53, 1070-1080.

ESTIMATION OF THE POPULATION MEAN USING CONCOMITANT VARIABLE IN RANKED SET SAMPLING

ABSTRACT

Ranked set sampling is frequently used sampling technique where the measurements of sampling units according to the variable under consideration is expensive in all sense, but if it is possible to rank sampling units according to the same variable by means of a method which is not expensive at all. The areas such as environment, agriculture and medicine ranked set sampling are more efficient than the simple random sampling as a sampling method in the sense of estimation the population mean. In this study, estimation the population mean is considered in the case of the units ranking by concomitant variable in ranked set sampling. Moreover using the data about height and diameter of spruce trees ranked set sampling compared with the simple random sampling in the sense of relative efficiency for different sample size by a simulation study.

Key Words: Ranked set sampling, Simple random sampling, Concomitant variable, Relative efficiency, Lineer regression model

VERİ ZARFLAMA ANALİZİ'NDE KARAR VERME BİRİMLERİNİN SIRALANMASI İÇİN SINIFLANDIRMA KRİTERİ TABANLI YENİ BİR MODEL

Hasan BAL*

H.Hasan ÖRKÜ**

ÖZET

Bu çalışmada, Veri Zarflama Analizi (VZA)'nde Karar Verme Birimleri (KVB)'nin sıralanmasında, literatürdeki çapraz etkinlik ve süper etkinlik yöntemlerine bir alternatif olarak, sınıflama tabanlı Çok Kriterli Veri Zarflama Analizi modeli geliştirildi. Önerilen model, hem Veri Zarflama Analizindeki göreceli etkinlik kavramını hem de dış sapmalar toplamının minimum yapılması kriterini kullanmaktadır. Önerilen modelin uygulanabilirliğini göstermek için NATO üyesi 16 ülkeye ait gerçek veri seti kullanıldı.

Anahtar Kelimeler: Veri Zarflama Analizi, sıralama problemi, Hedef programlama, sınıflandırma.

1. GİRİŞ

Veri Zarflama Analizi (VZA)'nde Karar Verme Birimleri (KVB), yapılan çözümlenme sonunda bulunan etkinlik skorlarına göre sıralanmaktadır. En yüksek etkinlik değerine göre sahip karar verme birimi birinci sırada yer alırken, en düşük etkinlik değerine sahip karar verme birimi son sırada yer almaktadır. Fakat, Veri Zarflama Analizinde etkin bulunan karar verme birimlerine "1" etkinlik değeri atanması, etkin olan birimlerin kendi aralarında bir sıralama yapılmasına imkan vermemektedir. Bu güçlüğü aşmak için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemler arasında Süper Etkinlik Yöntemi, Çapraz Etkinlik Yöntemi ve Kanonik Korelasyon Analizi ve Diskriminant Analizi sayılabilir. Bunların bir özetini Adler v.d. (2002) vermiştir. İkinci bölümde Veri Zarflama Analizi, üçüncü bölümde sıralama yöntemlerinden en çok kullanılanları olan Çapraz Etkinlik Yöntemi ve Süper Etkinlik Yöntemi incelendi. Dördüncü bölümde, birimlerin sıralanması için önerdiğimiz sınıflama kriterli Veri Zarflama Analizi modeli tanıtıldı. Beşinci bölümde Sexton v.d. (1986)' den alınan bir örnek üzerinde ve NATO üyesi 1 ülkeye ait gerçek bir veri seti

* Prof. Dr. Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü, e-mail: hasanbal@gazi.edu.tr

** Araş. Gör. Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü, e-mail: hhorkcu@gazi.edu.tr (Haberleşme adresi)

üzerinde önerilen yöntem ve diğer sıralama yöntemleri karşılaştırılmıştır. Yöntemlerin birbirleri ile karşılaştırılmasında Spearman' in sıra korelasyon katsayısı kullanılmıştır. Son bölümde ise sonuç yer almaktadır.

2. VERİ ZARFLAMA ANALİZİ

Farrell (1957)' in fikirlerini geliştiren Charnes, Cooper ve Rhodes (1978) tek bir çıktının tek bir girdiye oranlanmasıyla elde edilen etkinlik değerini, çoklu çıktılarının çoklu girdilere oranlanmasına genişletmişlerdir. Bu sayede her bir KVB için yapay bir çıktı ve yapay bir girdi bulunmakta ve bu yapay çıktı ve girdiler vasıtasıyla KVB'lerin etkinlik değerleri bulunabilmektedir. Burada ağırlıklar, etkinlik değerlerini 1'den büyük yapmayacak şekilde seçilirler.

Veri Zarflama Analizinde herhangi bir birimin etkinliği CCR modeli olarak bilinen temel etkinlik modeli ile ölçülür. CCR modeli aşağıda verilmiştir (Cooper, Seiford ve Tone (2000)):

$$\begin{aligned}
 \max w_o &= \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} \\
 \sum_{i=1}^m v_i x_{io} &= 1 \\
 \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} &\leq 0 \quad j=1,2, \dots, n \\
 u_r, v_i &\geq 0 \quad i=1,2, \dots, m ; r=1,2, \dots, s
 \end{aligned} \tag{1}$$

Burada, w ilgili birimin etkinlik değerini, n KVB sayısını, m girdi sayısını, s çıktı sayısını, v_i ve u_r ise sırasıyla ilgili birimin kullandığı girdi ve çıktı miktarını göstermektedir. Bu model ile KVB'lerin etkinliği ölçülürken modelin her KVB için yani n defa çözülmesi gerekmektedir. Optimal amaç fonksiyonu ilgili KVB'nin etkinlik skorunu vermektedir. Her bir KVB için farklı u_r, v_i ağırlık kümesi seçilecektir. Etkinlik skoru 1'e eşit olan her KVB etkin olarak değerlendirilir. Etkinlik skoru 1'in altında olan her birim de etkin olmayan olarak değerlendirilecektir.

3. SIRALAMA YÖNTEMLERİ

Etkin birimlerin sınıflaması için önerilen ilk yöntem Sexton v.d. (1986) tarafından ortaya konulan çapraz etkinlik matrisidir. Basitçe her bir KVB'nin etkinliğini optimal ağırlıklara göre n defa tekrar hesaplama esasına dayanır. Bu yaklaşımda, önce her bir karar verme birimi için Veri Zarflama Analizi ile etkinlik skorları ve ağırlıklar bulunur. Bulunan bu ağırlıklar ile diğer karar verme birimlerinin etkinlik skoru hesaplanır. Bu şekilde elde edilen çapraz etkinlik skorlarının oluşturduğu çapraz etkinlik matrisi bulunur. Çapraz etkinlik matrisi, (2) denklemi ile ifade edilen çapraz etkinlik skorlarının özetlenmesi esasına dayanır.

$$h_{kj} = \frac{\sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ij}} ; j, k = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

Burada h_{kj} ; k . birimin optimal ağırlıklarına göre etkinliği hesap edilmiş j . birimi göstermektedir. Bu matrisin tüm elemanları $[0,1]$ aralığında değer alıp h_{kk} birimin kendi etkinlik skorunu yansıtmaktadır. Bu aşamadan sonra her bir KVB'nin kendisinin ve diğer KVB'lerin optimal ağırlıklarına göre aldıkları etkinlik sonuçlarının istatistiksel eğilimi ilgili KVB'nin etkinlik sıralaması için kullanılabilir. Burada araştırmacı herhangi bir istatistiksel eğilim ölçüsünü kullanmakta serbest olsa da $\bar{h}_k = h_{kj}/n$ şeklinde tanımlayacağımız aritmetik ortalamanın kullanılması doğal olarak daha hassas sonuçlar verecektir. Burada dikkat edilmesi gereken nokta bu aşamaya kadar n KVB'nin tümü için genel olmasıdır, büyük çaplı veri kümelerinde etkin olmayan birimleri VZA' nın zaten sıraladığından hareketle çapraz etkinlik matrisini sadece etkin birimlere kısıtlayarak uygulamak araştırmacıya önemli bir tasarruf sağlayacaktır.

Etkin karar birimlerin sıralanması için geliştirilen diğer bir yöntem de Andersen ve Petersen (1993) tarafından geliştirilen süper etkinlik modelidir. Bu yöntemdeki temel fikir, incelenen karar verme birimini tüm diğer karar verme birimlerinin doğrusal kombinasyonları ile karşılaştırmaktır. Bu amaçla, incelenen karar verme birimi referans kümeden çıkartılır. Elde edilen süper etkinlik skorunun değeri en yüksek olan karar verme birimi birinci sırada yer alacaktır. Diğer karar verme birimleri de süper etkinlik skor değerine göre büyükten küçüğe sıralanacaktır. İncelenen karar verme birimi için, süper etkinlik modeli, CCR Modeli için,

$$\max w_o = \sum_{r=1}^s u_r y_{rj_o}$$

Kısıtlar:

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ij_o} = 1 \quad (3)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \quad j=1, 2, \dots, m \quad j \neq o$$

$$u_r, v_i \geq 0 \quad \text{tüm } r \text{ ve } i \text{ ler için}$$

olarak ifade edilir.

(3) modeli, referans kümeden incelenen karar verme biriminin çıkartılması dışında girdi yönlü CCR modelinin aynısıdır. Benzer biçimde diğer Veri Zarflama Analizi modelleri için de süper etkinlik modelleri oluşturulabilir. Bu yöntemin aldığı en büyük eleştiri, bazı durumlarda sınırsız çözüm vermesi ve dolayısıyla karar verme birimlerinin sıralanamamasıdır.

Karar verme birimlerinin sıralanması için çapraz etkinlik ve süper etkinlik yöntemleri dışında, Kanonik Korelasyon Analizi ve Diskriminant Analizi gibi istatistiksel yöntemlere de dayanan başka yöntemlerde geliştirilmiştir (Andersen ve Petersen (1993), Adler v.d. (2002)).

4. SINIFLANDIRMA KRİTERİ TABANLI SIRALAMA YÖNTEMİ

Diskriminant Analizi (DA), birimlerin gözlenen nitelik skorlarına göre uygun sınıflarına atanması işlemi ile uğraşır. Diskriminant Analizini uygulamanın temel amaçlarından biri sınıflandırılması istenen birimlerin grup üyeliğini kestirmektir. Doğrusal programlama yöntemleri ile doğrusal diskriminant fonksiyonunun belirlenmesi, ilk olarak Fred ve Glover (1981) tarafından ileri sürülmüştür. VZA' yı kullanarak birimlerin sınıflandırıldığı modellerde vardır (Retzlaff-Roberts (1996), Suoyeshi (1999)).

Sıralama problemi için önerdiğimiz yaklaşım iki aşamadan oluşmaktadır. İlk aşamada (1) klasik VZA modeli ile birimlerin etkinlik skorları elde edilir. VZA'nın doğası gereğince birimler analiz sonunda etkin olan ve olmayan birimler olarak iki gruba ayrılmış olur. İkinci aşama ise etkin olan ve olmayan birimler şeklinde iki gruba ayrılmış birimlere VZA'daki etkinlik bilgisine dayalı olarak sınıflandırma skorları atayarak sıralama skorları elde etmek olacaktır. İkinci aşama aşağıda özetlenmektedir.

Sınıflama kriteri olarak çoklu girdiler ve çoklu çıktılar üzerinden tanımlanan etkinlik kavramı kullanıldığında 1 değeri (kesme değeri, eşik değer) iki gruba birbirinden ayırabilir:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} / \sum_{i=1}^m v_i x_{io} \\ \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} / \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} & \geq 1 \quad j \in G_1 \text{ (Etkin birimler)} \\ \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} / \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} & \leq 1 \quad j \in G_2 \text{ (Etkin olmayan birimler)} \\ u_r, v_i & \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (4)$$

(4) modeli doğrusal programlamaya dönüştürüldüğünde (5) ile verilen modele ulaşılır.

$$\begin{aligned}
 \max w_o &= \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} \\
 \sum_{i=1}^m v_i x_{io} &= 1 \\
 \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} &\geq 0 \quad j \in G_1 \text{ (Etkin birimler)} \\
 \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} &\leq 0 \quad j \in G_2 \text{ (Etkin olmayan birimler)} \\
 u_r, v_i &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \\
 i &= 1, 2, \dots, m; \quad r = 1, 2, \dots, s
 \end{aligned} \tag{5}$$

Yanlış sınıflandırma oranının ölçüsü olan d_j dış sapma değişkenleri alınarak, sapmalar toplamının minimizasyonu kriterinin yukarıdaki modele eklenmesiyle aşağıdaki çok kriterli karar modeli elde edilir.

$$\begin{aligned}
 \max w_o &= \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} \\
 \min \sum_{j=1}^n d_j \\
 \sum_{i=1}^m v_i x_{io} &= 1 \\
 \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - d_j &\geq 0 \quad j \in G_1 \text{ (Etkin birimler)} \\
 \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + d_j &\leq 0 \quad j \in G_2 \text{ (Etkin olmayan birimler)} \\
 u_r, v_i, d_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \\
 i &= 1, 2, \dots, m; \quad r = 1, 2, \dots, s
 \end{aligned} \tag{6}$$

(6) modeli SKVZA (Sınıflama kriterli VZA modeli) olarak isimlendirebilir. SKVZA modeli, çok kriterli (amaçlı) doğrusal programlama modelidir. Model, çıktıların ağırlıklı toplamının maksimum yapılmasına birinci öncelik, sapmalar toplamının minimum yapılmasına da ikinci öncelik verilerek, öncelikli Hedef programlama tekniği ile çözülür. Çıktıların ağırlıklı toplamının maksimum yapılmasına ilk öncelik verilmesinin sebebi, yanlış sınıflandırmadan dolayı ilk aşamada etkin bulunan bir birimin ikinci aşamada etkin olmayan şeklinde ve benzer şekilde ilk aşamada etkin olmayan bir birimin de ikinci aşamada etkin bir birim şeklinde değerlendirilmesini engellemektir. (6) modelinin çözümünden, birimlere atanacak sınıflandırma skorları, birimler ilk aşamada etkin olan ve olmayan şeklinde ayrıldıklarından, aynı zamanda sıralama skorları da olacaktır.

5. UYGULAMA

Bu bölümde önce bir örnek üzerinde, daha sonra da NATO üyesi 16 ülkeye ait gerçek veri setini kullanarak önerilen yöntemin uygulanabilirliğini gösterildi. Tüm modellerin çözümünde WINQSB paket programı kullanıldı.

Örnek olarak Sexton (1986)' in altı huzurevinin etkinlik değerlendirmesinde kullandığı veri seti alındı. Girdi ve çıktı değişkenleri aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

y_1 : 65 yaş ve yukarısındakilere sigorta+tıbbi bakım için ödemeler toplamı.

y_2 : Toplam özel olarak ödenen hasta günleri.

x_1 : Hemşireler, doktorlar v.s. dahil personelin çalışma saatleri.

x_2 : Bin dolar cinsinden ölçülen günlük malzeme.

Veri Tablo 1' de verilmektedir.

Tablo 1: Örnek için Veri Seti

KVB	y_1	y_2	x_1	x_2
A	1.40	0.35	1.50	0.2
B	1.40	2.10	4.00	0.7
C	4.20	1.05	3.20	1.2
D	2.80	4.20	5.20	2.0
E	1.90	2.50	3.50	1.2
F	1.40	1.50	3.20	0.7

Tablo 1' deki veri seti kullanılarak, (1) model denklemi ile klasik VZA sonuçları, (2) denklemi ile Çapraz Etkinlik Skorları, (3) model denklemi ile Süper Etkinlik Skorları ve (6) model denklemi ile Sınıflama Kriterli VZA skorları elde edildi. Ayrıca bu 3 sıralama yönteminden elde edilen sıralama skorları yardımı ile birimlere atanan sıralama değerleri elde edildi. Elde edilen sonuçlar Tablo 2' de özetlendi.

Tablo 2: Örnek için Klasik VZA ve 3 Farklı Sıralama Yöntemi ile Elde Edilen Sonuçlar

KVB	Klasik VZA	Çapraz Etkinlik Skorları	Çapraz Etkinlik Sıralaması	Süper Etkinlik Skorları	Süper Etkinlik Sıralaması	SKVZA Skorları	SKVZA Sıralaması
A	1	0.764	1	2	1	1.42	1
B	1	0.700	3	1.406	2	1.09	3
C	1	0.705	2	1.400	3	1.18	2
D	1	0.696	4	1.130	4	1.01	4
E	0.977	0.643	5	0.977	5	0.985	5
F	0.868	0.608	6	0.868	6	0.900	6

Tablo 2' de elde edilen sıralama değerlerini kullanarak, önerilen Sınıflama kriterli VZA modelinin, literatürde önerilmiş Çapraz Etkinlik Sıralaması ve Süper Etkinlik Sıralaması yöntemlerinden elde edilen sıralama değerleri arasında istatistiksel olarak fark olup olmadığını test etmek için Spearman'ın sıra korelasyon katsayısı kullanılmıştır.

Spearman'ın sıra korelasyon testi aşağıdaki gibi tanımlanabilir (Gamgam, 1998): Rassal olarak seçilen n çaplı örnekten X ve Y değişkenlerinin değerleri saptanmış olsun. Örnek birimlerinin X değişkeni bakımından aldıkları değerlerine büyüklük sıra sayıları verilir ve bu büyüklük sıra sayıları $R(x_i)$ ile gösterilir. Benzer şekilde örnek birimlerinin Y değişkeni bakımından aldıkları değerlerine de sıra sayıları verilir ve bu büyüklük sıra sayıları da $R(y_i)$ ile gösterilir. Bu durumda $R(x_i)$ ve $R(y_i)$ değerlerine bağlı olarak sıra korelasyon katsayısı olan r_s istatistiği aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)}, \quad \sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^n (R_{(x_i)} - R_{(y_i)})^2 \quad (7)$$

(7)' deki test istatistiğini kullanarak, Çapraz Etkinlik skorları ve Süper Etkinlik skorları arasında ilişki olup olmadığını, Çapraz Etkinlik skorları ve Sınıflama Kriterli VZA skorları arasında ilişki olup olmadığını ve Süper Etkinlik Skorları ve Sınıflama Kriterli VZA skorları arasında ilişki olup olmadığını inceleyelim.

Çapraz Etkinlik Skorları ve Süper Etkinlik Skorları arasında ilişki olmadığını iddia eden H_0 hipotezi sıralama değerleri arasında aynı yönlü ilişki olduğunu iddia eden H_1 hipotezine karşı 0.010 anlamlılık düzeyinde, $r_s = 0.942$ hesaplanan değeri ile red edilmiştir. Buradan bu örnek için, Çapraz Etkinlik yöntemi ile Süper Etkinlik yönteminin birimlere istatistiksel olarak aynı sıra değerlerini verdiklerini söyleyebiliriz. Benzer olarak, Çapraz Etkinlik Skorları ve Sınıflama Kriterli VZA skorları arasında ilişki olmadığını iddia eden H_0 hipotezi sıralama değerleri arasında aynı yönlü ilişki olduğunu iddia eden H_1 hipotezine karşı 0.010 anlamlılık düzeyinde, $r_s = 1$ hesaplanan değeri ile red edilmiştir. Aynı şekilde, Süper Etkinlik skorları ve Sınıflama Kriterli VZA skorları arasında ilişki olmadığını iddia eden H_0 hipotezi sıralama değerleri arasında aynı yönlü ilişki olduğunu iddia eden H_1 hipotezine karşı 0.010 anlamlılık düzeyinde, $r_s = 0.942$ hesaplanan değeri ile red edilmiştir. Örnek veri seti için yapılan hesaplamalarda, Çapraz Etkinlik yöntemi, Süper etkinlik yöntemi ve Sınıflama Kriterli VZA yöntemi kullanılarak elde edilen sıralama değerleri arasında ikili ikili yapılan testlerde aynı yönlü ilişki bulunmuştur.

Şimdi de Chen ve Sherman (2004)' dan derlediğimiz NATO üyesi 16 ülkeye ait 4 girdi ve 9 çıktı değişkenini içeren gerçek veri setini kullanalım. Girdi ve çıktı değişkenleri aşağıda verildiği gibidir:

x_1 : Dış tehditlerden korunmanın derecesi.

x_2 : Politik faydalar.

x_3 : Güvenlik maliyeti.

x_4 : Üye ülke olmanın getirdiği kısıtlamaların derecesi.

y_1 : Üçüncü bir ülkeyle anlaşmazlık olduğunda NATO üyesi olmanın imkanı.

y_2 : Üye ülkelerin NATO'ya bağımlılığının derecesi.

y_3 : sosyal maliyetler

y_4 : Jeo-stratejik faktörler.

y_5 : Ekonomik güç.

y_6 : Nüfus.

y_7 : Üye ülkelerin NATO stratejilerine ev sahipliği yapma derecesi.

y_8 : Politik destekler

y_9 : NATO üyesi ülkelere etnik, dil ve siyasal, sosyal ve ekonomik benzerliğin derecesi.

Veri Seti Tablo 3' de verildi.

Tablo 3: NATO üyesi 16 ülkeye ait 4 girdi ve 9 çıktı değişkeni değerleri

ÜLKELER	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9
<i>Belçika</i>	5.01	3	9.66	4.91	1.92	3.33	3.95	2.96	1.59	1.61	4.13	6.11	5.1
<i>Kanada</i>	1.28	2.3	2.12	1.42	11.5	10.6	1.46	10.76	4.76	3.96	10.81	4.66	16.22
<i>Danimarka</i>	7.22	3.5	10.7	14.4	10.8	2.54	1.95	12.87	1	0.83	12.29	2.79	7.04
<i>Fransa</i>	4.05	2	5.68	18.6	1.41	1.47	1.69	4.67	9.24	8.78	1.53	1.96	4.1
<i>Almanya</i>	16	13.8	19.6	2.92	10.2	13.7	20.2	16.54	11.46	9.99	3.93	15.23	8.08
<i>Yunanistan</i>	2.91	4.7	4.3	6.13	2.61	10.1	8.37	2.69	0.57	1.55	3.94	2.27	2.51
<i>İzlanda</i>	13.4	4.1	4.77	6.03	10.4	3.92	7.16	6.93	0.04	0.04	3.93	3.25	6.46
<i>İtalya</i>	2.4	7.6	3.41	3.72	6.77	8.67	6.78	2.54	6.84	9.13	9.92	11.31	3.54
<i>Lüksemburg</i>	12.2	4	3.93	3.23	1.66	2.27	2.76	1.5	0.06	0.06	1.96	5.95	4.43
<i>Hollanda</i>	6	2.9	8.55	5.25	2.36	3.33	4.18	3.52	2.27	2.29	3.98	6.28	11.08
<i>Norveç</i>	8.86	4	12.5	12.1	3.73	3.09	2.24	12.1	0.83	0.66	5.27	3.99	6.12
<i>Portekiz</i>	1.53	4.4	2.93	5.42	3.09	9.25	3	2.13	0.4	1.57	4.69	5.13	2.81
<i>İspanya</i>	1.13	4.2	2.86	5.59	16.6	8.96	10.9	2.54	3.01	6.01	10.37	4.39	2.96
<i>Türkiye</i>	4.43	5	4.94	6.79	5.54	15.7	9.62	6.4	0.88	7.33	7.72	5.88	2.35
<i>İngiltere</i>	2.05	13.2	2.7	2.28	14.4	2.01	14.5	10.49	7.48	9.19	14.18	18.7	15.64
<i>A.B.D</i>	11.5	21.2	1.43	1.27	1.05	1.08	1.27	1.38	49.57	37.06	1.34	2.09	1.56

Tablo 3' deki veri seti kullanılarak, (1) model denklemleri ile klasik VZA sonuçları, (2) denklemleri ile Çapraz Etkinlik Skorları, (3) model denklemleri ile Süper Etkinlik Skorları ve

(6) model denklemi ile Sınıflama Kriterli VZA skorları elde edildi. Ayrıca bu 3 sıralama yönteminden elde edilen sıralama skorları yardımı ile birimlere atanan sıralama değerleri elde edildi. Elde edilen sonuçlar Tablo 4' de özetlendi.

Tablo 4: Klasik VZA ve 3 Farklı Sıralama Yöntemi ile Elde Edilen Sonuçlar

ÜLKELER	Klasik VZA	Çapraz Etkinlik Skorları	Çapraz Etkinlik Sıralaması	Süper Etkinlik Skorları	Süper Etkinlik Sıralaması	SKVZA Skorları	SKVZA Sıralaması
<i>Belçika</i>	0.981	0.882	9	0.981	10	0.961	11
<i>Kanada</i>	1	0.985	2	5.173	2	14.68	3
<i>Danimarka</i>	0.806	0.734	11	0.806	12	0.981	10
<i>Fransa</i>	1	0.974	3	2.529	4	10.88	5
<i>Almanya</i>	1	0.951	6	1.515	6	11.77	4
<i>Yunanistan</i>	0.803	0.672	15	0.803	13	0.829	13
<i>İzlanda</i>	0.887	0.708	13	0.887	11	0.884	12
<i>İtalya</i>	1	0.935	7	1.036	8	5.46	7
<i>Lüksemburg</i>	0.774	0.681	14	0.774	15	0.770	16
<i>Hollanda</i>	1	0.875	10	1.140	7	2.12	9
<i>Norveç</i>	0.698	0.651	16	0.698	16	0.783	15
<i>Portekiz</i>	0.801	0.714	12	0.801	14	0.811	14
<i>İspanya</i>	1	0.964	5	2.378	5	8.81	6
<i>Türkiye</i>	1	0.920	8	1.029	9	3.86	8
<i>İngiltere</i>	1	0.971	4	3.140	3	17.21	2
<i>A.B.D</i>	1	0.989	1	12.513	1	51.62	1

Tablo 4' de elde edilen sonuçları kullanarak, KVB' lerin sıralanmasında, önerilen Sınıflama kriterli VZA yönteminin, literatürde önerilmiş Çapraz Etkinlik ve Süper Etkinlik yöntemleri arasında aynı yönlü ilişki olup olmadığını araştıralım.

Çapraz Etkinlik Skorları ve Süper Etkinlik Skorları arasında ilişki olmadığını iddia eden H_0 hipotezi sıralama değerleri arasında aynı yönlü ilişki olduğunu iddia eden H_1 hipotezine karşı 0.001 anlamlılık düzeyinde, $r_s = 0.958$ hesaplanan değeri ile red edilmiştir. Buradan bu örnek için, Çapraz Etkinlik yöntemi ile Süper Etkinlik yönteminin birimlere istatistiksel olarak aynı sıra değerlerini verdiklerini söyleyebiliriz. Benzer olarak, Çapraz Etkinlik Skorları ve Sınıflama Kriterli VZA skorları arasında ilişki olmadığını iddia eden H_0 hipotezi sıralama değerleri arasında aynı yönlü ilişki olduğunu iddia eden H_1 hipotezine karşı 0.001 anlamlılık düzeyinde, $r_s = 0.950$ hesaplanan değeri ile red edilmiştir. Aynı şekilde, Süper Etkinlik skorları ve Sınıflama Kriterli VZA skorları arasında ilişki olmadığını iddia eden H_0 hipotezi sıralama değerleri arasında aynı yönlü ilişki olduğunu iddia eden H_1 hipotezine karşı 0.001 anlamlılık düzeyinde, $r_s = 0.967$ hesaplanan değeri ile red edilmiştir.

NATO üyesi 16 ülkeye ait gerçek veri seti için yapılan hesaplamalarda, Çapraz Etkinlik yöntemi, Süper etkinlik yöntemi ve Sınıflama Kriterli VZA yöntemi kullanılarak elde edilen sıralama değerleri arasında ikili ikili yapılan testlerde aynı yönlü ilişki bulunmuştur. Buradan, örnek veri seti ve gerçek veri seti

hesaplamalarından, Sınıflama Kriterli VZA yönteminin KVB' leri sıralamada kullanılabileceğini söyleyebiliriz.

6. SONUÇ

Veri Zarflama Analizi (VZA), çok sayıda girdi ve çıktının söz konusu olduğu organizasyonel birimlerin göreceli etkinliklerini ölçmekte kullanılan doğrusal programlama tabanlı bir yöntemdir. Veri Zarflama Analizinde karar verme birimleri, yapılan çözümleme sonunda bulunan etkinlik skorlarına göre sıralanmaktadır. En yüksek etkinlik değerine göre sahip karar verme birimi birinci sırada yer alırken, en düşük etkinlik değerine sahip karar verme birimi son sırada yer almaktadır. Fakat, Veri Zarflama Analizinde etkin bulunan karar verme birimlerine "1" etkinlik değeri atanması, etkin olan birimlerin kendi aralarında bir sıralama yapılmasına imkan vermemektedir. Bu çalışmada KVB' lerin sıralanmasında, literatürde önerilmiş Çapraz Etkinlik ve Süper Etkinlik yöntemlerine alternatif olabilecek, Sınıflama Kriterli Veri Zarflama Analizi yöntemi geliştirildi. Çalışmada örnek olarak verilen veri seti ve NATO üyesi 16 ülkeye ait gerçek veri seti sonuçlarından, önerilen yöntemin KVB' lerin sıralanmasında etkin bir şekilde kullanılabileceği söylenebilir.

KAYNAKLAR

- ADLER, N., FRIEDMAN L., SINUANY-STERN Z., (2002), *Review of ranking methods in the data envelopment analysis context*, European Journal of Operational Research, 140: 249-265.
- ANDERSEN, P., PETERSEN, N.C., (1993), *A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis*, Management Science, 39(10), 1261-1294.
- CHARNES A, COOPER W.W., RHODES E., (1978), *Measuring the efficiency of decision making units*", European Journal of Operational Research, 2, 429-444.
- CHEN, Y., SHERMAN, H.D., (2004), *The benefits of non-radial v.s radial super efficiency DEA: an application to burden-sharing amongst NATO member nations*, Socio-Economic Planning Sciences, 38, 307-320.
- COOPER, W.W., SEIFORD, L.M., TONE, K., (2000), *Data Envelopment Analysis*, Boston USA, Kluwer Academic Publishers.
- FARRELL M.J., (1957), *The measurement of productivity efficiency*, Journal of Royal Statistical Society, Serie A, CXX, 253-287.
- FRED, N., GLOVER, F., (1981), *A linear programming approach to the discriminant problem*, Decision Sciences, 12, 68-74.
- GAMGAM, H., (1998), *Parametrik Olmayan İstatistiksel Teknikler*, Gazi Üniversitesi, Ankara, Türk Hava Kurumu Basımevi.
- RETZLAFF-ROBERTS, D.L., (1996), *Relating discriminant analysis and data envelopment analysis to one another*, European Journal of Operational Research , 23, 311-322.

SEXTON, T.R., SILKMAN, R.H., HOGAN, H.J., (1986), *Data Envelopment Analysis: Critique and Extension*, Jossey-Bass, San Fransisco.

SUEYOSHI, T., (1999), *DEA-Discriminant Analysis in the view of goal programming*, European Journal of Operational Research , 115, 564-582.

A NEW MODEL BASED ON CLASSIFICATION CRITERIA FOR RANKING DECISION MAKING UNITS IN DATA ENVELOPMENT ANALYSIS

ABSTRACT

In this study, Multi Criteria Data Envelopment Analysis model based on classification criteria is developed as an alternative to cross efficiency and super efficiency methods in literature for ranking Decision Making Units (DMU) in Data Envelopment Analysis (DEA). Our suggested model considers both relative efficiency concept in data envelopment analysis and minimizing sum of external deviations. The real data set of member of sixteen NATO countries are used in order to show the applicability of our suggested model.

Key Words: Data Envelopment Analysis, ranking problem, goal programming, classification.

DURAĞAN ZAMAN SERİLERİNİN YAPAY SİNİR AĞLARI İLE TAHMİNİNDE GİRDİ NÖRONU VE GİZLİ NÖRON SAYISININ BELİRLENMESİ

Coşkun HAMZAÇEBİ*

Fevzi KUTAY**

ÖZET

Bu çalışmada, yapay sinir ağlarının durağan zaman serileri ile geleceği tahminde performansını etkileyen girdi nöronu sayısı ve gizli nöron sayısı parametrelerinin en iyi değerinin belirlenmesi amacı ile bir deney tasarımı yapılmıştır. Ayrıca, Box-Jenkins modelleri ile yapay sinir ağı tekniğinin geleceği tahmindeki başarısı karşılaştırılmış ve hangi yöntemin daha iyi sonuç verdiği araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Box-Jenkins modelleri, girdi nöronu sayısı, gizli nöron sayısı Yapay sinir ağı, ,

1. GİRİŞ

Zaman serileri ile tahmin için yaygın olarak kullanılan bazı yöntemler vardır. Doğrusal zaman serileri için başarılı sonuçlar veren Box-Jenkins modelleri bu yöntemlerin en önemlilerindedir. Ancak gerçek zaman serileri nadiren tamamen doğrusal veya tamamen doğrusal olmayan özellik gösterirler. Gerçek hayata ilişkin seriler çoğu kez, hem doğrusal hem de doğrusal olmayan yapıyı birlikte taşırlar (Zhang, 2003). Bu sebeple böyle bir ilişkiyi modellemede farklı tekniklere ihtiyaç vardır. Son 25 yıldır Bilinear Model, Threshold Autoregressive (TAR) Model, Autoregressive Conditional Heteroscedastic (ARCH) Model gibi bir çok doğrusal olmayan zaman serisi modeli geliştirilmiştir. Bu modeller doğrusal olmayan ilişkiyi ortaya çıkarmada doğrusal modellere göre daha başarılı iseler de, uygulaması zor, probleme özgü ve genelleştirmeden uzak modellerdir (Ghiassi vd., 2004). Önerilen bu modeller, veriler arasındaki ilişkinin net olduğu ve bu ilişkiye ait bilginin bilindiği durumda geçerlidir (Zhang vd., 1998). Ayrıca bu modellerden herhangi biri, veri kümesinde saklı bütün doğrusal olmayan yapıyı ortaya çıkarmada başarılı değildir (Zhang vd., 2001).

* Gazi Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Endüstri Mühendisliği Bölümü Maltepe Ankara Türkiye (Haberleşme adresi)

** Gazi Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Endüstri Mühendisliği Bölümü Maltepe Ankara Türkiye

1980'li yılların sonlarından itibaren zaman serileri tahmininde kullanılmakta olan tekniklerden biri de Yapay Sinir Ağları (YSA) tekniğidir. YSA, girdi ve çıktı değişkenleri arasındaki herhangi bir ön bilgiye ve varsayım ihtiyacı duymadan gerekli modellemeyi sağlayabilmektedir. Bu sebeple YSA, tahmin aracı olarak diğer yöntemlere göre daha genel ve esnek (Zhang vd., 1998).

YSA'nın geleceği tahmin için kullanılması yeni değildir. İlk uygulama 1964 yılında olmuştur. Hu (1964) tezinde Widrow'un uyarlanabilir doğrusal ağını (adaptive linear network) hava durumu tahmini için kullanmıştır. Ancak çok katmanlı ağları eğitecek algoritmanın olmayışından dolayı bu çalışma oldukça sınırlı kalmıştır (Zhang vd., 1998). 1986 yılında geri yayılım algoritmasının tanıtılmasından sonra (Rumelhart vd., 1986), YSA'nın tahminde kullanılmasında bir çok gelişme olmuştur. Lapedes ve Farber (1987) bir benzetim çalışması sonucunda YSA'nın doğrusal olmayan zaman serilerinin modellenmesinde ve tahmininde kullanılabileceğini ifade etmiştir. Jhee vd. (1992), Box-Jenkins modellerinin belirlenmesinde YSA kullanımını araştırmıştır. Hwang ve Ang (2001), ARMA(p,q) zaman serileri için basit bir ağ yapısı önermiş ve girdi nöronu sayısının tespitine yönelik bir deney tasarımı yapmıştır. Sexton vd. (2004), en iyi sonucu verecek en az parametrelili ağ yapısının belirlenmesine yönelik bir optimizasyon algoritması önermiştir.

YSA'nın zaman serileri ile geleceği tahminde kullanımı üzerine yapılan araştırmalar ve çalışmalar oldukça çoktur. Marquez vd. (1992) ve Hill vd. (1994), YSA'yı, zaman serilerinin tahmininde kullanılan istatistiksel metotlarla ve regresyon tabanlı tahmin metodu ile karşılaştırarak literatürü gözden geçirmişlerdir. Zhang vd. (1998), daha kapsamlı bir çalışma ile sinir ağları ile modellemenin önemine odaklanmıştır.

Bu çalışmada, doğrusal olmayan zaman serilerinin tahminde YSA'nın performansında etkili olduğu düşünülen, girdi nöronu sayısı ve gizli nöron sayısının belirlenmesi için bir deney tasarımı yapılmıştır. Çalışma şu şekilde planlanmıştır: 2. bölümde YSA ve YSA ile tahminde önemli parametreler açıklanmıştır, 3. bölümde uygulama çalışması ve 4. bölümde sonuç ve öneriler yer almaktadır.

2. YAPAY SİNİR AĞLARI

İnsan beyninin çalışma prensibini taklit eden yapay sinir ağları (YSA), örnek sınıflandırma, örüntü tanıma ve tahminde önemli bir araçtır. YSA, deneme-yanılma yolu ile öğrenebilmekte ve daha sonra da genelleştirme yapabilmektedir.

Tipik bir YSA, nöronlardan oluşan katmanların bileşimidir. En yaygın kullanılan YSA tipi, çok katmanlı algılayıcıdır. Çok katmanlı algılayıcı (ÇKA), dışarıdan verileri alan girdi katmanından, ağırlık çıkımlarını dışarıya veren çıktı katmanından ve bu ikisi arasında genellikle bir ve bazen de daha fazla gizli katmandan meydana gelmektedir. Girdi katmanındaki nöronların girdisi ağırlık dışından alınırken, gizli katman yada çıktı katmanındaki bir nöronun net girdisi; kendisine gelen bütün girdilerin ($x_i, i=1,2,\dots,n$) ilgili ağırlıklarla ($w_i, i=1,2,\dots,n$) çarpımının toplamından ($\sum_i w_i \cdot x_i$) oluşmaktadır, çıktısı ise net girdinin aktivasyon fonksiyonunda işleme tabi tutulmasıyla oluşur.

Bir ÇKA'nın kendisinden istenen görevi yerine getirebilmesi için probleme ilişkin verilerle ağı eğitilmesi gerekir. Eğitime işlemi öğrenme algoritmaları sayesinde gerçekleştirilir. Girdi ve bu girdilere karşılık gelen çıktılardan meydana gelen eğitim kümesi $\{x^{(k)}, t^{(k)}\}$, $k=1,2,\dots,p$, şeklinde ifade edilirse, öğrenme algoritması yardımı ile verilen eğitim seti için en uygun çözümü üretecek ağırlıklar bulunur. Sıklıkla kullanılan öğrenme algoritması geri yayılım algoritmasıdır. Geri yayılım algoritmasında ağırlıkların düzenlenmesi işlemi, basitçe gradyan inişe dayanmaktadır (Kartalopoulos, 1996). Gradyan inişe göre ağırlıkları düzenleyen geri yayılım algoritmasının yavaş ilerlemesi ve yerel minimumlara takılması sebebi ile Newton metodu ve Levenberg-Marquardt algoritmaları gibi ikinci derece metotlarla ağırlıkları düzenlemek üzere algoritmanın farklı modifikasyonları önerilmiştir. Bu metotlar daha hızlı çalışmaktadırlar ve genel minimumu bulmada daha başarılıdırlar (Zhang vd., 1998).

Bir YSA'da öğrenme algoritmasının seçiminin yanısıra mevcut verilerin düzenlenmesi de dikkatlice yapılmalıdır. Zaman serileri tahmini için kurulan ÇKA'da, veri seti genellikle üç kısma ayrılır. Verilerin yaklaşık %80-60'ını içeren birinci kısım eğitim kümesi olarak adlandırılır ve ağı eğitimi için kullanılacak verileri kapsar. İkinci kısım doğrulama kümesidir ve verilerin %10-20'ni kapsar. Doğrulama kümesi, en uygun ağı yapısının belirlenmesinde yardımcı olur. Doğrulama kümesi sayesinde, ezberleme gibi bir hata ile karşılaşmaktan kurtulunur. Son kısım test kümesidir. Test kümesinin amacı, ağı sonuçlarının genelleştirilmesini sağlamaktır. Test kümesi, verilerin yaklaşık olarak %10-20'ni kapsar.

Zaman serileri tahmini için geliştirilecek ÇKA'nın tasarımında, girdi nöronu sayısı, gizli katman ve gizli nöron sayısı, çıktı nöronu sayısı gibi değişkenlerin belirlenmesi oldukça önemlidir. Ancak bu parametrelerin seçimi ilgilenilen probleme göre değişecektir. En iyi ağı yapısının belirlenmesinde sezgisel yaklaşımlar yada deney tasarımı yardımcı olabilir (Zhang vd., 1998).

Tahmin için kurulan ÇKA'da en önemli parametrelerden biri belki de en önemlisi girdi nöronu sayısıdır. Bir zaman serisi tahmin probleminde uygun girdi nöronu sayısını belirlemek kolay değildir. Tang ve Fishwick(1993), tek değişkenli bir zaman serisi için, girdi nöronu sayısının basitçe Box-Jenkins AR(p) modelinin derecesine eşit olduğunu ileri sürmektedir. Bu yaklaşım, bir başlangıç noktası olarak iyi olabilir ancak hiçbir zaman en iyi girdi nöronu sayısını belirlemez. Çünkü Box-Jenkins modelleri doğrusal ilişkinin belirlenmesinde etkilidirler, doğrusal olmayan ilişkiyi ortaya ortaya çıkarmada başarılı olamayabilirler.

Bir diğer önemli parametre de, gizli katman ve gizli nöron sayısıdır. Gizli katman ve gizli nöronlar, YSA'nın başarısında büyük bir öneme sahiptir. Veri içerisindeki belirleyici özellikleri ortaya çıkartan ve girdi ile çıktı arasındaki doğrusal olmayan ilişkinin kurulmasına yardımcı olan, gizli katman ve bu katmanlardaki nöronlardır. Yapılan çalışmalar, tek gizli katmanın, doğrusal olmayan fonksiyon yaklaşımlarında, istenilen herhangi bir doğruluk derecesinde başarılı neticeler verdiğini göstermiştir (Cybenko, 1989; Hornik, 1989). Bir YSA'da birden fazla gizli katman olabilir, ancak bir çok araştırmacı geleceği tahmin için kurdukları ağda tek gizli katman kullanmayı tercih etmişlerdir (Kaastra ve Boyd, 1996). Zhang vd.(1998)'ne göre, bir çok tahmin problemi için tek gizli katman yeterlidir. Ancak, bazı özel problemlerde, iki

gizli katmanlı ağ yapısının tek gizli katmanlı ağ yapısından daha iyi sonuç vermesi muhtemeldir. Kaastra ve Boyd (1996), bütün ÇKA'ların öncelikle bir gizli katman ya da en fazla iki gizli katman kurularak çalıştırılmasını önermektedir.

Bir ağda gizli nöron sayısının belirlenmesi kritik bir karardır. Genelde az sayıda gizli nöron ile çalışma tercih edilir. Çünkü genelleştirme yetenekleri daha yüksektir. Çok sayıda gizli nöron, ağın genelleştirmeden daha çok ezberleme yeteneği kazanmasına sebep olur. Ancak çok az sayıda gizli nöron da ağın öğrenmesi için yeterli değildir. Bu sebeple araştırmacılar gizli nöron sayısını belirlemede deneysel bir çalışmaya başvurabilirler. Ancak sistematik bir yöntem olarak, küçük bir başlangıç değeri ile başlanması ve ağ performansı iyileşene kadar gizli nöron sayısının artırılması önerilmektedir (Kaastra ve Boyd, 1996).

Gizli nöron sayısını belirlemede deneme-yanılma metodu sıklıkla kullanılır. Ancak yine de bazı deneysel çalışmalar gizli nöron sayısını sınırlayıcı öneriler sunmaktadır. Tek gizli katmanlı ağlarda gizli nöron sayısına ilişkin bazı öneriler şunlardır:

- a) $0,75 * n$ (Baily ve Thompson, 1990)
- b) n (Tang ve Fishwick, 1993)
- c) $2n$ (Wong, 1991)
- d) $2n+1$ (Lippmann, 1987)
- e) $\sqrt{n * m}$ (Masters, 1993)

Yukarıdaki ifadelerde “n” girdi nöronu ve “m” çıktı nöronu sayısını göstermektedir. Bu yaklaşımlardan hiçbirisinin bütün problemlerde iyi sonuç verdiğini söylemek doğru olmaz.

ÇKA'ların performansında etkili olabilecek bir başka etken de çıktı nöronu sayısıdır. Çıktı nöronu sayısı çalışılan probleme direk bağlıdır. Bir zaman serisi tahmini probleminde, çıktı nöronu sayısı, tahmin döneminin uzunluğuna göre belirlenir. Eğer tek dönemlik tahminde bulunulacak ise çıktı nöronu sayısı 1'e eşittir. Çok dönemli tahminde ise, kullanılan yaklaşıma göre çıktı nöronu sayısı değişir. Eğer iteratif tahmin yöntemi benimsenmişse, çıktı nöronu sayısı 1'e eşittir. Direk tahmin yaklaşımı benimsenmişse, çıktı nöronu sayısı tahmin dönemi uzunluğuna eşit alınabilir. İteratif yöntem, sadece bir dönem tahminde bulunmak üzere kullanılabilir. Bulunan tahmin değeri girdi olarak kullanılır ve bir sonraki dönem tahmin edilir. İteratif tahmin yaklaşımı, Box-Jenkins modellerinin benimsediği yaklaşımdır.

3. UYGULAMA

Zaman serileri ile geleceği tahminde Box-Jenkins modelleri ve YSA'nın performansını karşılaştırmak ve iyi bir tahmin için YSA girdi nöronu sayısı ve gizli nöron sayısını belirlemek amacı ile bilgisayar ortamında AR(p) sürecine uyan 100 gözlem değerine sahip 20 farklı seri üretilmiştir. Üretilen seri değerleri için ,

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + a_t \quad [1]$$

eşitliği kullanılmıştır. Serilerin üretiminde başlangıç değerleri ve μ keyfi olarak seçilirken ϕ parametreleri $[-1 1]$ aralığında tekdüze dağılımdan rastgele üretilmiştir. a_t hata terimi, $N(0, \sigma^2)$ normal dağılmış bir tesadüfi değişkendir. a_t hata terimi varyansı değişik büyüklüklerde seçilerek gürültü faktörünün tahminin doğruluğu üzerindeki etkisi araştırılmıştır.

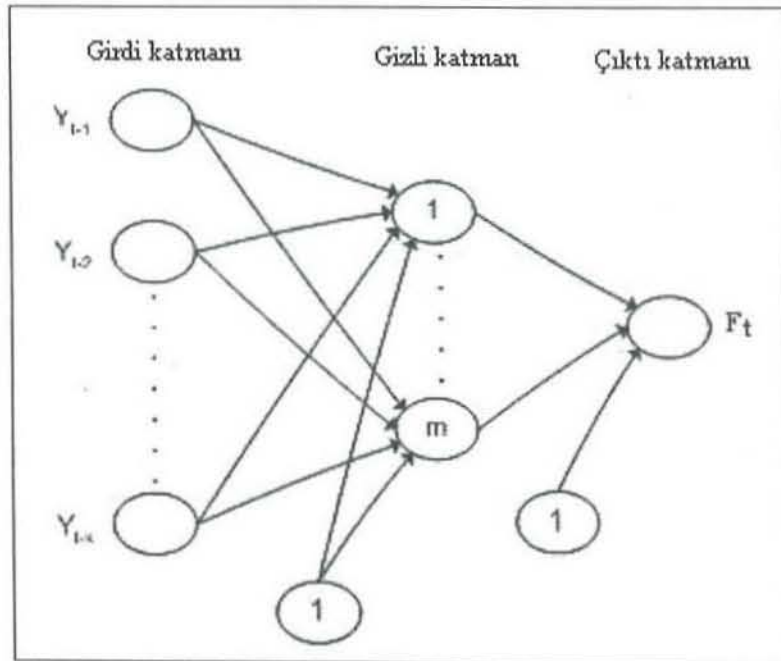
Üretilen serilerin Box-Jenkins yöntemi ile tahmini için MINITAB ve YSA teknikleri ile tahmini için de MATLAB Neural Network ToolBox programları kullanılmıştır.

3.1. Ağ Yapısı

Zaman serileri tahmini için kurulacak YSA'nın yapısı, ağın performansında oldukça etkilidir. Bu sebeple etkin bir performans için farklı ağ yapılarının araştırılmasında fayda vardır.

Bu çalışmada, girdi nöronu sayısı, 2,3, ve 4 olacak şekilde farklı ağ yapıları denenmiştir. Gizli nöron sayısı için ise, girdi nöronu sayısının bir eksiğinden 2 fazlasına kadar değerler kullanılmıştır. Örneğin girdi nöronu 3 ise, gizli nöron 2,3,4 ve 5 alınarak farklı ağ yapıları elde edilmiştir. Şekil 2, kullanılan ağ yapısını göstermektedir.

Şekil 2'de gösterilen ağın ürettiği çıktının matematiksel ifadesi Eş. 2'de verilmiştir.



Şekil 2. Zaman serileri ile geleceği tahmini için kurulan YSA

$$F_t = \theta_0 + \sum_{j=1}^m v_j f \left(\sum_{i=1}^k w_{ij} Y_{t-i} + \theta_{0j} \right) \quad (2)$$

Eş. 2’de, F_t , t dönemi için ağırlık ürettiği seri değerini, $\{Y_{t-i}, i=1,2,\dots,k\}$ k dönem geçmiş gözlem değerini, $\{w_{ij}, i=1,2,\dots,k; j=1,2,\dots,m\}$ girdi katman nöronlarından gizli katman nöronlarına olan bağlantıların ağırlıklarını, θ_0 ve θ_{0j} , girdi değeri 1 olan eşik (bias) terimlerinin bağlantılarına ait ağırlıkları, $\{v_j, j=1,2,\dots,m\}$ gizli katman nöronlarından çıktı katman nöronuna olan bağlantıların ağırlıklarını, f kullanılan aktivasyon fonksiyonunu ifade etmektedir.

3.2. Performans Ölçütü

Kurulan YSA’nın iyi bir tahmin edici olup olmadığının tespiti için test kümesindeki verilerin tahmin değerlerinin doğruluğunun ölçülmesi gereklidir. Bu ölçme işlemi için bir çok ölçüt kullanılabilir. Bu çalışmada ortalama mutlak yüzde hata performans ölçütü hesaplanmıştır:

$$\text{Ortalama Mutlak Yüzde Hata (OMYH)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{Y_t - F_t}{Y_t} \right| * 100 \quad (3)$$

Eşitlik 3’te Y_t , serinin t dönemindeki gerçek değerini, F_t , serinin t dönemindeki tahmin değerini ve N de serideki gözlem sayısını göstermektedir.

3.3. Bulunan Sonuçlar

YSA ile tahminde bulunabilmek için eldeki seriler eğitim, doğrulama ve test olmak üzere üç kısma ayrılmıştır. İlgilenilen serinin, %80’ni eğitim kümesi, %10’nu doğrulama kümesi ve %10’nu test kümesidir. Box-Jenkins tekniği ile model kurulurken serinin %90’nu model kurma ve %10’nu test amaçlı kullanılmıştır. Her iki teknikle test kümesi için bulunan sonuçlar karşılaştırılmış ve hangi tekniğin daha az tahmin hatası verdiği araştırılmıştır. YSA ile tahminde bulunurken en iyi sonucu veren ağ yapısının belirlenmesi amacı ile bir deney tasarımı yapılmıştır.

3.3.1. Girdi ve gizli nöron optimizasyonu

Girdi nöronu ve gizli nöronların performans ölçütü üzerindeki etkisini öğrenmek için deney tasarımı yapılmış ve Şekil 1 ve 2’de gösterilen sonuçlara ulaşılmıştır.

Şekil 2 ve Şekil 3’te sırasıyla, girdi ve gizli nöron sayılarının ve birbirleri ile etkileşimlerinin performans ölçütü üzerindeki etkisi gösterilmiştir. Grafikler incelendiğinde girdi nöronu sayısının ve gizli nöron sayısının 3. düzeyde olduğu durumda en düşük OMYH değerinin elde edildiği görülmektedir. Buradan hareketle, girdi nöronu sayısı arttıkça tahmin doğruluğunun arttığı söylenebilir. Ayrıca gizli nöron

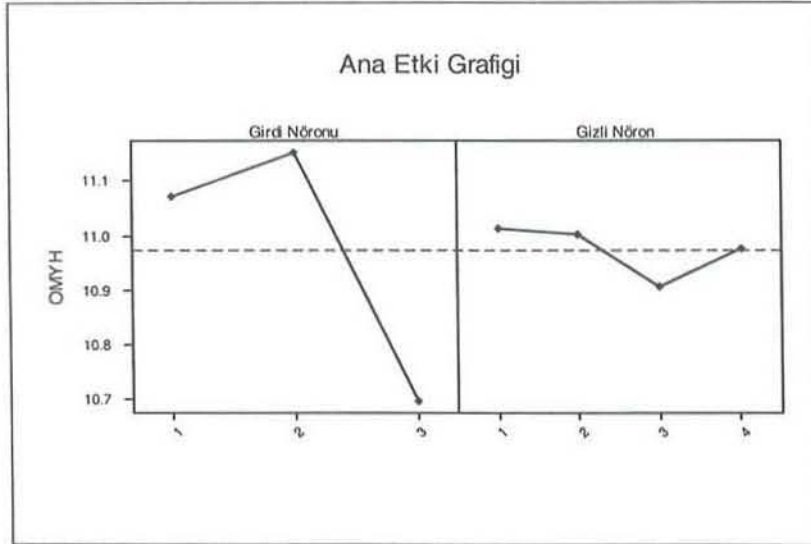
sayısının en iyi değerinin girdi nöronu sayısının bir fazlasına eşit olduğu her iki şekilde de görülmektedir.

3.3.2. Box-Jenkins ve YSA karşılaştırması

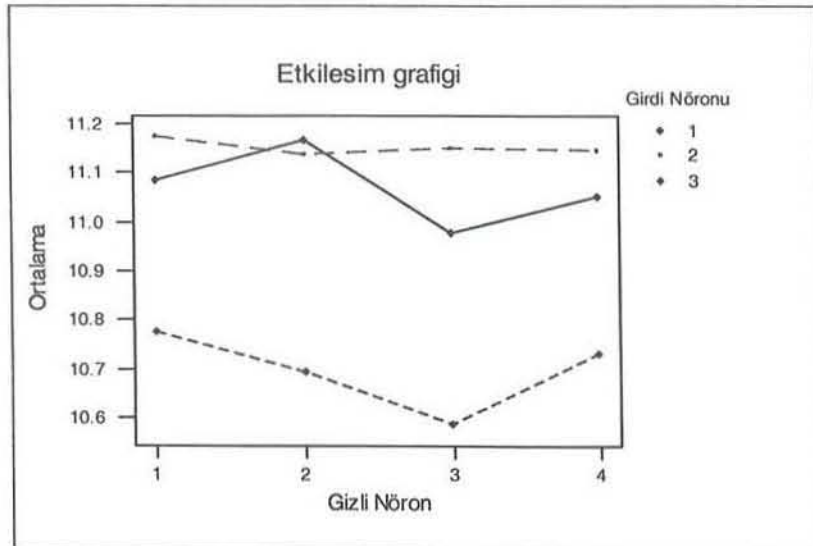
Box-Jenkins ve YSA tekniklerinden hangisinin daha az tahmin hatası verdiğini söyleyebilmek için Paired t test istatistiğinden faydalanılmıştır. 20 seri için bulunan OMYH değerlerine ait Paired t istatistiği ve Box-Jenkins – YSA farkı için güven aralığı Tablo 1’de verilmiştir. Tablo 1’deki sonuçlar, YSA ile bulunan tahmin hatasının Box-Jenkins tekniği ile bulunan tahmin hatasına göre daha az olduğunu göstermektedir.

Tablo 1. Paired T istatistiği sonucu ve güven aralığı

Box-Jenkins – YSA	
%95 Güven aralığı	(0.088; 0.852)
T testi	T-değeri = 2.43 P-değeri = 0.016



Şekil 2. Girdi ve gizli noron sayılarına göre ana etki grafiği



Şekil 3. Girdi ve gizli noron sayısının etkileşimi

4. SONUÇ

Bu çalışmada YSA ile AR(p) sürecine uyan zaman serileri tahmininde girdi nöronu ve gizli nöron sayılarının tespitine yönelik bir deney tasarımı yapılmıştır. Yapılan analiz sonucunda, girdi nöronu sayısı arttıkça tahmin performansının iyileştiği görülmüştür. Gizli nöron sayısı ise, girdi nöronu sayısının 1 fazlasına eşit olduğu durumda en iyi performans elde edilmektedir. Box-Jenkins modelleri ile YSA tekniğinin hangisinin daha az tahmin hatası verdiği de araştırılan bir başka konudur. Her bir seriye ait test kümesi için her iki teknikte bulunan OMYH değerleri Paired t test istatistiğine tabi tutulmuş ve YSA tekniğinin %95 güven katsayısında daha az tahmin hatası verdiği görülmüştür.

KAYNAKLAR

- BAİLY, D. and THOMPSON, D. M. (1990), *Developing Neural Network Applications*, AI Expert, September, 33-41.
- BOX, G.P. and JENKINS, G.M. (1976), *Time Series Analysis Forecasting and Control*, San Francisco, Holden-Day.
- CYBENKO, G. (1989), Approximation by Superposition of a Sigmoidal Function, *Mathematical Control Signal Systems*, 2, 303-314.
- GHIASSI, M., SAİDANE, H., and ZİMBRA, D.K. (2004), A Dynamic Artificial Neural Network Model For Forecasting Time Series Events, *International Journal of Forecasting*, 21(2), 341-362.
- HİLL, T., MARQUEZ, L., O'CONNOR, M. and REMUS, W. (1994) Artificial Neural Networks for Forecasting and Decision Making, *International Journal of Forecasting*, 10, 5-15.
- HORNİK, K., STİNCHCOMBE, M. and WHITE, H. (1989), Multilayer Feed-Forward Networks are Universal Approximators, *Neural Networks*, 2, 359-366.
- HU, M.J.C. (1964), Application of the Adaline System to Weather Forecasting, Master Thesis, Technical Report 6775-1, Stanford Electronic Laboratories, Stanford.
- WARNG, H.B. and ANG, H.T. (2001), A Simple Neural Network for ARMA(p,q) Time Series, *Omega*, 29,319-333.
- KAASTRA, I. and BOYD, M. (1996) Designing A Neural Network For Forecasting Financial And Econometric Time Series, *Neurocomputing*, 10, 215-236.
- KARTALOPOULOS, S.V. (1996), *Understanding Neural Network and Fuzzy Logic*, New York IEEE Pres.
- LAPADES, A. and FARBER, R. (1987), Nonlinear Signal Processing Using Neural Networks: Prediction and System Modeling, Technical Report LA-UR-87-2662, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos.

- LİPPMANN, R.P. (1987), An Introduction to Computing With Neural Nets, IEEE ASSP Magazine, April, 4-22.
- MARQUEZ, L., HİLL, T., O'CONNOR, M. and REMUS, W. (1992), Neural Network Models for Forecast a Review, IEEE Proceedings of the 25th Hawaii International Conference on System Sciences, Hawaii, 4, 494-498.
- MASTERS, T. (1993), Practical Neural Network Recipes in C++, New York, Academic Press.
- RUMELHART, D.E., HİNTON and G.E., WILLIAMS, R.J. (1986), Learning Internal Representation by Back-Propagating Errors, The PDP Research Group, Paralel Distributed Processing: Explorations in the Microstructure of Cognition, Rumelhart, D.E. and McClelland, J.L., MA, MIT Pres.
- SEXTON, R.S., DORSEY, R.E. and SİKANDER, N.A. (2004), Simultaneous Optimization of Neural Network Function and Architecture Algoritihm, Decision Support Systems, 36, 283-296.
- TANG, Z. and FİSHWİCK, P.A. (1993), Feedforward Neural Nets as Models for Time Series Forecasting, ORSA Journal on Computing, 5(4), 374-385.
- WONG, F.S. (1991), Time Series Forecasting Using Backpropagation Neural Networks, Neurocomputing, 2, 147-159.
- ZHANG, G., PATUWO, B.E. and HU, M.Y. (1998), Forecasting with Artificial Neural Networks:The State of the Art, International Journal of Forecasting, 14, 35-62.
- ZHANG, G., PATUWO, B.E., Hu, M.Y. (2001), A Simulation Study of Artificial Neural Networks for Nonlinear Time-Series Forecasting, Computers&Operations Research, 28, 381-396.
- ZHANG, G. (2003), Time Series Forecasting Using a Hybrid ARIMA and Neural Network Model, Neurocomputing, 50, 159-175.

DETERMINING INPUT AND HIDDEN NEURONS NUMBERS IN ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS FOR FORECASTING STATIONARY TIME SERIES

ABSTRACT

In this study, an experimental design has been conducted for determining the optimum values of input and hidden neurons numbers which are the factors affecting the performance of artificial neural networks used to forecast stationary time series. Furthermore, results of Box-Jenkins models and artificial neural networks are compared and it is also investigated which method gives the better result.

Key Words: *Artificial neural networks, number of input neurons, number of hidden neurons, Box-Jenkins models.*

EKK VE BAZI DAYANIKLI TAHMİNCİLERİN DERİNLİKLERİNİN KİRLENMEYE KARŞI DEĞİŞİMLERİNİN İNCELENMESİ

Enis SİNİKSARAN* M. Hakan SATMAN Y. Barış ALTAYLIGİL

ÖZET

Bu çalışmada, veri kirliliği karşısında EKK ve bazı dayanıklı (robust) regresyon yöntemlerinin derinliklerinin davranışları incelendi. Yapılan Monte Carlo simülasyonları sonucunda bazı tahmincilerle ilişkin örüntüler tespit edildi. Çalışmada ayrıca Bootstrap yöntemi ile elde edilen derinlik dağılımlarına dayanarak, EKK tahmincilerinin hipotez testlerinin derinliğe dayalı olarak yapılabileceği gösterildi.

Anahtar Kelimeler: Aykırı değerler, Bootstrap, Dayanıklı yöntemler, En derin regresyon, Regresyon derinliği, p-Değeri

1. GİRİŞ

Derinlik, DR (Deepest regression) dışında herhangi bir dayanıklı yöntemin ve de EKK'nın amaç fonksiyonunda yer alan bir kavram değildir. Bu anlamda regresyon derinliğinin, DR dışındaki tahmincilerin kalitelerine ilişkin bir ölçüt olup olamayacağı konusunda, literatürde net bir yanıt bulunmamaktadır. Bu çalışmada temel olarak bu sorunun yanıtı arandı.

Çalışma ana hatlarıyla şöyledir: Bu bölümün ardından gelen bölümde regresyon derinliği kavramı ve DR tahmincisi tanıtıldı. 3. bölümde aykırı değerlere karşı dayanıklı olan DR, LMS (Least Median Squares), LTS (Least Trimmed Squares) ve Huber'in M tahmincileriyle birlikte EKK ve LAD (Least Absolute Deviation) tahmincilerinin çeşitli oranlardaki kirlenmeler karşısında derinliklerinin nasıl değiştiği Monte Carlo simülasyonlarına dayanarak incelendi. Kirlenmenin yönü ve derecesine göre değişik örüntüler saptandı. Çalışmanın 4. bölümünde regresyon derinliğinin bootstrap dağılımları elde edildi ve bu dağılımlara dayanarak EKK parametrelerine ilişkin hipotez testlerinin yapılabilme olanakları araştırıldı. Klasik hipotez testlerinin p-değerleri ile karşılaştırıldığında, oldukça yakın sonuçlar elde edildiği görüldü.

* İstanbul Üniversitesi İktisat Fakültesi Ekonometri Bölümü, İstanbul, Türkiye, esiniksaran@istanbul.edu.tr

2. REGRESYON DERİNLİĞİ VE EN DERİN REGRESYON

Derinlik kavramı, ilk kez "yarı-uzay derinliği" olarak Tukey tarafından ortaya atılmasının ardından (Tukey, 1975) sorgulayıcı istatistikte konum, basıklık ve çarpıklık ölçüsünden (Liu, Parelius, Singh, 1990), çanta grafiği (bag plot) ile aykırı değer teşhisçisine (Rousseeuw, Ruts ve Tukey, 1998) ve kalite kontrol grafiklerinden (Liu ve Singh, 1995) asimptotik p-değerlerinin hesabına (Liu ve Singh, 1997) kadar pek çok alanda uygulanmıştır.

(Karabulut ve Öztürk, 2003) ise yarı uzay derinliği kavramını dengeli bootstrap güven aralıklarının oluşturulmasında kullanmışlardır.

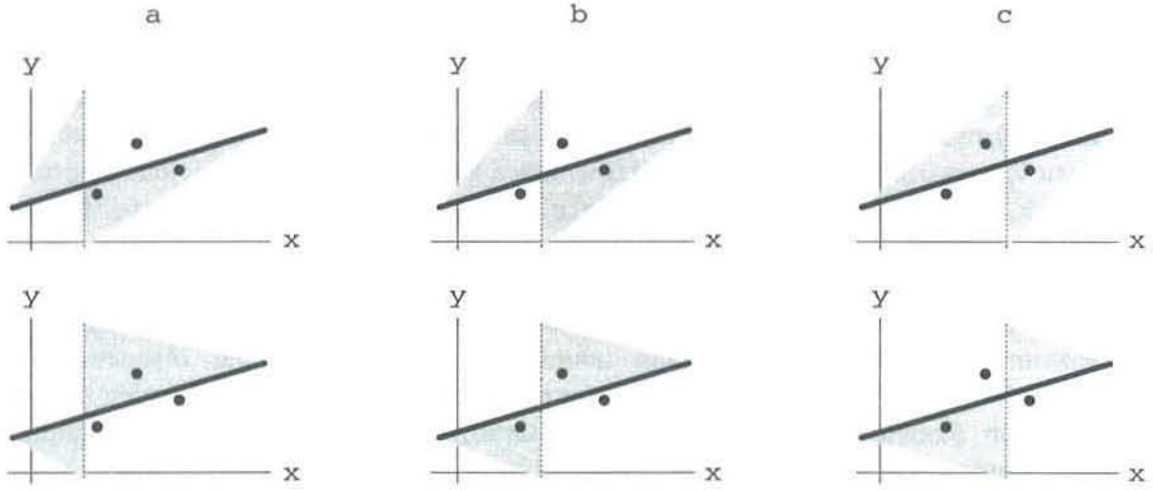
Tukey 'in tanımına dayanarak ilk kez (Rousseeuw ve Hubert, 1999) tarafından sunulan regresyon derinliği kavramı (rdepth) ise Daniels 'in (Daniels, 1954) çalışması ile yakından ilişkilidir. Regresyon derinliği kavramı bir tahmincinin (θ) bir veriyle (Z_n) olan ilişkisini temsil eder. Burada θ , n birimlik bir örneklemden herhangi bir regresyon yöntemi ile elde edilmiş parametre tahmincilerinin oluşturduğu bir vektördür. Örneğin, $y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$ basit doğrusal regresyon modelinin tahmin denklemi $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$ ise, $\theta = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$ ve $Z_n = \{(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n\} \subset R^2$ olacaktır. Bu uzay için regresyon derinliğinin hesabında (Rousseeuw ve Hubert, 1999) bir algoritma önermişlerdir: Buna göre verideki gözlemler x değerleri aynı olanlardan sadece biri alınarak $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ şeklinde dizildikten sonra n tane referans doğrusu x -eksenini $\{x_1-1, (x_1+x_2)/2, \dots, (x_{n-1}+x_n)/2\}$ değerlerinden dik olarak kesecek şekilde belirlenir. Her bir v referans doğrusunun solunda kalan pozitif kalıntılar L^+ , sağında kalan negatif kalıntılar R^- olarak gösterilmek üzere

$$L^+(v) = \#\{j; x_j \leq v \text{ ve } r_j \geq 0\} \text{ ve } R^-(v) = \#\{j; x_j > v \text{ ve } r_j \leq 0\} \quad (1)$$

değerleri hesaplanır. Benzer şekilde L^- ve R^+ değerleri de hesaplandıktan sonra bir doğrunun regresyon derinliği:

$$rdepth(\theta, Z_n) = \min_{1 \leq i \leq n} (\min\{L^+(x_i) + R^-(x_i), L^-(x_i) + R^+(x_i)\}) \quad (2)$$

eşitliğini sağlayacak şekilde bulunur.



Şekil 1. Regresyon derinliğinin araştırılması

(2) eşitliği başka bir biçimde açıklanır; bir doğrunun regresyon derinliği, doğruyu uyumsuz (non-fit) yapabilmek için veriden atılması gereken minimum gözlem sayısıdır. Burada uyumsuz bir doğrunun geometrik yeri $x = c$ doğrusudur. Geometrik olarak açıklanır, bir doğru gözlemlerle çakışmayan her bir kaldıraç noktasına göre ve uyumsuz bir doğruya (x eksenine dik bir doğruya) dönüşecek şekilde çevrildiğinde üzerinden geçtiği nokta sayılarından minimum olanı bu doğrunun derinliğini verecektir denilebilir. Şekil 1 'de 3 gözlemden oluşan bir verinin serpilme diyagramı ve bu veriye ilişkin bir regresyon doğrusu görmekteyiz. Kesikli olarak gösterilen v referans doğrularının, regresyon doğrusu ile kesim noktaları kaldıraç noktası olarak düşünülürse, regresyon doğrusunun her bir kaldıraç noktasına göre saat yönünde (üsttekiler) ve saatin tersi yönünde (alttakiler) döndürüldüğü durumlar a, b ve c olarak 3 bölgede gösterilmiştir. Regresyon doğrusu dönerken taradığı alanlar da şekilde görülmektedir. Eşitlik (2) uygulanır;

$$a: (L^+ + R^-) = 0 + 2 = 2, (L^- + R^+) = 0 + 1 = 1 \Rightarrow \min(2, 1) = 1$$

$$b: (L^+ + R^-) = 0 + 1 = 1, (L^- + R^+) = 1 + 1 = 2 \Rightarrow \min(1, 2) = 1$$

$$c: (L^+ + R^-) = 1 + 1 = 2, (L^- + R^+) = 1 + 0 = 1 \Rightarrow \min(2, 1) = 1$$

$$rdepth(\theta, Z_n) = \min(1, 1, 1) = 1 \text{ yazılabilir.}$$

Bir verideki gözlemlerin tamamı regresyon doğrusunun üzerinde yer alırsa, regresyon doğrusu döndürüldüğünde bu noktaların üzerinden geçmiş olarak

düşünüleceği için regresyon derinliği "n" olacaktır. Dolayısıyla bir doğrunun regresyon derinliği için $0 \leq \text{rdepth}(\theta, Z_n) \leq n$ eşitsizliği yazılabilir.

Bağımsız değişken sayısı artırıldığı zaman ise regresyon derinliği tanımlanırken doğruların yerini düzlemler (iki bağımsız değişkende) ve hiperdüzlemler (ikiden daha fazla bağımsız değişkende) alacaktır. Bu çalışmada regresyon derinliğini hesaplamada 2 boyut için yazılan ve ekte sunulan Mathematica kodları, 3 ve 4 boyut içinse Rousseeuw ve ark. 'ının yazdığı Fortran yazılımları olan Medsweep, Rdepth3 ve Rdepth4[†] kullanılmıştır.

Bir regresyon tahmincisi θ 'nın derinliği, uyum kalitesi olarak düşünülürse, maksimum derinliği verecek olan tahminciyi aramak da doğal olacaktır. Amaç fonksiyonu derinliğe dayanan ve en derin regresyon (DR) olarak isimlendirilen bu regresyon Rousseeuw ve Hubert (1999) tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmış ve hesaplanması için algoritmalar sunulmuştur:

$$\text{DR}(Z_n) = \arg \max_{\theta} \text{rdepth}(\theta, Z_n)$$

Burada θ , maksimum derinliğe sahip tahmincidir. θ , birden fazla olduğu zaman ise bu tahmincilerin ortalamasının alınması önerilmektedir. Maksimum derinliğe ilişkin alt ve üst sınır ise $Z_n \subset \mathbb{R}^p$ için

$$\left\lfloor \frac{n}{p+1} \right\rfloor \leq \max_{\theta} \text{rdepth}(\theta, Z_n) \leq \left\lceil \frac{n+p}{2} \right\rceil$$

eşitsizliği ile belirlenir.

Amaç fonksiyonunda derinliğin yer almadığı EKK, LTS, LAD tahmincilerinin derinliklerine ilişkin alt sınırların ise birincisi için 1, diğerleri için p olduğu yukarıda söz edilen çalışmada ispatlanmıştır. Ancak literatürde bu tahmincilerin ve de LMS ve M gibi diğer dayanıklı tahmincilerin regresyon derinliklerine, özellikle kirlenme altındaki davranışlarına ilişkin ampirik bulgular henüz yer almamıştır. Bundan sonraki bölümde bu konuya ilişkin Monte Carlo simülasyonlarından elde edilen sonuçlar ve yorumları sunulacaktır.

[†] Söz konusu programlar <http://www.agoras.ua.ac.be> adresinden indirilebilir.

3. DERİNLİK HESAPLAMALARINA İLİŞKİN MONTE CARLO SİMÜLASYONLARI

Çalışma tek, iki ve üç bağımsız değişkenli lineer regresyon modelleri için düşünüldü:

$$\text{Model 1 : } y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon \quad (3)$$

$$\text{Model 2 : } y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon \quad (4)$$

$$\text{Model 3 : } y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \varepsilon \quad (5)$$

Simülasyonlarda temiz veri şöyle üretildi: X matrisinin sütunları; ortalamaları 7, varyansları 16 ve kovaryansları 0 olan çok değişkenli normal dağılımdan; hata vektörü ε ise standart normal dağılımdan elde edildi. Parametre vektörü $\beta = [\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k]' = [5, 5, \dots, 5]'$ şeklinde seçilirken y değerleri de $y = X\beta + \varepsilon$ denkleminde elde edildi. Bu şekilde üretilen regresyon verisi klasik varsayımları karşılamaktadır.

x yönünde veri kirlenmek için, kirlenme oranı kadar seçilen rastlantısal gözlemlere şu dönüşüm uygulandı:

$$x_{ij}^{yeni} = \mu_j^x + \delta \sigma_j^x + Uniform(0, 2) \quad (6)$$

Eşitlik (6) 'da x_{ij} , X matrisinin i . satır ve j . sütun elemanı; δ , x yönünde kaç standart sapma sapılacağını, μ_j^x kirlenilecek olan gözleme ait j . değişkenin ortalamasını, σ_j^x ise standart sapmasını göstermektedir. 0 ve 2 parametrelili Uniform dağılımdan çekilecek rastlantısal sayıları simgeleyen $Uniform(0, 2)$ terimi ise simülasyonlarda başvurulan tekrarlı yeniden örnekleme süreçlerinde X matrisinin herhangi bir alt kümesinin determinantının sıfırdan farklı çıkması için eklenmiştir.

Benzer şekilde y yönünde (dikey) kirlenme için Eşitlik (7) 'deki dönüşüm uygulandı:

$$y_i^{yeni} = x_i \beta + \delta \sigma_\varepsilon = x_i \beta + \delta \quad (7)$$

birime kadar örneklem m = 25 kez çekildi ve her 3 model için EKK tahminlerinin derinlik medyanları hesaplandı. Bu deney temiz veriye uygulandı ve elde edilen sonuçlar Tablo 1 'de verildi.

İkinci deneyde Model 2 ve Model 3 için n = 100 birimlik örneklem m = 25 kez çekildi. Her bir örneklem için EKK, LMS, LTS, LAD, Huber 'in M ve DR tahmincileri ve karşılık gelen derinlikleri ve de bu derinliklerin medyan ($B_{1/2}$) ve MAD ($\sum_{i=1}^m |x_i - B_{1/2}| / m$) değerleri hesaplandı. Bu süreç temiz veri ($c = 0$) ve $c = \{0.10, 0.20, 0.40\}$ düzeylerinde kirlenmiş veri için tekrarlandı. Her bir kirlenme düzeyi x ve y yönünde ve de hem x hem y yönünde ortalamadan 3 ve 5 standart sapma olacak şekilde tekrarlandı. Böylece derinliğin x yönündeki aykırı değerler (kaldıraç değerler) ile y yönündeki aykırı değerlere (dikey aykırı değerler) ve de her iki yöndeki aykırı değerlere (bir kısmı potansiyel iyi huylu kaldıraç olabilecek) karşı değişimini inceleme olanakları elde edildi. Bu simülasyonlardan elde edilen sonuçlar Tablo 2 ve Tablo 3 'de verilmiştir.

Üçüncü deneyde Model 2 yukarıda betimlenen kısıtlarla $c = 0.01$ 'den $c = 0.49$ 'a kadar 0,01 'lik kirlenme artışlarıyla uygulandı ve her bir tahminci için hesaplanan derinliklerin grafikleri elde edildi. Bu grafikler Şekil 2 , Şekil 3 ve Şekil 4 'de görülmektedir. Şekillerdeki her bir grafiğin başlığında yer alan iki rakamdan ilki x yönündeki ikincisi y yönündeki sapma miktarını diğer bir deyişle Eşitlik (6) ve (7) 'deki δ değerini göstermektedir.

Üç deneyden elde ettiğimiz sonuçlara dayanarak aşağıdaki çıkarımlar yapılabilir:

1) Bekleneceği ve Tablo 1 'den açıkça görüleceği gibi örneklem büyüklüğü artırdıkça derinlik artmaktadır. Parametre sayısı ile derinlik arasında ise ters yönlü bir ilişki olduğu yine anlaşılmaktadır.

2) Temiz veride derinliği en yüksek regresyon bekleneceği gibi DR 'dir. İkinci derin regresyon ise LAD çıkmıştır. Bu sonuç kanımızca sürpriz sayılmamalı. Bilindiği gibi DR ve LAD tek değişkenli veriler için verilen 2 farklı medyan tanımının genelleştirilmiş halleridir. DR, medyanın gözlemler sıralandığında ortaya gelen terim

olma tanımına, LAD ise $\sum_{i=1}^n |x_i - B_{1/2}|$ toplamını minimum yapma tanımına

dayanmaktadır. Tek değişkenli verilerde en derin konum parametresi olan medyan, çok değişkenli versiyonlarında bu özelliğini korumuştur. Derinlik sıralamasında EKK ve Huber 'in M tahmincileri DR ve LAD dan sonra gelirken LMS ve LTS daha sonra yer almışlardır. LMS ve LTS ayrıca en büyük saçılım gösteren (MAD 'ı en büyük) tahminciler olarak görülmektedir.

3) Tüm tahminciler kirlenmeden, yönüne ve derecesine bağlı olarak farklı şekillerde etkilenmişlerdir. DR ve LAD, y yönünde kirlenmelerden hemen hiç etkilenmezlerken, x yönünde bir yerel minimum yapacak şekilde etkilenmektedirler. LMS, LTS ve Huber 'in M regresyonu kirlenmeye karşı birbirlerine benzer davranışlar sergilemişlerdir. Her üçü de gerek x gerekse y yönünde kirlenme altında derinliklerini monoton azalan bir

almışlardır. LMS ve LTS ayrıca en büyük saçılım gösteren (MAD 'ı en büyük) tahminciler olarak görülmektedir.

3) Tüm tahminciler kirlenmeden, yönüne ve derecesine bağlı olarak farklı şekillerde etkilenmişlerdir. DR ve LAD, y yönünde kirlenmelerden hemen hiç etkilenmezlerken, x yönünde bir yerel minimum yapacak şekilde etkilenmektedirler. LMS, LTS ve Huber 'in M regresyonu kirlenmeye karşı birbirlerine benzer davranışlar sergilemişlerdir. Her üçü de gerek x gerekse y yönünde kirlenme altında derinliklerini monoton azalan bir karakterde kaybetmektedir, EKK ise gerek x gerekse y yönünde derinliğini çok küçük yüzdelerde hızla kaybetmekte; yerel bir minimumdan sonra kirlenme yüzdesi artırıldıkça derinliği de artmaktadır. Bu özellik EKK 'daki kadar belirgin olmasa da x yönündeki kirlenmelerde LAD da ve bir miktar da DR 'da görülmektedir. Bu sonuçlar, derinliği her tahminci için bir uyum iyiliği ölçüsü olarak kullanmanın sakıncalı olabileceğine işaret etmektedir.

Tablo 1. Model 1, 2 ve 3 için Örneklem Büyüklüğü ve Derinliklerin Medyanları

n	p = 2	p = 3	p = 4
10	3	2	2
15	5	3	2
20	7	5	4
25	9	7	6
30	11	9	8
35	13	11	10
40	15	13	12
45	17	15	13
50	19	18	15
55	22	19	17
60	24	21	20
65	26	24	21
70	28	25	23

Tablo 2: Model 2 için Tahmincilerin Derinliklerinin Medyan ve MAD Değerleri

Tablo Başlıklarında Kullanılan Kısaltmalar Sırasıyla : Kirlenme Yüzdesi - X Yönünde Sapma - Y Yönünde Sapma

n=100 m=25	%10 - 3 - 0		%10 - 5 - 0		%10 - 0 - 3		%10 - 0 - 5		%10 - 3 - 3		%10 - 3 - 5		%10 - 5 - 3		%10 - 5 - 5	
	Med.	MAD	Med.	MAD	Med.	MAD	Med.	MAD	Med.	MAD	Med.	MAD	Med.	MAD	Med.	MAD
OLS	9	0,64	9	0,76	10	0,96	10	0,96	7	1,48	7	1,12	8	1,72	7	1,92
DR	40	1,48	40	0,96	43	1,60	43	1,64	43	1,44	42	1,84	42	1,72	43	1,44
LMS	31	2,52	32	2,68	34	2,88	36	2,92	37	2,52	34	2,84	34	3,08	35	3,08
LTS	32	2,00	31	2,92	34	2,96	35	2,64	34	3,20	35	3,00	34	2,56	34	2,60
LAD	31	2,64	10	2,84	39	1,64	39	1,40	35	2,44	37	2,52	30	4,36	31	5,16
HuberM	31	3,52	32	2,72	37	2,88	36	3,12	34	2,44	34	2,68	34	3,48	35	2,16
n=100 m=25	%20 - 3 - 0		%20 - 5 - 0		%20 - 0 - 3		%20 - 0 - 5		%20 - 3 - 3		%20 - 3 - 5		%20 - 5 - 3		%20 - 5 - 5	
	Med.	MAD	Med.	MAD	Med.	MAD	Med.	MAD	Med.	MAD	Med.	MAD	Med.	MAD	Med.	MAD
OLS	16	1,08	14	1,04	17	1,48	18	1,36	12	0,92	12	1,20	12	2,32	11	2,48
DR	31	1,12	31	1,60	44	1,12	43	1,52	41	2,48	40	2,40	39	2,56	38	2,84
LMS	28	3,48	29	2,48	35	3,00	31	2,72	34	2,80	33	2,88	33	3,72	32	2,36
LTS	28	2,88	29	2,08	34	2,84	35	3,00	34	2,92	35	2,36	34	2,32	34	2,52
LAD	17	0,84	15	1,00	39	1,72	39	1,76	33	4,60	30	5,24	20	5,24	21	5,60
HuberM	29	2,24	26	1,92	32	3,28	35	2,68	33	2,56	33	2,96	35	3,80	33	3,96
n=100 m=25	%40 - 3 - 0		%40 - 5 - 0		%40 - 0 - 3		%40 - 0 - 5		%40 - 3 - 3		%40 - 3 - 5		%40 - 5 - 3		%40 - 5 - 5	
	Med.	MAD	Med.	MAD	Med.	MAD	Med.	MAD	Med.	MAD	Med.	MAD	Med.	MAD	Med.	MAD
OLS	23	1,72	23	1,48	36	1,28	33	1,88	22	1,48	21	1,80	21	1,64	22	1,68
DR	37	2,00	35	2,28	44	1,20	43	1,72	36	2,80	37	1,88	36	2,04	36	2,52
LMS	20	1,96	20	1,80	28	3,48	27	3,32	28	2,24	31	3,32	30	2,92	30	2,40
LTS	22	1,52	22	1,40	27	2,16	28	2,60	30	1,92	31	2,36	32	2,08	31	2,64
LAD	26	1,64	22	1,48	39	1,64	39	1,16	27	1,12	27	1,84	25	1,28	25	0,96
HuberM	21	1,80	21	1,68	28	3,32	27	3,12	31	2,88	31	2,64	30	2,88	30	2,60
n=100 m=25	%0 - 0 - 0															
	Med.	MAD														
OLS	39	1,12														
DR	43	1,60														
LMS	35	2,56														
LTS	35	1,92														
LAD	40	1,40														
HuberM	37	2,12														

Ekk Ve Bazı Dayanıklı Tahmincilerin Derinliklerinin Kirlenmeye Karşı Değişimlerinin İncelenmesi

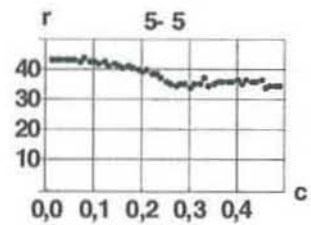
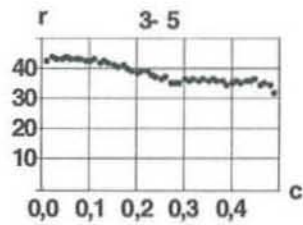
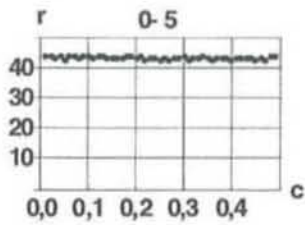
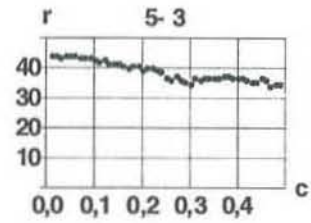
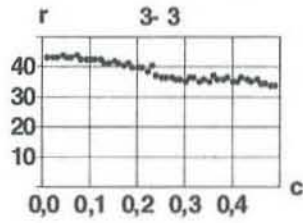
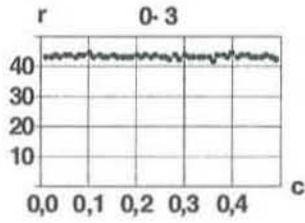
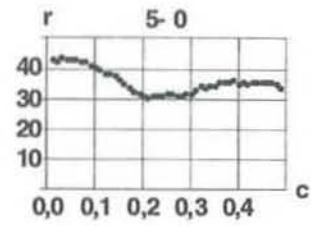
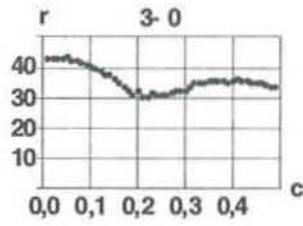
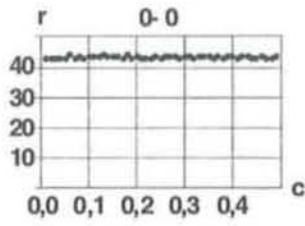
LAD	17	0,84	15	1,00	39	1,72	39	1,76	33	4,60	30	5,24	20	5,24	21	5,60
HuberM	29	2,24	26	1,92	32	3,28	35	2,68	33	2,56	33	2,96	35	3,80	33	3,96
n=100	%40 - 3 - 0		%40 - 5 - 0		%40 - 0 - 3		%40 - 0 - 5		%40 - 3 - 3		%40 - 3 - 5		%40 - 5 - 3		%40 - 5 - 5	
m=25	Med.	MAD	Med.	MAD	Med.	MAD	Med.	MAD	Med.	MAD	Med.	MAD	Med.	MAD	Med.	MAD
OLS	23	1,72	23	1,48	36	1,28	33	1,88	22	1,48	21	1,80	21	1,64	22	1,68
DR	37	2,00	35	2,28	44	1,20	43	1,72	36	2,80	37	1,88	36	2,04	36	2,52
LMS	20	1,96	20	1,80	28	3,48	27	3,32	28	2,24	31	3,32	30	2,92	30	2,40
LTS	22	1,52	22	1,40	27	2,16	28	2,60	30	1,92	31	2,36	32	2,08	31	2,64
LAD	26	1,64	22	1,48	39	1,64	39	1,16	27	1,12	27	1,84	25	1,28	25	0,96
HuberM	21	1,80	21	1,68	28	3,32	27	3,12	31	2,88	31	2,64	30	2,88	30	2,60
n=100	%0 - 0 - 0															
m=25	Med.	MAD														
OLS	39	1,12														
DR	43	1,60														
LMS	35	2,56														
LTS	35	1,92														
LAD	40	1,40														
HuberM	37	2,12														

Tablo 3: Model 3 için Tahmincilerin Derinliklerinin Medyan ve MAD Değerleri

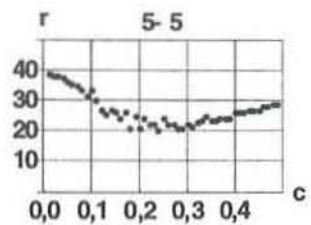
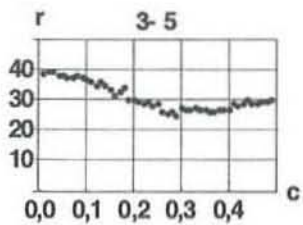
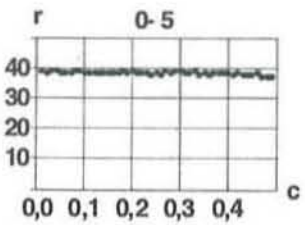
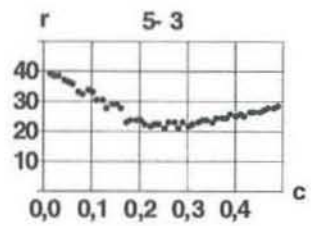
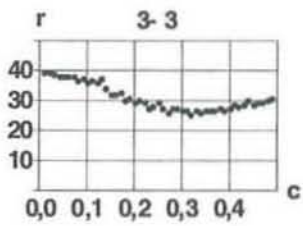
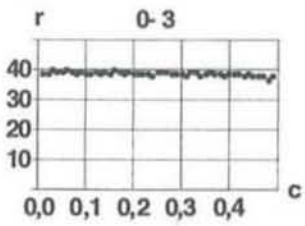
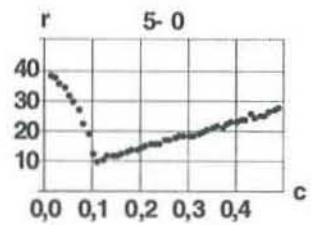
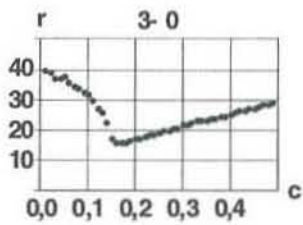
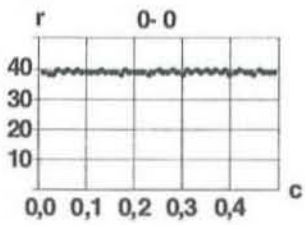
Tablo Başlıklarında Kullanılan Kısaltmalar Sırasıyla : Kirlenme Yüzdesi - X Yönünde Sapma - Y Yönünde Sapma

n=100	%10 - 3 - 0		%10 - 5 - 0		%10 - 0 - 3		%10 - 0 - 5		%10 - 3 - 3		%10 - 3 - 5		%10 - 5 - 3		%10 - 5 - 5	
m=25	Med.	MAD	Med.	MAD	Med.	MAD	Med.	MAD	Med.	MAD	Med.	MAD	Med.	MAD	Med.	MAD
OLS	9	0,56	8	0,92	9	1,08	9	0,92	6	0,96	6	1,32	6	1,40	6	1,80
DR	40	1,12	39	1,32	43	1,36	43	1,28	42	1,84	42	1,72	42	2,08	42	1,28
LMS	29	2,44	32	2,36	32	3,48	32	2,60	31	2,56	29	2,88	31	1,92	30	2,28
LTS	29	2,04	27	2,76	32	2,32	31	2,96	32	2,40	30	2,76	31	2,12	31	2,56
LAD	24	2,84	9	1,04	35	1,60	35	1,68	32	2,12	32	2,76	26	7,56	22	6,80
HuberM	28	2,60	29	2,64	31	3,28	31	2,40	29	3,68	32	3,04	32	2,80	30	3,08
n=100	%20 - 3 - 0		%20 - 5 - 0		%20 - 0 - 3		%20 - 0 - 5		%20 - 3 - 3		%20 - 3 - 5		%20 - 5 - 3		%20 - 5 - 5	

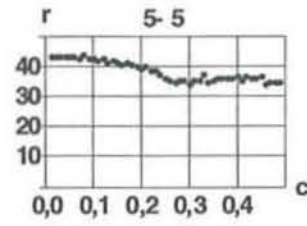
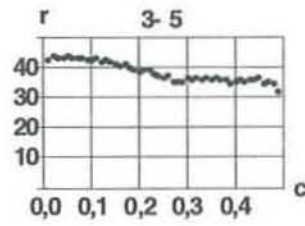
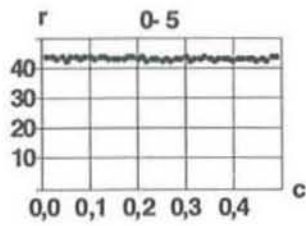
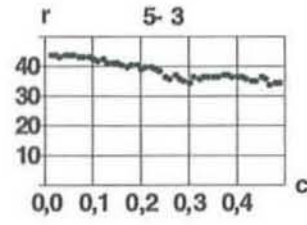
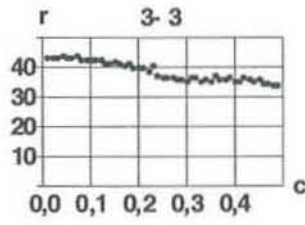
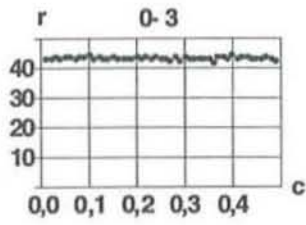
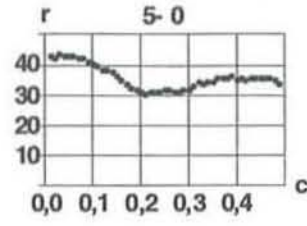
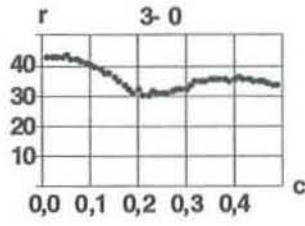
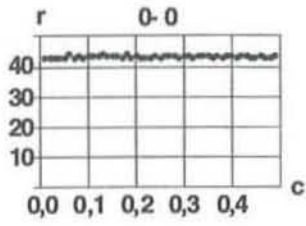
DR



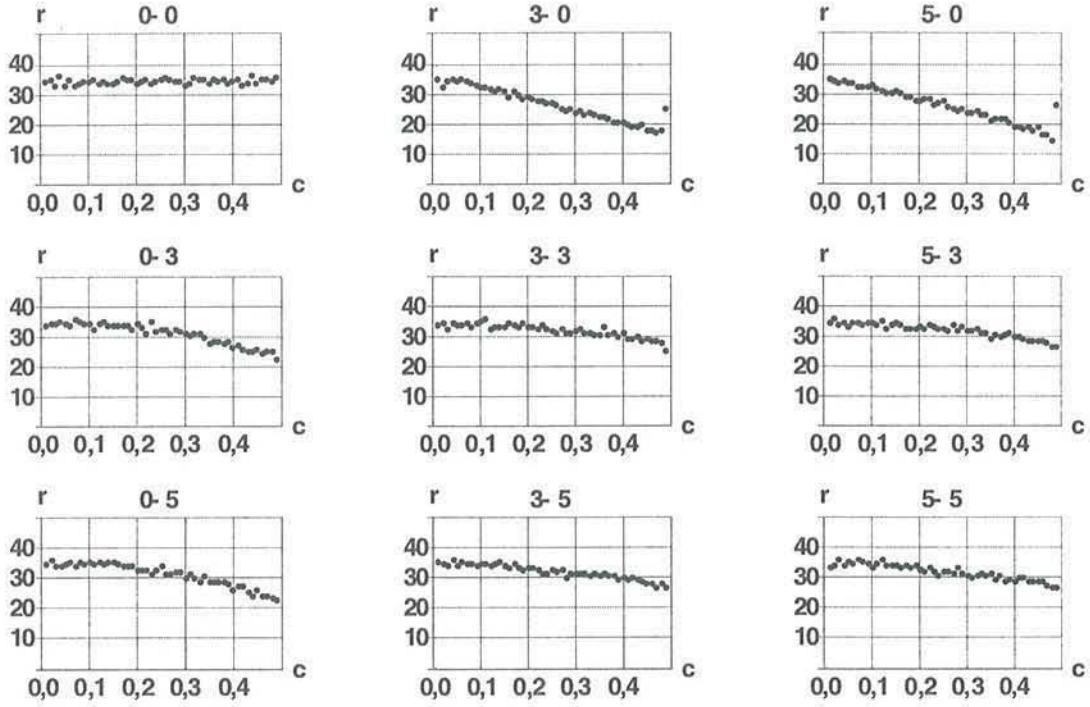
LAD



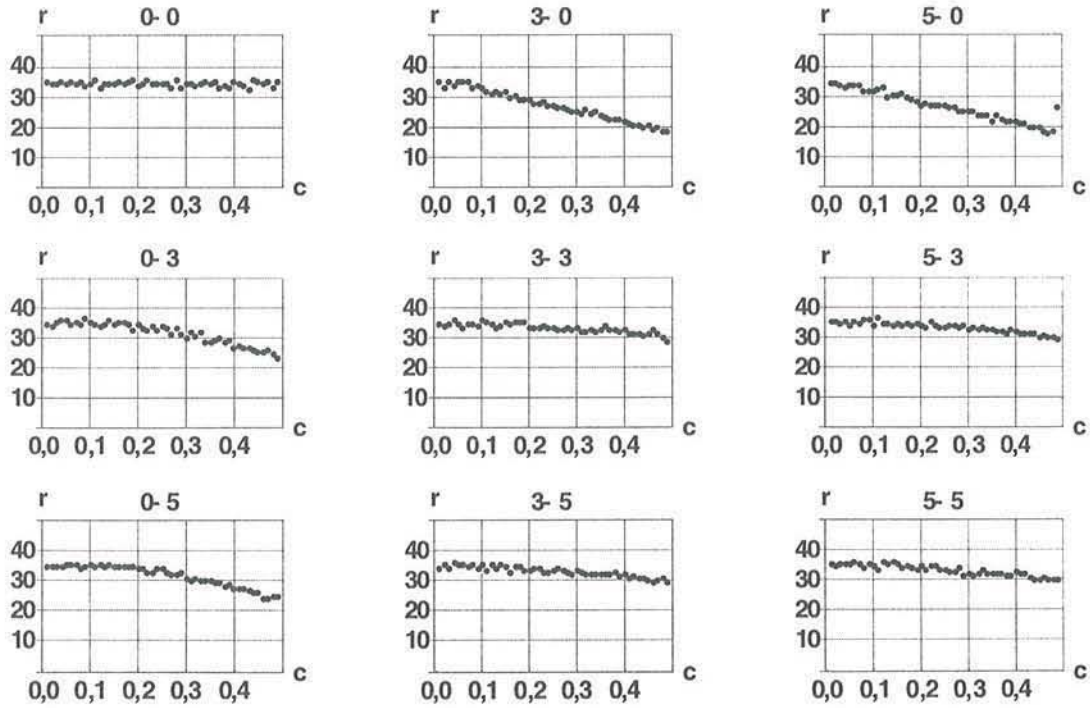
DR



LMS

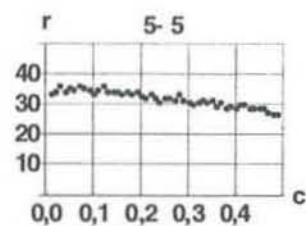
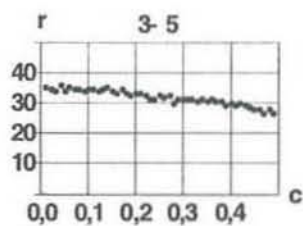
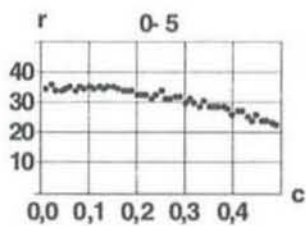
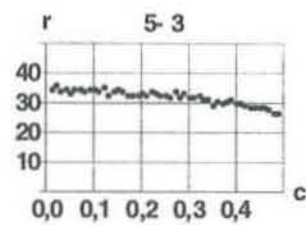
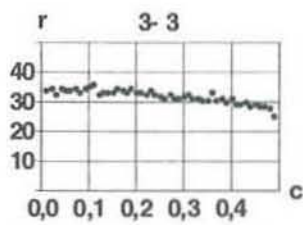
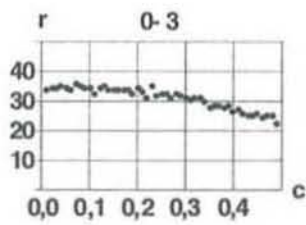
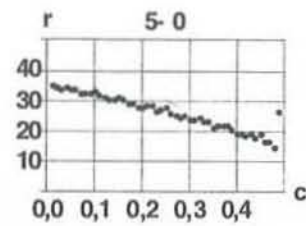
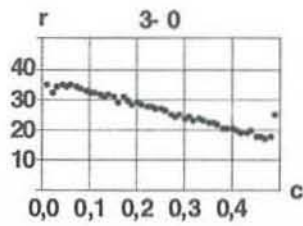
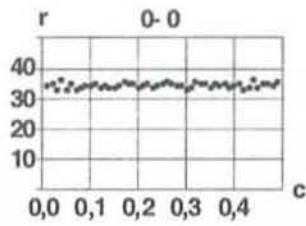


LTS

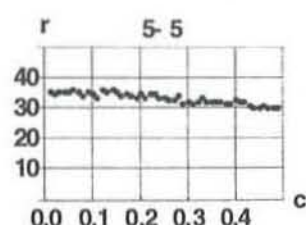
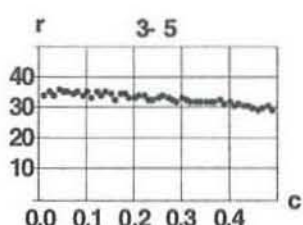
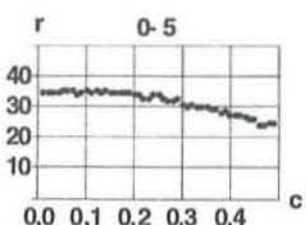
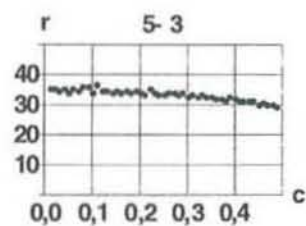
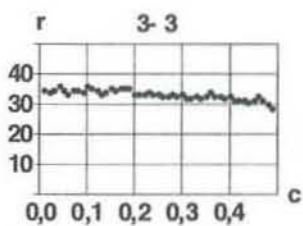
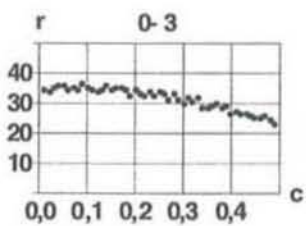
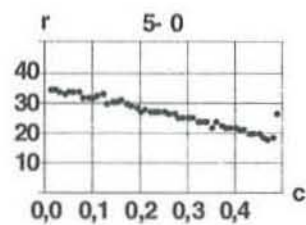
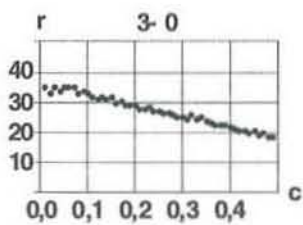
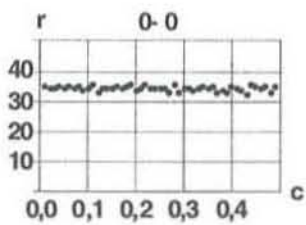


Şekil 3. LMS ve LTS Tahmincilerinin Çeşitli Kirlenme Yüzdelelerinde (c) Derinlikleri (r)

LMS



LTS



4. DERİNLİK DAĞILIMLARI İLE HİPOTEZ TESTLERİ

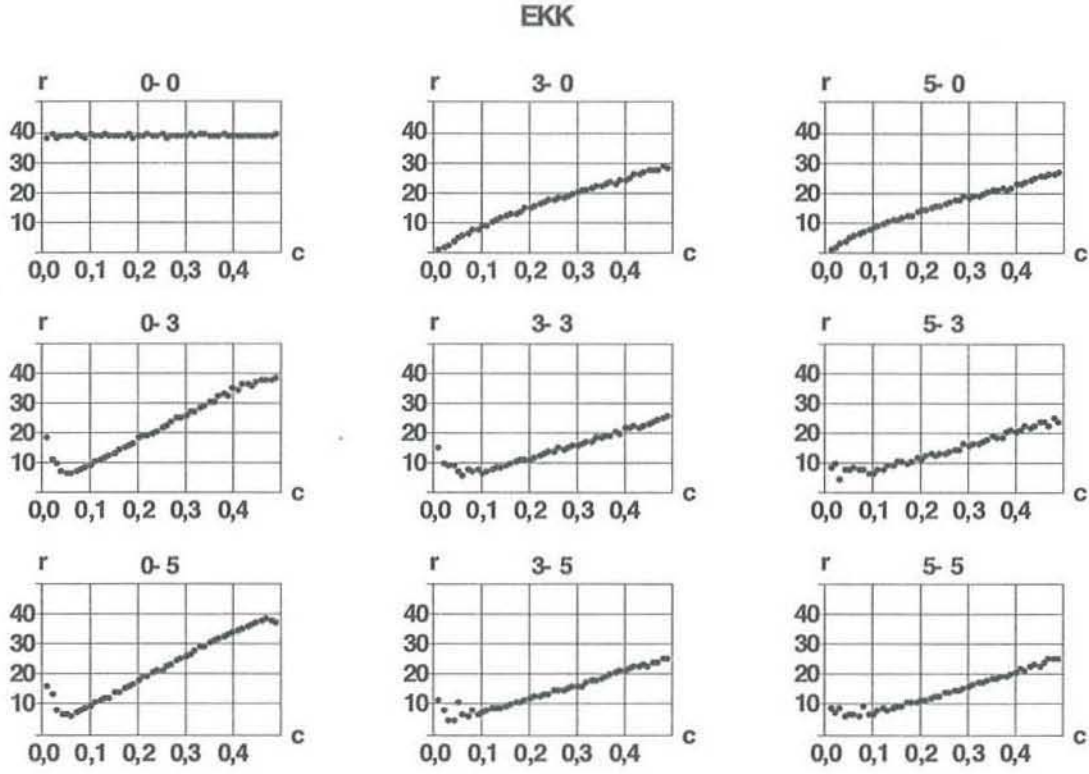
Van Aelst ve ark. (2002) DR 'ın parametrelerinin anlamlılık testlerini gerçekleştirmede maksimum derinliğin dağılımının kullanılabilirliğini önermişlerdir. 2 boyut için (tek bağımsız değişkenli model) böyle bir dağılım Daniels (1954) 'de elde edilmiştir. 2 'den büyük boyut için ise dağılımların simülasyonlarla elde edilebileceği yine Van Aelst 'in çalışmasında önerilmiştir.

Bir önceki bölümde tahmincilerin derinliklerinin kirlenmeden etkilendikleri, açık örüntüler sergiledikleri görüldü. Dolayısıyla Van Aelst ve ark. (2002) 'de DR 'a uygulanan parametrelerin anlamlılık testlerinin EKK 'ya da uygulanabileceği düşüncesi akla gelebilir. Düşüncenin araştırılması amacıyla Eşitlik (4) 'teki 2 bağımsız değişkenli model için $n = 100$ birimlik örneklem çekilip her bir örneklemden de $B = 1000$ bootstrap örnekleme elde ederek $H_0 : \beta_i = 0$ hipotezi altındaki derinliklerin dağılımları bulundu. Dağılımların kantillerinden ilgilenilen hipotezlerin p-değerleri hesaplandı ve bunlar klasik yolla yani t dağılımından hesaplanan p-değerleriyle karşılaştırıldı. $m = 25$ kez uygulanan bu sürecin sonunda % 90 'ın üzerinde tutarlılıklar elde edildi. Diğer bir deyişle klasik yöntem ve derinlik dağılımları ile uygulanan süreçle hipotez testi sürecinde aynı sonuca varma olasılığı 0,90 'ın üzerindedir. Sonuçlar Tablo 4 'te verilmiştir.

Uygulanan süreç, EKK 'nın dağılımsal varsayımlarının ihlal edildiği ve de kaldıraç etkisi yapabilecek aşırı değerlerin olduğu verilerde dayanıklı bir yöntem olarak önerilebilir.

Tablo 4. Klasik Süreçten ve Derinliklerin Bootstrap Dağılımlarından Bulunan p-Değerleri

$H_0: \beta_0=0$, Klasik	$H_0: \beta_0=0$, Derinlik	$H_0: \beta_1=0$, Klasik	$H_0: \beta_1=0$, Derinlik	$H_0: \beta_2=0$, Klasik	$H_0: \beta_2=0$, Derinlik
0.35607	0.25	0.41051	1.	0.0014605	0.
0.90508	0.99	0.28324	0.	1.1564×10^{-10}	0.
0.016943	0.	0.064383	0.	0.15362	0.96
0.47282	0.6	6.7121×10^{-6}	0.	0.012055	0.
0.10975	0.	0.094342	0.06	0.72028	0.92
0.0013437	0.	0.026793	0.	0.43660	0.08
0.0060544	0.	0.050335	0.	0.061832	0.01
0.46853	0.91	9.8772×10^{-10}	0.	0.00097474	0.
0.46265	0.95	0.23471	0.8	0.084624	0.57
0.0032205	0.	0.16828	0.1	0.86380	1.
0.0065012	0.	0.0090960	0.	0.041791	0.25
0.11605	0.05	0.79132	0.56	0.0013340	0.
0.18035	0.09	3.2195×10^{-9}	0.	0.0067276	0.
0.19853	0.14	0.00071839	0.	0.54661	0.42
0.22275	0.17	0.0066673	0.	0.52604	0.43
0.91249	0.88	0.00051203	0.05	0.18752	0.42
0.037204	0.	0.00031639	0.	0.12748	0.05
0.26202	0.5	0.17236	0.37	0.24331	0.68
0.75644	0.76	0.043975	0.04	0.12043	0.33
0.66189	0.27	0.91368	0.93	0.0014065	0.
0.77260	0.99	0.040525	0.01	0.043852	0.03
0.51636	0.4	0.027517	0.01	0.0018272	0.01
0.24201	0.01	0.0033037	0.	0.16190	0.37
0.0013644	0.	0.010118	0.	0.0078881	0.
0.29193	0.15	0.0056876	0.	0.99860	0.92



Şekil 4. Huber 'in M ve EKK Tahmincilerinin Çeşitli Kirlenme Yüzdelerinde (c) Derinlikleri (r)

4. DERİNLİK DAĞILIMLARI İLE HİPOTEZ TESTLERİ

Van Aelst ve ark. (2002) DR 'in parametrelerinin anlamlılık testlerini gerçekleştirmede maksimum derinliğin dağılımının kullanılabileceğini önermişlerdir. 2 boyut için (tek bağımsız değişkenli model) böyle bir dağılım Daniels (1954) 'de elde edilmiştir. 2 'den büyük boyut için ise dağılımların simülasyonlarla elde edilebileceği yine Van Aelst 'in çalışmasında önerilmiştir.

Bir önceki bölümde tahmincilerin derinliklerinin kirlenmeden etkilendikleri, açık örüntüler sergiledikleri görüldü. Dolayısıyla Van Aelst ve ark. (2002) 'de DR 'a uygulanan parametrelerin anlamlılık testlerinin EKK 'ya da uygulanabileceği düşüncesi akla gelebilir. Düşüncenin araştırılması amacıyla Eşitlik (4) 'teki 2 bağımsız değişkenli model için $n = 100$ birimlik örneklem çekilip her bir örneklemde $B = 1000$ bootstrap örnekleme elde ederek $H_0 : \beta_i = 0$ hipotezi altındaki derinliklerin dağılımları bulundu. Dağılımların kantillerinden ilgilenilen hipotezlerin p-değerleri hesaplandı ve bunlar klasik yolla yani t dağılımından hesaplanan p-değerleriyle karşılaştırıldı. $m = 25$ kez uygulanan bu sürecin sonunda % 90 'ın üzerinde tutarlılıklar elde edildi. Diğer bir deyişle klasik yöntem ve derinlik dağılımları ile uygulanan süreçle hipotez testi sürecinde aynı sonuca varma olasılığı 0,90 'ın üzerindedir. Sonuçlar Tablo 4 'te verilmiştir.

Uygulanan süreç, EKK 'nın dağılımsal varsayımlarının ihlal edildiği ve de kaldıraç etkisi yapabilecek aşırı değerlerin olduğu verilerde dayanıklı bir yöntem olarak önerilebilir.

Tablo 4. Klasik Süreçten ve Derinliklerin Bootstrap Dağılımlarından Bulunan p-Değerleri

$H_0:\beta_0=0$, Klasik	$H_0:\beta_0=0$, Derinlik	$H_0:\beta_1=0$, Klasik	$H_0:\beta_1=0$, Derinlik	$H_0:\beta_2=0$, Klasik	$H_0:\beta_2=0$, Derinlik
0.35607	0.25	0.41051	1.	0.0014605	0.
0.90508	0.99	0.28324	0.	1.1564×10^{-10}	0.
0.016943	0.	0.064383	0.	0.15362	0.96
0.47282	0.6	6.7121×10^{-6}	0.	0.012055	0.
0.10975	0.	0.094342	0.06	0.72028	0.92
0.0013437	0.	0.026793	0.	0.43660	0.08
0.0060544	0.	0.050335	0.	0.061832	0.01
0.46853	0.91	9.8772×10^{-10}	0.	0.00097474	0.
0.46265	0.95	0.23471	0.8	0.084624	0.57
0.0032205	0.	0.16828	0.1	0.86380	1.
0.0065012	0.	0.0090960	0.	0.041791	0.25
0.11605	0.05	0.79132	0.56	0.0013340	0.
0.18035	0.09	3.2195×10^{-9}	0.	0.0067276	0.
0.19853	0.14	0.00071839	0.	0.54661	0.42
0.22275	0.17	0.0066673	0.	0.52604	0.43
0.91249	0.88	0.00051203	0.05	0.18752	0.42
0.037204	0.	0.00031639	0.	0.12748	0.05
0.26202	0.5	0.17236	0.37	0.24331	0.68
0.75644	0.76	0.043975	0.04	0.12043	0.33
0.66189	0.27	0.91368	0.93	0.0014065	0.
0.77260	0.99	0.040525	0.01	0.043852	0.03
0.51636	0.4	0.027517	0.01	0.0018272	0.01
0.24201	0.01	0.0033037	0.	0.16190	0.37
0.0013644	0.	0.010118	0.	0.0078881	0.
0.29193	0.15	0.0056876	0.	0.99860	0.92

5. SONUÇ

Bu çalışmada çeşitli tahminçilerin derinliklerinin kirlenme karşındaki değişimleri incelendi ve derinliğin, tahminçilerin uyum iyiliklerinin (goodness of fit) bir ölçüsü olabilme olanakları araştırıldı. Çalışmadaki simülasyonlar, kirlenme karşısında, ilgilenilen 6 tahmincinin derinliklerinin belirgin örüntüler sergilediğini gösterdi. LMS, LTS ve Huber 'in M tahminçileri kirlenme artırıldıkça derinliklerini kaybederken, EKK da sezgiye ters gelebilecek ters yönlü bir ilişki görüldü. EKK 'daki kadar belirgin olmasa da ve yalnızca x yönündeki kirlenme karşısında LAD ve hafif ölçüde DR 'da benzer bir özellik görüldü. Bu sonuçlar, her tahminci için derinliğin bir uyum ölçüsü olamayacağına ancak derinlik ve uyumun bazı durumlarda birlikte incelenmeye değer olduğuna işaret edebilir.

Çalışmada ayrıca bootstrap yöntemiyle elde edilen derinlik dağılımları ile hipotez testi sürecinin uygulanma olanakları araştırılmış, klasik hipotez testi süreciyle karşılaştırıldığında anlamlı sonuçlar elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

- DANIELS, H.E. (1954), *A Distribution-Free Test for Regression Parameters*, Annals of Mathematical Statistics, 25,499-513.
- KARABULUT, İ., ÖZTÜRK, F. (2003), *Lineer Modellerde Yarı Uzay Derinliğine Dayalı Dengeli Bootstrap Güven Bölgeleri*, İstatistik Araştırma Dergisi, Cilt 2, No:3, 63-72.
- LIU, R., PARELIUS, J. , SINGH, K. (1990), *Multivariate Analysis By Data Depth : Descriptive Statistics, Graphics And Inference*, The Annals Of Statistics, Vol.27, No.3, 783-858.
- LIU, R., SINGH, K. (1993), *A Quality Index Based On Data Depth And Multivariate Rank Tests*, Journal Of The American Statistical Association, Vol.88, 257-260.
- LIU, R., SINGH, K. (1997), *Notions Of Limiting P-Values On Data Depth And Bootstrap*, Journal Of The American Statistical Association, Vol.91, 266-277.
- ROUSSEEUW, P. J., HUBERT, M. (1999), *Regression Depth*, Journal Of The American Statistical Assosiation, Vol.94, 388-402.
- ROUSSEEUW, P.J., RUTS, I, TUKEY, J.W. (1999), *The Bagplot: A Bivariate Boxplot*, The American Statistician, Vol.53, No.4, 382-387.
- TUKEY, J.W. (1975), *Mathematics And Picturing Data*, Proceedings Of The 1974 International Congress Of Mathematics, 523-531.
- VAN AELST, S., ROUSSEEUW, P.J., HUBERT, M., STRUYF, A. (2002), *The Deepest Regression Method*, Journal Of Multivariate Analysis, Vol.81, 138-166.

**A STUDY FOR EXAMINING THE
BEHAVIORS OF REGRESSION DEPTHS
OF OLS AND SOME ROBUST
REGRESSION METHODS UNDER
CONTAMINATION**

ABSTRACT

In this paper, we examine the behaviors of the regression depths of OLS and some robust regression methods under contamination. Upon Monte Carlo simulations, we determine some patterns for some estimators. Using bootstrap method, we also show that the distributions of regression depth can be utilized in hypothesis testing of regression parameters of OLS.

Key Words: *Bootstrap, P-Value, Regression depth; Robust Methods; Outliers; The deepest regression*

SÜREKLİ DEĞİŞKENLER İÇEREN GRAFİKSEL MODELLERDE KULLANILAN SAPMA VE F- İSTATİSTİKLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

Fikri GÖKPINAR*

ÖZET

Çok değişkenli normal dağılıma sahip değişkenler için kullanılan grafiksel modeller kovaryans seçimli modeller olarak adlandırılır. Böyle modeller değişken çiftlerinin koşullu bağımsızlığına dayanarak belirlenir. Bu çalışmada kovaryans seçimli modeller için test işleminde kullanılan sapma ve F istatistikleri farklı örnek çapları, değişken sayıları ve koşullu bağımsızlık yapıları altında simülasyon yoluyla karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Koşullu bağımsızlık, Kovaryans seçimli modeller, Sapma, F istatistiği

1. GİRİŞ

Çok değişkenli normal dağılıma sahip değişkenler için elde edilen grafiksel modeller kovaryans seçimli modeller olarak adlandırılır. Bu modellerde, ters kovaryans matrisinin elemanları sıfır olanlar dikkate alınarak model oluşturulabilir. Grafikte, V köşe kümesini, E köşeler arası kenar kümesini temsil eder. Eğer bir köşe çifti arası birden fazla kenar yoksa grafik basittir. Kenar $(\alpha, \beta) \in E$ ve $(\beta, \alpha) \in E$ şeklinde ise yön verilmemiş kenar, $(\alpha, \beta) \in E$ ve $(\beta, \alpha) \notin E$ ise yön verilmiş bir kenardır. Grafiğin tüm köşeleri arasında çizgi ya da ok varsa bu grafiğe tam grafik denir. V'nin bir alt kümesine, eğer buna ilişkin grafik tam ise, tamdır denir. V'nin tam alt kümelerine klik denir. α 'dan β 'ya bir ok varsa α 'ya β 'nin ailesi, β 'ya da α 'nın çocuğu denir. β 'nin aile kümesini $pa(\beta)$, α 'nın çocuklar kümesi $ch(\alpha)$ şeklinde gösterilebilir. α ile β arasında bir çizgi varsa α ve β 'ya bitişik ya da komşu denir. α köşesinin komşu kümesi $ne(\alpha)$ şeklinde gösterilebilir. Grafiksel modellerin temeli rasgele değişkenlerin koşullu bağımsızlığına dayanır. Bu modellerin grafikleri koşullu bağımsızlık ilişkilerini gösterir.

X, Y, Z sürekli rasgele değişkenleri için $X \perp Y/Z$ koşullu bağımsızlığı

$$X \perp Y/Z \Leftrightarrow f_{XY/Z}(x, y/z) = f_{X/Z}(x/z) f_{Y/Z}(y/z) \quad (1.1)$$

biçiminde ifade edilir.

$X \perp Y/Z$ ilişkisi aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$$\left. \begin{array}{l} X \perp Y/Z \Rightarrow Y \perp X/Z \text{ dir.} \\ X \perp Y/Z \text{ ve } U=h(x) \Rightarrow U \perp Y/Z \text{ dir.} \\ X \perp Y/Z \text{ ve } U=h(x) \Rightarrow X \perp Y/(Z, U) \text{ dir.} \\ X \perp Y/Z \text{ ve } X \perp W/(Y, Z) \Rightarrow X \perp (W, Y)/Z \text{ dir.} \end{array} \right\} \quad (1.2)$$

Kovaryans seçimli modellerin oluşturulmasına ilişkin kural Dempster(1972) tarafından verilmiştir. Ayrıca Wermuth(1980) ayrıştırılabilir modeller kovaryans seçimli modeller ile Wright(1923) tarafından önerilen path Analizi arasındaki ilişkiyi ortaya koymuştur. Daha sonra Cox ve Wermuth(1993) yaptıkları çalışmada kovaryans matrisi ile ilişkilendirilen çeşitli özel doğrusal yapıların modellenmesi için grafiksel modelleri kullanmışlardır. Whittaker(1990) bu modeller için sapma test istatistiği vermiştir. Ayrıca Eriksen(1996) sapma(d) test istatistiğine alternatif olarak geliştirdiği F test istatistiğini önermiştir. Fakat bu test istatistikler birbirleriyle testin gücü bakımından karşılaştırılmamış F ve d'nin hangi şartlar altında birbirlerine üstünlük sağladıkları ortaya konmamıştır. Bu çalışmada sürekli değişken içeren grafiksel modeller için kullanılan bu iki test istatistiği farklı örnek çapları ve farklı değişken sayıları için değişik kısmi korelasyon yapıları dikkate alınarak testin gücü bakımından karşılaştırılmış ve test istatistiklerinin daha iyi olan durumlar ortaya konmuştur.

2. SÜREKLİ DEĞİŞKEN İÇEREN GRAFİKSEL MODELLER

Grafiksel modeller sürekli değişkenler için kovaryans seçimli modelleri temel alır. Kovaryans seçimli modeller ilk önce Dempster(1972) tarafında kullanılmıştır. Bu modeller Whittaker(1990) tarafından geliştirilmiştir.

$Y=(Y_1, \dots, Y_q)$ q boyutlu rassal değişkenler vektörü olmak üzere

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_q \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

ortalama vektörü ve

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdot & \cdot & \sigma_{1q} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdot & \cdot & \sigma_{2q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_{q1} & \sigma_{q2} & \cdot & \cdot & \sigma_{qq} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

kovaryans matrisi ile çok değişkenli normal dağılıma sahiptir. Burada dikkate alınan kovaryans matrisinin tersidir.

$$K = \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} w^{11} & w^{12} & \cdot & \cdot & w^{1q} \\ w^{21} & w^{22} & \cdot & \cdot & w^{2q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ w^{q1} & w^{q2} & \cdot & \cdot & w^{qq} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

$$K = \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} w^{11} & w^{12} & . & . & w^{1q} \\ w^{21} & w^{22} & . & . & w^{2q} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ w^{q1} & w^{q2} & . & . & w^{qq} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Bu matris kesinlik matrisi ya da konsantrasyon matrisi olarak adlandırılır(Lauritzen and Wermuth,1989).

(Y_3, \dots, Y_q) verilmişken (Y_1, Y_2)'in koşullu dağılımı (2.4)deki kovaryans matrisine sahip iki değişkenli normal dağılımdır.

$$\begin{pmatrix} w^{11} & w^{12} \\ w^{21} & w^{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{w^{11}w^{22} - (w^{12})^2} \begin{pmatrix} w^{22} & -w^{21} \\ -w^{12} & w^{11} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

(2.4)deki kovaryans matrisli dağılıma ilişkin korelasyon katsayısı (2.5)te verildiği gibidir.

$$p^{12.34\dots q} = \frac{-w^{12}}{(w^{11}w^{22})^{\frac{1}{2}}} \quad (2.5)$$

Ayrıca

$$p^{12.34\dots q} = 0 \Leftrightarrow w^{12} = 0 \quad (2.6)$$

denkliği (2.5)ten açıkça görülür.

Geri kalan değişkenler verilmişken iki değişkenin bağımsız olması için gerek ve yeter koşul konsantrasyon matrisinde karşılık gelen elemanların sıfır olmasıdır(Cox and Wermuth 1993). Bu şekilde konsantrasyon matrisinin elemanları, log lineer modeldeki iki faktörlü etkileşimlerle aynı rolü üstlenir.

(2.6)daki koşullu bağımsızlık Y'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu dikkate alınarak kanonik parametreler yardımıyla görülebilir. Y'nin yoğunluğu

$$f(y) = (2\pi)^{-1} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(y - \mu)' \Sigma^{-1} (y - \mu)\right\} \quad (2.7)$$

şeklinde yazılır. Bu yoğunluk,

$$f(y) = \exp(g + h'y - \frac{1}{2} y' Ky) \quad (2.8)$$

ile ifade edilir. Burada $K = \Sigma^{-1}$, $h = \Sigma^{-1} \mu$ ve g normalleştirme sabiti olup

$$g = -\frac{1}{2} \ln |\Sigma| - \frac{1}{2} \mu' \Sigma^{-1} \mu - \frac{q}{2} \ln(2\pi) \quad (2.9)$$

$$Y_j \perp Y_k / (\text{geri kalan}) \Leftrightarrow w^{jk} = 0 \quad (2.11)$$

biçiminde ifade edilir.

Grafiksel gauss modellerde log lineer modellerde olduğu gibi hiyerarşik ya da grafiksel olmayan model ayrımı yoktur. Tüm modeller grafiksel ve grafiklerle modeller arasında birebir ilişki vardır. Grafiksel modeller koşullu bağımsızlık ilişkilerini ortaya koymak için d ve F istatistiklerinden faydalanır. d ve F istatistiklerinin hesaplanmasında en çok olabilirlik fonksiyonlarından faydalanılır. Bu fonksiyonu oluşturmak için N gözlemlik $y^{(1)}, \dots, y^{(N)}$ örneği

alınır. $\bar{y} = \sum_{k=1}^N y^{(k)} / N$ örnek ortalaması vektörüdür. Örnek kovaryans matrisi

$$S = \sum_{k=1}^N (y^{(k)} - \bar{y})(y^{(k)} - \bar{y})' / N$$

olsun. log-yoğunluk

$$\ln(f(y)) = -q \ln(2\pi) / 2 - \ln|\Sigma| / 2 - (y - \mu)' \Sigma^{-1} (y - \mu) / 2$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca log-olabilirliği

$$l(\mu, K) = -Nq \ln(2\pi) / 2 - N \ln|\Sigma| / 2 - \sum_{k=1}^N (y^{(k)} - \mu)' K (y^{(k)} - \mu) / 2 \quad (2.12)$$

dir. Son terim

$$\sum_{k=1}^N (y^{(k)} - \mu)' K (y^{(k)} - \mu) = \sum_{k=1}^N (y^{(k)} - \bar{y})' K (y^{(k)} - \bar{y}) + N(\bar{y} - \mu)' K (\bar{y} - \mu)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade iz fonksiyonu kullanarak aşağıdaki gibi basitleştirilebilir.

$$\sum_{k=1}^N (y^{(k)} - \bar{y})' K (y^{(k)} - \bar{y}) = N \text{tr}(KS)$$

Böylece log-olabilirliği aşağıdaki eşitlik ile verilir.

$$l(\mu, K) = -Nq \ln(2\pi) / 2 - N \ln|\Sigma| / 2 - N \text{tr}(KS) / 2 - N(\bar{y} - \mu)' K (\bar{y} - \mu) / 2 \quad (2.13)$$

$a \subseteq \Gamma$ olan değişken altkümesi için, Σ^{aa} , S^{aa} a 'ya karşılık gelen Σ ve S 'in alt matrisleri olsun. q_1, q_2, \dots, q_t üreteçleriyle belirlenen model için, minimal yeterli istatistikler kümesinin, \bar{y} örnek ortalaması ve üreteçlere karşılık gelen örnek kovaryans matrisinin marjinal alt kümelerinin kümesi (S^{aa} , $a=q_1, q_2, \dots, q_t$ için) olduğu gösterilebilir. Olabilirlik eşitlikleri model altında beklenen değerleriyle birlikte bunları (minimal yeterli istatistik) eşitleyerek oluşturulur. Böylece $a=q_1, q_2, \dots, q_t$ için $\hat{\mu} = \bar{y}$ ve $\hat{\Sigma}^{aa} = S^{aa}$ eşitlikleri elde edilir.

Bu sonuçları kullanarak, model altında olabilirliği maksimize etmek için ifade basitleştirilebilir. $\hat{\mu} = \bar{y}$ olduğunda (2.13)deki son terim yok olur ve $\hat{\Sigma}$ ve S , $w^{ij}=0$ olan

$a \subseteq \Gamma$ olan değişken altkümesi için, Σ^{aa} , S^{aa} a'ya karşılık gelen Σ ve S 'in alt matrisleri olsun. q_1, q_2, \dots, q_t üreteçleriyle belirlenen model için, minimal yeterli istatistikler kümesinin, \bar{y} örnek ortalaması ve üreteçlere karşılık gelen örnek kovaryans matrisinin marjinal alt kümelerinin kümesi (S^{aa} , $a=q_1, q_2, \dots, q_t$ için) olduğu gösterilebilir. Olabilirlik eşitlikleri model altında beklenen değerleriyle birlikte bunları (minimal yeterli istatistik) eşitleyerek oluşturulur. Böylece $a=q_1, q_2, \dots, q_t$ için $\hat{\mu} = \bar{y}$ ve $\hat{\Sigma}^{aa} = S^{aa}$ eşitlikleri elde edilir.

Bu sonuçları kullanarak, model altında olabilirliği maksimize etmek için ifade basitleştirilebilir. $\hat{\mu} = \bar{y}$ olduğunda (2.13)deki son terim yok olur ve $\hat{\Sigma}$ ve S , $w^{ij}=0$ olan elemanlar için kesin olarak farklılık gösterdiğinde $tr(\hat{K}S) = tr(\hat{K}\hat{\Sigma}) = q$ elde edilir Böylece model altında maksimize edilen log-olabilirlik

$$l_0 = -Nq \ln(2\pi) / 2 - N \ln |\hat{\Sigma}| / 2 - Nq / 2$$

ifadesine basitleştirilebilir. Tam model M_1 altında $\hat{\Sigma} = S$ 'dir. Böylece bu modelin maksimize edilmiş log-olabilirliği

$$l_1 = -Nq \ln(2\pi) / 2 - N \ln |S| / 2 - Nq / 2$$

dir.

Grafiksel modellerde bir kenarın çıkarılıp çıkarılmayacağına ilişkin test için sapma istatistiği aşağıdaki gibi tanımlanır.

Bir M_0 modelinin sapması M_1 doymuş modeline karşı M_0 'ın olabilirlik oranı testidir. Böylece modelin sapması

$$\begin{aligned} G^2 &= 2(l_1 - l_0) \\ &= N \ln \left(\frac{|\hat{\Sigma}|}{|S|} \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

olur. Burada S , Σ 'nın doymuş model altındaki tahminidir $\hat{\Sigma}$ ise karşıt (doymamış) model altındaki tahminidir. S bilinen örnek kovaryans matrisidir. $\hat{\Sigma}$ ise modelde hangi değişkenler arasında koşullu bağımsızlık olduğu varsayılıyorsa S 'in tersinde o elemanlara karşılık gelen elemanların 0 olarak belirlenmesiyle elde edilir.

$M_0 \subseteq M_1$ için sapma farkı ise

$$d = N \ln \left(\frac{|\hat{\Sigma}_0|}{|\hat{\Sigma}_1|} \right) \quad (2.15)$$

3. UYGULAMA

Uygulama olarak, bölüm 2'de tanımlanan d ve F test istatistikleri 3, 4 ve 5 değişkenli modellerde farklı bağımlılık yapıları ve örnek çapları verilmişken testin gücü bakımından karşılaştırılacaktır.

3, 4 ve 5 değişkenli modeller için yığın konsantrasyon matrisleri sırasıyla

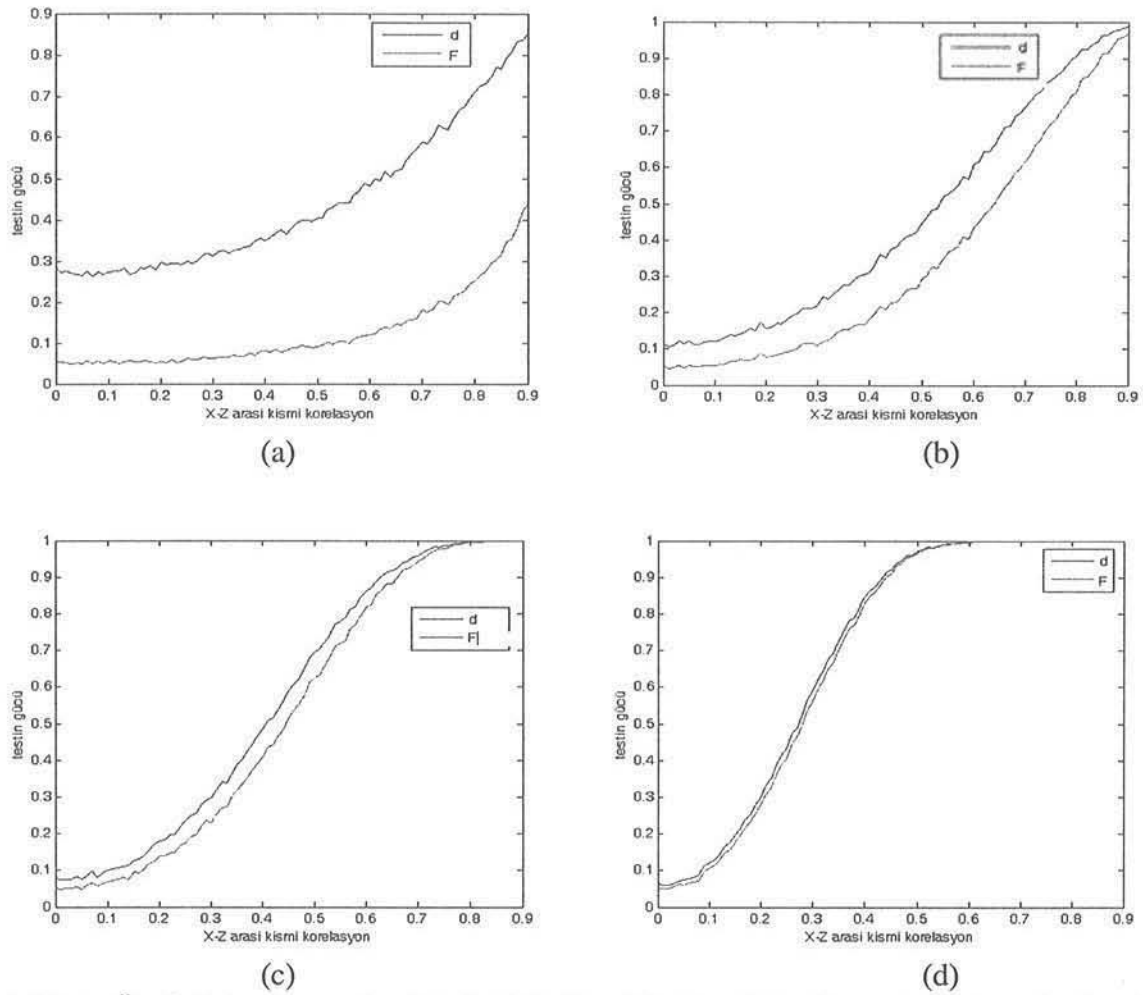
$$K = \begin{pmatrix} 0.5301 & 0.2471 & w_{xz} \\ 0.2471 & 1.0465 & 0.5673 \\ w_{zx} & 0.5673 & 1.5854 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 0.029 & -0.016 & -0.008 & w_{xz} \\ -0.016 & 0.050 & -0.006 & -0.015 \\ -0.008 & -0.006 & 0.039 & -0.037 \\ w_{xz} & -0.015 & -0.037 & 0.089 \end{pmatrix}$$

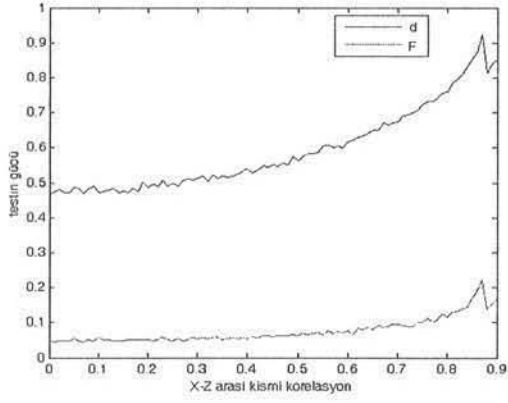
$$K = \begin{pmatrix} 0.011 & -0.005 & -0.001 & -0.001 & w_{xz} \\ -0.005 & 0.027 & -0.007 & -0.005 & -0.003 \\ -0.001 & -0.007 & 0.010 & -0.020 & 0.010 \\ -0.001 & -0.005 & -0.020 & 0.007 & 0.020 \\ w_{xz} & -0.003 & 0.010 & 0.020 & 0.005 \end{pmatrix}$$

olarak alınmıştır.

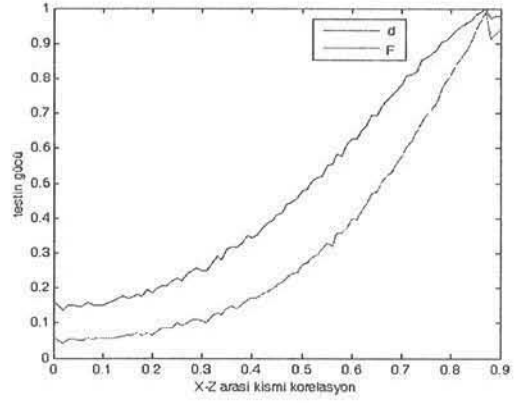
İki test istatistiği için kullanılan formüllerde yığın ortalaması olmadığından yığın ortalamaları tüm değişkenler için 50 alınmıştır. Örnek çapları 5, 10, 20 ve 50 göz önüne alınmış ve X ile Z arasındaki kısmi korelasyona farklı değerler verilerek Şekil 3.1-Şekil 3.3 elde edilmiştir.



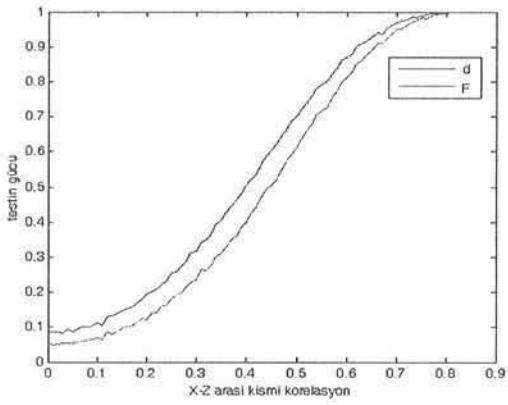
Şekil 3.1: Üç değişkenli yapıda a)N=5, b)N=10, c)N=20, d) N=50 örnek çaplarında d ve F için testin güçleri



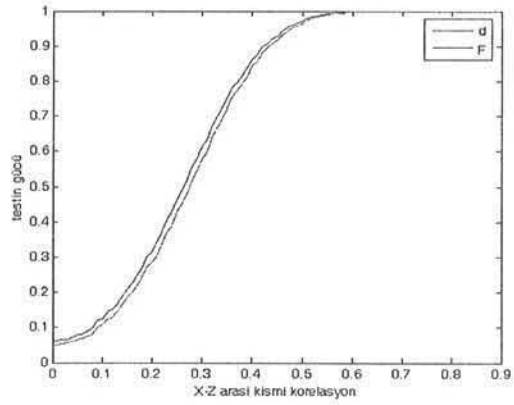
(a)



(b)

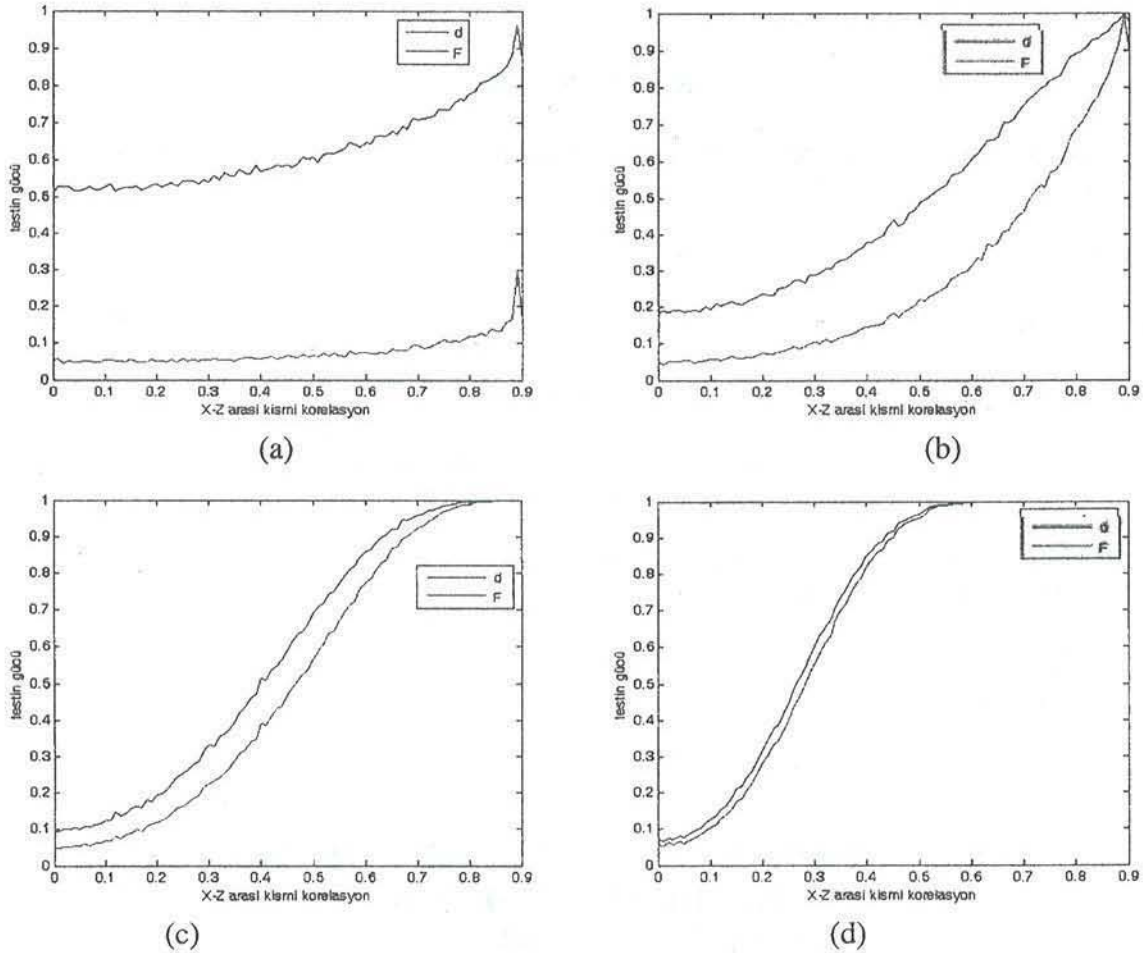


(c)



(d)

Şekil 3.2: Dört değişkeli yapıda a)N=5, b)N=10, c)N=20, d) N=50 örnek çaplarında d ve F için testin güçleri



Şekil 3.3: Beş değişkeli yapıda a)N=5, b)N=10, c)N=20, d) N=50 örnek çaplarında d ve F için testin güçleri

Şekil 3.1-Şekil 3.3 incelendiğinde örnek çapı küçük iken d ile F arasındaki fark çok büyüktür. Fakat iki tahmin edici için de testin gücü yüksek değerler almamaktadır. Burada dikkat edilecek nokta küçük örnek çaplarında iki değişken arasındaki kısmi korelasyon 0'a yakın iken bile d'nin F'ye göre çok yüksek değerler aldığıdır. Bu fark değişken sayısı arttıkça artmaktadır. Şekil 3.1a, 3.2a, 3.3a incelendiğinde kısmi korelasyon 0 iken F için elde edilen testin gücü değeri 0.05 yakın değerler alırken, d için testin gücü değeri değişken sayısı arttıkça yükselmektedir. Bu durum istenilen bir sonuç değildir. Kısmi korelasyon 0'a yakinken testin gücünün 0'a yakın olması beklenir. Ancak kısmi korelasyon değeri yüksek iken testin gücünün de yüksek olması düşünülür. Fakat N=5 için F, kısmi korelasyon değeri 0.90 iken testin gücünün 0.2 civarı değer aldığı görülüyor. Bu durumda çekilen örnek çapı küçükken, iki test istatistiği farklı durumlarda değişik sonuçlar vermektedir. Küçük yığın kısmi korelasyonları için F daha iyi sonuçlar verirken yüksek kısmi korelasyon değerlerinde d daha uygun sonuçlar vermektedir. Örnek çapı arttıkça d, kısmi korelasyonun düşük olduğu durumlarda F'e yaklaşırken, kısmi korelasyonun yüksek olduğu durumlarda F, d'ye yakın

kısmi korelasyonları içim F daha iyi sonuçlar verirken yüksek kısmi korelasyon değerlerinde d daha uygun sonuçlar vermektedir. Örnek çapı arttıkça d, kısmi korelasyonun düşük olduğu durumlarda F'e yaklaşırken, kısmi korelasyonun yüksek olduğu durumlarda F, d'ye yakın sonuçlar vermektedir. Özellikle örnek çapı 50 iken iki test istatistiği arasında farkın çok az olduğu görülmüştür.

KAYNAKLAR

- COX, D.R. and WERMUTH N., 1993, *Linear dependencies represented by chain graph (with discussion)*. Statistical Science, 8, 204-218
- DEMPSTER, A.P., 1972, *Covariance selection*, Biometrics, 28, 157-75
- EDWARDS, D., 2001, *Introduction to graphical modelling*. 2nd Edition, Springer-Verlag, New York
- ERIKSEN P.S., 1996, *Tests in covariance selection models*. Scand. Journal of Statistics. 23, 275-284
- LAURITZEN, S.L. and WERMUTH, N., 1989, *Graphical models for associations between variables, some of which are qualitative and quantative*, Annals of Statistics, 17, 31-57
- WERMUTH, N., 1980, *Linear recursive equations, covariance selections and path analysis*, Journal of American Statistical Association, 75, 963,72
- WHITTAKER, J., 1990, *Graphical models in applied multivariate statistics*, John Wiley and Sons, Chichester
- WRIGHT, S., 1923, *The Theory of Path coefficients: a reply to Niles' criticism*. Genetics, 8, 239-55

COMPARISON OF DEVIANCE AND F STATISTICS USED IN GRAPHICAL MODELS CONTAINS CONTINUOUS VARIABLES

ABSTRACT

Graphical models for variables, which was distributed multinormal is called covariance selection models. Covariance selection models were determined by conditional independences. In this study, deviance and F, which is used to test conditional independences, is compared under different sample size, different number of variables and different conditional independence structures by simulation.

Key Words: *Conditional independence, Covariance selection model, Deviance, F-statistics*

ANALYTICAL SOLUTION OF THE TRUNCATED INTERARRIVAL ERLANGIAN QUEUE : $E_r/M/C/K$ WITH BALKING AND RENEGING

A. I. SHAWKY* and A. A. BADAUWY

ABSTRACT

This paper aimed to treat the analytical solution of the truncated interarrival Erlangian queue: $E_r/M/c/k$ with balking and reneging for general values of r , c and k . The discipline considered here is FIFO. Some previously published results are shown to be special cases of the present results.

Key Words: *Balking, Reneging, Steady-state Probability, Truncated Interarrival Erlangian Queue.*

1. INTRODUCTION

Gupta [4] has emphasized that the solution of the steady - state probabilities of the truncated Erlangian queues without balking and reneging concepts should be numerically and computer oriented. White et al. [18] have solved some special cases numerically for $k= 1, 2$ and $r = 2$ only but without any concept. Morse [8] treated the non truncated case without balking and reneging. Shawky [11] treated the system of machine interference model: $M/M/1/k/k$ with balking, reneging and an additional server for longer queues, in [12] he studied the system: $M/M/c/k/N$ with balking, reneging and spares, and also in [13] he discussed the system: $H_r/M/c/k/N$ with balking and reneging. Al-Seedy and Al-Ibraheem [1] studied the system: $H_2/M/1/k+Y/k+Y$ with the concepts of balking, reneging, state – dependent, spares and an additional server for longer queues. Shawky and El-Paoumy [15] treated the queue: $H_k/M/c/N$ with balking and reneging, in [16] they treated the queue: $H_k/M/2/N$ with balking, reneging and two heterogeneous servers, and also in [17] they discussed the queue: $M/H_k/1/N$ with balking and reneging. Jain and Rakhee [5] discussed the system of N-policy for a machine repair system with spares and reneging, Pearn and Chang [9] dealt with optimal management problem of the N-policy $M/E_k/1$ queueing system with a removable service station under steady-state condition, Sadlam and Torum [10] studied the queueing system: $M/M/2$ with Poisson arrivals, two heterogeneous parallel servers and no waiting line and Shawky [14] discussed the service Erlangian machine interference model: $M/E_r/1/k/N$ with balking and reneging.

In this paper, the truncated multi - channel queue : $E_r/M/c/k$ is treated with both balking and reneging concepts. The steady - state probabilities of the model herein are

* Current address: Girls College of education, P. O. Box 55002, Jeddah 21534, Saudi Arabia.

In this paper, the truncated multi - channel queue : $E_r/M/c/k$ is treated with both balking and renegeing concepts. The steady - state probabilities of the model herein are derived together with some measures of effectiveness where these measures are analytically deduced. Finally, some previously published works are shown to be special cases of the model herein.

2. DESCRIPTION OF THE SYSTEM

Consider the multi - servers truncated interarrival Erlangian queue having r - stages each with interarrival rate $r\lambda$ and the service time is exponential with rate μ . The capacity of the system is k and the concepts of balking and renegeing are assumed. The queue discipline is assumed to be first come, first served.

Assume the balk concept with probability :

$$\beta = \text{prob. \{a unit joins the queue\} ,}$$

where $0 \leq \beta < 1$ if $c \leq n \leq k$ and $\beta = 1$ if $1 \leq n < c$.

It is also assumed that the units may renege according to an exponential distribution, $f(t) = \alpha e^{-\alpha t}$, $t > 0$, with parameter α . The probability of renegeing in a short period of time Δt is given by $r_n = (n-c) \alpha \Delta t$, for $c < n \leq k$ and $r_n = 0$, for $0 \leq n \leq c$.

3. THE STEADY-STATE EQUATIONS AND THEIR SOLUTION

Let us define $P_{n,j}$, the equilibrium probability that there are n units in the system and j^{th} arrival stage occupied the next arriving unit, where $n = 0, 1, \dots, k$ and $j = 1, 2, \dots, r$.

Then, the steady-state probability difference equations, in the presence of balking and renegeing are :

$$\left. \begin{aligned} r\lambda P_{0,j} &= r\lambda P_{0,j+1} + \mu P_{1,j}, & 1 \leq j < r \\ r\lambda P_{0,r} &= \mu P_{1,r}, & j = r \end{aligned} \right\}, \quad n = 0 \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} (r\lambda + n\mu)P_{n,j} &= r\lambda P_{n,j+1} + (n+1)\mu P_{n+1,j}, & 1 \leq j < r \\ (r\lambda + n\mu)P_{n,r} &= r\lambda P_{n-1,1} + (n+1)\mu P_{n+1,r}, & j = r \end{aligned} \right\}, \quad 1 \leq n < c \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} (\beta r\lambda + c\mu)P_{c,j} &= \beta r\lambda P_{c,j+1} + (c\mu + \alpha)P_{c+1,j}, & 1 \leq j < r \\ (\beta r\lambda + c\mu)P_{c,r} &= r\lambda P_{c-1,1} + (c\mu + \alpha)P_{c+1,r}, & j = r \end{aligned} \right\}, \quad n = c \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} [\beta r\lambda + c\mu + (n-c)\alpha]P_{n,j} &= \beta r\lambda P_{n,j+1} + [c\mu + (n-c+1)\alpha]P_{n+1,j}, & 1 \leq j < r \\ [\beta r\lambda + c\mu + (n-c)\alpha]P_{n,r} &= \beta r\lambda P_{n-1,1} + [c\mu + (n-c+1)\alpha]P_{n+1,r}, & j = r \end{aligned} \right\}, \quad c+1 \leq n < k \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} [\beta r\lambda + c\mu + (k-c)\alpha]P_{k,j} &= \beta r\lambda P_{k,j+1}, & 1 \leq j < r \\ [\beta r\lambda + c\mu + (k-c)\alpha]P_{k,r} &= \beta r\lambda P_{k-1,1} + \beta r\lambda P_{k,1}, & j = r \end{aligned} \right\}, \quad n = k. \quad (5)$$

Now, to solve the probability - difference equations use the iterative (recursive) method as follows.

From first equation of (5),

$$P_{k,j+1} = \phi_k P_{k,j}, \quad 1 \leq j < r \quad (6)$$

where

$$\phi_n = 1 + \theta_n, \quad \theta_n = \begin{cases} \frac{n\mu}{r\lambda}, & 0 \leq n < c \\ \frac{c\mu + (n-c)\alpha}{r\beta\lambda}, & c \leq n \leq k. \end{cases} \quad (7)$$

Put $j = 1, 2, \dots, r-1$ in (6), we get

$$P_{k,j} = \phi_k^{j-1} u_k P_{k,1}, \quad u_k = 1, \quad 1 \leq j \leq r. \quad (8)$$

Using second equation of (5) and (8) we have

$$P_{k-1,1} = u_{k-1} P_{k,1}, \quad u_{k-1} = \phi_k^r - 1. \quad (9)$$

From first equation of (4) at $n = k-1$,

$$P_{k-1,j+1} = \phi_{k-1} P_{k-1,j} - \theta_k P_{k,j}, \quad 1 \leq j < r. \quad (10)$$

For $j = 1, 2, \dots, r-1$ in (10) and using equations (8) and (9),

$$P_{k-1,j} = \left[\phi_{k-1}^{j-1} u_{k-1} - \theta_k u_k \sum_{a_1=1}^{j-1} \phi_k^{a_1-1} \phi_{k-1}^{j-1-a_1} \right] P_{k,1}, \quad 1 \leq j \leq r. \quad (11)$$

Using second equation of (4), (8) and (11) for $n = k-1, j = r$ we obtain

$$P_{k-2,1} = u_{k-2} P_{k,1}, \quad u_{k-2} = \phi_{k-1}^r u_{k-1} - \theta_k u_k \sum_{a_1=1}^r \phi_k^{a_1-1} \phi_{k-1}^{r-a_1}. \quad (12)$$

Also, from first equation of (4) at $n = k-2$,

$$P_{k-2,j+1} = \phi_{k-2} P_{k-2,j} - \theta_{k-1} P_{k-1,j}, \quad 1 \leq j < r. \quad (13)$$

Put $j = 1, 2, \dots, r-1$ in (13) and using the equations (9) and (12) we get

$$P_{k-2,j} = \left[\phi_{k-2}^{j-1} u_{k-2} - \theta_{k-1} u_{k-1} \sum_{a_1=a_0}^{j-1} \phi_{k-1}^{a_1-1} \phi_{k-2}^{j-1-a_1} + \theta_k \theta_{k-1} u_k \sum_{a_1=a_0}^{j-2} \phi_{k-1}^{a_1-1} \sum_{a_2=a_1}^{j-2} \phi_k^{a_2-a_1} \phi_{k-2}^{j-a_2-2} \right] P_{k,1}, \quad 1 \leq j \leq r, a_0 = 1. \quad (14)$$

Similarly, from equations (4), (11) and (12) at $n = k-2, j = r$, we have

$$P_{k-3,1} = u_{k-3} P_{k,1}, \quad (15)$$

where

$$u_{k-3} = \phi_{k-2}^r u_{k-2} - \theta_{k-1} u_{k-1} \sum_{a_1=a_0}^r \phi_{k-1}^{a_1-1} \phi_{k-2}^{r-a_1} + \theta_k \theta_{k-1} u_k \sum_{a_1=a_0}^{r-1} \phi_{k-1}^{a_1-1} \sum_{a_2=a_1}^{r-1} \phi_k^{a_2-a_1} \phi_{k-2}^{r-1-a_2}. \quad (16)$$

Using first equation of (4) at $n = k-3, j = 1, 2, \dots, r-1,$

$$P_{k-3,j} = \left[\phi_{k-3}^{j-1} u_{k-3} - \theta_{k-2} u_{k-2} \sum_{a_1=a_0}^{j-1} \phi_{k-2}^{a_1-1} \phi_{k-3}^{j-1-a_1} + \theta_{k-2} \theta_{k-1} u_{k-1} \sum_{a_1=a_0}^{j-2} \phi_{k-2}^{a_1-1} \sum_{a_2=a_1}^{j-2} \phi_{k-1}^{a_2-a_1} \phi_{k-3}^{j-2-a_2} - \theta_{k-2} \theta_{k-1} \theta_k u_k \sum_{a_1=a_0}^{j-3} \phi_{k-2}^{a_1-1} \sum_{a_2=a_1}^{j-3} \phi_{k-1}^{a_2-a_1} \sum_{a_3=a_2}^{j-3} \phi_k^{a_3-a_2} \phi_{k-3}^{j-3-a_3} \right] P_{k,1}. \quad (17)$$

In general, for $n = k, k-1, k-2, \dots, c$ and $j = 1, 2, \dots, r,$ we have

$$P_{n,j} = \eta_{n,j} P_{k,1}, \quad c \leq n \leq k, \quad 1 \leq j \leq r, \quad (18)$$

where

$$\eta_{n,j} = \phi_n^{j-1} u_n + \sum_{\ell=0}^{k-n-1} \{ (-1)^{\ell+1} u_{n+\ell+1} \left[\prod_{i=0}^{\ell} \left(\theta_{n+i+1} \sum_{a_{i+1}=a_i}^{j-\ell-1} \phi_{n+i+1}^{a_{i+1}-a_i} \right) \right] \phi_n^{j-\ell-1-a_{\ell+1}} \}, \quad 0 \leq n \leq k, \quad 1 \leq j \leq r, \quad (19)$$

$$u_n = \begin{cases} 1, & n = k \\ \phi_k^r - 1, & n = k - 1 \\ \phi_{n+1}^r u_{n+1} + \sum_{\ell=0}^{k-n-2} (-1)^{\ell+1} u_{n+\ell+2} \left[\prod_{i=0}^{\ell} \left(\theta_{n+i+2} \sum_{a_{i+1}=a_i}^{r-\ell} \phi_{n+i+2}^{a_{i+1}-a_i} \right) \right] \phi_{n+1}^{r-\ell-a_{\ell+1}}, & 0 \leq n \leq k - 2. \end{cases}$$

Similarly, from equations (2), (3), (18) and (19) we obtain

$$P_{n,j} = \beta \eta_{n,j} P_{k,1}, \quad 0 \leq n < c, \quad 1 \leq j \leq r. \quad (20)$$

Equations (18) and (20) give all the probabilities in terms of $P_{k,1}$, which itself may now be determined by using the normalizing condition:

$$\sum_{n=0}^k \sum_{j=1}^r P_{n,j} = 1. \quad (21)$$

Then,

$$P_{k,1} = 1 / \left(\beta \sum_{n=0}^{c-1} \sum_{j=1}^r \eta_{n,j} + \sum_{n=c}^k \sum_{j=1}^r \eta_{n,j} \right), \quad (22)$$

hence all the probabilities are completely known in terms of the queue parameters.

Therefore, the expected number of units in the system and in the queue are, respectively,

$$L = \sum_{n=1}^k \sum_{j=1}^r n P_{n,j} = \left[\beta \sum_{n=1}^{c-1} \sum_{j=1}^r n \eta_{n,j} + \sum_{n=c}^k \sum_{j=1}^r n \eta_{n,j} \right] P_{k,1},$$

$$L_q = \sum_{n=c}^k \sum_{j=1}^r (n-c) P_{n,j} = \sum_{n=c+1}^k \sum_{j=1}^r (n-c) \eta_{n,j} P_{k,1},$$

and the expected waiting time in both the system and the queue are obtained by:

$$W = \frac{L}{\lambda'} \quad , \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda'} \quad , \quad \lambda' = \mu(L - L_q) .$$

EXAMPLE

In the above system : $E_r/M/c/k$ with balking and reneging, letting $r = 3$, $c=5$ and $k = 8$, i.e., the queue : $E_3/M/5/8$ with balking and reneging, the results are :

$$P_{8,2} = \phi_8 P_{8,1} \quad , \quad P_{8,3} = \phi_8^2 P_{8,1} \quad , \quad P_{7,j} = \eta_{7,j} P_{8,1} \quad , \quad P_{6,j} = \eta_{6,j} P_{8,1} \quad , \quad P_{5,j} = \eta_{5,j} P_{8,1} \quad ,$$

$$P_{4,j} = \beta \eta_{4,j} P_{8,1} \quad , \quad P_{3,j} = \beta \eta_{3,j} P_{8,1} \quad , \quad P_{2,j} = \beta \eta_{2,j} P_{8,1} \quad , \quad P_{1,j} = \beta \eta_{1,j} P_{8,1} \quad , \quad P_{0,j} = \beta \eta_{0,j} P_{8,1} \quad , \quad j=1, 2, 3,$$

where

$$\eta_{7,1} = u_7 = \phi_8^3 - 1 \quad , \quad \eta_{7,2} = \phi_7 u_7 - \theta_8 \quad , \quad \eta_{7,3} = \phi_7^2 u_7 - \theta_8 (\phi_7 + \phi_8) \quad ,$$

$$\eta_{6,1} = u_6 = \phi_7^3 u_7 - \theta_8 (\phi_7^2 + \phi_7 \phi_8 + \phi_8^2) \quad , \quad \eta_{6,2} = \phi_6 u_6 - \theta_7 u_7 \quad ,$$

$$\eta_{6,3} = \phi_6^2 u_6 - \theta_7 u_7 (\phi_6 + \phi_7) + \theta_7 \theta_8 \quad , \quad \eta_{5,1} = u_5 = \phi_6^3 u_6 - \theta_7 u_7 (\phi_6^2 + \phi_6 \phi_7 + \phi_7^2) + \theta_7 \theta_8 (\phi_6 + \phi_7 + \phi_8) \quad ,$$

$$\eta_{5,2} = \phi_5 u_5 - \theta_6 u_6 \quad , \quad \eta_{5,3} = \phi_5^2 u_5 - \theta_6 u_6 (\phi_5 + \phi_6) + \theta_6 \theta_7 u_7 \quad ,$$

$$\eta_{4,1} = u_4 = \phi_5^3 u_5 - \theta_6 u_6 (\phi_5^2 + \phi_5 \phi_6 + \phi_6^2) + \theta_6 \theta_7 u_7 (\phi_5 + \phi_6 + \phi_7) - \theta_6 \theta_7 \theta_8 \quad ,$$

$$\eta_{4,2} = \phi_4 u_4 - \theta_5 u_5 \quad , \quad \eta_{4,3} = \phi_4^2 u_4 - \theta_5 u_5 (\phi_4 + \phi_5) + \theta_5 \theta_6 u_6 \quad ,$$

$$\eta_{3,1} = u_3 = \phi_4^3 u_4 - \theta_5 u_5 (\phi_4^2 + \phi_4 \phi_5 + \phi_5^2) + \theta_5 \theta_6 u_6 (\phi_4 + \phi_5 + \phi_6) - \theta_5 \theta_6 \theta_7 u_7 \quad ,$$

$$\eta_{3,2} = \phi_3 u_3 - \theta_4 u_4 \quad , \quad \eta_{3,3} = \phi_3^2 u_3 - \theta_4 u_4 (\phi_3 + \phi_4) + \theta_4 \theta_5 u_5 \quad ,$$

$$\eta_{2,1} = u_2 = \phi_3^3 u_3 - \theta_4 u_4 (\phi_3^2 + \phi_3 \phi_4 + \phi_4^2) + \theta_4 \theta_5 u_5 (\phi_3 + \phi_4 + \phi_5) - \theta_4 \theta_5 \theta_6 u_6 \quad ,$$

$$\eta_{2,2} = \phi_2 u_2 - \theta_3 u_3 \quad , \quad \eta_{2,3} = \phi_2^2 u_2 - \theta_3 u_3 (\phi_2 + \phi_3) + \theta_3 \theta_4 u_4 \quad ,$$

$$\eta_{1,1} = u_1 = \phi_2^3 u_2 - \theta_3 u_3 (\phi_2^2 + \phi_2 \phi_3 + \phi_3^2) + \theta_3 \theta_4 u_4 (\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) - \theta_3 \theta_4 \theta_5 u_5 \quad ,$$

$$\eta_{1,2} = \phi_1 u_1 - \theta_2 u_2 \quad , \quad \eta_{1,3} = \phi_1^2 u_1 - \theta_2 u_2 (\phi_1 + \phi_2) + \theta_2 \theta_3 u_3 \quad ,$$

$$\eta_{0,1} = u_0 = \phi_1^3 u_1 - \theta_2 u_2 (\phi_1^2 + \phi_1 \phi_2 + \phi_2^2) + \theta_2 \theta_3 u_3 (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) - \theta_2 \theta_3 \theta_4 u_4 \quad ,$$

$$\eta_{0,2} = u_0 - \theta_1 u_1 \quad , \quad \eta_{0,3} = u_0 - \theta_1 u_1 (1 + \phi_1) + \theta_1 \theta_2 u_2 \quad ,$$

$$\theta_1 = \frac{\mu}{3\lambda} \quad , \quad \theta_2 = \frac{2\mu}{\lambda} \quad , \quad \theta_3 = \frac{\mu}{\lambda} \quad , \quad \theta_4 = \frac{4\mu}{3\lambda} \quad , \quad \theta_5 = \frac{5\mu}{3\beta\lambda} \quad , \quad \theta_6 = \frac{5\mu + \alpha}{3\beta\lambda} \quad ,$$

$$\theta_7 = \frac{5\mu + 2\alpha}{3\beta\lambda} \quad , \quad \theta_8 = \frac{5\mu + 3\alpha}{3\beta\lambda} \quad , \quad \phi_n = 1 + \theta_n \quad , \quad n = 0(1)8 \quad , \quad \theta_0 = 0.$$

Then,

$$P_{8,1} = 1 / \left[\beta \sum_{n=0}^4 \sum_{j=1}^3 \eta_{n,j} + \sum_{n=5}^7 \sum_{j=1}^3 \eta_{n,j} + \phi_8^2 + \phi_8 + 1 \right].$$

Moreover, if we put $\beta = 0.6$, $\alpha = 0.3$, $\lambda = 3$ and $\mu = 2$, we get

$$\begin{aligned} P_{8,1} &= 5.839039E-9, & P_{8,2} &= 1.762525E-8, & P_{8,3} &= 5.320213E-8, & P_{7,1} &= 1.547526E-7 \\ P_{7,2} &= 4.4674E-7, & P_{7,3} &= 1.288097E-6, & P_{6,1} &= 3.709194E-6, & P_{6,2} &= 1.048036E-5 \\ P_{6,3} &= 2.959376E-5, & P_{5,1} &= 8.351262E-5, & P_{5,2} &= 2.310907E-4, & P_{5,3} &= 6.390461E-4 \\ P_{4,1} &= 1.059611E-3, & P_{4,2} &= 1.908695E-3, & P_{4,3} &= 3.348545E-3, & P_{3,1} &= 5.614978E-3, \\ P_{3,2} &= 8.416421E-3, & P_{3,3} &= 1.233075E-2, & P_{2,1} &= .01757477, & P_{2,2} &= .03726447, \\ P_{2,3} &= .08133951, & P_{1,1} &= .1815717, & P_{1,2} &= .1984879, & P_{1,3} &= .1929103, \\ P_{0,1} &= .1273266, & P_{0,2} &= .08697737, & P_{0,3} &= .4286894, \end{aligned}$$

$$L = .9547255, \quad L_q = 4.756249E-5, \quad W = .5000249, \quad \text{and} \quad W_q = 2.491023E-5,$$

4. SPECIAL CASES

Some queueing systems can be obtained as special cases of this model.

- 1) If we put $\beta = 1$ and $\alpha = 0$, then we get the queue : $E_r/M/c/k$ without balking and reneing, and the results are :

$$P_{n,j} = \eta_{n,j} P_{k,1}, \quad 0 \leq n \leq k, \quad 1 \leq j \leq r,$$

$$P_{k,1} = 1 / \sum_{n=0}^k \sum_{j=1}^r \eta_{n,j},$$

where

$$\eta_{n,j} = \begin{cases} \phi_c^{j-1} u_n + \sum_{i=1}^{k-n} (-1)^i \binom{j-1}{i} \theta_c^i \phi_c^{j-i-1} u_{n+i}, & c \leq n \leq k \\ \phi_n^{j-1} u_n + \sum_{\ell=0}^{k-n-1} \{ (-1)^{\ell+1} u_{n+\ell+1} \left[\prod_{i=0}^{\ell} \left(\theta_{n+i+1} \sum_{a_{i+1}=a_i}^{j-\ell-1} \phi_{n+i+1}^{a_{i+1}-a_i} \right) \right] \phi_n^{j-\ell-1-a_{\ell+1}} \}, & 0 \leq n < c \end{cases}$$

$1 \leq j \leq r, \quad a_0 = 1,$

$$u_n = \begin{cases} 1, & n = k \\ \phi_c^r - 1, & n = k-1 \\ \sum_{i=1}^{k-n-1} (-1)^i \binom{r}{i} \theta_c^i \phi_c^{r-i} u_{n+i}, & c \leq n < k-1, \\ \phi_{n+1}^r u_{n+1} + \sum_{\ell=0}^{k-n-2} (-1)^{\ell+1} u_{n+\ell+2} \left[\prod_{i=0}^{\ell} \left(\theta_{n+i+2} \sum_{A_{i+1}=A_i}^{r-\ell} \phi_{n+i+2}^{A_{i+1}-A_i} \right) \right] \phi_{n+1}^{r-\ell-A_{\ell+1}}, & 0 \leq n < c, \end{cases}$$

$$\phi_n = 1 + \theta_n, \quad \theta_n = \begin{cases} \frac{n\mu}{r\lambda}, & 0 \leq n < c \\ \frac{c\mu}{r\lambda}, & c \leq n \leq k. \end{cases}$$

2) Let $j = r = 1$, then we get the queue : $M/M/c/k$ with balking and reneging, and the results are :

$$P_n = \begin{cases} (\prod_{i=n+1}^k \theta_i) P_k, & c \leq n < k \\ \beta (\prod_{i=n+1}^k \theta_i) P_k, & 0 \leq n < c, \end{cases}$$

$$P_k = 1 / (1 + \beta \sum_{n=0}^{c-1} \prod_{i=n+1}^k \theta_i + \sum_{i=c}^{k-1} \prod_{i=n+1}^k \theta_i),$$

where

$$\theta_n = \begin{cases} \frac{n\mu}{\lambda}, & 1 \leq n < c \\ \frac{c\mu + (n-c)\alpha}{\beta\lambda}, & c \leq n \leq k. \end{cases}$$

Moreover, let $\beta = 1$ and $\alpha = 0$, we have the system : $M/M/c/k$ without balking and reneging, and the results are :

$$P_n = \begin{cases} \left(\frac{c}{\rho}\right)^{k-n} P_k, & c \leq n \leq k \\ \frac{(c)_{c-n} c^{k-c}}{\rho^{k-n}} P_k, & 0 \leq n < c, \end{cases}$$

$$P_k = 1 / \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c)_{c-n} c^{k-c}}{\rho^{k-n}} + \sum_{i=c}^k \left(\frac{c}{\rho}\right)^{k-n} \right]$$

where

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}, \quad (k)_n = k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1), \quad n \geq 1, \quad (k)_0 = 1,$$

which studied by Kleinrock [6], White et al. [18], Medhi [7], Gross and Harris [3], Bunday [2], Morse [8] and others.

5. CONCLUSIONS

In this paper, the queue: $E_r/M/c/k$ is studied with balking and reneging. The steady-state probabilities and some measures of effectiveness are derived in explicit form. We discussed the numerical example and deduced the expected number of units in

the system and in the queue, and the expected waiting time in both the system and the queue.

Acknowledgement. We are sincerely thankful to the referee for his valuable and constructive comments that had improved our original paper

REFERENCES

- AL-SEEDY, R.O. and AL-IBRAHEEM, F. M., "An interarrival hyperexponential machine interference with balking, reneging, state-dependent, spares and an additional server for longer queues". *IJMMS*, 27, 737-747, 2001.
- BUNDAY, B. D., "An Introduction to Queueing Theory". John Wiley, New York, 1996.
- GROSS, D. and HARRIS, C. M., "Fundamentals of Queueing Theory". John Wiley, New York, 1974.
- GUPTA, S. K., "Queues with hyper - Poisson input and exponential service time distribution with state dependent arrival and service rates". *Oper. Res.*, 15, 847-856, 1967.
- JAIN, M. and RAKHEE, S. M., "N-policy for a machine repair system with spares and reneging". *Appl. Math. Modelling*, 28, 513-531, 2004.
- KLEINROCK, L., "Queueing Systems". Vol.1, John Wiley, New York, 1975.
- MEDHI, J., "Stochastic Models in Queueing Theory". Academic Press, New York, 1991.
- MORSE, P. M., "Queues, Inventories and Maintenance". John Wiley, New York, 1958.
- PEARN, W. L. and CHANG, Y. C., "Optimal management of the N-policy $M/E_k/1$ queueing system with a removable service station: A sensitivity investigation". *Comp. Oper. Res.*, 31, 1001-1015, 2004.
- SADLAM, V. and TORUM, H., "On optimization of stochastic service system with two heterogeneous channels". *Inter. J. Appl. Math.*, 16, 131-137, 2004.
- SHAWKY, A. I., "The single-server machine interference model with balking, reneging and an additional server for longer queues". *Microelectron. Reliab.*, 37, 355-357, 1997.
- SHAWKY, A. I., "The machine interference model: $M/M/C/K/N$ with balking, reneging and spares". *Opsearch*, 37, 25-35, 2000.

- SHAWKY, A. I., "An interarrival hyperexponential machine interference model: $H_r/M/c/k/N$ with balking and reneging". Comm. Korean Math. Soc.,16, 659-666, 2001.
- SHAWKY, A. I., "The service Erlangian machine interference model: $M/E_r/1/k/N$ with balking and reneging". J. Appl. Math.& Computing, 18, 431-439, 2005
- SHAWKY, A. I. and EL - PAOUMY, M. S., "The interarrival hyperexponential queues: $H_k/M/c/N$ with balking and reneging". Stochastics and Stochastics Reports, 69, 67-76, 2000.
- SHAWKY, A. I. and EL - PAOUMY, M. S., "The truncated hyper-Poisson queues: $H_k/M/2/N$ with balking, reneging and heterogeneous servers". O. R. Transactions, 4, 66-75, 2000.
- SHAWKY, A. I. and EL - PAOUMY, M. S., "The truncated hyperexponential service queues: $M/H_k/1/N$ with balking and reneging". Far East J. Theo. Stat., 16, 73-80, 2002.
- WHITE, J. A., SCHMIDT, J. W. and Bennett, G. K., "Analysis of Queueing Systems". Academic Press, New York, 1975.

KUYRUĞA DAHİL OLMAMA VE KUYRUĞU TERK ETME İLE BUDANMIŞ GELİŞLERARASI ERLANG KUYRUK MODELİ $E_r/M/C/K$ NİN ANALİTİK ÇÖZÜMÜ

ÖZET

Bu makalede kuyruğa dahil olmama ve kuyruğu terk etme ile budanmış gelişlerarası Erlang kuyruk modeli $E_r/M/c/k$ nin r, c ve k nin genel değerleri için analitik çözümü ele alınmıştır. Çalışmada dikkate alınmış olan kuyruk disiplini ilk gelen ilk hizmet alınır (FIFO) şeklindedir. Daha evvelce yayınlanmış sonuçların, mevcut çalışmanın özel durumları olduğu da ayrıca gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Budanmış gelişlerarası Erlang kuyruk modeli, Durağan durum olasılığı, Kuyruğa dahil olmama, Kuyruğu terk etme.*

DUYURU PANOSU *

Q2006 KONFERANSI

Tarih : 24 Nisan-26 Nisan 2006
Yer : Wales, U.K.
İletişim : IASS
Website : www.statistics.gov.uk/events/q2006

15.İSTATİSTİK ARAŞTIRMA SEMPOZYUMU 2006(İAS 2006)- 'Veri Kalitesi ve Güvenilirliği'

Tarih : 11 Mayıs- 12 Mayıs 2006
Yer : Devlet İstatistik Enstitüsü, Ankara/Türkiye
İletişim : Gönül Erdem
e-mail: sempozyum@die.gov.tr
www.die.gov.tr/ias_06/ias06.htm

İSTATİSTİK UYGULAMALARI KONFERANSI

Tarih : 17 Mayıs- 19 Mayıs 2006
Yer : İreland Cork, İrlanda
İletişim : Kingshuk Roy Choudhury
e-mail: kingshuk@stat.ucc.ie

21. ULUSLARARASI UZAYSAL EKONOMETRİ VE İSTATİSTİK

Tarih : 25 Mayıs-27 Mayıs 2006
Yer : Roma, İtalya
İletişim :
Website : <http://www.unich.it/conferencerome2006>

30. LEIES SEMİNERİ

Tarih : 1 Temmuz-2 Temmuz 2006
Yer : Lubliyana, Slovenya
İletişim : Information: Sheena Blair
e-mail: sheena.blair@cec.eu.int
Website : <http://forum.europa.eu.int/Public/irc/dsis/ceies/library>

**“PROBASTAT 2006: ULUSLARARASI OLASILIK VE İSTATİSTİK
KONFERANSI**

Tarih : 5 Temmuz-9 Temmuz 2006
Yer : Slovakya
İletişim :
e-mail : probastat@savba.sk
Website : <http://aiolos.um.savba.sk/viktor/probastat.html>

DÜZENLİ İSTATİSTİK VERİSİ VE İLGİLİ KONULARI KONFERANSI

Tarih : 15 Temmuz-17 Temmuz 2006
İletişim : Prof.N. Balakrishnan, McMaster University, Canada L8S 4Nk1
e-mail : arghami@math.um.ac.ir
Website: <http://osdr.um.ac.ir>

**BIOSTAT 2006: BİYOMETRİ VE İSTATİSTİK ARAŞTIRMACILARI
13.TOPLANTISI**

Tarih : 19 Temmuz-22 Temmuz 2006
Yer : Dubrovnik, Hırvatistan
İletişim : Ms. Vesna Hljuz Dobric
SRCE-University Computing Centre, University of Zagreb
Website: <http://iti.srce.hr/>

S4G: 6. ULUSLAR ARASI KONFERANS

Tarih : 26 Temmuz-29 Temmuz 2006
Yer : Prag, Çek Cumhuriyeti
İletişim : Viktor Benez
Radka Juzkova
e-mail : benes@karlin.mff.cuni.cz)
: radka.juzkova@svses.cz)
Website :
<http://training.creascience.com/product.info.php/cPath/24/products.id/87>

21. ULUSLARARASI İSTATİSTİKİ MODELLEME ÇALIŞTAYI

Tarih : 2 Temmuz-7 Temmuz 2006
Yer : Galway, İrlanda
İletişim : John Hinde
e-mail: john.hinde@nuigalway.ie
Website : www.nuigalway.ie/maths/TWSM2006

İSTATİSTİKÇİLERİN 26. AVRUPA TOPLANTISI

Tarih : 24 Temmuz-28 Temmuz 2006
Yer : Polonya
İletişim : Adam Jakubowski
Website : www-m4.mathematik.tu-muenchen.de/m4/erc

IFLS 2006 KONFERANSI

Tarih : 25 Temmuz-29 Temmuz 2006
Yer : Lubliyana, Slovenya
İletişim : e-mail: ifcs06@fdv.uni-li.si
Website : www.ifcs06.org

COMPSTAT 2006

Tarih : 28 Ağustos-1 Eylül 2006
Yer : Roma, İtalya
İletişim : e-mail: compstat2006@uniroma1.it
Website : <http://w3.uniroma1.it/compstat2006>

İSTATİSTİKÇİLERİN 26. AVRUPA TOPLANTISI

Tarih : 4 Eylül-5 Eylül 2006
Yer : Ottawa, Kanada
İletişim : ISI Permanent Office, 428 Prinses Beatrixlaan, P.O. Box 950, 2270 AZ
the Netherlands
e-mail: smha@cbs.nl
Website : <http://isi.cbs.nl/events/briefing.htm>

IAOS 2006 KONFERANSI

Tarih : 6 Eylül -8 Eylül 2006
Yer : Ottawa, Kanada
İletişim :
Website : www.stats.govt.nz/iaos

KRALİYET İSTATİSTİK DERNEĞİNİN 2006 ULUSLARARASI KONFERANSI

Tarih : 10 Eylül -14 Eylül 2006
Yer : Belfast, İngiltere
İletişim : Paul Gentry
e-mail: conference@rss.org.uk
Website : www.rss.org.uk/rss2006

UYGULAMA İSTATİSTİK 2006

Tarih : 17 Eylül -20 Eylül 2006
Yer : Bled, Slovenya
İletişim : Andrej Blejec, Chair of AS2006 LOC
e-mail: info.AS@nib.si
Website : <http://ablejec.nib.si/AS2006>

KRALİYET İSTATİSTİK DERNEĞİNİN 2006 ULUSLARARASI KONFERANSI

Tarih : 26 Eylül - 29 Eylül 2006
Yer : Ukrayna
İletişim : Viktor Lysiuk
e-mail: lysiuk@univ.kiev.ua
Website : <http://www.spie.kiev.u/spo>

*Kaynak: International Statistical Institute (ISI) Web sitesi
<http://www.cbs.nl/isi/calendar.htm#TOP>

METİN HAZIRLAMA KALIBI

1. Araştırma, yazılar, kaynaklar, tablo ve şekiller ile birlikte en az 2 en çok 15 sayfa olmalıdır.
2. Gönderilecek araştırma PC ortamında Word 7.0 veya daha yukarı versiyonları ile Times New Roman font ortamında yazılmalıdır.
3. Araştırma A4 normundaki beyaz kağıda sol ve üstten 3,5 cm, sağ ve alttan 2,5 cm boşluk bırakılarak yazılmalıdır.
4. Araştırmanın türkçe ve ingilizce başlıkları metne uygun olmalıdır. Araştırmanın başlıkları büyük harflerle yazılmalı ve Özet büyük harflerle ortalı, 12 punto harf büyüklüğünde koyu olarak yazılmalıdır.
5. Yazarın adı ve soyadı, ünvan belirtilmeden başlığın iki satır altından ortalı olarak ad küçük, soyad büyük harfli olarak yazılmalıdır. İki veya daha fazla yazar olması durumunda, yan yana kolon (sütun) açılarak yazılmalıdır.
6. Yazarın adresi dip not şeklinde verilerek yıldız(*) ile gösterilmelidir. Birden fazla yazar söz konusu olduğunda, yazışmaların hangi yazar ve adresle yapılacağını ise parantez içinde (haberleşme adresi) yazılarak verilmelidir. Dip not vermek gerektiğinde de yıldız(*) kullanılmalıdır. Yazar(lar)ın adresi ve dip not ilgili sayfanın altına Times New Roman font ve 10 punto harf büyüklüğü kullanılarak yazılmalıdır.
7. Çalışma herhangi bir kurumun desteği ile gerçekleştirilmişse, kurumun adı ilk sayfa altında dip not olarak yazılmalıdır.
8. Araştırma bölümleri; Türkçe özet, Araştırma metni, Kaynaklar ve İngilizce özet (Abstract) şeklinde olmalıdır.
 - Türkçe özet, yazar isminden sonra üç satır boşluk bırakılarak yazılır. 200 kelimeyi geçmeyecek şekilde soldan 5,5 cm ve sağdan 4,5 cm boşluk bırakılarak 11 punto harf büyüklüğü kullanılarak, italik olarak yazılmalıdır.
 - Araştırma metni 12 punto harf büyüklüğü kullanılarak bir satır aralığında ve paragraflar arasında bir satır boşluk bırakılmalıdır. Paragraflar ve formüller bir tab içeriden yazılmalıdır. Birinci derece bölüm başlıkları büyük harfle, ikinci derece alt bölüm başlıklarında her sözcüğün ilk harfi büyük, diğerleri küçük harfle, üçüncü ve daha alt derece alt bölüm başlıklarının yalnız ilk harfi büyük, diğerleri küçük harfle yazılmalıdır. Bütün bölüm başlıkları koyu olarak yazılmalıdır, tablo ve şekillere başlık ve sıra numarası bölüm numarası içermeksizin verilir. Tablo ve şekil başlık ve sıra numaraları yarım satır aralıklı tablolarda üstte, şekillerde altta yer almalıdır.
 - Kaynaklara göndermeler metin içinde açılan ayraçlarla yapılmalıdır. Ayraç içindeki sıra şöyledir: Yazar(lar)'ın soyadı ve kaynağın yılı. Örneğin; ...kanıtlanmıştır (Rao, 1974)., ...(Grossman ve Weiss, 1983)., ...(Baumal, 1952; Tobin, 1956)., ... (Winebrake vd, 1995)., ...Rao (1974) kanıtlamıştır. vb. şeklinde gösterilmelidir.

Çalışmada gönderme yapılan bütün kaynaklar, kaynaklar listesinde belirtilmeli; çalışmada yararlanılmayan kaynaklar, kaynaklar listesinde yer almamalıdır. Kaynaklar araştırma metninin sonunda yazarının soyadına göre alfabetik sırada ve 11 puntoda

kaynaklar arasında bir satır boşluk bırakılarak yazılmalıdır. Bunların yazım şekli aşağıda gösterildiği gibi standart formda olmalıdır:

Örnekler:

Kitap

BRUBAKER, S. (1967), *Trends in the World Aluminium Industry*, Baltimore, Maryland: John Hopkins Press.

Araştırma

RAO, J.N.K. (1994), *Estimating Totals and Distribution Function Using Auxiliary Information at the Estimation Stage*, Journal of Official Statistic, 10, 153 – 165.

Derleme

ARTHUR, W.B. (1988), *Competing Technologies: An Overview*, G.Dosi, C. Freeman, R. Nelson, G. Silverberg ve L. Soete (der.), *Technical Change and Economic Theory* içinde Londra:Pinter, 590-607.

İnternet

SUTCLIFFE, M.J., Wo, Z.G. and OSWALD, R.E. (1996). *Three-dimensional models of non-NMDAglutamaterceptors*, Erişim: [http://neon.chem.le.ac.uk/cornell/Sutcliffe_BJ/Sutcliffe_BJ.html].Erişim Tarihi: 22.12.1996

- Araştırmanın İngilizce dilde özeti araştırmanın sonunda verilmelidir. Araştırmanın İngilizce adı üstten 2 satır boşluk bırakılarak ortalı, her sözcüğün ilk harfi büyük, 14 punto harf büyüklüğünde, Abstract büyük harflerle ortalı, 12 punto harf büyüklüğünde koyu olarak yazılmalıdır. İngilizce özet soldan 5,5 cm ve sağdan 4,5 cm boşluk bırakılarak 200 kelimeyi geçmeyecek şekilde 11 punto harf büyüklüğünde italik olarak araştırmanın İngilizce adından sonra 3 satır boşluk bırakılarak yazılmalıdır.
- Anahtar kelimeler (Key words) her iki özeti bir satır altına, anahtar kelimeler ve key words koyu italik olarak yazılmalıdır.

9. Matematik simge ve formüllerin yazımında aşağıdaki hususlara dikkat edilir:

- Simgelerin ayırt edilmesi önemlidir. Özellikle büyük ve küçük harfler, düz ve koyu harfler, Klasik Yunan ve Latin harfleri, alt ve üst indisler, sıfır (0) rakamı ve O harfi, Bir (1) rakamı ve l (l) harfi ayırt edilebilmelidir. Çoklu indislerden sakınılmalıdır.
- Denklemler word, standart (default) ölçülerde 1 tab (1,27 cm) içerden ve numara vermek gerekirse bölüm numarasını içermeksizin en sağına parantez içinde yazılmalıdır. Uzun formüller metin içinde yer almamalıdır.
- Kesirler, metin içinde (/) işareti ile gösterilmelidir.
- Karmaşık ifadeler içeren denklemler olabildiğince kısaltma simgeleri kullanılarak yazılmalıdır.
- İç içe çoklu ayraçlar aynı formülde yer aldığında, sıra düzeni örneğin $\{[(0)]\}$ biçiminde olmalıdır.

10. Araştırmanın Türkçe yazım kurallarına uygun olması yazarın sorumluluğu altındadır.

Sıralı Küme Örneklemesinde Yardımcı Değişken Kullanılarak Yığın Ortalamasının Tahmini
Estimation Of The Population Mean Using Concomitant Variable In Ranked Set Sampling

Yaprak Arzu ÖZDEMİR..... 1

Veri Zarflama Analizi'nde Karar Verme Birimlerinin Sıralanması İçin Sınıflandırma Kriteri Tabanlı Yeni Bir Model
A New Model Based On Classification Criteria For Ranking Decision Making Units In Data Envelopment Analysis

Hasan BAL
H.Hasan ÖRKÇÜ..... 15

Durağan Zaman Serilerinin Yapay Sinir Ağları İle Tahmininde Girdi Nöronu Ve Gizli Nöron Sayısının Belirlenmesi
Determining Input And Hidden Neurons Numbers In Artificial Neural Networks For Forecasting Stationary Time Series

Coşkun HAMZAÇEBİ
Fevzi KUTAY..... 27

EKK Ve Bazı Dayanımlı Tahmincilerin Derinliklerinin Kirlenmeye Karşı Değişimlerinin İncelenmesi
A Study For Examining The Behaviors Of Regression Depths Of Ols And Some Robust Regression Methods Under Contamination

Enis SİNİKSİRAN
M.Hakan SATMAN
Y.Bariş ALTAYLIGİL..... 37

Sürekli Değişkenler İçeren Grafikselle Modellerde Kullanılan Sapma Ve F-İstatistiklerinin Karşılaştırılması
Comparison Of Deviance And F Statistics Used In Graphical Models Contains Continuous

Fikri GÖKPİNAR..... 55

*Analytical Solution Of The Truncated Interarrival Erlangian Queue : $E_r/M/C/K$
With Balking And Reneging*

Kuyruğa dahil Olmama ve Kuyruğa Terk Etme ile Budanmış Gelişlerarası Erlang Kuyruk Modeli $E_r/M/C/K$ 'nın Analitik Çözümü

A. I. SHAWKY
A.A. BADAWY..... 65